КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 17 *Труды семинара по краевым задачам* *1980*

УДК 517.544

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСОВ КОРРЕКТНОСТИ ВНЕШНИХ СМЕШАННЫХ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

А. М. Елизаров

Введение

В работе рассматриваются внешние смешанные обратные краевые задачи нахождения односвязной области D_z, содержащей бесконечно удаленную точку, и регулярной или мероморфной функции $w(z)$, $z \in D_z$, по заданным граничным условиям (во втором случае дополнительно задается значение $w_0 = w(\infty)$), причем считается известной часть границы искомой области.

В краевых условиях исследуемых задач фигурируют только действительная и мнимая части искомой функции $w(z)$, одно условие задается в зависимости от полярного угла единичного круга $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$, конформно эквивалентного искомой области, а другое — в зависимости от параметра $\alpha = \arg z$.

Так как в граничных условиях используется параметризация по кругу E, то функция $z = z(\zeta)$ предполагается нормированной, причем задается положение простого полюса и соответствие одной граничной точки на ∂E и на ∂D_z. Для сравнения заметим, что в теории обратных краевых задач по полярным координатам в качестве параметров [1, § 6] полюс не фиксируется и в решении есть произвол в виде двух вещественных постоянных.

В § 1 и 2 доказывается, что поставленные задачи однозначно разрешимы, в § 3 исследуется устойчивость решения смешанной задачи для регулярной функции в смысле близости границ найденных областей при малом изменении начальных данных и описывается класс областей, для которых устойчивость имеет место.

§ 1. Внешняя смешанная обратная краевая задача для регулярной функции

1. Постановка задачи

Пусть заданная простая гладкая дуга Γ_z^1 с концами $z_0 = r_0 e^{i\alpha_0}$ и $z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$, $2\pi > \alpha_0 > \alpha_1 \geqslant 0$, является известной частью границы искомой односвязной области D_z (с границей Γ_z), содержащей бесконечно удаленную точку и не содержащей начало координат. Отыскивается область D_z и регулярная в ней функция $w(z)$, непрерывная в замкнутой области, по следующим краевым условиям:

$$u = \operatorname{Re} w(z) = f(\theta), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad f(0) = f(2\pi), \text{ на } \Gamma_z; \tag{1}$$

$$v = \operatorname{Im} w(z) = f_1(\alpha) \text{ на } \Gamma_z^2 = \Gamma_z - \Gamma_z^1. \tag{2}$$

Граничное условие (1) задано в зависимости от полярного угла θ вспомогательной плоскости ζ (т. е. в форме Демченко [2], см. также [3]), причем, как и в [2], будем считать, что значения θ снимаются с границы круга E, отображаемого на D_z функцией $z = z(\zeta)$. Для полного определения этого отображения вводим нормировку

$$z(0) = \infty, \quad z(1) = z_0. \tag{3}$$

Кроме того, в (1) предполагается, что f — элемент пространства $C^{(1)}$ непрерывно дифференцируемых функций.

Граничное условие (2) задано в зависимости от параметра $\alpha = \arg z$, причем дуга Γ_z^2 предполагается разделенной на участки, где полярный угол изменяется монотонно. На каждом таком участке f_1 представляет собой непрерывно дифференцируемую функцию, при этом функции, определяющие f_1 на соседних участках, непрерывно продолжают друг друга и $f_1^{-1} \in C^{(1)}$, где f_1^{-1} — обратная к f_1 функция. Так как $0 \notin D_z$, то после полного обхода Γ_z приращение угла α должно быть равно 2π. Поэтому считаем, что в (2) α изменяется в интервале $[\alpha_0 - 2\pi, \alpha_1]$.

Прежде всего определим функцию $\alpha(\theta)$ на интервале, соответствующем дуге Γ_z^2.

Так как $w(z)$ регулярна, то с использованием (1), (2) по формулам обращения Гильберта (см. например, [4, с. 59]) можно записать

$$f_1(\alpha(\varphi)) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{ctg}\frac{\theta - \varphi}{2}\, d\theta + c = T(\varphi) + c, \quad c - \text{const}.$$

Из нормировки (3) следует, что $c = f_1(\alpha_0 - 2\pi) - T(2\pi)$. Теперь функция $\alpha(\varphi)$ на интервале $[\varphi_0, 2\pi]$, соответствующем Γ_z^2, находится в виде

$$\alpha(\varphi) = f_1^{-1}[T(\varphi) + f_1(\alpha_0 - 2\pi) - T(2\pi)] = h(\varphi),$$

а φ_0 определяем из условия $f_1(\alpha_1) = T(\varphi_0) + f_1(\alpha_0 - 2\pi) - T(2\pi)$.

2. Теорема существования и единственности решения

Рассмотрим функцию $z = z(\zeta)$. Так как она имеет простой полюс при $\zeta = 0$, то функция $\widetilde{z}(\zeta) = \zeta z(\zeta)$ регулярна в E, а на границе

$$\ln|\widetilde{z}(e^{i\varphi})| = \ln|z(e^{i\varphi})|; \quad \arg\widetilde{z}(e^{i\varphi}) = \alpha(\varphi) + \varphi.$$

Докажем теорему существования решения поставленной задачи, используя метод конечномерной полигональной аппроксимации [5]. Для этого впишем в дугу Γ_z^1 полигон с n звеньями. Для задачи с полигональной известной частью границы решение выписывается в явном виде, а решение для криволинейной дуги получается как предел решений для полигонов при неограниченном увеличении числа их сторон.

Пусть уравнения сторон полигона имеют вид

$$k_i x - y = b_i, \quad i = 1, \dots, n-1; \quad \pi\alpha_i = \operatorname{arctg} k_i \geqslant 0. \tag{4}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$x = \widetilde{x}\cos\varphi + \widetilde{y}\sin\varphi, \quad y = \widetilde{y}\cos\varphi - \widetilde{x}\sin\varphi.$$

В п. 1 была определена функция h. Тогда на интервале $[\varphi_0, 2\pi]$ будем иметь

$$x\sin h(\varphi) - y\cos h(\varphi) = 0.$$

Переходя в (4) и последнем равенстве к функциям $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ и отображая E на верхнюю полуплоскость $\xi = t + it'$ с помощью дробно-линейной функции, приходим к краевой задаче Гильберта с разрывными коэффициентами

$$\widetilde{x}\sin[\pi\alpha_i + g(t)] - \widetilde{y}\cos[\pi\alpha_i + g(t)] = b_i\cos\pi\alpha_i,$$

$$t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\widetilde{x}\sin[h(g(t)) + g(t)] - \widetilde{y}\cos[h(g(t)) + g(t)] = 0,$$

$$t \in (-\infty, t_1] \cup [t_n, \infty) \tag{5}$$

(здесь $g(t)$ — упомянутая выше дробно-линейная функция, $-\infty < t_1 < t_n < \infty$ соответствуют концам Γ_z^1, а t_i, $i = 2, \dots$ $\dots, n-1$, — вершинам полигона). Решим однородную задачу, соответствующую (5). Она имеет вид

$$\arg X = \alpha_i \pi + g(t),\ t \in [t_i,\ t_{i+1}],\ i = 1, \dots,\ n-1,$$
$$\arg X = h_0(t) = h(g(t)) + g(t),\ t \in (-\infty,\ t_1] \cup [t_n,\ \infty).$$

Восстанавливая функцию X по формуле Шварца, получаем

$$X(\xi) = \exp\left\{\frac{1}{\pi} \int\limits_{(-\infty,\ t_1] \cup [t_n,\ \infty)} \frac{h_0(t)\,dt}{t-\xi} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{t_1}^{t_n} \frac{g(t)\,dt}{t-\xi} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \ln \frac{t_{i+1}-\xi}{t_i-\xi}\right\}.$$

Так как X должна быть ограничена в точках t_k, то можно добиться этого, умножая X на любой вещественный полином. Положим, как и в [5, с. 142], $\beta_i = \alpha_i - \alpha_{i+1} + 1$, $i = 2, \dots$ $\dots,\ n-2$; $\beta_1 = 2 - \alpha_1$, $\beta_{n-1} = \alpha_{n-1}$ и возьмем каноническую функцию X в виде

$$X(\xi) = \prod_{i=1}^{n-1} (\xi - t_i)^{\beta_i} M_n,$$

$$M_n = \exp\left\{\frac{1}{\pi} \int\limits_{(-\infty,\ t_1] \cup [t_n,\ \infty)} \frac{h_0(t)\,dt}{t-\xi} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{t_1}^{t_n} \frac{g(t)\,dt}{t-\xi}\right\}.$$

Теперь можем записать решение неоднородной задачи

$$\tilde{z} = F_n(\xi) = \frac{X(\xi)}{\pi i} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j \cos \pi\alpha_j}{i e^{-i\alpha_j \pi}} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{dt}{X^+(t)\, e^{-ig(t)} (t-\xi)}.$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \beta_k = n-1$, т. е. индекс задачи равен $1-n$, то для ограниченности решения на бесконечности должны выполняться $n-2$ дополнительных условия, служащие в данном случае для определения t_k, $k = 2, \dots, n-1$. Эти условия имеют вид системы (11) из [5, с. 142], которая сводится к системе

$$b_i = b_i(b_{n-1},\ t_2, \dots,\ t_{n-1}),\ i = 1, \dots,\ n-2.$$

Если варьировать постоянные t_k и считать $\delta b_i = 0$, то аналогично [5] получим для функции $\delta\tilde{z}$ краевую задачу

$$\arg \delta\tilde{z} = \pi\alpha_i + \delta g(t),\ t \in [t_i,\ t_{i+1}];$$

$$\arg \delta\tilde{z} = h_0(t),\ t \in (-\infty,\ t_1] \cup [t_n,\ \infty);$$

$$\delta g(t) = g\left[\frac{t(t_{k+1} - t_k + \delta t_{k+1} - \delta t_k) + t_{k+1}\delta t_k - t_k \delta t_{k+1}}{t_{k+1} - t_k}\right] - g(t),$$
$$t \in [t_k,\ t_{k+1}].$$

Решая эту задачу и записывая выражение для $\delta\xi = \delta\tilde{z}\dfrac{d\xi}{d\tilde{z}}$ полностью аналогично [5, с. 143], будем иметь, что функция $\delta\xi$ мероморфна с полюсом 2 порядка на бесконечности, чего быть не может. Тогда $\delta\xi \equiv 0$, т. е. неизвестные постоянные определяются единственным образом. При увеличении числа n получаем решение для криволинейной дуги [см. 5, гл. 3, § 4].

Для доказательства единственности решения задачи достаточно показать, что функция $\alpha(\varphi)$ определяется однозначно. Совершим автоморфизм круга E так, чтобы дуга $\{e^{i\varphi}, \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$ перешла в дугу $\{e^{i\gamma}, \pi \leqslant \gamma \leqslant 2\pi\}$. Пусть $\varphi = g_1(\gamma)$ — соответствие полярных углов, $r = \exp\Phi(\alpha)$, $\Phi \in C^{(1)}$— уравнение кривой Γ_z^1. Тогда на интервале $[0, \pi]$ $\ln|\tilde{z}| = \Phi(\alpha(\gamma))$, а на $[\pi, 2\pi]$ $-\arg\tilde{z} = h(\gamma) + g_1(\gamma)$. Восстанавливая регулярную и ограниченную функцию $\tilde{z}$ по формуле Синьорини [6], пересчитанной для круга (см. также [3]), и переходя к предельным значениям на интервал $[0, \pi]$, получим

$$\alpha(\omega) = \frac{\sqrt{\sin\omega}}{2\pi}\left[-\int_0^{\pi}\frac{\Phi(\alpha(\gamma))\,d\gamma}{\sqrt{\sin\gamma}\sin\frac{\gamma-\omega}{2}} - \int_{\pi}^{3\pi/2}\frac{h(\gamma)+g_1(\gamma)}{\sqrt{|\sin\gamma|}\sin\frac{\gamma-\omega}{2}}\,d\gamma + \right.$$

$$\left. + \int_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{h(\gamma)+g_1(\gamma)}{\sqrt{|\sin\gamma|}\sin\frac{\gamma-\omega}{2}}\,d\gamma\right] - g_1(\omega), \quad 0 \leqslant \omega \leqslant \pi. \tag{6}$$

Так как существование решения задачи доказано, то найдется функция $\alpha(\omega)$, обращающая (6) в тождество.

Предположим теперь, что существуют две функции $\alpha_1(\omega)$ и $\alpha_2(\omega)$, удовлетворяющие (6). Докажем, что это невозможно, используя рассуждения работы [7].

Нетрудно получить для тех значений ω, при которых $\alpha_1 \neq \alpha_2$,

$$\alpha_1(\omega) - \alpha_2(\omega) = -\frac{\sqrt{\sin\omega}}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\Phi(\alpha_1(\gamma)) - \Phi(\alpha_2(\gamma))}{\sqrt{\sin\gamma}\sin\frac{\gamma-\omega}{2}}\,d\gamma. \tag{7}$$

Далее, пусть

$$\Omega_1(\gamma) = \Phi(\alpha_1(\gamma)) - \Phi(\alpha_2(\gamma)) = \int_0^1 \Phi'[\alpha_2(\gamma) + (\alpha_1(\gamma) - \alpha_2(\gamma))t]\,dt \times$$

$$\times [\alpha_1(\gamma) - \alpha_2(\gamma)] = \operatorname{ctg}\beta(\gamma)[\alpha_1(\gamma) - \alpha_2(\gamma)].$$

Теперь из (7) выводим, что

$$\Omega_1(\omega) = -\frac{\sqrt{\sin\omega}}{2\pi}\operatorname{ctg}\beta(\omega)\int_0^{\pi}\frac{\Omega_1(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{\sin\gamma}\sin\frac{\gamma-\omega}{2}} = \operatorname{ctg}\beta(\omega)\,I(\omega). \qquad (8)$$

Так как $I(\omega)$ представляет собой предельные значения на верхней полуокружности мнимой части регулярной в полукруге функции, вещественной на вещественном диаметре, то продолжая эту функцию по симметрии, получим, что регулярная в круге $|t|<1$ функция $\Omega_2(t)$, $\Omega_2(e^{i\omega}) = \Omega_1(\omega) + iI(\omega)$, удовлетворяет краевому условию

$$\sin\beta(\omega)\,\Omega_1(\omega) + \cos\beta(\omega)\,I(\omega) = 0$$

для тех точек ω, где $\alpha_1 \neq \alpha_2$, и условию $\Omega_2(e^{i\omega}) = 0$ для тех точек ω, где значения α_1 и α_2 совпадают.

Итак, мы оказались в ситуации, подробно рассмотренной в [7, с. 190]. Следовательно, $\Omega_2(e^{i\omega}) \equiv 0$, т. е. $\alpha_1(\omega) \equiv \alpha_2(\omega)$, что и требовалось получить. Сформулируем доказанные результаты:

Теорема 1. *Внешняя смешанная обратная краевая задача по параметру $\alpha = \arg z$ для регулярной функции всегда однозначно разрешима.*

Замечание 1. Выбор положения полюса в начале координат произведен для удобства. Если полюс находится в точке $\zeta_0 \in E$, то $\arg\tilde{z}(e^{i\varphi}) = \alpha(\varphi) + H(\varphi)$, где

$$H(\varphi) = \arg\left[(e^{i\varphi} - \zeta_0)/(1 - \bar{\zeta}_0 e^{i\varphi})\right],$$

и необходимо лишь в выражении величины M_n заменить $h_0(t)$ и $g(t)$ на $h(g(t)) + H(g(t))$ и $H(g(t))$ соответственно.

§ 2. Внешняя смешанная обратная краевая задача для функции с простым полюсом

Постановка внешней смешанной задачи для мероморфной функции отличается от постановки задачи п. 1 лишь тем, что образ искомой области D_z при отображении искомой мероморфной функцией $w(z)$ содержит бесконечно удаленную точку и считается известным значение $w_0 = w(\infty)$. Так как по условию $w(z_0) = f(0) + if_1(\alpha_0 - 2\pi)$, то можно сделать вывод, что ищем нормированную функцию $w(z)$.

Решение поставленной задачи может быть проведено по схеме § 1, если будет определена функция $\alpha(\varphi)$ на интервале, соответствующем Γ_z^2. Найдем эту функцию.

С использованием граничного условия (1) можем записать

$$w(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,d\theta+C\,\frac{\zeta-\zeta_0}{1-\overline{\zeta}_0\zeta}-\overline{C}\,\frac{1-\overline{\zeta}_0\zeta}{\zeta-\zeta_0}+iB_0,$$

$$C=A+iB,$$

где $\zeta_0=r_0e^{i\gamma_0}$ — пока неизвестное положение полюса функции $w(\zeta)$. Из нормировки функций $z(\zeta)$, $w(z)$ следует, что

$$\begin{cases} w|_{\zeta=0}=w_0=u_0+iv_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta-C\zeta_0-\overline{C}/\zeta_0+iB_0, \\ f_1(\alpha_0-2\pi)=T(0)+2A\sin H(0)+2B\cos H(0)+B_0. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь $f_1(\alpha_0-2\pi)$ — значение в точке $\alpha_0-2\pi$ первой однозначной ветви функции f_1.

Отделяя действительную и мнимую части в первом соотношении из (9) и используя второе равенство, приходим к системе условий вида

$$\begin{cases} v_0-f_1(\alpha_0-2\pi)-T(0)=\left[-\left(r_0+\dfrac{1}{r_0}\right)\sin\gamma_0+2\sin H(0)\right]A+ \\ +\left[-\left(r_0+\dfrac{1}{r_0}\right)\cos\gamma_0+2\cos H(0)\right]B, \\ u_0-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta=\left(r_0-\dfrac{1}{r_0}\right)(-A\cos\gamma_0+B\sin\gamma_0). \end{cases} \tag{10}$$

Рассматривая систему (10) как линейную относительно A, B и предполагая, что левые части в (10) одновременно не обращаются в нуль, легко находим ее определитель

$$d=(r_0-1/r_0)\{2\cos[H(0)-\gamma_0]-(r_0+1/r_0)\}.$$

Так как $r_0+1/r_0>2$ при $0\leqslant r_0<1$, то $d\neq 0$ и система однозначно разрешима относительно A и B. Таким образом, можно определить постоянные A, B, B_0 в зависимости от r_0 и γ_0.

Для определения величин r_0 и γ_0 необходимо получить еще два равенства. Для этого прежде всего определим значение $\varphi_0=\varphi_0(r_0,\gamma_0)$, соответствующее точке z_1, из соотношения

$$f_1(\alpha_1)=T(\varphi_0)+2A\sin H(\varphi_0)+2B\cos H(\varphi_0)+B_0=T_1(\varphi_0).$$

Так как функция $T_1=T_1(\varphi,r_0,\gamma_0)$ известна, то можно найти все точки ее локальных экстремумов. Пусть первая из однозначных ветвей функции f_1 имеет по крайней мере два экстремума и $\alpha_0-2\pi\leqslant\alpha_*$, $\alpha^*\leqslant\alpha_1$ — точки соседних экстремумов, причем в точке α_* находится самый первый из всех ее экстремумов.

Теперь для определения r_0 и γ_0 достаточно приравнять значения $f_1(\alpha_*)$, $f_1(\alpha^*)$ соответственно значениям $T_1(\varphi_*)$, $T_1(\varphi^*)$, где φ_*, φ^* — точки соседних и ближайших к $\varphi = 2\pi$ экстремумов функции T_1. Решая полученную систему, определим значения r_0, γ_0 и значение φ_0. Если первая однозначная ветвь имеет лишь один экстремум, то нужно рассматривать наряду с ним первый экстремум второй однозначной ветви. Если же все ветви монотонны или имеется всего один экстремум, то может, вообще говоря, не найтись соотношений для определения неизвестных параметров, т. е. функция $\alpha(\varphi)$ может определиться неоднозначно и будет зависеть от одной или от обеих величин r_0 и γ_0.

Все приведенные рассуждения особенно просто проводятся в случае, когда $w_0 = \infty$. Тогда $\zeta_0 = 0$ и для определения A и B необходимо записать значения функции $T_2(\varphi) = T(\varphi) - T(0) + f_1(\alpha_0 - 2\pi) + 2A\sin\varphi + 2B(\cos\varphi - 1)$ в двух точках φ_*, φ^* экстремума, ближайших к $\varphi = 2\pi$, и приравнять их значениям f_1 в соответствующих точках. В качестве иллюстрации всего вышесказанного рассмотрим следующий

Пример: определить функцию $\alpha(\varphi)$ во внешней смешанной задаче для функции с полюсом в бесконечности, если

$$f(\theta) = \cos\theta,\ f_1(\alpha) = \sin\alpha,\ -\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant 0.$$

Имеем

$$f_1(\alpha(\varphi)) \equiv \sin\alpha(\varphi) = (2A+1)\sin\varphi + 2B\cos\varphi + B_0,\ B_0 = -1 - 2B$$

Следовательно,

$$\sin\alpha(\varphi) = (2A+1)\sin\varphi + 2B(\cos\varphi - 1) - 1.$$

Так как f_1 имеет экстремум при $\alpha = -\pi/2$, то должно быть

$$(2A+1)\cos\varphi - 2B\sin\varphi = 0 \text{ при } \varphi = 2\pi, \text{ т. е. } A = -1/2.$$

Другой точкой экстремума функции $T_2(\varphi)$ является точка $\varphi = \pi$. Так как f_1 монотонна, то $\varphi = \pi$ соответствует $\alpha = 0$. Теперь легко определить величину B: $f_1(0) = 2B(\cos\pi - 1) - 1$, $B = -1/4$. Окончательно, $\alpha(\varphi) = -\arcsin\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}\right), \pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

После определения $\alpha(\varphi)$ на $[\varphi_0, 2\pi]$ применяется метод конечномерной аппроксимации аналогично тому, как это было сделано в § 1.

§ 3. Об устойчивости решения смешанной краевой задачи для регулярной функции

Так как в поставленных в § 1, 2 смешанных задачах отыскивается область в плоскости z, то естественно ограничиться такими классами M областей, чтобы:

1) по начальным данным область D_z определялась однозначно;

2) близким (в некотором смысле) значениям начальных данных соответствовали близкие области (устойчивость).

Как и в обратных задачах логарифмического потенциала (см., например, [8, 9]), назовем функции, описывающие границы искомых областей, определяющими и рассмотрим класс областей M как метрическое пространство, точками которого являются области D_z. Метрика в M есть метрика некоторого функционального пространства, которому принадлежат определяющие функции (например, метрика пространства C, если считать определяющие функции непрерывными).

Если на M есть устойчивость, то M называется классом устойчивости или классом корректности.

В данном случае в качестве определяющих функций и метрики будем использовать граничные значения функции $z(\zeta): E \to D_z$ и метрику пространства C, т. е. устойчивость будем понимать как малость модуля разности граничных значений двух решений при близких начальных данных независимо от величины полярного угла.

Пусть решаются задачи с начальными данными f, $\{f_{1m}\}$, $\{\Phi_m\}$ такими, что f_{1m} заданы на интервале

$$[\alpha_0 - 2\pi,\ \alpha_1],\ f_{1m}(\alpha_1) = f_1(\alpha_1),\ f_{1m}(\alpha_0 - 2\pi) = f_1(\alpha_0 - 2\pi),$$

$$\max|\Phi'_m| \leqslant \max|\Phi'| \leqslant b, \qquad \max|f_{1m}^{-1}| \leqslant \max|f_1^{-1}| \leqslant a,$$

и

$$\|f_{1m}^{-1} - f_1^{-1}\|_{C^{(1)}} \to 0,\ \|\Phi_m - \Phi\|_{C^{(1)}} \to 0,\ m \to \infty, \tag{11}$$

где a, b — фиксированные постоянные.

Так как функция $T(\varphi)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем, сколь угодно близким к единице [4], то из результатов п. 1 § 1 будет следовать, что $h_m(\varphi) \to h(\varphi)$, $m \to \infty$, $\varphi \in [\varphi_0, 2\pi]$, по норме пространства C_ν гельдеровых функций с ν сколь угодно близким к 1 (всюду в дальнейшем будем обозначать индексом m функции, соответствующие m-ым начальным данным). Заметим, что норма в C_ν определяется в виде

$$\|h\|_\nu = \max|h(\varphi)| + \sup_{\substack{\varphi_0 \leqslant \varphi_1,\ \varphi_2 \leqslant 2\pi, \\ \varphi_1 \neq \varphi_2}} \frac{|h(\varphi_1) - h(\varphi_2)|}{|\varphi_1 - \varphi_2|^\nu}.$$

Далее, из (11) выводим, что коэффициенты A_0, A_m функций h и h_m равномерно ограничены. Кроме того, из представления функции $\tilde{z}$ (см. п. 2 § 1) и (11) следует, что функции $\alpha(\varphi)$ и $\alpha_m(\varphi)$, $\varphi \in [0, \varphi_0]$, равномерно ограничены по норме C_λ с некоторым $0 < \lambda < 1$, т. е. лежат в некотором шаре в C_λ.

С другой стороны, $\alpha(\omega)$ является решением уравнения (6), а $\alpha_m(\omega)$ — решением уравнения, полученного из (6) заменой Φ и h на Φ_m и h_m соответственно. Перепишем (6) в следующем виде:

$$(\mathcal{A}\alpha)(\omega) = P(\omega), \quad (\mathcal{A}\alpha)(\omega) = \alpha(\omega) + \frac{\sqrt{\sin\omega}}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{\Phi(\alpha(\gamma))\,d\gamma}{\sqrt{\sin\gamma}\,\sin\frac{\gamma-\omega}{2}},$$

$$P(\omega) = \frac{\sqrt{\sin\omega}}{2\pi}\left[\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{h(\gamma)+g_1(\gamma)}{\sqrt{|\sin\gamma|}\,\sin\frac{\gamma-\omega}{2}}\,d\gamma - \int\limits_{\pi}^{3\pi/2} \frac{h(\gamma)+g_1(\gamma)}{\sqrt{|\sin\gamma|}\,\sin\frac{\gamma-\omega}{2}}\,d\gamma\right].$$

Через $\mathcal{A}_m$ и P_m обозначим оператор и функцию, соответствующие α_m.

Обратимся к функции $P(\omega)$ и изучим ее свойства. Осуществляя замену

$$\gamma = 3\pi/2 - 2\,\mathrm{arcctg}\,[2\cos\mu/(1+\cos^2\mu)], \quad 0 \leqslant \mu \leqslant \pi,$$

$$\omega = 3\pi/2 - 2\,\mathrm{arcctg}\,[2\delta/(1+\delta^2)], \quad -1 \leqslant \delta \leqslant 1, \tag{12}$$

и оценивая $|dP/d\delta|$, получим

$$\left|\frac{dP}{d\delta}\right| \leqslant \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{|h(\gamma(\mu)) + g_1(\gamma(\mu)) - h(\gamma(0)) - g_1(\gamma(0))|\,d\mu}{1-\cos\mu} +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\,|h(\gamma(0)) - h(\gamma(\pi)) + g_1(\gamma(0)) - g_1(\gamma(\pi))|.$$

По определению функции $h + g_1$

$$|h(\gamma(\mu)) + g_1(\gamma(\mu)) - h(\gamma(0)) - g_1(\gamma(0))| \leqslant$$

$$\leqslant (A_0 + \max|g_1'|)\,|\gamma(\mu) - \gamma(0)|^{\nu} \leqslant (A_0 + \max|g_1'|)\,|\cos\mu - 1|^{\nu}.$$

Тогда

$$\left|\frac{dP}{d\delta}\right| \leqslant \frac{2}{\pi}(A_0 + \max|g_1'|)\left[\frac{\pi}{2^{\nu}(2\nu-1)} + 2^{\nu}\right].$$

Но из (12) следует, что

$$|\delta(\omega_1) - \delta(\omega_2)| = \left|\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} \delta'(\omega)\,d\omega\right| \leqslant |\omega_1 - \omega_2| +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\sin\omega}{[(1-\sin\omega)\sin\omega]^{1/(2(1-\Delta))}}\right|^{1-\Delta} |\sin\omega_2 - \sin\omega_1|^{\Delta} \leqslant$$

$$\leqslant\left\{1+2^{\frac{1-2\Delta}{2}}\left[B\left(\frac{1-2\Delta}{2(1-\Delta)},\ \frac{1-2\Delta}{2(1-\Delta)}\right)\right]^{1-\Delta}\right\}|\omega_1-\omega_2|^{\Delta},\ 0<\Delta<1/2$$

(здесь B — бета-функция Эйлера).

Из полученных оценок выводим, что P — ограниченная функция из C_Δ. Покажем теперь, что имеет место условие

$$\|\alpha_m(\omega)-\alpha(\omega)\|_{\lambda-\varepsilon}\to 0,\ m\to\infty,\ \varepsilon \text{ — сколь угодно мало.}$$

Для доказательства используем частный случай следствия 7 из [10]:

Лемма. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_m: X\to Y$ — непрерывные отображения, N — компакт из X, на котором однозначно разрешимы уравнения $\mathcal{A}_m x=y_m$, $\mathcal{A}x=y$ и y_m, $y\in Y$ — точки. Если $y_m\to y$, $\|\Delta_m\|=\|\mathcal{A}_m-\mathcal{A}\|\to 0$, $m\to\infty$, то $q_m\to q$, где q, q_m — решения уравнений.*

Нам известно, что $\alpha_m(\omega)$ и $\alpha(\omega)$ лежат в шаре из C_λ, т. е. в компактном множестве из $C_{\lambda-\varepsilon}$. Далее, из проведенных оценок для функции P следует, что $\|P_m(\omega)-P(\omega)\|_\Delta\to 0$, $m\to\infty$. Кроме того,

$$\|\Delta_m\|=\sup_{\|\alpha\|_{\lambda-\varepsilon}\leqslant 1}\left\|\frac{\sqrt{\sin\omega}}{2\pi}\int_0^\pi\frac{\Phi_m(\alpha(\gamma))-\Phi(\alpha(\gamma))}{\sqrt{\sin\gamma}\sin\frac{\gamma-\omega}{2}}d\gamma\right\|_{\lambda-\varepsilon}\leqslant$$

$$\leqslant\|\Phi_m(\alpha)-\Phi(\alpha)\|_{C(1)}2^{\lambda-\varepsilon}\left[M(\lambda-\varepsilon)+\frac{1}{\pi}B\left(\frac{\lambda-\varepsilon}{2},\ \frac{1-\lambda+\varepsilon}{2}\right)\right]\to 0,$$

$$m\to\infty.$$

Здесь

$$M(\lambda-\varepsilon)=\frac{2^{\lambda-\varepsilon}}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{t^{\lambda-\varepsilon}dt}{\sin t},$$

B — бета-функция и оценка получена аналогично [3].

Таким образом, уравнения $(\mathcal{A}\alpha)(\omega)=P(\omega)$, $(\mathcal{A}_m\alpha)(\omega)=P_m(\omega)$ с непрерывными операторами, действующими на функции $\alpha(\omega)$, $\alpha_m(\omega)$ из $C_{\lambda-\varepsilon}$, однозначно разрешимы на одном и том же компакте из $C_{\lambda-\varepsilon}$, причем $P_m\to P$. По лемме $\|\alpha_m(\omega)-\alpha(\omega)\|_{\lambda-\varepsilon}\to 0$.

Из последнего условия и непрерывности оператора Шварца в гельдеровских пространствах вытекает, что $|\tilde{z}(e^{i\varphi})-\tilde{z}_m(e^{i\varphi})|\to 0$, $m\to\infty$, при любых φ, а следовательно, и $|z(e^{i\varphi})-z_m(e^{i\varphi})|\to 0$. Устойчивость решения задачи доказана. Сформулируем окончательный результат.

Теорема 2. *Пусть начальные данные удовлетворяют условию* (11). *Тогда множество областей со свойствами:*

а) *известная часть* Γ_z^1 *границы описывается функцией* $r = \exp \Phi(\alpha)$, $\Phi \in C^{(1)}$ *и является простой гладкой дугой*;

б) *концы* Γ_z^1 *находятся в точках* $z_0 = r_0 e^{i\alpha_0}$, $z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$;

в) *области не содержат начало координат — есть класс корректности внешней смешанной обратной краевой задачи для регулярной функции.*

Замечание 2. Отметим, что в рассмотренной выше смешанной задаче для регулярной функции устойчивость решения полностью определяется начальными данными. Это свойство является характерным для обратных краевых задач теории аналитических функций и позволяет добиться корректности задачи только за счет улучшения начальных данных.

В заключение автор благодарит проф. Л. А. Аксентьева за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1965.

2. Demtchenko B. Problemes mixtes harmoniques en Hydrodynamique des fluides parfaits. Paris, 1933.

3. Елизаров А. М. Об обратной смешанной краевой задаче Демченко. Деп. № 164-78.

4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., „Наука“, 1977.

5. Монахов В Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск, „Наука“, 1977.

6. Signorini A. Sopra un problema al contorno nella teoria della funzioni di variable complessa — Ann. di Math., **25**, 1916, p. 253—273.

7. Салимов Н. Б. Обратная задача напорной фильтрации в области с криволинейным водоупором. — Труды семинара по краевым задачам. Вып. 5. Изд-во Казанск. ун-та, 1968, с. 187—196.

8. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач. — ДАН СССР, **39**, № 5, 1943, с. 195—198.

9. Иванов В. К. Об устойчивости обратной задачи логарифмического потенциала. — „Изв. вузов. Математика“, 1958, № 4, с. 96—99.

10. Лисковец О. А. Некорректные задачи и устойчивость квазирешений. — Сибирский математический журнал, **10**, № 2, 1969, с. 373—386.

Доложено на семинаре 30 *января* 1979 *г*