КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 17 *Труды семинара по краевым задачам* *1980*

УДК 532.5

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ О РАСТЕКАНИИ СТРУИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

И. Л. Гуревич

Рассматривается плоская струя тяжелой идеальной несжимаемой жидкости, вытекающая из щели, образованной полуплоскостями BA и $B'A$, на горизонтальную плоскость CC'. Предполагается, что течение симметрично относительно оси y, и известны расход $2Q$, ускорение силы тяжести g, скорость v_0 в точках B, B', и параметры α, $L=-y(D)$ (рис. 1).

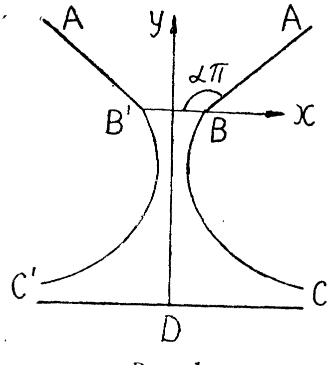

Рис. 1.

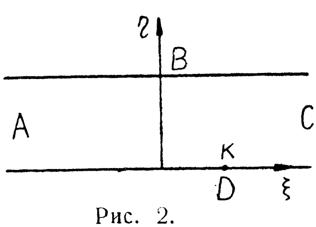

Рис. 2.

Во всех известных работах, где исследуется разрешимость задач со свободными границами бесконечной протяженности, имеющими горизонтальные асимптоты, условием существования решения является то, что местное число Фруда достаточно велико на всей свободной границе (см., например, [1—3]). Мы будем использовать лишь то, что число Фруда достаточно велико в точках C, C', что равносильно достаточной малости $1/L$.

Пусть правой половине течения соответствует полоса $0 \leqslant \eta \leqslant \pi$ в плоскости параметрического переменного $\zeta = \xi + i\eta$ (рис. 2), а w — комплексный потенциал, $z = x + iy$. Тогда справедливы соотношения

$$w = \frac{Q}{\pi}\zeta, \quad \frac{dw}{dz} = v_0 f(k, \zeta) e^{\omega(\zeta)},$$
$$f(k, \zeta) = \left(\frac{\nu(\zeta) - 1}{\nu(\zeta) + 1}\right)^{\alpha - 1/2} \left(\frac{\nu(\zeta) - \nu(k)}{\nu(\zeta) + \nu(k)}\right)^{1/2}, \tag{1}$$

где $\nu(\zeta) = (e^\zeta + 1)^{1/2}$. Введем обозначения

$$\tau = \operatorname{Re}\omega, \quad \mu = \operatorname{Im}\omega, \quad r(k, \zeta) = -\arg f(k, \zeta),$$
$$\varphi(k, \zeta) = r(k, \zeta) + \mu(k, \zeta), \quad u(\xi) = d\tau(\xi + i\pi)/d\xi \quad (\xi \geqslant 0), \tag{2}$$
$$p(k, \zeta) = |f(k, \zeta)|^{-1} e^{-\tau(\zeta)}, \quad \varepsilon = Qg\pi^{-1}v_0^{-3}, \quad \lambda = Lv_0\pi Q^{-1}.$$

Используя представление для dw/dz и производя интегрирование по частям в формуле Келдыша — Седова для полосы, получим

$$\tau(\xi + i\pi) = \int_0^\xi u(t)\,dt, \quad \omega(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty u(t) \ln\frac{\varkappa(t) - i\nu(\zeta)}{\varkappa(t) + i\nu(\zeta)}\,dt,$$
$$\mu(\xi + i\pi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty u(t) \ln\left|\frac{\varkappa(t) + \varkappa(\xi)}{\varkappa(t) - \varkappa(\xi)}\right| dt, \tag{3}$$

где $\varkappa(\zeta) = (e^\zeta - 1)^{1/2}$.

Из уравнения Бернулли, равенства $y(D) = -L$ и (1), (2) вытекает

$$u(\xi) = \varepsilon \exp[-3\tau(\xi + i\pi)] \sin\varphi(k, \xi + i\pi); \tag{4}$$
$$\lambda = \int_0^k p(k, \xi)\,d\xi + \int_0^\pi p(k, i\eta) \cos\varphi(k, i\eta)\,d\eta. \tag{5}$$

Перепишем (5) в виде

$$k = \left[\int_0^1 p(k, kt)\,dt\right]^{-1} \left[\lambda - \int_0^\pi p(k, i\eta)\cos\varphi(k, i\eta)\,d\eta\right]. \tag{6}$$

Соотношения (4), (6) с учетом (1) — (3) образуют систему уравнений относительно функции $u(\xi)$ и параметра k.

Введем следующие обозначения:

$$F(\varphi) = \sin\varphi \ (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi), \ F(\varphi) = 0 \ (\varphi < 0, \ \varphi > \pi), \ k^* = \max(0, k),$$
$$\Phi(\varphi, \xi, N, C, \beta) = F(\varphi) \ (0 \leqslant \xi \leqslant N), \ \Phi(\varphi, \xi, N, C, \beta) =$$
$$= \inf]F(\varphi), Ce^{-\beta\xi}] \ (\xi > N, \ C > 0, \ 0 < \beta < 1/2).$$

Заменим Σ системой Σ^*:

$$u(\xi) = \varepsilon \exp[-3\tau(\xi + i\pi)] \, \Phi[\varphi(k, \xi + i\pi), \xi, N, C, \beta], \tag{7}$$

$$k = \Big[\int_0^1 p(k, kt)\,dt\Big]^{-1} \Big[\lambda - \int_0^\pi p(k^*, i\eta)\cos\varphi(k, i\eta)\,d\eta\Big]. \tag{8}$$

Пусть H — пространство функций, кусочно-непрерывных на $[0, +\infty]$, допускающих конечный разрыв при $\xi = N$, R — числовая ось. Пусть T — преобразование $H \times R$ в себя, действующее следующим образом. Берем $\{u_1(\xi), k_1\} \in H \times R$; используя (1) — (3) с $u = u_1$, $k = k_1$, находим u_2 из (7); затем, используя (1) — (3) с $u = u_2$, $k = k_1$, находим k_2 из (8). Оператор T вполне пепрерывен в $H \times R$ (это показывается аналогично [1]).

Пусть $\{u(\xi), k\}$ — решение системы Σ^*, $1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Из (7) и определения Φ, φ вытекает, что $u(\xi) = d\varphi/d\eta \geqslant 0$, и с помощью принципа максимума легко показать (см. [4]), что $0 \leqslant \varphi(\xi + i\pi) \leqslant \pi$ при $\xi \geqslant 0$. Поэтому $F(\varphi) = \sin\varphi$. Из $u(\xi) \geqslant 0$ и принципа максимума получаем

$$0 \leqslant \tau(\zeta) \leqslant \tau(+\infty). \tag{9}$$

В силу (7), (9)

$$u(\xi) \leqslant \varepsilon. \tag{10}$$

Используя (9), получим при $\xi \geqslant 0$

$$|d(k, \xi)| \leqslant 4\sqrt{6}, \tag{11}$$

где

$$d(k, \xi) = \int_0^\pi p(k^*, \xi + i\eta)\cos\varphi(k, \xi + i\eta)\,d\eta.$$

Пусть $\lambda \geqslant 4\sqrt{6}$; тогда из (8), (11) вытекает $k \geqslant 0$, то есть $k^* = k$, и уравнение (6) удовлетворяется. Поэтому рассматриваемое решение Σ^* соответствует течению со свободной границей, отличающемуся от исследуемого лишь краевым условием при $\eta = \pi$, $\xi > N$. Пусть этому течению соответствует функция $z^*(\zeta) = x^* + iy^*$. Тогда $y^*(+\infty) = -L$, а из неравенства $\Phi(\varphi) \leqslant \sin\varphi$ и уравнения (7) вытекает

$$v_0^2 \exp[2\tau(\xi + i\pi)] \leqslant v_0^2 - 2gy^*(\xi + i\pi),$$

причем при $\xi \leqslant N$ имеет место строгое равенство. В частности, $v_0^2 \exp[2\tau(+\infty)] \leqslant v_0^2 + 2gL$, откуда с помощью (9) получим $\exp[\tau(\zeta)] \leqslant (1 + 2\varepsilon\lambda)^{1/2}$. Отсюда и из (8), (11) найдем

$$0 \leqslant k \leqslant (\lambda + 4\sqrt{6})(1 + 2\varepsilon\lambda)^{1/2}. \tag{12}$$

Неравенства (10), (12) — априорные оценки решений системы Σ^*. Соответствующее Σ^* преобразование T соединим гомотопно с тождественным преобразованием следующим образом. Сначала заменим ε на $t\varepsilon\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$, что соответствует переходу к течению невесомой жидкости. Затем заменим $f(k, \zeta)$ на $f^{\gamma}e^{-i\gamma\pi}\,(0 \leqslant \gamma \leqslant 1)$, что соответствует дальнейшему переходу к течению невесомой жидкости, у которого все известные участки границы вертикальны. Легко проверить, что оценки (10), (12) остаются справедливыми для неподвижных точек обоих семейств преобразований, а при $t = \gamma = 0$ имеем тождественное преобразование $u = 0$, $k = \lambda$. Из теоремы Лере — Шаудера вытекает, что система Σ^* имеет хотя бы одно решение.

Выясним, при каких условиях оно будет и решением системы Σ. Положим $N = (\lambda + 4\sqrt{6})\,(1 + 2\varepsilon\lambda)^{1/2}$. В силу (12) $N \geqslant k$, поэтому $y^*(N) = -L$. Так как ввиду (11) $y^*(N + i\pi) - y^*(N) = Qd\,(k, N)/(v_0\pi) \leqslant 4\sqrt{6}/(v_0\pi)$, то отсюда $y^*(N + i\pi) \leqslant -L + 4\sqrt{6}Q/(v_0\pi)$. Учитывая, что при $\xi \leqslant N$ будет

$$v_0^2 \exp[2\tau(\xi + i\pi)] = v_0^2 - 2gy^*(\xi + i\pi),$$

а $\tau(\xi + i\pi)$ — неубывающая функция, получим при $\xi \geqslant N$ $\exp[\tau(\xi + i\pi)] \geqslant [1 + 2\varepsilon(\lambda - 4\sqrt{6})]^{1/2}$. Отсюда и из (7) будем иметь при достаточно большом C

$$u(\xi) < \varepsilon C\,[1 + 2\varepsilon(\lambda + 4\sqrt{6})]^{-3/2} e^{-\beta\xi}. \tag{13}$$

Справедливы следующие соотношения.

а) $r(k, \xi + i\pi) < Me^{-\xi}\ (M > 0)$;

б) если $u(\xi) < Ae^{-\beta\xi}\ (0 < \beta < 1/2)$, то $\mu(\xi + i\pi)$ из (3) удовлетворяет неравенству $\mu(\xi + i\pi) < 8\sqrt{2}A\pi^{-1}(1 - 4\beta^2)^{-1}e^{-\beta\xi}$ (его доказательство основано на использовании леммы 1 из [2]).

Учитывая, что $\varphi = r + \mu$, получим из а), б), (13)

$$\varphi(\xi + i\pi) < [M + 8\sqrt{2}\varepsilon C(1 + 2\varepsilon(\lambda - 4\sqrt{6}))^{-3/2}(1 - 4\beta^2)^{-1}]\,e^{-\beta\xi}. \tag{14}$$

Пусть выполняется неравенство

$$\lambda \geqslant 4\sqrt{6} + [(8\sqrt{2}\varepsilon)^{2/3} - 1]\,(2\varepsilon)^{-1}.$$

Тогда, как видно из (14), можно так подобрать достаточно малое $\beta > 0$ и достаточно большое $C > 0$, что будет $\varphi(\xi + i\pi) < Ce^{-\beta\xi}$, то есть $\Phi = \sin\varphi$, и уравнение (4) удовлетворяется (а $u(\xi)$ непрерывна). Замечая, что правая часть неравенства относительно λ не превышает $44\sqrt{6}/9 \approx 11{,}98$, придем к следующему утверждению.

Теорема. *При выполнении условий* $1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\varepsilon \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 12$ *существует хотя бы одно течение рассматриваемого типа с понижающейся свободной границей.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Gerber R. Sur les solutions des equations du mouvement avec surface libre d'un liquide pesant, — J. Math. pures et appl., v. 34, № 3, 1955.
2. Киселев О. М. О течении тяжелой жидкости в канале с криволинейным дном. — ПММ, т. 40, вып. 4, 1976.
3. Keady G., Norbury J. The jet from a horizontal slot under gravity. Proc. Royal Society of London, ser. A., v. 344, 1975.
4. Гуревич И. Л. О существовании и единственности одного течения тяжелой жидкости. — „Изв. вузов. Математика", 1978, № 5.

Доложено на семинаре 5 февраля 1979 г