КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 17 *Труды семинара по краевым задачам* *1980*

УДК 517.95

О СТРУКТУРНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА

А. В. Глазов, А. В. Костерин

Рассмотрим задачу Гильберта для системы уравнений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = M(y)\,\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -N(y)\,\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{1}$$

Функции M, N положительны, отграничены от нуля и бесконечности и обладают непрерывными первыми производными. Область Ω, в которой ищется решение уравнений (1), односвязна и ограничена, а кривизна ее границы Γ — непрерывная функция дуги s. На Γ выполняется краевое условие

$$a\varphi - b\psi = f, \tag{2}$$

где $a,\ b \in C^1(\Gamma)$. Введем функцию $u(x,\ y)$ соотношениями

$$\varphi = \frac{\partial u}{\partial x},\quad \psi = -\frac{1}{N}\,\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{3}$$

При этом система (1) сводится к уравнению

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{M}\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{N}\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{4}$$

а граничное условие (2) преобразуется к виду

$$a\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b}{N}\,\frac{\partial u}{\partial y} = f. \tag{5}$$

Далее, будем предполагать, что функции $a(s)$ и $b(s)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$a^2 + b^2 \neq 0,\ an_1 + \frac{bn_2}{N} > 0, \tag{6}$$

где (n_1, n_2) — единичный вектор внешней к Ω нормали. В силу (6) соответствующая однородная краевая задача (4), (5) не может иметь отличного от постоянной решения [1, с. 134]. Таким образом, задача Гильберта (1), (2) эквивалентна задаче о косой производной (4), (5).

Покажем, что приближенное решение последней может быть найдено методом наименьших квадратов [2, с. 453—459] с использованием аппарата R-функций [3]. Для этого сначала сведем задачу (4), (5) к случаю однородных граничных условий. Обычным образом [3, с. 183—189] введем определенные в Ω операторы

$$D = -\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}, \quad T = \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y},$$

$$K = \alpha D + \beta T,$$

где ω — нормализованное до первого порядка уравнение границы Γ; α и β — определенные в $\overline{\Omega}$ функции, совпадающие на Γ с $\left(-a\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{b}{N}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)$ и $\left(-\frac{b}{N}\frac{\partial\omega}{\partial x} + a\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)$ соответственно, причем $\alpha \neq 0$ в Ω.

Непосредственная проверка показывает, что функция

$$v = u - \frac{\omega F}{\alpha},$$

где $F(x, y) \in C^2(\Omega)$, $F|_\Gamma = f$, есть решение краевой задачи

$$Lv = -L\left(\frac{\omega F}{\alpha}\right) = g, \quad Kv|_\Gamma = 0. \tag{7}$$

Структуру решения задачи (7) [3, с. 204] запишем в виде

$$S(c, \Phi, \Psi) = c + \Phi + \frac{\omega}{K(\omega) + \omega}(\omega\Psi - K\Phi) = c + S_0,$$

где $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ — произвольные функции из $C^2(\overline{\Omega})$. Постоянная c определяется из соотношения

$$\iint_\Omega S(x, y)\,dxdx = (S, 1) = 0, \tag{8}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Для построения приближенного решения задачи (7) можно взять полиномы $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и найти их коэффициенты методом наименьших квадратов [2, с. 453—459], то есть из условия минимума квадрата невязки

$$\varepsilon = \iint_\Omega [LS(c, P, Q) - g]^2\,dxdy.$$

Для сходимости метода наименьших квадратов необходимо, чтобы линейное множество $LS(c,\ P,\ Q)$, $\forall P,\ Q$ было всюду плотно в $L_2(\Omega)$, иными словами, необходима L — полнота структуры решения задачи (7).

Теорема. Множество $LS(c,\ PQ)$, $\forall P,\ Q$ всюду плотно в $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Поскольку множество M финитных в Ω функций плотно в $L_2(\Omega)$ [2, с. 44], то достаточно показать, что из равенства $(LS,\ \xi) = 0$, $\forall P,\ Q$ следует $\xi = 0$, $\xi \in M$. По третьей формуле Грина [2, с. 69] имеем

$$(LS,\ \xi) = (S_0,\ L\xi) = (S_0,\ \eta) = 0,\ \forall P,\ Q.$$

В силу единственности решения задачи Дирихле $L\xi = \eta$, $\xi|_\Gamma = 0$, достаточно показать, что $\eta = 0$.

Интегрируя по частям, будем иметь

$$(S_0,\ \eta) = \left(P + \lambda Q + \mu \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial P}{\partial y},\ \eta\right) =$$

$$= (Q,\ \lambda\eta) + (P,\ R\eta) = 0,\ \forall P,\ Q. \qquad (9)$$

Здесь

$$\lambda = \frac{[illegible]\ \omega^2}{K(\omega) + \omega},\quad \mu = \frac{\lambda}{\omega}\left(\alpha \frac{\partial \omega}{\partial x} - \beta \frac{\partial \omega}{\partial y}\right),\quad \nu = \frac{\lambda}{\omega}\left(\alpha \frac{\partial \omega}{\partial y} + \beta \frac{\partial \omega}{\partial x}\right),$$

$$R\eta = \eta - \frac{\partial(\mu\eta)}{\partial x} - \frac{\partial(\nu\eta)}{\partial y},$$

Вследствие (9) и теоремы Вейерштрасса о полноте множества многочленов в $C(\bar{\Omega})$ имеем $\eta = 0$.

Доказанная теорема позволяет построить методом наименьших квадратов последовательность приближенных решений (v_n) задачи (7) такую, что $\|Lv_n - g\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $n \to \infty$. При этом возникает вопрос, сходится ли последовательность (v_n) к v, и если да, то в каком смысле. Положительный ответ на этот вопрос следует из теории общих краевых задач для эллиптических уравнений [4, с. 226, лемма 6.3].

Действительно, в силу (8) в нашем случае имеет место оценка

$$\|v_n - v\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant \gamma \|Lv_n - g\|_{L_2(\Omega)},$$

$\gamma > 0$ — постоянная.

Соотношения (3) показывают, что соответствующие (v_n) последовательности функций (φ_n) и (ψ_n) сходятся к точному решению задачи (1), (2) по норме пространства Соболева $W_2^1(\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М., „Наука“, 1966.
2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., „Наука“, 1970.
3. Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физике. Киев, „Наукова думка“, 1974.
4. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, „Наукова думка“, 1965.

Доложено на семинаре 26 января 1979 г.