

Werk

Verlag: Izd. Kazanskogo universiteta; Совет казанского университета

Ort: Kazan

Kollektion: RusDML; Mathematica

Werk Id: PPN509860087_0017

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN509860087_0017|LOG_0017

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

УДК 517.958

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ
ВЗРЫВА НА ВЫБРОС*Н. Б. Ильинский, А. Г. Лабуткин*

В работе [1] рассмотрена задача о нахождении формы выемки выброса при взрыве заглубленного шнурового заряда, моделируемого в плоскости перпендикулярной оси заряда гидродинамическим источником. При этом в известную твердо-жидкостную модель взрыва на выброс введено обобщение краевого условия на искомой границе с целью приближения формы расчетных выемок к экспериментальным.

Существенным моментом при решении названной задачи в прямой постановке (2 вариант в [1]) является определение параметра $d > 1$ из уравнения

$$h = \int_d^{\infty} \Omega(\xi, d) \exp[\mu(\xi, d)] d\xi, \quad (1)$$

где

$$\Omega(\xi, d) = (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^2 \left[\frac{V(\xi^2 - 1)(d^2 - 1) + \xi d - 1}{\xi - d} \right]^{1/2}, \quad (2)$$

$$\mu(\xi, d) = -\frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\alpha(\tau, d) d\tau}{(\tau - \xi) \sqrt{1 - \tau^2}}, \quad (3)$$

$$\alpha(\tau, d) = \ln \{ \pi \sqrt{(1 - \tau)(d - \tau)} f[\varphi(\tau, d)] \}^{-1}, \quad (4)$$

$$\varphi(\tau, d) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arch} \frac{d + 1 - 2\tau}{d - 1},$$

$\xi = \operatorname{Re} \zeta$ ($\zeta = \xi + i\eta$ — комплексная переменная вспомогательной плоскости). Функция $f(\varphi)$ ($\varphi_0 \leq \varphi \leq 0$), характеризующая распределение скорости по границе выемки, в общем случае имеет вид

$$f(\varphi) = (\varphi - \varphi_0)^{1/2} (-\varphi)^{1-2\kappa} r(\varphi, \varphi_0), \quad (5)$$

$r(\varphi, \varphi_0)$ — ограниченная функция при $-\infty < \varphi_0 < 0$, $\varphi_0 \leq \varphi \leq 0$, удовлетворяющая условию Гёльдера по переменной φ и отличная от нуля, $\pi\kappa$ — угол, под которым происходит выброс грунта на периферийном участке выемки, φ_0 — значение потенциала скорости на границе выемки непосредственно под зарядом; искомый параметр d связан с φ_0 соотношением

$$d = (\operatorname{ch} \pi\varphi_0 + 3)/(\operatorname{ch} \pi\varphi_0 - 1). \quad (6)$$

Обозначим правую часть уравнения (1) через $\Phi(d)$ и исследуем поведение $\Phi(d)$ при $d \rightarrow \infty$ и $d \rightarrow 1$. Покажем, что $\Phi(d) \rightarrow 0$ при $d \rightarrow \infty$ и $\Phi(d) \rightarrow \infty$ при $d \rightarrow 1$, откуда будет следовать разрешимость уравнения (1), а следовательно, и исходной задачи при любом h .

1°. Пусть $d \rightarrow \infty$. Введем обозначения: $\sqrt{\xi^2 - 1} = g(\xi)$, $\pi \sqrt{(1-\tau)(d-\tau)} = a(\tau, d)$, $(\tau - \xi) \sqrt{1-\tau^2} = b(\tau, \xi)$,

$$\frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln r[\varphi(\tau, d), \varphi_0(d)]}{(\tau - \xi) \sqrt{1-\tau^2}} d\tau = R(\xi, d), \quad (7)$$

где $\varphi_0(d)$ определяется по (6). Тогда, учитывая (3)–(5), представим

$$\begin{aligned} \Phi(d) = & \int_d^\infty \Omega(\xi, d) \exp \left\{ R(\xi, d) + \right. \\ & \left. + \frac{g(\xi)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln [a(\tau, d) |\varphi(\tau, d)|^p |\varphi(\tau, d) - \varphi_0(d)|^q]}{b(\tau, \xi)} d\tau \right\} d\xi, \end{aligned} \quad (8)$$

где $p = 1 - 2\kappa$, $q = 0.5$.

Так как при $\xi \in (d, \infty)$

$$I_0 = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{(\tau - \xi) \sqrt{1-\tau^2}} = -1,$$

то имеем оценку

$$-\ln M \leq R(\xi, d) \leq -\ln m, \quad (9)$$

где $m = \min r[\varphi(\tau, d), \varphi_0(d)]$, $M = \max r[\varphi(\tau, d), \varphi_0(d)]$.

Представив

$$|\varphi(\tau, d)| = 2 \int_{\tau}^1 \frac{dt}{a(t, d)}, \quad |\varphi(\tau, d) - \varphi_0(d)| = 2 \int_{-1}^{\tau} \frac{dt}{a(t, d)},$$

нетрудно получить оценки

$$A_1 \sqrt{1-\tau} \leq |\varphi(\tau, d)| \leq A_2 \sqrt{1-\tau}, \quad (10)$$

$$\tilde{A}_1(1+\tau) \leq |\varphi(\tau, d) - \varphi_0(d)| \leq \tilde{A}_2(1+\tau), \quad (11)$$

где

$$A_1 = \frac{4}{\pi \sqrt{d+1}}, \quad A_2 = \frac{4}{\pi \sqrt{d-1}}, \quad \tilde{A}_1 = \frac{A_1}{2\sqrt{2}}, \quad \tilde{A}_2 = \frac{A_2}{\sqrt{2}}. \quad (12)$$

Принимая во внимание (10), (11), перепишем выражение (8) в виде

$$\begin{aligned} \Phi(d) = & \int_d^{\infty} \Omega(\xi, d) \exp \left\{ \tilde{R}(\xi, d) + \right. \\ & \left. + \frac{g(\xi)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln [a(\tau, d)(1-\tau)^{p/2}(1+\tau)^q]}{b(\tau, \xi)} d\tau \right\} d\xi, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\tilde{R}(\xi, d)$ определяется формулой (7), если вместо $r[\varphi(\tau, d), \varphi_0(d)]$ подставить $\tilde{r}[\varphi(\tau, d), \varphi_0(d)] = r[\varphi(\tau, d), \varphi_0(d)] \cdot F(\tau, d)$,

$$F(\tau, d) = |\varphi(\tau, d)|^p |\varphi(\tau, d) - \varphi_0(d)|^q [(1-\tau)^{p/2}(1+\tau)^q]^{-1},$$

причем

$$A_1^p \tilde{A}_1^q \leq F(\tau, d) \leq A_2^p \tilde{A}_2^q. \quad (14)$$

С учетом (9) и (14) будем иметь

$$-\ln(MA_2^p \tilde{A}_2^q) \leq \tilde{R}(\xi, d) \leq -\ln(mA_1^p \tilde{A}_1^q)$$

или, подставляя в (12),

$$\frac{2^{q/2}}{M} \left(\frac{\pi \sqrt{d-1}}{4} \right)^{p+q} \leq \exp \tilde{R}(\xi, d) \leq \frac{2^{3q/2}}{m} \left(\frac{\pi \sqrt{d+1}}{4} \right)^{p+q}. \quad (15)$$

Обозначим второй внутренний интеграл выражения (13) через $I_1(\xi, d)$ и представим его в виде суммы двух интегралов

$$\begin{aligned} I_1(\xi, d) = & \frac{g(\xi)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln [\pi(1+\tau)^q(1-\tau)^{\frac{1+p}{2}}]}{b(\tau, \xi)} d\tau + \\ & + \frac{g(\xi)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(d-\tau)^{1/2}}{b(\tau, \xi)} d\tau = I_2(\xi) + I_3(\xi, d). \end{aligned} \quad (16)$$

Интеграл $I_2(\xi)$ в (16) конечен. В интеграле $I_3(\xi, d)$ при больших d имеем $\ln(d - \tau)^{1/2} \sim \ln \sqrt{d}$ (\sim — знак эквивалентности) и потому $I_3(\xi, d) \sim I_0 \ln \sqrt{d} = -\ln \sqrt{d}$. Следовательно,

$$\exp I_1(\xi, d) = \exp [I_2(\xi) + I_3(\xi, d)] \sim 1/\sqrt{d}. \quad (17)$$

Таким образом, учитывая (15) и (17), находим

$$\Phi(d) \sim \frac{1}{m} \int_d^\infty \Omega(\xi, d) d^n d\xi, \quad (18)$$

где $n = (p + q - 1)/2$.

Из формулы (2) следует, что при больших d , а следовательно, и при больших ξ , выражение $\Omega(\xi, d) \sim \sqrt{\xi d} (\xi^2 \sqrt{\xi - d})^{-1}$. Тогда по (18)

$$\Phi(d) \sim \frac{d^n}{m} \int_d^\infty \frac{V \xi d d\xi}{\xi^2 V \xi - d} = \frac{d^{n-0.5}}{m} \int_1^\infty \frac{V t dt}{t^2 V t - 1}. \quad (19)$$

Так как интеграл в (19) конечен, то $\lim_{d \rightarrow \infty} \Phi(d) = 0$ при $p + q < 2$, т. е. при $\kappa > -1/4$.

2°. Пусть $d \rightarrow 1$. Функция $\Omega(\xi, d)$ имеет на бесконечности ноль второго порядка, выражение $\exp \tilde{R}(\xi, d)$ согласно (15) ограничено, поэтому поведение $\Phi(d)$ (13) в окрестности $d=1$ определяется интегралом $I_1(\xi, d)$. Можно показать [2, стр. 82], что интеграл $I_1(\xi, d)$ в окрестности $\xi=1$ представим в виде

$$I_1(\xi, 1) = -c(\xi) \ln(\xi - 1) + u(\xi),$$

где $c(\xi) = 2^{-3/2} (2 + p) \sqrt{\xi + 1}$, $u(\xi)$ — ограниченная при $\xi=1$ функция. Тогда

$$\exp I_1(\xi, 1) = (\xi - 1)^{-c(\xi)} \exp u(\xi).$$

Отсюда видно, что $\lim_{d \rightarrow 1} \Phi(d) = \infty$ при $2 + p \geq 2$, т. е. при $\kappa \leq 1/2$.

Таким образом, уравнение (1), а следовательно, и исходная задача разрешимы при любой глубине h заложения точечного заряда, так как для реальных выемок $0 < \kappa \leq 1/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильинский Н. Б. Об одном методе построения выемки выброса при взрыве шнуровых зарядов.—Труды семинара по краевым задачам. Вып. 16. Изд-во Казанск. ун-та, 1979.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., ГИФМЛ, 1963.

Доложено на семинаре 25 января 1979 г.