

## **Werk**

**Verlag:** Izd. Kazanskogo universiteta; Совет казанского университета

**Ort:** Kazan

**Kollektion:** RusDML; Mathematica

**Werk Id:** PPN509860087\_0017

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN509860087\\_0017|LOG\\_0011](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN509860087_0017|LOG_0011)

## **Terms and Conditions**

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## **Contact**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

УДК 517.95

О СТРУКТУРНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ  
ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА

А. В. Глазов, А. В. Костерин

Рассмотрим задачу Гильберта для системы уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M(y) \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -N(y) \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1)$$

Функции  $M$ ,  $N$  положительны, отграничены от нуля и бесконечности и обладают непрерывными первыми производными. Область  $\Omega$ , в которой ищется решение уравнений (1), односвязна и ограничена, а кривизна ее границы  $\Gamma$  — непрерывная функция дуги  $s$ . На  $\Gamma$  выполняется краевое условие

$$a\varphi - b\psi = f, \quad (2)$$

где  $a, b \in C^1(\Gamma)$ . Введем функцию  $u(x, y)$  соотношениями

$$\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \psi = -\frac{1}{N} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3)$$

При этом система (1) сводится к уравнению

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{M} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{N} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad (4)$$

а граничное условие (2) преобразуется к виду

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b}{N} \frac{\partial u}{\partial y} = f. \quad (5)$$

Далее, будем предполагать, что функции  $a(s)$  и  $b(s)$  удовлетворяют следующим условиям:

$$a^2 + b^2 \neq 0, \quad an_1 + \frac{bn_2}{N} > 0, \quad (6)$$

где  $(n_1, n_2)$  — единичный вектор внешней к  $\Omega$  нормали. В силу (6) соответствующая однородная краевая задача (4), (5) не может иметь отличного от постоянной решения [1, с. 134]. Таким образом, задача Гильберта (1), (2) эквивалентна задаче о косої производной (4), (5).

Покажем, что приближенное решение последней может быть найдено методом наименьших квадратов [2, с. 453—459] с использованием аппарата  $R$ -функций [3]. Для этого сначала сведем задачу (4), (5) к случаю однородных граничных условий. Обычным образом [3, с. 183—189] введем определенные в  $\Omega$  операторы

$$D = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}, \quad T = \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y},$$

$$K = \alpha D + \beta T,$$

где  $\omega$  — нормализованное до первого порядка уравнение границы  $\Gamma$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  — определенные в  $\bar{\Omega}$  функции, совпадающие на  $\Gamma$  с  $\left(-a \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{b}{N} \frac{\partial \omega}{\partial y}\right)$  и  $\left(-\frac{b}{N} \frac{\partial \omega}{\partial x} + a \frac{\partial \omega}{\partial y}\right)$  соответственно, причем  $\alpha \neq 0$  в  $\Omega$ .

Непосредственная проверка показывает, что функция

$$v = u - \frac{\omega F}{\alpha},$$

где  $F(x, y) \in C^2(\Omega)$ ,  $F|_{\Gamma} = f$ , есть решение краевой задачи

$$Lv = -L\left(\frac{\omega F}{\alpha}\right) = g, \quad Kv|_{\Gamma} = 0. \quad (7)$$

Структуру решения задачи (7) [3, с. 204] запишем в виде

$$S(c, \Phi, \Psi) = c + \Phi + \frac{\omega}{K(\omega) + \omega} (\omega \Psi - K\Phi) = c + S_0,$$

где  $\Phi(x, y)$  и  $\Psi(x, y)$  — произвольные функции из  $C^2(\bar{\Omega})$ . Постоянная  $c$  определяется из соотношения

$$\iint_{\Omega} S(x, y) dx dy = (S, 1) = 0, \quad (8)$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $L_2(\Omega)$ .

Для построения приближенного решения задачи (7) можно взять полиномы  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  и найти их коэффициенты методом наименьших квадратов [2, с. 453—459], то есть из условия минимума квадрата невязки

$$\epsilon = \iint_{\Omega} [LS(c, P, Q) - g]^2 dx dy.$$

Для сходимости метода наименьших квадратов необходимо, чтобы линейное множество  $LS(c, P, Q)$ ,  $\forall P, Q$  было всюду плотно в  $L_2(\Omega)$ , иными словами, необходима  $L$  — полнота структуры решения задачи (7).

**Теорема.** Множество  $LS(c, PQ)$ ,  $\forall P, Q$  всюду плотно в  $L_2(\Omega)$ .

**Доказательство.** Поскольку множество  $M$  финитных в  $\Omega$  функций плотно в  $L_2(\Omega)$  [2, с. 44], то достаточно показать, что из равенства  $(LS, \xi) = 0$ ,  $\forall P, Q$  следует  $\xi = 0$ ,  $\xi \in M$ . По третьей формуле Грина [2, с. 69] имеем

$$(LS, \xi) = (S_0, L\xi) = (S_0, \eta) = 0, \forall P, Q.$$

В силу единственности решения задачи Дирихле  $L\xi = \eta$ ,  $\xi|_{\Gamma} = 0$ , достаточно показать, что  $\eta = 0$ .

Интегрируя по частям, будем иметь

$$\begin{aligned} (S_0, \eta) &= \left( P + \lambda Q + \mu \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial P}{\partial y}, \eta \right) = \\ &= (Q, \lambda\eta) + (P, R\eta) = 0, \forall P, Q. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\omega^2}{K(\omega) + \omega}, \quad \mu = \frac{\lambda}{\omega} \left( \alpha \frac{\partial \omega}{\partial x} - \beta \frac{\partial \omega}{\partial y} \right), \quad \nu = \frac{\lambda}{\omega} \left( \alpha \frac{\partial \omega}{\partial y} + \beta \frac{\partial \omega}{\partial x} \right), \\ R\eta &= \eta - \frac{\partial(\mu\eta)}{\partial x} - \frac{\partial(\nu\eta)}{\partial y}, \end{aligned}$$

Вследствие (9) и теоремы Вейерштрасса о полноте множества многочленов в  $C(\bar{\Omega})$  имеем  $\eta = 0$ .

Доказанная теорема позволяет построить методом наименьших квадратов последовательность приближенных решений  $(v_n)$  задачи (7) такую, что  $\|Lv_n - g\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . При этом возникает вопрос, сходится ли последовательность  $(v_n)$  к  $v$ , и если да, то в каком смысле. Положительный ответ на этот вопрос следует из теории общих краевых задач для эллиптических уравнений [4, с. 226, лемма 6.3].

Действительно, в силу (8) в нашем случае имеет место оценка

$$\|v_n - v\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \gamma \|Lv_n - g\|_{L_2(\Omega)},$$

$\gamma > 0$  — постоянная.

Соотношения (3) показывают, что соответствующие  $(v_n)$  последовательности функций  $(\varphi_n)$  и  $(\psi_n)$  сходятся к точному решению задачи (1), (2) по норме пространства Соболева  $W_2^1(\Omega)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М., „Наука“, 1966.
2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., „Наука“, 1970.
3. Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физике. Киев, „Наукова думка“, 1974.
4. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, „Наукова думка“, 1965.

*Доложено на семинаре 26 января 1979 г.*