КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 17 *Труды семинара по краевым задачам* *1980*

О ЗАДАЧЕ РИМАНА С КОЭФФИЦИЕНТОМ, ДОПУСКАЮЩИМ ОСОБЕННОСТЬ ТИПА НУЛЬ-ПОЛЮС

Б. А. Кац

1°. Пусть L есть простой замкнутый контур Ляпунова, разбивающий плоскость $\boldsymbol{C}$ на содержащую 0 область D^+ и содержащую ∞ область D^-, а t_0 — фиксированная точка контура L. Рассмотрим задачу об отыскании регулярных в D^+ и D^-, ограниченных в $\overline{D}^+$ и $\overline{D}^-$ и непрерывных в $\overline{D}^+\setminus t_0$ и $\overline{D}^-\setminus t_0$ функций $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ соответственно по условию граничного сопряжения

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L\setminus t_0. \tag{1}$$

Коэффициент $G(t)$ будем считать гёльдеровым вне любой окрестности t_0, а в точке t_0 допускающим такой разрыв, что $\varliminf\limits_{t\to t_0}|G(t)| = 0$ или $\varlimsup\limits_{t\to t_0}|G(t)| = \infty$. Если выполняются оба эти равенства, то будем говорить, что в точке t_0 коэффициент G имеет нуль-полюс. Порядком функции $G(t)$ в точке t_0 мы будем называть величину

$$\nu = \varlimsup_{t\to t_0}\left|\frac{\ln|G(t)|}{\ln|t-t_0|}\right|. \tag{2}$$

Задача Римана с коэффициентом, имеющим нули (т. е. $G(t_0)=0$) или полюсы ($|G(t_0)|=\infty$), исследовалась при различных предположениях о структуре этих особенностей во многих работах (см. § 15 [1], § 4 гл. XI [2], § 12 [3], а также [4, 5, 6]). М. И. Хайкин [4] рассматривал и случаи, когда $\varliminf\limits_{t\to t_0}|G(t)| \neq \varlimsup\limits_{t\to t_0}|G(t)|$ и один из этих пределов обращается в 0 или ∞; при этом ситуацию, когда в точке t_0 имеется нуль-полюс, он исключал из рассмотрения. При этих предположениях в [4] получены условия конечности числа линейно независимых решений однородной задачи (1) и оценки этого числа.

В данной статье задача (1) исследуется в предположении, что функция $\ln|G(t)|$ принадлежит классу, близкому к описанному автором в [7]. Во избежание громоздкости мы будем считать, что $G(t)/|G(t)|$ не имеет особенностей. Однако все построения этой заметки легко переносятся на случай, когда $\arg G$ имеет в точке t_0 разрыв первого рода, либо разрыв типа осцилляции [7[. Отметим также, что эти построения могут быть перенесены и на случай, когда $\arg G$ имеет несколько нулей-полюсов.

2°. Вначале мы опишем некоторые функции, возникающие в связи с измерением углов вблизи точки t_0. В силу гладкости L существует такое число $r_0 \in (0, 1)$, что при $0<r\leqslant r_0$ всякая окружность $|z-t_0|=r$ пересекает L в двух точках. Обозначим через E круг $|z-t_0|<r_0$, а через l_0 — дугу $L\cap E$. Точка t_0 разбивает дугу l_0 на две дуги l_0^+, l_0^- так, что при положительном обходе L сначала проходится l_0^-. Положим $t_0^+(r)=l_0^+\cap\{z:|z-t_0|=r\}$ и аналогично введем функцию $t_0^-(r)$.

Определим теперь в круге E функцию $A_+(z)$, положив ее равной углу, отсчитываемому от $\overrightarrow{t_0 t_0^+(|z-t_0|)}$ к $\overrightarrow{t_0 z}$ в положительном направлении; аналогично функция $A_-(z)$ равна углу, отсчитываемому в том же направлении от $\overrightarrow{t_0 t_0^-(|z-t_0|)}$ к $\overrightarrow{t_0 z}$. При $t\in l_0$ обозначим $A_\pm^+(t)=\lim\limits_{z\in D^+,\, z\to t} A_\pm(z)$, $A_\pm^-(t)=$ $=\lim\limits_{z\in D^-,\, z\to t} A_\pm(z)$. В дальнейшем нам понадобится следующий результат.

Лемма 1. *При $z\in E$ имеют место следующие соотношения*:

а) $A_+(z)-A_-(z)=-\pi s(z)+O(|z-t_0|^\lambda)$, $\lambda>0$,

где $s(z)=+1$ *при* $z\in D^+$ *и* $s(z)=-1$ *при* $z\in D^-$;

б) $2\pi-(A_+(z)+A_-(z))=\pi\sigma(z)+O(|z-t_0|^\lambda)$,

где функция $\sigma(z)$ *принимает в каждой из областей* $D^+\cap E$, $D^-\cap E$ *все значения из интервала* $(-1, 1)$, *причем* $\sigma^+(t)=1$ *при* $t\in l_0^+$, $\sigma^+(t)=-1$ *при* $t\in l_0^-$, $\sigma^-(t)=-1$ *при* $t\in l_0^+$ и $\sigma^-(t)=1$ *при* $t\in l_0^-$.

Доказательство. Обозначим $A_+(z)-A_-(z)=B(z)$. Очевидно, $B^+(t)=-A_-(t)$ при $t\in l_0^+$ и $B^+(t)=A_+(t)-2\pi$ при $t\in l_0^-$. Отсюда следует, что $B(z)$ непрерывна в $\overline{D^+\cap E}$ и $B^+(t_0)=-\pi$. Аналогично показывается, что $B(z)$ непрерывна в $\overline{D^-\cap E}$ и $B^-(t_0)=+\pi$. Таким образом, $\lim\limits_{z\to t_0}(B(z)+$ $+\pi s(z))=0$, входящая в утверждение (*а*) оценка скорости сходимости этого предела легко выводится из того, что L — контур Ляпунова. Аналогично доказывается и утверждение (б); приведем здесь один из способов построения входящей в это утверждение функции $\sigma(z)$. Выделим некоторую непрерывную в $\overline{D^+ \cap E}$ ветвь $\arg(z-t_0)$ и положим $\gamma_\tau = \{z : \arg(z-t_0) = \tau \arg(t_0^-(|z-t_0|)-t_0) + (1-\tau)\arg(t_0^+(|z-t_0|)-t_0)\}$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Дуги γ_τ заметают $\overline{D^+ \cap E}$. Легко видеть, что через каждую точку z из $\overline{D^+ \cap E}$ проходит одна дуга этого семейства. Обозначим эту дугу $\gamma(z)$ и положим $\sigma(z) = \frac{1}{\pi} \lim\limits_{w \in \gamma(z),\, w \to t_0} (2\pi - (A_+(z) + A_-(z))$. В области $D^- \cap E$ эта функция определяется посредством такого же построения.

3°. Опишем теперь класс функций, которому принадлежит $\ln|G(t)|$.

Пусть функция $\varphi(t)$ задана на $L \setminus t_0$; ее доминантой будем называть любую определенную при $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$ положительную функцию $v(x, y)$, такую, что $v(x, y) = v(y, x)$, и для любых $t', t'' \in L \setminus t_0$, лежащих достаточно близко к t_0, причем по одну сторону от t_0, справедливо неравенство

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leqslant v(|t'-t_0|, |t''-t_0|).$$

Если функция φ удовлетворяет вне любой окрестности t_0 условию Гёльдера, и у нее есть доминанта $v_\varphi(x, y)$, удовлетворяющая условию

$$v_\varphi(kx, ky) \leqslant v_\varphi(x, y),\ 0 < k \leqslant 1,$$

то мы будем называть функцию φ квазиоднородной. Далее, фиксируем некоторую неотрицательную функцию $\rho(x)$. Будем относить квазиоднородную функцию $\varphi(t)$ к классу $\mathcal{K}_\rho$, если ее доминанта v_φ такова, что сходится интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{v_\varphi(1, x)\rho(x)}{1-x}\,dx < \infty.$$

Очевидно, класс $\mathcal{K}_1$ есть объединение классов $K_v(t_0)$, введенных в [7]. В него, в частности, входят функции, колеблющиеся в окрестности t_0 от $-\infty$ до $+\infty$.

Лемма 2. *Если функция $\varphi(t)$ квазиоднородна, то при $t \in l_0$*

$$|\varphi(t)| \leqslant B_\varphi \ln|t-t_0|^{-1},\ B_\varphi = \mathrm{const}.$$

Доказательство.* Пусть $t \in l_0^+$ и $|t-t_0| = r$. Рассмотрим точки $t^{(k)} = t_0^+(re^k)$, $k = 0, 1, \ldots, [\ln r_0/r]$. Имеем

* Идею этого доказательства автору указал проф. Н. В. Говоров.

$$|\varphi(t^{(k-1)})-\varphi(t^{(k)})|\leqslant v_\varphi(re^{k-1},\ re^k)\leqslant v_\varphi(1, e),\ k=1, \dots, [\ln r_0/r].$$

Сложив все эти неравенства, получим

$$|\varphi(t)|\leqslant v_\varphi(1, e)\,[\ln r_0/r]+|\varphi(t_0^+(r'))|,$$

где $r'=re^{[\ln r_0/r]}\in[r_0e^{-1},\ r_0]$. Теперь доказываемая оценка очевидна; так же она доказывается при $t\in l_0^-$.

Введем теперь обозначения $l_0(r)=l_0\cap\{z:|z-t_0|\geqslant r\}$, $l_0^\pm(r)=l_0(r)\cap l_0^\pm$; кроме того, будем с каждой заданной на $l_0\setminus t_0$ функцией $\varphi(t)$ связывать две функции вещественной переменной $\varphi_0^\pm(r)=\varphi[t_0^\pm(r)]$, $0<r\leqslant r_0$.

Лемма 3. *Пусть* $\varphi\in\mathcal{K}_1$. *Тогда функция*

$$\int\limits_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}-\int\limits_{l_0(|z-t_0|)}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}-i\,(\varphi_0^+(|z-t_0|)(\pi-A_+(z))-$$
$$-\varphi_0^-(|z-t_0|)(\pi-A_-(z))$$

ограничена в $\overline{D^+\cap E}$ *и* $\overline{D^-\cap E}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать это утверждение для вещественной $\varphi\in\mathcal{K}_1$. Для такой функции φ в [7] была показана ограниченность функции

$$\int\limits_{l_0^+}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}-\int\limits_{l_0^+(|z-t_0|)}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}-\varphi_0^+(|z-t_0|)\times$$
$$\times\Bigg(\int\limits_{l_0^+}\frac{dt}{t-z}-\int\limits_{l_0^+(|z-t_0|)}\frac{dt}{t-t_0}\Bigg).$$

Простые вычисления показывают

$$\left|\operatorname{Re}\varphi_0^+(|z-t_0|)\Bigg(\int\limits_{l_0^+}\frac{dt}{t-z}-\int\limits_{l_0^+(|z-t_0|)}\frac{dt}{t-t_0}\Bigg)\right|=$$
$$=\left|\varphi_0^+(|z-t_0|)\ln\left|\frac{t_0^+(r_0)-z}{t_0^+(r_0)-t_0}\cdot\frac{t_0^+(|z-t_0|)-t_0}{t_0-z}\right|\right|\leqslant$$
$$\leqslant B_\varphi\ln|z-t_0|^{-1}\ln(1+r_0^{-1}|z-t_0|)\leqslant B_\varphi r_0^{-1}e^{-1}.$$

В то же время

$$\operatorname{Im}\Bigg(\int\limits_{l_0^+}\frac{dt}{t-z}-\int\limits_{l_0^+(|z-t_0|)}\frac{dt}{t-t_0}\Bigg)=\pi-A_+(z)+O(|z-t_0|). \qquad (3)$$

В этом нетрудно убедиться, рассмотрев расположение углов, разностью которых является левая часть (3). Согласно лемме 2, отсюда следует ограниченность функции

$$\int_{l_0^+} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} - \int_{l_0^+(|z-t_0|)} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} - i\varphi_0^+(|z-t_0|)(\pi - A_+(z)).$$

Аналогично исследуется интеграл по дуге l_0^-.

Далее, свяжем с функцией $\varphi(t)$ ее „четную" и „нечетную" компоненты $\varphi^e(r) = \frac{1}{2}(\varphi_0^-(r) + \varphi_0^+(r))$, $\varphi^0(r) = \frac{1}{2}(\varphi_0^-(r) - \varphi_0^+(r))$.

Из лемм 1, 2, 3 сразу получается такое утверждение.

Следствие 1. *Пусть $\varphi \in \mathcal{K}_1$. Тогда вблизи t_0 ограничена функция*

$$\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} - \int_{l_0(|z-t_0|)} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} - i\pi(\varphi^e(|z-t_0|)\,s(z) - \varphi^0(|z-t_0|)\sigma(z)).$$

Отметим еще следующий простой факт.

Следствие 2. *Пусть φ есть вещественная функция класса $\mathcal{K}_1$. Тогда вблизи t_0 ограничены функции*

$$\operatorname{Im}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} - (\varphi_0^+(|z-t_0|)(\pi - A_+(z)) - \\ - \varphi_0^-(|z-t_0|)(\pi - A_-(z))), \tag{4}$$

$$\operatorname{Im}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} - \pi(\varphi^e(|z-t_0|)\,s(z) - \varphi^0(|z-t_0|)\,\sigma(z)). \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим $\theta^\pm(r) = \arg(t_0^\pm(r) - t_0)$; тогда

$$\operatorname{Im}\int_{l_0(|z-t_0|)} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = \int_{|z-t_0|}^{r_0} \left(\varphi_0^-(r)\frac{d\theta^-}{dr} - \varphi_0^+(r)\frac{d\theta^+}{dr}\right) dr. \tag{6}$$

Так как L есть контур Ляпунова, то $d\theta^\pm/dr = O(r^{\lambda-1})$, $\lambda > 0$, т. е. функции $\varphi_0^\pm(r)\,d\theta^\pm/dr$ абсолютно интегрируемы в нуле, и интеграл (6) ограничен. Теперь ограниченность функций (4) и (5) следует из леммы 3 и следствия 1.

Лемма 4: *Пусть операторы S и Q определяются равенствами*

$$(S\varphi)(t) = \int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t}, \quad (Q\varphi)(t) = \begin{cases} -\int_{|t-t_0|}^{r_0} 2\varphi^0(r)\frac{dr}{r} & \text{при } t \in l_0, \\ 0 & \text{при } t \in L \setminus l_0. \end{cases}$$

Если $\varphi \in \mathscr{K}_\rho$, *где* $\rho(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x}$, *то* $(S-Q)\varphi \in \mathscr{K}_1$.

Доказательство этой леммы сводится к выражению доминанты функции $(S-Q)\varphi$ через доминанту функции φ.

Следствие 3. *Если* $\varphi \in \mathscr{K}_\rho$, *где* $\rho(x)$ *то же, что в лемме* 4, *а симметрическая разность* $\varphi^0(r)$ *ограничена, то* $S\varphi \in \mathscr{K}_1$.

Доказательство. Действительно, в этом случае

$$|(Q\varphi)(t') - (Q\varphi)(t'')| \leqslant 2\sup|\varphi^0|\cdot\left|\int\limits_{|t''-t_0|}^{|t'-t_0|} dr/r\right| =$$

$$= 2\sup|\varphi^0|\cdot\left|\ln\left|\frac{t'-t_0}{t''-t_0}\right|\right|.$$

Доминанта $v_Q(x, y) = 2\sup|\varphi^0|\cdot|\ln x/y|$ удовлетворяет всем определяющим класс $\mathscr{K}_1$ условиям, т. е. $Q\varphi \in \mathscr{K}_1$. Но тогда согласно лемме 4 и $S\varphi \in \mathscr{K}_1$.

4°. Рассмотрим теперь однородную задачу (1), т. е. положим $g(t) = 0$. Как уже отмечалось, мы будем считать отношение $G(t) / |G(t)|$ свободным от особенностей. В этом случае величина $\frac{1}{2\pi}[\arg G]_L = \varkappa$ есть целое число, и коэффициент представим в виде $G(t) = t^\varkappa \exp 2\pi i(\alpha(t) - i\beta(t))$, где функция $\alpha(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера. Функцию $\beta(t) = \frac{1}{2\pi}\ln|G(t)t^{-\varkappa}|$ мы будем считать принадлежащей классу $\mathscr{K}_1$; тогда этому же классу принадлежит $\ln|G(t)|$. Если $\overline{\lim\limits_{t\to t_0}}\beta(t) = \infty$, а $\underline{\lim\limits_{t\to t_0}}\beta(t) = -\infty$, то $G(t)$ имеет в точке t_0 нуль-полюс. Согласно лемме 2, определяемой формулой (2), порядок $G(t)t^{-\varkappa}$ в точке t_0 конечен. Очевидно, порядки функций $G(t)$ и $G(t)t^{-\varkappa}$ в точке t_0 совпадают.

Введем в рассмотрение функции

$$\Gamma(z) = \int\limits_L \frac{\alpha(t) - i\beta(t)}{t-z}\,dt,\quad X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)},\quad X^-(z) = z^{-\varkappa}e^{\Gamma^-(z)}.$$

Очевидно, $\operatorname{Re}\Gamma(z) = \operatorname{Re}\int\limits_L \frac{\alpha(t)\,dt}{t-z} + \operatorname{Im}\int\limits_L \frac{\beta(t)\,dt}{t-z}$. Первое слагаемое здесь ограничено, а второе оценивается с помощью следствия 2. Таким образом, найдется такая постоянная $C_\Gamma > 0$, что

$$|\operatorname{Re}\Gamma(z) - \pi(\beta^e(|z-t_0|)s(z) - \beta^0(|z-t_0|)\sigma(z))| \leqslant C_\Gamma. \tag{7}$$

Для любого решения $\Phi(z)$ задачи (1) отношение $\Phi(z)/X(z)$ регулярно в $C \setminus t_0 \setminus \infty$. Согласно оценке (7) и лемме 2 в точке t_0 это отношение либо регулярно, либо имеет полюс. Следовательно, оно имеет вид $(z-t_0)^n P_{\varkappa-n}(z)$, где n целое число, а $P_{\varkappa-n}$ — полином степени не выше $\varkappa - n$. Таким образом, любое решение однородной задачи (1) представимо в форме

$$\Phi(z) = (z-t_0)^n X(z) P_{\varkappa-n}(z). \tag{8}$$

Остается выяснить, при каких значениях n эта функция ограничена в окрестности t_0, т. е. действительно является решением (1). Согласно (7) для этого необходимо и достаточно, чтоб функция

$$n \ln|z-t_0| + \pi(\beta^e(|z-t_0|)s(z) - \beta^0(|z-t_0|)\sigma(z)) \tag{9}$$

была ограничена сверху. Из данного в лемме 1 описания функций $s(z)$ и $\sigma(z)$ следует, что

$$\left\{\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix}\right\}_{|z-t_0|=r} (\beta^e(r)s(z) - \beta^0(r)\sigma(z)) = \pm(|\beta^e(r)| + |\beta^0(r)|) =$$

$$= \pm \max\{|\beta_0^+(r)|,\ |\beta_0^-(r)|\}. \tag{10}$$

Таким образом, для ограниченности функции (8) в окрестности t_0 необходимо, чтоб

$$n \geqslant \pi \varlimsup_{r\to 0} \frac{\max\{|\beta_0^+(r)|,\ |\beta_0^-(r)|\}}{\ln r^{-1}} = \frac{1}{2} \varlimsup_{t\to t_0} \left| \frac{\ln|G(t)|}{\ln|t-t_0|} \right| = \frac{1}{2}\nu. \tag{11}$$

Покажем, что при нецелом $\frac{1}{2}\nu$ это условие является достаточным. Действительно, тогда $n > \frac{1}{2}\nu$. Для любого $\varepsilon > 0$ согласно (7), (10), (11) найдется такое $\delta > 0$, что при $|z-t_0| < \delta$

$$C_X^{-1}|z-t_0|^{\frac{1}{2}\nu+\varepsilon} \leqslant |X(z)| \leqslant C_X|z-t_0|^{-\frac{1}{2}\nu-\varepsilon}, \quad C_X = \mathrm{const}. \tag{12}$$

Фиксируем ε так, чтобы $n - \frac{1}{2}\nu > \varepsilon > 0$. Тогда

$$|(z-t_0)^n X(z)| \leqslant C_X|z-t_0|^{n-\frac{1}{2}\nu-\varepsilon} \leqslant C_X,$$

т. е. функция (8) ограничена. Также доказывается ограниченность (8) в случае целого $\frac{1}{2}\nu$ при $n \geqslant \frac{1}{2}\nu + 1$. При $n = \frac{1}{2}\nu$ функция (9) может оказаться неограниченной.

Итак, доказан следующий результат.

Теорема 1. *Пусть в задаче* (1) $g(t)\equiv 0$, $G(t)/|G(t)|$ *удовлетворяет условию Гёльдера на* L, $\ln|G(t)|\in\mathcal{K}_1$, $\frac{1}{2\pi}[\arg G]_L=\varkappa$, *а порядок* $G(t)$ *в точке* t_0 *равен* ν. *Определим число* $n=n(G)$ *следующим образом: если число* $\frac{1}{2}\nu$ *целое и функция*

$$(1-\pi^{-1}A_+(z))\ln|G_0^+(|z-t_0|)|-\\ -(1-\pi^{-1}A_-(z))\ln|G_0^-(|z-t_0|)|+\nu\ln|z-t_0| \tag{13}$$

ограничена сверху в E, *то* $n=\frac{1}{2}\nu$; *во всех остальных случаях* $n=\left[\frac{1}{2}\nu\right]+1$. *Тогда при* $\varkappa<n$ *задача* (1) *не имеет нетривиальных решений. При* $\varkappa\geqslant n$ *она имеет* $\varkappa-n+1$ *линейно независимых решений, а ее общее решение имеет вид* (8).

Условиям теоремы 1 удовлетворяют и некоторые коэффициенты $G(t)$, имеющие в точке t_0 не нули-полюсы, а обычные нули или полюсы. Пусть, например, $L=\{t:|t|=1\}$, $t_0=1$, $G(t)=t^m(t-1)^k$, где m и k целые числа. Нетрудно убедиться, что при нечетном k функция $G(t)/|G(t)|$ имеет разрыв в точке t_0; поэтому, желая применить теорему 1, мы должны считать число k четным. Простые расчеты показывают, что

$$\ln|G(t)|=k\ln|t-1|\in\mathcal{K}_1,\quad \varkappa=m+\frac{1}{2}k,\quad \nu=|k|,\quad n=\frac{1}{2}|k|.$$

Таким образом, $\varkappa-n=m+\frac{1}{2}(k-|k|)$, и если $k\geqslant 0$, то задача имеет $\max(0, m+1)$ решений, если же $k<0$, то число решений есть $\max(0, m+k+1)$. Это вполне соответствует классическим теоремам об исключительном случае однородной задачи Римана (см., например, § 15 [1]).

Условие ограниченности функции (13) получается из (9) переходом от функций s и σ к функциям A_+, A_-. Такой переход сделан ввиду большей наглядности этих последних функций.

5°. Перейдем теперь к исследованию неоднородной задачи (1). Для простоты будем здесь считать, что $\frac{1}{2}\nu$ является нецелым числом; тогда $n=\left[\frac{1}{2}\nu\right]+1$. От свободного члена $g(t)$ будем требовать, чтоб на L он удовлетворял условию Гёльдера, а в точке t_0 был $2n$ раз дифференцируем по Тейлору, т. е. должен существовать такой полином $T_{2n}(z)$ (многочлен Тейлора), что функция $\hat{g}(t) = (g(t) - T_{2n}(t))(t - t_0)^{-2n}$ удовлетворяет на L условию Гёльдера (см., например, [5, 6]). Граничное сопряжение (1) можно записать в виде

$$\frac{\Phi^+(t) - T_{2n}(t)}{(t - t_0)^n X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{(t - t_0)^n X^-(t)} = \frac{\hat{g}(t)(t - t_0)^n}{X^+(t)}, \quad t \in L \setminus t_0. \tag{14}$$

Обозначим правую часть (14) через $f(t)$. Согласно (12) имеем $|f(t)| \leqslant C_f |t - t_0|^{n - \frac{1}{2}\nu - \varepsilon}$. Положив здесь $\varepsilon = (n - \nu/2)/2$, получаем вблизи t_0 оценку

$$|f(t)| \leqslant C_f |t - t_0|^{\varepsilon}, \quad C_j = \mathrm{const}. \tag{15}$$

Таким образом, существует интеграл

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(t)\,dt}{t - z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{g(t) - T_{2n}(t)}{(t - t_0)^n} \cdot \frac{dt}{t - z},$$

и если он ограничен в окрестности t_0, то функция

$$\hat{\Phi}^+(z) = T_{2n}(z) + (z - t_0)^n X^+(z) \Psi^+(z),$$

$$\hat{\Phi}^-(z) = (z - t_0)^n X^-(z) \Psi^-(z) \tag{16}$$

является частным решением задачи (1).

Потребуем теперь, чтоб $\beta \in \mathscr{K}_\rho$ и $Q\beta \in \mathscr{K}_1$; здесь ρ и Q те же, что в лемме 4. При этих условиях функция Ψ ограничена в окрестности t_0. Действительно, по лемме 4 $S\beta \in \mathscr{K}_1$. Но тогда $\Gamma^+(t) = \pi i(\alpha - i\beta) + S(\alpha - i\beta) \in \mathscr{K}_1$ и $n \ln(t - t_0) - \Gamma^+(t) \in \mathscr{K}_1$ (здесь берется ветвь логарифма, полученная с помощью разреза, целиком лежащего в D^-). Согласно (12) действительная часть функции $n \ln(t - t_0) - \Gamma^+(t)$ ограничена сверху. Но если $\operatorname{Re} w_{1,2} \leqslant A$, то $|e^{w_1} - e^{w_2}| \leqslant e^A |w_1 - w_2|$. Следовательно, $(t - t_0)^n / X^+(t) \in \mathscr{K}_1$. Нетрудно показать, что произведение функции класса $\mathscr{K}_1$ на функцию, удовлетворяющую условию Гёльдера, принадлежит $\mathscr{K}_1$. Таким образом, $f \in \mathscr{K}_1$ и по лемме 3 ограничена функция

$$\Psi(z) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_0(|z - t_0|)} \frac{f(t)\,dt}{t - t_0} - \frac{1}{2\pi} (f_0^+(|z - t_0|)(\pi - A_+(z)) -$$

$$- f_0^-(|z - t_0|)(\pi - A_-(z))).$$

Но из оценки (15) следует ограниченность второго и третьего членов этого выражения. Итак, функция $\Psi(z)$ ограничена. Мы получили следующий результат.

Теорема 2. *Пусть коэффициент и свободный член задачи* (1) *удовлетворяют следующим условиям:*

1*а*) $G(t)/|G(t)|$ *удовлетворяют условию Гёльдера на* L, $\ln|G(t)| \in \mathcal{K}_\rho$, *где* $\rho(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x}$;

1*б*) $Q(\ln|G(t)|) \in \mathcal{K}_1$;

1*в*) *порядок* ν *коэффициента* G *в точке* t_0 *таков, что число* $\frac{1}{2}\nu$ *нецелое;*

2*а*) $g(t)$ *удовлетворяет условию Гёльдера на* L;

2*б*) *в точке* t_0 *функция* $g(t)$ *дифференцируема по Тейлору* $2n = 2\left[\frac{1}{2}\nu\right] + 2$ *раз.*

Тогда при $\varkappa \geqslant n$ *общее решение этой задачи есть*

$$\Phi(z) = \hat{\Phi}(z) + (z - t_0)^n \mathrm{X}(z) P_{\varkappa - n}(z),$$

где $\hat{\Phi}(z)$ *определяется формулой* (16). *При* $\varkappa < n$ *задача* (1) *разрешима при выполнении условий*

$$\int_L \frac{g(\tau) - T_{2n}(\tau)}{(\tau - t_0)^n \mathrm{X}^+(\tau)} \tau^{s-1}\, d\tau = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, |\varkappa - n| - 1.$$

Если эти условия выполнены, то $\hat{\Phi}$ ***является единственным решением задачи*** (1).

Результат теоремы справедлив и для целого $\nu/2$, если при этом функция (13) ограничена.

Согласно следствию 3 условие (1*б*) выполняется автоматически, если симметрическая разность $\ln|G_0^+(r)| - \ln|G_0^-(r)|$ ограничена.

Условие (2*б*) может быть заменено на несколько более слабое условие дифференцируемости по Тейлору функции

$$g^-(t) = -\frac{1}{2}g(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)\,d\tau}{\tau - t};$$

при этом в (14) и (16) полином $T_{2n}(z)$ следует заменить на функцию $g^+(z) + T_{2n}^-(z)$, где T_{2n}^- — многочлен Тейлора порядка $2n$ для функции $g^-(t)$.

Автор полагает, что в условии (2*б*) порядок дифференцируемости может быть уменьшен до $[\nu] + 1$.

Автор благодарен проф. Л. А. Аксентьеву за содействие в выполнении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.

2. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев, 1973.

3. Чибрикова Л. И. Основные краевые задачи для аналитических функций. Казань, 1977.

4. Хайкин М. И. Исключительный случай однородной задачи Римана с конечным индексом коэффициента.—„Изв. вузов. Математика“, 1972, № 5, с. 92—103.

5. Пресдорф З. Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек.—„Математические исследования“, 1972, т. 7, вып. 1 (23), с. 116—132.

6. Радченко Т. Н. Сингулярное интегральное уравнение третьего рода в пространствах H_ν, D_τ^ν, F_τ^ν и P_τ^ν.— В сб.: Теория функций. Дифференциальные уравнения и их приложения. Элиста, 1976, с. 138—155.

7. Кац Б. А. Краевая задача Римана с осциллирующим коэффициентом.— Труды семинара по краевым задачам. Вып. 14. Казань, 1977, с. 110—120.

Доложено на семинаре 30 января 1979 г.