КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 17 *Труды семинара по краевым задачам* *1980*

УДК 517.958

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЗРЫВА НА ВЫБРОС

Н. Б. Ильинский, А. Г. Лабуткин

В работе [1] рассмотрена задача о нахождении формы выемки выброса при взрыве заглубленного шнурового заряда, моделируемого в плоскости перпендикулярной оси заряда гидродинамическим источником. При этом в известную твердо-жидкостную модель взрыва на выброс введено обобщение краевого условия на искомой границе с целью приближения формы расчетных выемок к экспериментальным.

Существенным моментом при решении названной задачи в прямой постановке (2 вариант в [1]) является определение параметра $d > 1$ из уравнения

$$h = \int_d^\infty \Omega(\xi, d) \exp[\mu(\xi, d)]\, d\xi, \tag{1}$$

где

$$\Omega(\xi, d) = (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^2 \left[\frac{\sqrt{(\xi^2 - 1)(d^2 - 1)} + \xi d - 1}{\xi - d}\right]^{1/2}, \tag{2}$$

$$\mu(\xi, d) = -\frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\alpha(\tau, d)\, d\tau}{(\tau - \xi)\sqrt{1 - \tau^2}}, \tag{3}$$

$$\alpha(\tau, d) = \ln\{\pi\sqrt{(1-\tau)(d-\tau)}\, f[\varphi(\tau, d)]\}^{-1}, \tag{4}$$

$$\varphi(\tau, d) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arch} \frac{d + 1 - 2\tau}{d - 1},$$

$\xi = \operatorname{Re}\zeta$ ($\zeta = \xi + i\eta$ — комплексная переменная вспомогательной плоскости). Функция $f(\varphi)$ ($\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant 0$), характеризующая распределение скорости по границе выемки, в общем случае имеет вид

$$f(\varphi) = (\varphi - \varphi_0)^{1/2} (-\varphi)^{1-2\varkappa} r(\varphi, \varphi_0), \tag{5}$$

$r(\varphi, \varphi_0)$ — ограниченная функция при $-\infty < \varphi_0 < 0$, $\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant 0$, удовлетворяющая условию Гёльдера по переменной φ и отличная от нуля, $\pi\varkappa$ — угол, под которым происходит выброс грунта на периферийном участке выемки, φ_0—значение потенциала скорости на границе выемки непосредственно под зарядом; искомый параметр d связан с φ_0 соотношением

$$d = (\operatorname{ch} \pi\varphi_0 + 3)/(\operatorname{ch} \pi\varphi_0 - 1). \tag{6}$$

Обозначим правую часть уравнения (1) через $\Phi(d)$ и исследуем поведение $\Phi(d)$ при $d \to \infty$ и $d \to 1$. Покажем, что $\Phi(d) \to 0$ при $d \to \infty$ и $\Phi(d) \to \infty$ при $d \to 1$, откуда будет следовать разрешимость уравнения (1), а следовательно, и исходной задачи при любом h.

1°. Пусть $d \to \infty$. Введем обозначения: $\sqrt{\xi^2 - 1} = g(\xi)$, $\pi\sqrt{(1-\tau)(d-\tau)} = a(\tau, d)$, $(\tau - \xi)\sqrt{1-\tau^2} = b(\tau, \xi)$,

$$\frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\ln r[\varphi(\tau, d), \varphi_0(d)]}{(\tau - \xi)\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = R(\xi, d), \tag{7}$$

где $\varphi_0(d)$ определяется по (6). Тогда, учитывая (3)—(5), представим

$$\Phi(d) = \int_{d}^{\infty} \Omega(\xi, d) \exp\Big\{R(\xi, d) +$$

$$+ \frac{g(\xi)}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\ln[a(\tau, d)\,|\varphi(\tau, d)|^p\,|\varphi(\tau, d) - \varphi_0(d)|^q]}{b(\tau, \xi)} d\tau\Big\} d\xi, \tag{8}$$

где $p = 1 - 2\varkappa$, $q = 0.5$.

Так как при $\xi \in (d, \infty)$

$$I_0 = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{d\tau}{(\tau - \xi)\sqrt{1-\tau^2}} = -1,$$

то имеем оценку

$$-\ln M \leqslant R(\xi, d) \leqslant -\ln m, \tag{9}$$

где $m = \min r[\varphi(\tau, d), \varphi_0(d)]$, $M = \max r[\varphi(\tau, d), \varphi_0(d)]$.

Представив

$$|\varphi(\tau, d)| = 2\int_{\tau}^{1} \frac{dt}{a(t, d)}, \quad |\varphi(\tau, d) - \varphi_0(d)| = 2\int_{-1}^{\tau} \frac{dt}{a(t, d)},$$

нетрудно получить оценки

$$A_1 \sqrt{1-\tau} \leqslant |\varphi(\tau,\ d)| \leqslant A_2 \sqrt{1-\tau}, \tag{10}$$

$$\widetilde{A}_1 (1+\tau) \leqslant |\varphi(\tau,\ d) - \varphi_0(d)| \leqslant \widetilde{A}_2 (1+\tau), \tag{11}$$

где

$$A_1 = \frac{4}{\pi \sqrt{d+1}},\ A_2 = \frac{4}{\pi \sqrt{d-1}},\ \widetilde{A}_1 = \frac{A_1}{2\sqrt{2}},\ \widetilde{A}_2 = \frac{A_2}{\sqrt{2}}. \tag{12}$$

Принимая во внимание (10), (11), перепишем выражение (8) в виде

$$\Phi(d) = \int_d^\infty \Omega(\xi,\ d) \exp\left\{\widetilde{R}(\xi,\ d) + \right.$$

$$\left. + \frac{g(\xi)}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\ln [a(\tau, d)(1-\tau)^{p/2}(1+\tau)^q]}{b(\tau, \xi)} d\tau \right\} d\xi, \tag{13}$$

где $\widetilde{R}(\xi,\ d)$ определяется формулой (7), если вместо $r[\varphi(\tau, d), \varphi_0(d)]$ подставить $\widetilde{r}[\varphi(\tau,\ d),\ \varphi_0(d)] = r[\varphi(\tau,\ d),\ \varphi_0(d)] \cdot F(\tau,\ d)$,

$$F(\tau,\ d) = |\varphi(\tau,\ d)|^p\, |\varphi(\tau,\ d) - \varphi_0(d)|^q\, [(1-\tau)^{p/2}(1+\tau)^q]^{-1},$$

причем

$$A_1^p \widetilde{A}_1^q \leqslant F(\tau,\ d) \leqslant A_2^p \widetilde{A}_2^q. \tag{14}$$

С учетом (9) и (14) будем иметь

$$-\ln (M A_2^p \widetilde{A}_2^q) \leqslant \widetilde{R}(\xi,\ d) \leqslant -\ln (m A_1^p \widetilde{A}_1^q)$$

или, подставляя в (12),

$$\frac{2^{q/2}}{M}\left(\frac{\pi\sqrt{d-1}}{4}\right)^{p+q} \leqslant \exp \widetilde{R}(\xi,\ d) \leqslant \frac{2^{3q/2}}{m}\left(\frac{\pi\sqrt{d+1}}{4}\right)^{p+q}. \tag{15}$$

Обозначим второй внутренний интеграл выражения (13) через $I_1(\xi,\ d)$ и представим его в виде суммы двух интегралов

$$I_1(\xi,\ d) = \frac{g(\xi)}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\ln [\pi (1+\tau)^q (1-\tau)^{\frac{1+p}{2}}]}{b(\tau, \xi)} d\tau +$$

$$+ \frac{g(\xi)}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\ln (d-\tau)^{1/2}}{b(\tau, \xi)} d\tau = I_2(\xi) + I_3(\xi,\ d). \tag{16}$$

Интеграл $I_2(\xi)$ в (16) конечен. В интеграле $I_3(\xi, d)$ при больших d имеем $\ln(d-\tau)^{1/2} \sim \ln\sqrt{d}$ ($\sim$ — знак эквивалентности) и потому $I_3(\xi, d) \sim I_0 \ln\sqrt{d} = -\ln\sqrt{d}$. Следовательно,

$$\exp I_1(\xi, d) = \exp[I_2(\xi) + I_3(\xi, d)] \sim 1/\sqrt{d}. \qquad (17)$$

Таким образом, учитывая (15) и (17), находим

$$\Phi(d) \sim \frac{1}{m} \int_d^\infty \Omega(\xi, d)\, d^n\, d\xi, \qquad (18)$$

где $n = (p + q - 1)/2$.

Из формулы (2) следует, что при больших d, а следовательно, и при больших ξ, выражение $\Omega(\xi, d) \sim \sqrt{\xi d}\,(\xi^2\sqrt{\xi - d})^{-1}$. Тогда по (18)

$$\Phi(d) \sim \frac{d^n}{m} \int_d^\infty \frac{\sqrt{\xi d}\, d\xi}{\xi^2 \sqrt{\xi - d}} = \frac{d^{n-0,5}}{m} \int_1^\infty \frac{\sqrt{t}\, dt}{t^2\sqrt{t-1}}. \qquad (19)$$

Так как интеграл в (19) конечен, то $\lim\limits_{d\to\infty} \Phi(d) = 0$ при $p+q<2$, т. е. при $\varkappa > -1/4$.

2°. Пусть $d \to 1$. Функция $\Omega(\xi, d)$ имеет на бесконечности ноль второго порядка, выражение $\exp\widetilde{R}(\xi, d)$ согласно (15) ограничено, поэтому поведение $\Phi(d)$ (13) в окрестности $d=1$ определяется интегралом $I_1(\xi, d)$. Можно показать [2, стр, 82], что интеграл $I_1(\xi, d)$ в окрестности $\xi = 1$ представим в виде

$$I_1(\xi, 1) = -c(\xi)\ln(\xi - 1) + u(\xi),$$

где $c(\xi) = 2^{-3/2}(2 + p)\sqrt{\xi + 1}$, $u(\xi)$ — ограниченная при $\xi = 1$ функция. Тогда

$$\exp I_1(\xi, 1) = (\xi - 1)^{-c(\xi)} \exp u(\xi).$$

Отсюда видно, что $\lim\limits_{d\to 1} \Phi(d) = \infty$ при $2 + p \geqslant 2$, т. е. при $\varkappa \leqslant 1/2$.

Таким образом, уравнение (1), а следовательно, и исходная задача разрешимы при любой глубине h заложения точечного заряда, так как для реальных выемок $0 < \varkappa \leqslant 1/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильинский Н. Б. Об одном методе построения выемки выброса при взрыве шнуровых зарядов.— Труды семинара по краевым задачам. Вып. 16. Изд-во Казанск. ун-та, 1979.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., ГИФМЛ, 1963.

Доложено на семинаре 25 января 1979 г.