

Werk

Verlag: Izd. Kazanskogo universiteta; Совет казанского университета

Ort: Kazan

Kollektion: RusDML; Mathematica

Werk Id: PPN509860087_0017

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN509860087_0017|LOG_0012

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

УДК 532.5

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ О РАСТЕКАНИИ СТРУИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

И. Л. Гуревич

Рассматривается плоская струя тяжелой идеальной несжимаемой жидкости, вытекающая из щели, образованной полуплоскостями BA и $B'A$, на горизонтальную плоскость CC' . Предполагается, что течение симметрично относительно оси y , и известны расход $2Q$, ускорение силы тяжести g , скорость v_0 в точках B, B' , и параметры $\alpha, L = -y(D)$ (рис. 1).

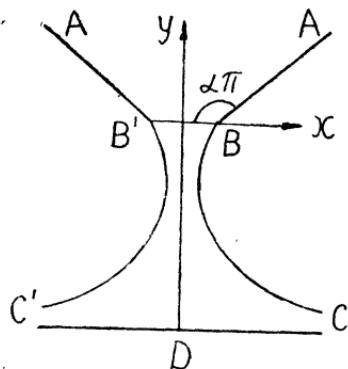


Рис. 1.

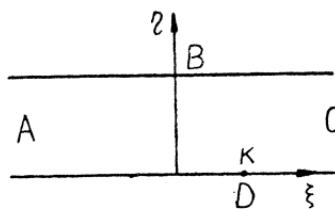


Рис. 2.

Во всех известных работах, где исследуется разрешимость задач со свободными границами бесконечной протяженности, имеющими горизонтальные асимптоты, условием существования решения является то, что местное число Фруда достаточно велико на всей свободной границе (см., например, [1—3]). Мы будем использовать лишь то, что число Фруда достаточно велико в точках C, C' , что равносильно достаточной малости $1/L$.

Пусть правой половине течения соответствует полоса $0 \leq \eta \leq \pi$ в плоскости параметрического переменного $\zeta = \xi + i\eta$ (рис. 2), а w — комплексный потенциал, $z = x + iy$. Тогда справедливы соотношения

$$w = \frac{Q}{\pi} \zeta, \quad \frac{dw}{dz} = v_0 f(k, \zeta) e^{i\omega(\zeta)},$$

$$f(k, \zeta) = \left(\frac{\nu(\zeta) - 1}{\nu(\zeta) + 1} \right)^{\alpha-1/2} \left(\frac{\nu(\zeta) - \nu(k)}{\nu(\zeta) + \nu(k)} \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где $\nu(\zeta) = (e^\zeta + 1)^{1/2}$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tau &= \operatorname{Re} \omega, \quad \mu = \operatorname{Im} \omega, \quad r(k, \zeta) = -\arg f(k, \zeta), \\ \varphi(k, \zeta) &= r(k, \zeta) + \mu(k, \zeta), \quad u(\xi) = d\tau(\xi + i\pi)/d\xi \quad (\xi \geq 0), \\ p(k, \zeta) &= |f(k, \zeta)|^{-1} e^{-\tau(\zeta)}, \quad \varepsilon = Qg\pi^{-1}v_0^{-3}, \quad \lambda = Lv_0\pi Q^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Используя представление для $d\omega/dz$ и производя интегрирование по частям в формуле Келдыша — Седова для полосы, получим

$$\begin{aligned} \tau(\xi + i\pi) &= \int_0^\xi u(t) dt, \quad \omega(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty u(t) \ln \frac{x(t) - i\nu(\zeta)}{x(t) + i\nu(\zeta)} dt, \\ \mu(\xi + i\pi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty u(t) \ln \left| \frac{x(t) + x(\xi)}{x(t) - x(\xi)} \right| dt, \end{aligned} \quad (3)$$

где $x(\zeta) = (e^\zeta - 1)^{1/2}$.

Из уравнения Бернулли, равенства $y(D) = -L$ и (1), (2) вытекает

$$u(\xi) = \varepsilon \exp[-3\tau(\xi + i\pi)] \sin \varphi(k, \xi + i\pi), \quad (4)$$

$$\lambda = \int_0^k p(k, \xi) d\xi + \int_0^\pi p(k, i\eta) \cos \varphi(k, i\eta) d\eta. \quad (5)$$

Перепишем (5) в виде

$$k = \left[\int_0^1 p(k, kt) dt \right]^{-1} \left[\lambda - \int_0^\pi p(k, i\eta) \cos \varphi(k, i\eta) d\eta \right]. \quad (6)$$

Соотношения (4), (6) с учетом (1) — (3) образуют систему уравнений относительно функции $u(\xi)$ и параметра k .

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi), \quad F(\varphi) = 0 \quad (\varphi < 0, \varphi > \pi), \quad k^* = \max(0, k), \\ \Phi(\varphi, \xi, N, C, \beta) &= F(\varphi) \quad (0 \leq \xi \leq N), \quad \Phi(\varphi, \xi, N, C, \beta) = \\ &= \inf [F(\varphi), Ce^{-\beta\xi}] \quad (\xi > N, C > 0, 0 < \beta < 1/2). \end{aligned}$$

Заменим Σ системой Σ^* :

$$u(\xi) = \varepsilon \exp[-3\tau(\xi + i\pi)] \Phi[\varphi(k, \xi + i\pi), \xi, N, C, \beta], \quad (7)$$

$$k = \left[\int_0^1 p(k, kt) dt \right]^{-1} \left[\lambda - \int_0^\pi p(k^*, i\eta) \cos \varphi(k, i\eta) d\eta \right]. \quad (8)$$

Пусть H — пространство функций, кусочно-непрерывных на $[0, +\infty]$, допускающих конечный разрыв при $\xi = N$, R — числовая ось. Пусть T — преобразование $H \times R$ в себя, действующее следующим образом. Берем $\{u_1(\xi), k_1\} \in H \times R$; используя (1) — (3) с $u = u_1$, $k = k_1$, находим u_2 из (7); затем, используя (1) — (3) с $u = u_2$, $k = k_1$, находим k_2 из (8). Оператор T вполне непрерывен в $H \times R$ (это показывается аналогично [1]).

Пусть $\{u(\xi), k\}$ — решение системы Σ^* , $1/2 \leq \alpha \leq 1$. Из (7) и определения Φ , φ вытекает, что $u(\xi) = d\varphi/d\eta \geq 0$, и с помощью принципа максимума легко показать (см. [4]), что $0 \leq \varphi(\xi + i\pi) \leq \pi$ при $\xi \geq 0$. Поэтому $F(\varphi) = \sin \varphi$. Из $u(\xi) \geq 0$ и принципа максимума получаем

$$0 \leq \tau(\zeta) \leq \tau(+\infty). \quad (9)$$

В силу (7), (9)

$$u(\xi) \leq \varepsilon. \quad (10)$$

Используя (9), получим при $\xi \geq 0$

$$|d(k, \xi)| \leq 4\sqrt{6}, \quad (11)$$

где

$$d(k, \xi) = \int_0^\pi p(k^*, \xi + i\eta) \cos \varphi(k, \xi + i\eta) d\eta.$$

Пусть $\lambda \geq 4\sqrt{6}$; тогда из (8), (11) вытекает $k \geq 0$, то есть $k^* = k$, и уравнение (6) удовлетворяется. Поэтому рассматриваемое решение Σ^* соответствует течению со свободной границей, отличающемуся от исследуемого лишь краевым условием при $\eta = \pi$, $\xi > N$. Пусть этому течению соответствует функция $z^*(\zeta) = x^* + iy^*$. Тогда $y^*(+\infty) = -L$, а из неравенства $\Phi(\varphi) \leq \sin \varphi$ и уравнения (7) вытекает

$$v_0^2 \exp[2\tau(\xi + i\pi)] \leq v_0^2 - 2gy^*(\xi + i\pi),$$

причем при $\xi \leq N$ имеет место строгое равенство. В частности, $v_0^2 \exp[2\tau(+\infty)] \leq v_0^2 + 2gL$, откуда с помощью (9) получим $\exp[\tau(\zeta)] \leq (1 + 2\varepsilon\lambda)^{1/2}$. Отсюда и из (8), (11) найдем

$$0 \leq k \leq (\lambda + 4\sqrt{6})(1 + 2\varepsilon\lambda)^{1/2}. \quad (12)$$

Неравенства (10), (12) — априорные оценки решений системы Σ^* . Соответствующее Σ^* преобразование T соединим гомотопно с тождественным преобразованием следующим

образом. Сначала заменим ε на $t\varepsilon$ ($0 \leq t \leq 1$), что соответствует переходу к течению невесомой жидкости. Затем заменим $f(k, \zeta)$ на $f^*e^{-i\pi}$ ($0 \leq \gamma \leq 1$), что соответствует дальнейшему переходу к течению невесомой жидкости, у которого все известные участки границы вертикальны. Легко проверить, что оценки (10), (12) остаются справедливыми для неподвижных точек обоих семейств преобразований, а при $t = \gamma = 0$ имеем тождественное преобразование $u = 0$, $k = \lambda$. Из теоремы Лере -- Шаудера вытекает, что система Σ^* имеет хотя бы одно решение.

Выясним, при каких условиях оно будет и решением системы Σ . Положим $N = (\lambda + 4\sqrt{6})(1 + 2\varepsilon\lambda)^{1/2}$. В силу (12) $N \geq k$, поэтому $y^*(N) = -L$. Так как ввиду (11) $y^*(N + i\pi) - y^*(N) = Qd(k, N)/(v_0\pi) \leq 4\sqrt{6}/(v_0\pi)$, то отсюда $y^*(N + i\pi) \leq -L + 4\sqrt{6}Q/(v_0\pi)$. Учитывая, что при $\xi \leq N$ будет

$$v_0^2 \exp[2\tau(\xi + i\pi)] = v_0^2 - 2gy^*(\xi + i\pi),$$

а $\tau(\xi + i\pi)$ -- неубывающая функция, получим при $\xi \geq N$ $\exp[\tau(\xi + i\pi)] \geq [1 + 2\varepsilon(\lambda - 4\sqrt{6})]^{1/2}$. Отсюда и из (7) будем иметь при достаточно большом C

$$u(\xi) < \varepsilon C [1 + 2\varepsilon(\lambda + 4\sqrt{6})]^{-3/2} e^{-\beta\xi}. \quad (13)$$

Справедливы следующие соотношения.

а) $r(k, \xi + i\pi) < Me^{-\xi}$ ($M > 0$);

б) если $u(\xi) < Ae^{-\beta\xi}$ ($0 < \beta < 1/2$), то $\mu(\xi + i\pi)$ из (3) удовлетворяет неравенству $\mu(\xi + i\pi) < 8\sqrt{2}A\pi^{-1}(1 - 4\beta^2)^{-1}e^{-\beta\xi}$ (его доказательство основано на использовании леммы 1 из [2]).

Учитывая, что $\varphi = r + \mu$, получим из а), б), (13)

$$\varphi(\xi + i\pi) < [M + 8\sqrt{2}\varepsilon C(1 + 2\varepsilon(\lambda - 4\sqrt{6}))^{-3/2}(1 - 4\beta^2)^{-1}]e^{-\beta\xi}. \quad (14)$$

Пусть выполняется неравенство

$$\lambda \geq 4\sqrt{6} + [(8\sqrt{2}\varepsilon)^{2/3} - 1](2\varepsilon)^{-1}.$$

Тогда, как видно из (14), можно так подобрать достаточно малое $\beta > 0$ и достаточно большое $C > 0$, что будет $\varphi(\xi + i\pi) < Ce^{-\beta\xi}$, то есть $\Phi = \sin \varphi$, и уравнение (4) удовлетворяется (а $u(\xi)$ непрерывна). Замечая, что правая часть неравенства относительно λ не превышает $44\sqrt{6}/9 \approx 11,98$, придем к следующему утверждению.

Теорема. При выполнении условий $1/2 \leq \alpha \leq 1$, $\varepsilon \geq 0$, $\lambda \geq 12$ существует хотя бы одно течение рассматриваемого типа с понижающейся свободной границей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gerber R. Sur les solutions des équations du mouvement avec surface libre d'un liquide pesant, — J. Math. pures et appl., v. 34, № 3, 1955.
2. Киселев О. М. О течении тяжелой жидкости в канале с криволинейным дном. — ПММ, т. 40, вып. 4, 1976.
3. Keady G., Norbury J. The jet from a horizontal slot under gravity. Proc. Royal Society of London, ser. A., v. 344, 1975.
4. Гуревич И. Л. О существовании и единственности одного течения тяжелой жидкости. — „Изв. вузов. Математика“, 1978, № 5.

Дано на семинаре 5 февраля 1979 г