

Werk

Verlag: Izd. Kazanskogo universiteta; Совет казанского университета

Ort: Kazan

Kollektion: RusDML; Mathematica

Werk Id: PPN509860087_0017

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN509860087_0017|LOG_0014

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

УДК 517.54

О СМЕШАННОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ

А. М. Елизаров

В работе рассматривается задача обтекания неизвестного профиля, расположенного над криволинейным дном, в случае, когда на искомом профиле задается распределение скорости в зависимости от дуговой абсциссы s .

Разрешимость подобной задачи в случае, когда скорость задана в зависимости от декартовой координаты x , доказана ранее в [1]. Задача нахождения формы профиля в случае прямолинейного дна и при наличии свободной поверхности рассмотрена в работе [2]. Подробное описание приложений обратных и смешанных обратных краевых задач в гидроаэромеханике и теории фильтрации можно найти в [3].

1. Постановка задачи

Пусть искомый профиль Γ_z обтекается потоком несжимаемой невесомой жидкости, ограниченным снизу криволинейным гладким дном, состоящим из двух прямолинейных

участков CA и BC , расположенных на оси абсцисс, и дуги AB класса Ляпунова с фиксированным началом z_0 (точка A) (рис. 1). Предполагается, что эта дуга задается с точностью до подобия с коэффициентом λ относительно некоторой точки хорды AB , так что длина ее неизвестна; угол наклона касательной к дуге задан в виде

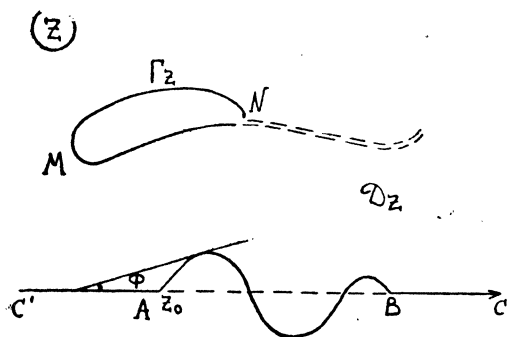


Рис. 1.

$\Phi(\bar{s})$, $\bar{s}$ — приведенная абсцисса, $0 \leq \bar{s} \leq s_0$, s_0 — длина исходной дуги. Пусть выполнено условие ограниченности колебания Φ на AB :

$$\max \Phi - \min \Phi \leq p\pi, \quad 0 \leq p < 1. \quad (1)$$

На профиле Γ_z известно распределение скорости в функции дуговой абсциссы: $v = v(s)$, $0 \leq s \leq l$, где $v(s)$ — неотрицательная однозначная функция, удовлетворяющая условию Гельдера и обращающаяся в нуль не более чем в двух точках. Считаем, что в точке M разветвления потока $s=0$, в точке N схода потока $s=s_N$, а потенциал скорости $\varphi=0$ при $s=0$. Расход жидкости в струе равен Q , потенциалы скорости в точках A и B считаются известными. Задача заключается в определении формы профиля Γ_z .

Как обычно, для циркуляции Γ будем иметь

$$\Gamma = \varphi_B - \varphi_H, \quad \varphi_B = \int_0^{s_N} v(s) ds, \quad \varphi_H = \int_{s_N}^l v(s) ds.$$

Пусть на линии дна функция тока $\psi=0$. Проведем в физической плоскости разрез до бесконечности по линии тока, начиная от точки N . Тогда в плоскости комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ области течения с разрезом будет соответствовать верхняя полуплоскость с разрезом, параллельным вещественной оси и проходящим через точку iQ (рис. 2).

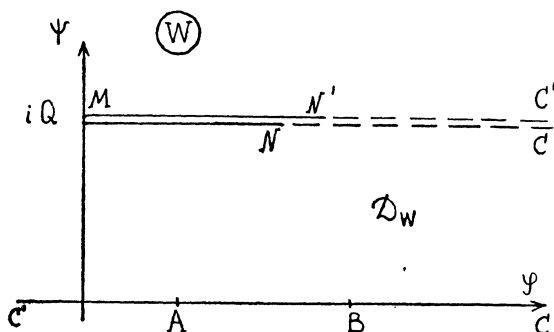


Рис. 2.

Как и в [3, с. 293], отобразим область D_w на внутренность прямоугольника $NN'C'C$ вспомогательной плоскости t так, чтобы верхнему основанию соответствовала ось φ , а нижнему — участки берегов разреза, отвечающие искомому профилю (рис. 3). Это отображение осуществляется с помощью функции $w = a\zeta(t - i\omega_2/2) + bt + c_1 + ic_2$, где $\zeta(t)$ —

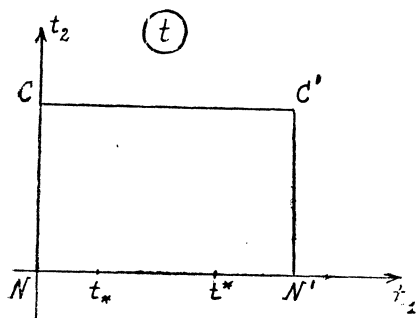


Рис. 3.

отображение $w = w(t)$ полностью определено.

функция Вейерштрасса с периодами $\omega_1, i\omega_2$ [4, с. 54], а постоянные a, b, c_1, c_2, ω_2 пока не определены (ω_1 можно задавать произвольно). Используя соответствие точек в плоскостях t и w и тот факт, что в точке схода потока dw/dt обращается в нуль, можем записать соотношения, связывающие неизвестные постоянные. Это делается полностью аналогично [3, с. 293]. Таким образом,

2. Вывод уравнения задачи

Уравнение рассматриваемой задачи вытекает из общего решения смешанной краевой задачи для функции $F(t) = \ln \frac{dw}{dz}(t)$.

После определения функции $w(t)$ обычным образом находится соответствие $s = g(t)$, $t = t_1 \in [0, \omega_1]$, на искомом профиле. На лучах CA и BC $\text{Im } F(t) = 0$. Если бы была известна функция $\bar{s}(t)$ на интервале, соответствующем дуге AB , то можно было бы записать

$$\text{Im } F(t) = \Phi(\bar{s}(t)).$$

Так как положения точек A и B на ∂D_w заданы, то определяются значения t_*, t^* , $0 < t_* < t^* < \omega_1$, такие, что $t_* + i\omega_2/2$ и $t^* + i\omega_2/2$ на верхнем основании прямоугольника соответствуют A и B на ∂D_z . Теперь можем записать условия краевой задачи для функции $F(t)$:

$$\begin{aligned} \text{Re } F(t) &= \ln g'(t) = g_1(t), \quad t = t_1 \in [0, \omega_1]; \\ \text{Im } F(t) &= \Phi_0(t), \quad t = t_1 + i\omega_2/2, \quad t_1 \in [0, \omega_1], \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\Phi_0(t) = \begin{cases} 0, & t_1 \in [0, t_*) \cup (t^*, \omega_1]; \\ \Phi(\bar{s}(t)), & t_1 \in [t_*, t^*]. \end{cases}$$

Решая краевую задачу (2) по формуле Вилля (см., например, [5, с. 179]), получаем

$$F(t) = \frac{1}{\pi \sigma(\omega_1/2)} \left\{ \int_{t_*}^{t^*} \frac{\Phi(\bar{s}(\tau)) \sigma(\tau - t + (\omega_1 + i\omega_2)/2) e^{-\eta_1(\tau - t + i\omega_2/2)^2} d\tau}{\sigma(\tau - t + i\omega_2/2)} + \right. \\ \left. + i \int_0^{\omega_1} \frac{g_1(\tau) \sigma(\tau - t + \omega_1/2) e^{-\eta_1(\tau - t)^2} d\tau}{\sigma(\tau - t)} \right\}, \quad (3)$$

где σ — сигма-функция Вейерштрасса [4], а $\eta_1 = \zeta(\omega_1/2)$. Переходя к предельным значениям при $t \rightarrow t' + i\omega_2/2$, $t' \in [t_*, t^*]$ и отделяя действительные части, получаем из (3) соотношение

$$\ln |(d\omega/dz)(t')| = I(\bar{s}, t') + I_1(t'),$$

где через I и I_1 обозначены соответственно предельные значения действительных частей первого и второго интегралов в (3). Окончательно, уравнение задачи имеет вид

$$\bar{s}(t') = \frac{1}{\alpha} \int_{t_*}^{t'} \exp \{ -I(\bar{s}, t') - I_1(t') \} |a\mathfrak{P}(t' - i\omega_2/2) + b| dt', \\ \mathfrak{P}(t) = -\zeta'(t). \quad (4)$$

3. Доказательство разрешимости уравнения

Продолжим непрерывно функцию Φ на всю ось $-\infty < \bar{s} < \infty$ с сохранением наложенных ограничений. Теперь (4) определяет непрерывный оператор $\mathfrak{A}$, действующий в пространстве C_ν , $0 < \nu < 1$, гельдеровых функций $\bar{s}(t')$, $t' \in [t_*, t^*]$, с нормой

$$\|\bar{s}\|_\nu = \max_{t' \in [t_*, t^*]} |\bar{s}(t')| + \sup_{\substack{t'_1 \neq t'_2 \\ t'_1, t'_2 \in [t_*, t^*]}} \frac{|\bar{s}(t'_1) - \bar{s}(t'_2)|}{|t'_1 - t'_2|^\nu}.$$

Для доказательства разрешимости уравнения $\bar{s}(t') = (\mathfrak{A}\bar{s})(t')$ используем принцип неподвижной точки Шаудера [6, с. 605]. Для этого необходимо доказать компактность оператора $\mathfrak{A}$ и найти такой шар из C_ν , который переводится в себя при действии оператора. Как и при доказательстве компактности оператора из [7], достаточно показать, что $\mathfrak{A}$ переводит любое ограниченное множество из C_ν в множество из $C_{\nu+\epsilon}$ с некоторым $\epsilon > 0$.

По схеме доказательства леммы 1 [8, с. 200] нами получен результат:

Лемма. Пусть функция Φ удовлетворяет (1). Тогда верна оценка

$$\int_{t_*}^{t^*} \exp \{[-I(\bar{s}, t') - I_1(t')]/p\} dt' \leq R_0, \quad (5)$$

где R_0 — постоянная, не зависящая от $\bar{s}$.

С использованием леммы докажем разрешимость уравнения (4). Прежде всего, по условию задачи

$$x_{s_0} = \int_{t_*}^{t^*} \exp \{-I(\bar{s}, t') - I_1(t')\} |a\mathfrak{P}(t' - i\omega_2/2) + b| dt'.$$

Так как функция $-\Phi$ удовлетворяет (1), то (5) остается справедливой после замены Φ на $-\Phi$. Отсюда и из обратного неравенства Гельдера выводим

$$x \geq \frac{1}{s_0} \left\{ \int_{t_*}^{t^*} \exp \left\{ \frac{I(\bar{s}, t') + I_1(t')}{p} \right\} dt' \right\}^{-p} \times \\ \times \left[\int_{t_*}^{t^*} |a\mathfrak{P}(t' - i\omega_2/2) + b|^{1/(p+1)} dt' \right]^{p+1} \geq c_0 R_0^{-p} > 0, \quad c_0 = \text{const.}$$

Кроме того,

$$x \leq \tilde{c}_1 \left\{ \int_{t_*}^{t^*} \exp \{[-I(\bar{s}, t') - I_1(t')]/p\} dt' \right\}^p |t^* - t_*|^{1-p}, \quad \tilde{c}_1 = \text{const}$$

и, следовательно, величина x ограничена и отграничена от нуля независимо от $\bar{s}$. Пусть $0 < \nu < 1 - p$. С учетом (5) будем иметь

$$|(\mathfrak{A}\bar{s})(t'_1) - (\mathfrak{A}\bar{s})(t'_2)| = \\ = \frac{1}{x} \left| \int_{t'_1}^{t'_2} \exp \{-I(\bar{s}, t') - I_1(t')\} |a\mathfrak{P}(t' - i\omega_2/2) + b| dt' \right| \leq \\ \leq \frac{\tilde{c}_1}{x} \left| \int_{t'_1}^{t'_2} \exp \{[-I(\bar{s}, t') - I_1(t')]/(1 - \nu - \varepsilon)\} dt' \right|^{1-\nu-\varepsilon} \times \\ \times |t'_1 - t'_2|^{\nu+\varepsilon} \leq \frac{\tilde{c}_1}{x} R_0^{1-\nu-\varepsilon} |t'_1 - t'_2|^{\nu+\varepsilon},$$

если $\varepsilon > 0$ таково, что $\nu < 1 - p - \varepsilon$. Отсюда и из ограниченности κ следует компактность $\mathfrak{A}$. Далее, из полученной оценки при $\varepsilon = 0$ вытекает, что оператор $\mathfrak{A}$ переводит все пространство C в некоторый шар из C_ν , радиус которого не зависит от искомой функции $\bar{s}$. Таким образом, уравнение (4) разрешимо. Функция, отображающая внутренность прямоугольника на область D_z , может быть записана в виде

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{t_* + i\omega_2/2}^t \frac{dw}{dt} / \frac{dw}{dz}(t) dt + c = \\ &= \int_{t_* + i\omega_2/2}^t e^{-F(t)} [a\mathfrak{P}(t - i\omega_2/2) + b] dt + c, \end{aligned}$$

где $F(t)$ определяется формулой (3), а постоянная интегрирования c находится из соответствия $t = t_* + i\omega_2/2 \leftrightarrow z = z_0$. Условие замкнутости профиля требует выполнения условия

$$\int_0^{\omega_1} e^{-F(t)} [a\mathfrak{P}(t - i\omega_2/2) + b] dt = 0, \quad (6)$$

которое является условием разрешимости и может быть проверено только после решения уравнения задачи. Сформулируем окончательный результат:

Теорема. Пусть выполняется условие (1). Тогда смешанная обратная краевая задача нахождения формы профиля, расположенного над криволинейным дном, разрешима при выполнении условия (6).

Заметим, что с помощью предложенного метода может быть рассмотрена смешанная задача нахождения формы профиля, обтекаемого ограниченным потоком, имеющим свободную поверхность. В этом случае область D_w представляет собой полосу с разрезом. Отображение этой области на прямоугольник строится аналогично [3, с. 176—178].

В заключение автор благодарит проф. Л. А. Аксентьева за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонцев С. Н. О некоторых задачах газовой динамики со свободными границами в двусвязных областях. — Динамика сплошной среды. Вып. 1. Новосибирск, „Наука“, 1969, с. 134—153.
2. Чебарев А. И. Обратная задача обтекания произвольного профиля ограниченным потоком. — Труды семинара по краевым задачам. Вып. 10. Изд-во Казанск. ун-та, 1973, с. 163—170.
3. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1965.

4. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М., „Наука“, 1970.
5. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., „Наука“, 1966.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., „Наука“, 1977.
7. Хайкин М. И. Теоремы существования для одного класса обратных смешанных краевых задач теории аналитических функций. — Труды Казанск. авиационного ин-та. Вып. 64, 1961, с. 3—24.
8. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., „Мир“, 1964.

Доложено на семинаре 30 января 1979 г.