Werk

Verlag: Izd. Kazanskogo universiteta; Совет казанского университета

Ort: Kazan

Kollektion: RusDML; Mathematica

Werk Id: PPN509860087_0017

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN509860087_0017|LOG_0015

КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 17 *Труды семинара по краевым задачам* *1980*

УДК 517.956.6

К ЗАДАЧАМ СО СМЕЩЕНИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

В. И. Жегалов

Многие работы последних лет, начиная со статей [1 и 2], посвящаются исследованию таких задач для уравнений смешанного типа, когда краевое условие на части границы области, лежащей в гиперболической полуплоскости, содержит сдвиги. В данной статье предлагается еще одна задача подобного рода.

Пусть D_- — внутренность треугольника с вершинами $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, а D_+ — односвязная область в полуплоскости $y > 0$, ограниченная отрезком AB и простой дугой σ.

Задача. *Найти в области $D = D_+ \bigcup D_-$ решение $u(x, y)$ уравнения*

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0, \tag{1}$$

непрерывное в $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$, непрерывно дифференцируемое внутри этих областей, за возможным исключением точек A, B и характеристик уравнения (1) *при $y \leqslant 0$, проходящих через точку $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, где u_x, u_y могут обращаться в бесконечность интегрируемого порядка. Производная u_y непрерывно продолжима из D_+ и D_- на ось x, кроме, может быть, точки $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, причем*

$$u(x, -0) = \alpha_0(x) u(x, +0) + \gamma_0(x), \tag{2}$$

$$u_y(x, -0) = \alpha_1 u_y(x, +0) + \gamma_1(x).$$

На линии σ и границе области D_- должны выполняться условия

$$u = \varphi(t), \ t \in \sigma, \tag{3}$$

$$a_k(y)u\left(\frac{1}{2},\ y\right)+b_k(y)u\left(\frac{1}{2}+y,\ 0\right)+$$
$$+c_k(y)u\left(\frac{1}{4}+\frac{y}{2},\ -\frac{1}{4}-\frac{y}{2}\right)+d_k(y)u\left(\frac{1}{2}-y,\ 0\right)+$$
$$+e_k(y)u\left(\frac{1}{4}-\frac{y}{2},\ -\frac{1}{4}+\frac{y}{2}\right)+f_k(y)u\left(\frac{3}{4}-\frac{y}{2},\ -\frac{1}{4}-\frac{y}{2}\right)+$$
$$+g_k(y)u\left(\frac{3}{4}+\frac{y}{2},\ -\frac{1}{4}+\frac{y}{2}\right)=h_k(y), \tag{4}$$
$$y\in\left[-\frac{1}{2},\ 0\right],\ k=1,2.$$

Здесь $\alpha_1=\mathrm{const}$, α_0, γ_0, γ_1 — дважды непрерывно дифференцируемы на отрезках $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$ оси x, $\varphi(t)\in H(\sigma)$, a_k, b_k, c_k, d_k, e_k, f_k, g_k, $h_k\in C^2\left[-\frac{1}{2},\ 0\right]$, причем вторые производные удовлетворяют условию H (Гельдера). Заметим, что условия (2) впервые встречаются для уравнения (1) в работе автора [1], а затем в статье Г. Д. Каратопраклиева [3], причем в последней работе α_1 считается функцией x. Сама же идея обобщенных условий склеивания восходит к статье Ф. И. Карамышева [6].

Используя, например, решение задачи Трикоми для уравнения (1), можно добиться, чтобы

$$\varphi(t)\equiv 0. \tag{5}$$

В дальнейшем это предполагается сделанным.

Если ввести в D_+ гармонически сопряженную с $u(x,\ y)$ функцию $v(x,\ y)$ с условием $v(0,\ 0)=0$, то на основании формулы Даламбера решения задачи Коши для уравнения колебаний струны, а также условий Коши — Римана и соотношений (2), найдем в области D_-

$$2u(x,\ y)=\alpha_0(x+y)u(x+y,\ +0)+\alpha_0(x-y)u(x-y,\ +0)-$$
$$-\alpha_1 v(x+y,\ +0)+\alpha_1 v(x-y,\ +0)+\gamma_0(x+y)+ \tag{6}$$
$$+\gamma_0(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\gamma_1(t)\,dt.$$

Подставляя это значение в (4), получим на $\left[-\frac{1}{2},\ 0\right]$

$$m_k(x)u\left(\frac{1}{2}+x,\ 0\right)+n_k(x)v\left(\frac{1}{2}+x,\ 0\right)-$$
$$-p_k(x)u\left(\frac{1}{2}-x,\ 0\right)-q_k(x)v\left(\frac{1}{2}-x,\ 0\right)= \tag{7}$$
$$=\omega_k(x)-\alpha_1\left[f_k(x)+g_k(x)\right]v(1,\ 0),\ (k=1,\ 2),$$

$$m_k(x) = \alpha_0\left(\frac{1}{2} + x\right)[a_k(x) + 2b_k(x) + c_k(x) + g_k(x)],$$

$$n_k(x) = -\alpha_1[a_k(x) - c_k(x) + g_k(x)],$$

$$p_k(x) = -\alpha_0\left(\frac{1}{2} - x\right)[a_k(x) + 2d_k(x) + e_k(x) + f_k(x)], \tag{8}$$

$$q_k(x) = -\alpha_1[a_k(x) + e_k(x) - f_k(x)],$$

$$\omega_k(x) = 2h_k(x) - \gamma_0\left(\frac{1}{2} + x\right)\frac{m_k(x)}{\alpha_0\left(\frac{1}{2} + x\right)} +$$

$$+ \gamma_0\left(\frac{1}{2} - x\right)\frac{p_k(x)}{\alpha_0\left(\frac{1}{2} - x\right)} - \gamma_0(0)[c_k(x) + e_k(x)] -$$

$$- \gamma_0(1)[f_k(x) + g_k(x)] + \alpha_1^{-1} n_k(x)\int\limits_0^{\frac{1}{2}+x} \gamma_1(t)\,dt - \tag{9}$$

$$- \alpha_1^{-1} q_k(x)\int\limits_0^{\frac{1}{2}-x} \gamma_1(t)\,dt + [f_k(x) + g_k(x)]\int\limits_0^1 \gamma_1(t)\,dt.$$

Положив в (7) $x = \pm\frac{1}{2}$, с помощью (8) — (9) находим

$$\begin{aligned} \alpha_1(a_k + e_k + g_k)_{x=-\frac{1}{2}} v(1, 0) &= \omega_k\left(-\frac{1}{2}\right), \\ \alpha_1(a_k - c_k - f_k)_{x=\frac{1}{2}} v(1, 0) &= -\omega_k\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, от исходных данных необходимо потребовать

$$(a_k + e_k + g_k)_{x=-\frac{1}{2}}\omega_k\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= (c_k + f_k - a_k)_{x=\frac{1}{2}}\omega_k\left(-\frac{1}{2}\right), \quad k = 1, 2.$$

Будем еще предполагать, что хотя бы одно из четырех чисел $\omega_k\left(\pm\frac{1}{2}\right)$, $k = 1, 2$, отлично от нуля. Тогда из (10) следует

$$\alpha_1 \neq 0 \tag{11}$$

и отличие от нуля хотя бы одной из скобок в левых частях (10). Поэтому $v(1, 0)$ определяется, и в правых частях соотношений (7) стоят полностью известные функции (в дальнейшем их обозначаем $\omega_k^*(x)$). Итак, мы пришли к задаче об отыскании аналитической в области D_+ функции $f=u+iv$ по условиям (3), (5), (7).

Рассмотрим сначала некоторые частные случаи.

а) Выполняются равенства

$$m_1 n_2 = n_1 m_2, \quad p_1 q_2 = q_1 p_2. \tag{12}$$

Тогда существуют функции λ, μ, с помощью которых второе условие (7) записывается в форме

$$\lambda(x)\left[m_1(x)\,u\left(\frac{1}{2}+x,\ 0\right)+n_1(x)\,v\left(\frac{1}{2}+x,\ 0\right)\right]-$$
$$-\mu(x)\left[p_1(x)\,u\left(\frac{1}{2}-x,\ 0\right)+q_1(x)\,v\left(\frac{1}{2}-x,\ 0\right)\right]=\omega_2^*(x). \tag{13}$$

Это соотношение вместе с первым условием (7) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно функций, стоящих в квадратных скобках формулы (13). Указанная система однозначно разрешима, если $\lambda(x)\neq\mu(x)$ (нетрудно выразить это условие через коэффициенты соотношений (7)). Таким образом, мы приходим к задаче Гильберта с разрывными коэффициентами для области D_+. Путем конформного отображения можно преобразовать область D_+ в полукруг с условием, что отрезок $[0, 1]$ перейдет в себя [4] (см. также [5, с. 11]). Полное исследование вопросов разрешимости такой задачи для полукруга дается в статье Ф. И. Карамышева [6]. Определив $u(x, y)$ в D_+, мы затем с помощью условий (2) получим в области D_- хорошо известную задачу Коши для уравнения колебаний струны.

Отметим, что равенства (12) в исходных данных имеют вид

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0, \tag{14}$$
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}=0.$$

б) Пусть теперь

$$m_1 n_2 \neq n_1 m_2,$$
$$p_1 n_2 - n_1 p_2 = m_1 q_2 - q_1 m_2, \quad m_1 p_2 - p_1 m_2 = n_1 q_2 - q_1 n_2. \tag{15}$$

Из (7) найдем

$$u\left(\frac{1}{2}+x,\ 0\right)+iv\left(\frac{1}{2}+x,\ 0\right)= \tag{16}$$
$$=G(x)\left[u\left(\frac{1}{2}-x,\ 0\right)+iv\left(\frac{1}{2}-x,\ 0\right)\right]+g(x),$$
$$G(x)=\frac{p_1n_2-n_1p_2+i\,(m_1p_2-p_1m_2)}{m_1n_2-n_1m_2},$$
$$g(x)=\frac{n_2\omega_1^*-n_1\omega_2^*+i\,(m_1\omega_2^*-m_2\omega_1^*)}{m_1n_2-n_1m_2}.$$

Сделав преобразование $z_1=\left(z-\frac{1}{2}\right)^2$, мы придем к задаче Гильберта для кусочно-аналитической функции, решение которой может быть найдено методом, изложенным в книге Ф. Д. Гахова [7, с. 462]. Аналогично можно рассуждать в случае, если первое условие в (15) заменено на

$$p_1q_2\neq q_1p_2, \tag{17}$$

а остальные два сохраняются.

в) Если одновременно имеют место условия (17) и первое из (15), то при выполнении равенств

$$p_1m_2=m_1p_2,\ q_1m_2=m_1q_2, \tag{18}$$
$$p_1n_2=n_1p_2,\ q_1n_2=n_1q_2$$

мы можем найти

$$u(x,\ 0)=r(x),\ v(x,\ 0)=s(x),\ x\in[0,\ 1], \tag{19}$$

где r, s — вполне определенные функции, непрерывные на отрезках $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$. Следовательно, мы приходим к задаче для аналитической функции $f=u+iv$ с условиями (3), (5), (19). Считая опять σ полуокружностью, продолжим $f(z)$ на всю верхнюю полуплоскость по принципу симметрии (это возможно в силу (5)). При этом получим, что

$$v(x,\ 0)=s\left(\frac{x}{2x-1}\right),\ x\notin[0,\ 1].$$

Задача с этим условием и первым условием (19) есть фактически задача (1.28) — (1.29) из работы [5, с. 12]. Поэтому с помощью формулы (1.30) из указанной работы найдем

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_0^1\sqrt{\frac{z(1-z))}{t(1-t)}}\left[\frac{r(t)}{t-z}-\frac{s(t)}{t+z-2tz}\right]dt.$$

Вещественная часть этой функции и дает решение (единственное) нашей задачи в D_+. Второе соотношение (19) превращается в условие разрешимости:

$$s(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{x(1-x)}{t(1-t)}}\left[\frac{s(t)}{t+x-2tx}-\frac{r(t)}{t-x}\right]dt.$$

Вернемся к общему случаю. Будем пока считать σ полуокружностью. Вводя новую искомую функцию

$$f_1(z)=f\left(z+\frac{1}{2}\right)=u\left(x+\frac{1}{2},\ y\right)+iv\left(x+\frac{1}{2},\ y\right)=u_1(x,y)+$$
$$+iv_1(x,\ y),$$

получим из (7)

$$m_k(x)u_1(x,\ 0)+n_k(x)v_1(x,\ 0)-p_k(x)u_1(-x,\ 0)-$$
$$-q_k(x)v_1(-x,\ 0)=\omega_k^*(x),\quad x\in\left[-\frac{1}{2},\ 0\right],\quad k=1,\ 2. \tag{20}$$

Очевидно, функцию $f_1(z)$ следует отыскивать внутри полуокружности, ограниченной дугой σ_1: $|z|=\frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ и отрезком $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$ оси x, причем $u_1=0$ на σ_1. Продолжая $f_1(z)$ по принципу симметрии, имеем

$$-m_k\left(\frac{1}{4x}\right)u_1(x,\ 0)+n_k\left(\frac{1}{4x}\right)v_1(x,\ 0)+p_k\left(\frac{1}{4x}\right)u_1(-x,0)-$$
$$-q_k\left(\frac{1}{4x}\right)v_1(-x,\ 0)=\omega_k^*\left(\frac{1}{4x}\right),\quad x\in\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right],\quad k=1,\ 2. \tag{21}$$

Рассмотрим функцию $W=\xi+i\eta=z^2$, отображающую полуплоскость $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ на плоскость с разрезом вдоль вещественной положительной полуоси. Если через $F^+(\xi)$ ($F^-(\xi)$) обозначим граничное значение функции $F(W)=f_1(\sqrt{W})$ сверху (снизу) от вещественной полуоси $\xi\geqslant 0$, то условия (20) — (21) запишутся в форме

$$\operatorname{Re}\{[m_k(-\sqrt{\xi})-in_k(-\sqrt{\xi})]F^-(\xi)\}-$$
$$-\operatorname{Re}\{[p_k(-\sqrt{\xi})-iq_k(-\sqrt{\xi})]F^+(\xi)\}=\omega_k^*(-\sqrt{\xi}), \tag{22}$$
$$\xi\in\left[0,\ \frac{1}{4}\right],$$

$$\operatorname{Re}\left\{\left[m_k\left(-\frac{1}{4\sqrt{\xi}}\right)+in_k\left(-\frac{1}{4\sqrt{\xi}}\right)\right]F^-(\xi)\right\}-$$
$$-\operatorname{Re}\left\{\left[p_k\left(-\frac{1}{4\sqrt{\xi}}\right)+iq_k\left(-\frac{1}{4\sqrt{\xi}}\right)\right]F^+(\xi)\right\}=-\omega_k^*\left(-\frac{1}{4\sqrt{\xi}}\right), \tag{23}$$
$$\xi=\left[\frac{1}{4},\ \infty\right).$$

Итак, мы пришли к некоторой задаче для разомкнутого контура. Будем искать функцию $F(W)$ в виде интеграла типа Коши с неизвестной плотностью

$$F(W)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\frac{\rho(t)+i\delta(t)}{t-W}\,dt, \tag{24}$$

где $\rho(\xi)$, $\delta(\xi)$ — вещественны. Вычислив по формулам Сохоцкого граничные значения функции $F(W)$ и подставив их в (22) — (23), придем к следующей системе уравнений:

$$A_0(-\sqrt{\xi})\,\psi(\xi)+\frac{B_0(-\sqrt{\xi})}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\psi(t)\,dt}{t-\xi}=-\Omega(-\sqrt{\xi}),$$
$$\xi\in\left[0,\ \frac{1}{4}\right];$$
$$A_1\left(-\frac{1}{4\sqrt{\xi}}\right)\psi(\xi)+\frac{1}{\pi}B_1\left(-\frac{1}{4\sqrt{\xi}}\right)\int\limits_0^\infty\frac{\psi(t)\,dt}{t-\xi}=\Omega\left(-\frac{1}{4\sqrt{\xi}}\right), \tag{25}$$
$$\xi\in\left[\frac{1}{4},\ \infty\right);$$

$$A_k(\xi)=\left\|\begin{matrix} m_1(\xi)+p_1(\xi), & (-1)^k\,[n_1(\xi)+q_1(\xi)]\\ m_2(\xi)+p_2(\xi), & (-1)^k\,[n_2(\xi)+q_2(\xi)]\end{matrix}\right\|,$$
$$B_k(\xi)=\left\|\begin{matrix} (-1)^k\,[n_1(\xi)-q_1(\xi)], & p_1(\xi)-m_1(\xi)\\ (-1)^k\,[n_2(\xi)-q_2(\xi)], & p_2(\xi)-m_2(\xi)\end{matrix}\right\|,\quad (k=0,\ 1) \tag{26}$$
$$\psi(\xi)=\begin{bmatrix}\rho(\xi)\\ \delta(\xi)\end{bmatrix},\quad \Omega(\xi)=\begin{bmatrix}2\omega_1^*(\xi)\\ 2\omega_2^*(\xi)\end{bmatrix}.$$

Такая система изучается в книге Н. П. Векуа [8] при условиях

$$\det(A_k\pm iB_k)\neq 0,\ k=0,\ 1. \tag{27}$$

С помощью (26) убеждаемся, что эквивалентом этих условий является невозможность одновременного выполнения равенств

$$
\begin{aligned}
m_1 q_2 + p_1 n_2 &= q_1 m_2 + n_1 p_2, \\
m_1 p_2 + n_1 q_2 &= p_1 m_2 + q_1 n_2.
\end{aligned} \tag{28}
$$

Как известно, системы уравнений вида (25) в явном виде решаются лишь в частных случаях. Простейшим из них является случай выполнения одной из следующих четырех пар условий:

$$m_k \pm p_k \equiv 0, \ n_k \mp q_k \equiv 0, \ k = 1, \ 2, \tag{29}$$

ибо тогда матрицы A_k, B_k оказываются треугольными. При

$$\alpha_0(x) \neq 0 \tag{30}$$

это будет иметь место, если хотя бы для одного значения $k = 1, 2$ удовлетворяются соотношения

$$b_k + d_k \equiv e_k - g_k \equiv f_k - c_k \tag{31}$$

или

$$-b_k - d_k \equiv c_k + f_k \equiv 2a_k + e_k + g_k. \tag{32}$$

Нетрудно видеть, что условия (14), вообще говоря, не зависят от выполнения (31) — (32). Действительно, например, при

$$a_k \equiv b_k \equiv d_k \neq 0, \ c_k \equiv e_k \equiv g_k \equiv f_k \equiv 0$$

первые выполнены, а вторые — нет.

Отметим также, что одновременная невозможность равенств (28) не является необходимым условием разрешимости задачи. В самом деле, при условиях (18) оба соотношения (28) имеют место, но задача, как мы видели, может быть разрешима.

При сведении задачи к системе (25) мы предполагали, что D_+ является полукругом. В общем случае после получения условия (20) нужно перейти в плоскость $z_1 = z^2$. Линия σ при этом перейдет в замкнутый контур, ограничивающий некоторую область. По теореме Римана существует функция $W = \omega(z_1)$, отображающая конформно эту область на круг Γ. Разрез $0 \leqslant \operatorname{Re} z_1 \leqslant \frac{1}{4}$ перейдет в линию l. Пусть $\gamma(W)$ — функция, обратная к $\omega(z^2)$. Тогда для функции $F(W) = f_1[\gamma(W)]$ мы получим из (20) условие вида

$$
\begin{gathered}
\operatorname{Re}\{[m_k^*(\tau) - i n_k^*(\tau)] F^-(\tau)\} - \\
- \operatorname{Re}\{[p_k^*(\tau) - i q_k^*(\tau)] F^+(\tau)\} = \omega_k^*[\gamma(\tau)], \\
\tau \in l, \ k = 1, \ 2,
\end{gathered}
$$

причем F^+ (F^-) есть предельное значение F слева (справа), если идти вдоль l от конца, являющегося образом точки

$z_1=0$, а коэффициенты в левой части вычислены по правилу $\Phi^*(\tau)=\Phi[\gamma(\tau)]$. Пользуясь условием $\operatorname{Re} F)W)=0$ на Γ, мы по принципу симметрии продолжим $F(W)$ на всю плоскость и получим на линии l^*, симметричной относительно Γ с кривой l, соотношение, играющее роль (23). Отыскивая затем $F(W)$ в виде

$$F(W)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l\cup l^*}\frac{\rho(\tau)+i\delta(\tau)}{\tau-W}\,d\tau,$$

мы опять придем к системе сингулярных интегральных уравнений. В случае симметричности σ относительно прямой $\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}$ всегда можно добиться, чтобы линия $l\cup l^*$ была частью вещественной оси, то есть система уравнений будет иметь вид (25) с интегралом, взятым в соответствующих пределах.

В наших рассуждениях мы также предполагали выполнение условий (11) и (30). Но из (2) видно, что в случае $\alpha_1=\alpha_0\neq 0$ условия (4) являются лишними. Если же $\alpha_0\neq 0$, $\alpha_1=0$, то в формуле (6) отсутствует функция v и при выполнении условия $m_1p_2\neq p_1m_2$ дело сведется к обычной задаче Гильберта с разрывными коэффициентами. При $\alpha_0\equiv 0$, $\alpha_1\neq 0$ и условии $n_1q_2\neq q_1n_2$ тоже получается задача Гильберта.

Укажем еще некоторые задачи, допускающие исследование изложенным выше способом.

В качестве первой из них возьмем задачу, отличающуюся от нашей тем, что второе условие (4) заменено следующей комбинацией производных по нормалям к линиям $y=0$ и $x=\frac{1}{2}$:

$$a_2\frac{\partial u\left(\frac{1}{2},y\right)}{\partial x}+b_2\frac{\partial u\left(\frac{1}{2}+y,\,0\right)}{\partial y}+ \tag{33}$$

$$+d_2\frac{\partial u\left(\frac{1}{2}-y,\,0\right)}{\partial y}=h_2(y),\quad y\in\left[-\frac{1}{2},\,0\right].$$

При этом предполагается, что α_0, a_2, b_2, d_2 являются постоянными. Мы не включаем в это условие нормальные производные на линиях AC и CB, потому что они, как нетрудно видеть, оказываются постоянными. Если подставить в (33) значение функции $u(x,y)$ из формулы (6), а затем проинтегрировать полученное равенство в пределах от $-\frac{1}{2}$ до x, то найдем

$$\alpha_0 a_2 u\left(\frac{1}{2}+x,\ 0\right)-\alpha_1(a_2+2b_2)\,v\left(\frac{1}{2}+x,\ 0\right)-$$

$$-\alpha_0' a_2 u\left(\frac{1}{2}-x,\ 0\right)-\alpha_1(a_2-2d_2)\,v\left(\frac{1}{2}-x,\ 0\right)=h^*(x),$$

$$x\in\left[-\frac{1}{2},\ 0\right],$$

где $h^*(x)$ — вполне определенная функция; при этом еще предполагается $a_2\neq 0$, что позволяет с помощью (10) найти $v(1,\ 0)$. Последняя формула заменяет второе из условий (7), а все дальнейшие рассуждения можно провести по изложенной выше схеме.

Наконец, пусть рассматривается задача, изучавшаяся в статье автора [9]. Она была сведена к задаче об отыскании аналитической функции $F=u+iv$ в области D_+ по условиям (см. [9], формулы (3), (9)):

$$u|_\sigma=0,$$

$$m(x)\,u(x,\ 0)+n(x)\,v(x,\ 0)+p(x)\,u(1-x,\ 0)+$$

$$+q(x)\,v(1-x,\ 0)=g(x),\ \ x\in[0,\ 1].$$

Взяв последнее условие сначала на $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$, а затем на $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$ и заменив в первом случае x на $\frac{1}{2}+x$, а во втором — x на $\frac{1}{2}-x$, найдем

$$m\left(x+\frac{1}{2}\right)u\left(\frac{1}{2}+x,\ 0\right)+n\left(x+\frac{1}{2}\right)v\left(\frac{1}{2}+x,\ 0\right)+$$

$$p\left(x+\frac{1}{2}\right)u\left(\frac{1}{2}-x,\ 0\right)+q\left(x+\frac{1}{2}\right)v\left(\frac{1}{2}-x,\ 0\right)=$$

$$=g\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

$$p\left(\frac{1}{2}-x\right)u\left(\frac{1}{2}+x,\ 0\right)+q\left(\frac{1}{2}-x\right)v\left(\frac{1}{2}+x,\ 0\right)+$$

$$+m\left(\frac{1}{2}-x\right)u\left(\frac{1}{2}-x,\ 0\right)+n\left(\frac{1}{2}-x\right)v\left(\frac{1}{2}-x,\ 0\right)=$$

$$=g\left(\frac{1}{2}-x\right),$$

$$x\in\left[-\frac{1}{2},\ 0\right].$$

Получили соотношения вида (7), к которым можно применить рассуждения настоящей статьи. Например, условия (12) приобретают вид

$$m\left(\frac{1}{2}+x\right)q\left(\frac{1}{2}-x\right)=n\left(\frac{1}{2}+x\right)p\left(\frac{1}{2}-x\right),$$

$$p\left(\frac{1}{2}+x\right)n\left(\frac{1}{2}-x\right)=q\left(\frac{1}{2}+x\right)m\left(\frac{1}{2}-x\right),$$

$$x\in\left[-\frac{1}{2},\,0\right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Жегалов В. И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии. — Ученые записки КГУ. Т. 122, кн. 3, 1962, с. 3—16.

2. Нахушев А. М. О некоторых краевых задачах дмя гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. — Дифференциальные уравнения. Т. 5, № 1, 1969, с. 44—59.

3. Каратопраклиев Г. Об одном обобщении задачи T для уравнения $u_{xx}+\operatorname{sgn} y u_{yy}=0$. — ДАН СССР. Т. 151, № 6, 1963, с. 1271—1273.

4. Каратеодори К. Конформное отображение. Пер. с англ. М. — Л., 1934.

5. Бицадзе А. В. К проблеме уравнений смешанного типа — Труды математического ин-та АН СССР. Т. 41, 1953.

6. Карамышев Ф. И. Об одной краевой задаче для системы смешанного типа. — Труды Новочеркасского политехнического ин-та. Т. 109, 1960, с. 25—35.

7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., „Наука", 1977.

8. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М. — Л., ГИТТЛ, 1950.

9. Жегалов В. И. Задача типа Трикоми с пятью смещениями в гиперболической части области. — Труды семинара по краевым задачам. Вып. 15. Изд-во Казанского ун-та, 1978, с. 61—65.

Доложено на семинаре 9 декабря 1978 г.