КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 17 *Труды семинара по краевым задачам* *1980*

УДК 517.544

К ЗАДАЧЕ МАРКУШЕВИЧА ДЛЯ ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

А. А. Патрушев

1°. Требуется определить функции $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$, аналитические соответственно в областях D^+, D^-, если на контуре L, который разбивает плоскость C на эти области, их краевые значения связаны соотношением

$$\Phi^+(t) = a(t)\,\Phi^-(t) + b(t)\,\overline{\Phi^+(t)} + g(t), \tag{1}$$

коэффициенты $a(t)$, $b(t)$ и свободный член $g(t)$ принадлежат классу $H(L)$.

Впервые эта задача была поставлена Маркушевичем А. И. [1]. Ее прикладной характер указал И. Н. Векуа [2]. Векуа Н. П. [3] обосновал ее нормальную разрешимость. Теоремы Нетера были доказаны Боярским Б. В. [4]. Михайлов Л. Г. [5, с. 141—164] дал приближенный метод решения задачи Маркушевича

$$\Phi^+(t) = a_1(t)\,\Phi^-(t) + b_1(t)\,\overline{\Phi^-(t)} + g_1(t)$$

в случае многосвязной области, когда коэффициенты $a_1(t)$, $b_1(t)$ связаны соотношением $|a_1(t)| > |b_1(t)|$. В случае $|a_1(t)| \equiv \equiv |b_1(t)|$ было получено решение в замкнутой форме. Сабитов И. Х. [6], [7] показал, что в случае круга число линейно независимых решений и число условий разрешимости задачи, если $|a_1(t)| < |b_1(t)|$ точно выражается через $\varkappa = \operatorname{Ind} a_1(t)$ и номер n отрезка ряда Фурье, аппроксимирующего коэффициент $b_1(t)$. Салехов Л. Г. [8] дал решение задачи Маркушевича в замкнутой форме в случае аналитической продолжимости коэффициентов $a_1(t)$, $b_1(t)$ на внешность контура L, когда L является алгебраической замкнутой линией. Вопросы устойчивости решений задачи (1) рассмотрены в работе Литвинчука Г. С. [9].

В настоящей работе предлагается решение задачи Маркушевича (1) в замкнутой форме в случае единичного круга, когда коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют условию: отношение $\frac{a(t)}{b(t)+1}$ аналитически продолжимо на внешность единичного круга. Определены число решений и условий разрешимости в случае произвольного гладкого контура Ляпунова как в случае $|b(t)|<1$, так и в случае $|b(t)|>1$. Метод решения отличен от методов Л. Г. Михайлова и И. Х. Сабитова и заключается в приведении задачи (1) к сингулярному интегральному уравнению относительно $\operatorname{Re}\Phi^+(t)$.

2°. Рассмотрим однородную задачу Маркушевича

$$\Phi^+(t)=a(t)\Phi^-(t)+b(t)\overline{\Phi^+(t)}. \tag{2}$$

Решение ищем в классе функций, исчезающих на бесконечности и обладающих граничным значением $\Phi^+(t)$, нигде на контуре L не обращающемся в нуль. При решении задачи используем следующий факт: если функции $f(t)$, $g(t)$ непрерывны на границе области G, граница ∂G непрерывна и замкнута, и для всех $t\in\partial G$ выполняется неравенство $|f(t)|>|g(t)|$, то при надлежащем выборе аргументов имеем

$$\Delta_{\partial G}\arg[f(t)+g(t)]=\Delta_{\partial G}\arg f(t). \tag{3}$$

Перепишем соотношение (2) в виде

$$\Phi^+(t)\left[1-b(t)e^{-2i\arg\Phi^+(t)}\right]=a(t)\Phi^-(t)$$

и заставим в полученном краевом условии точку t обойти один раз в положительном направлении контур L. Учитывая (3), подсчитаем полученное при этом приращение аргумента обеих частей равенства. Имеем две основные возможности:

1) $|b(t)|<1$, тогда $n^+=\varkappa-n^-$, откуда $n^++n^-=\varkappa$, где $\varkappa=\operatorname{Ind}a(t)$, n^+ — число нулей функции $\Phi^+(z)$ в D^+, n^- — число нулей функции $\Phi^-(z)$ в D^-;

2) $|b(t)|>1$, тогда $n^++\varkappa_1-2n^+=\varkappa-n^-$, откуда $\varkappa-\varkappa_1+n^+=n^-$, здесь $\varkappa_1=\operatorname{Ind}b(t)$.

То есть справедлива

Лемма 1. *В случае $|b(t)|<1$ условие $\varkappa\geq 0$ является необходимым для разрешимости однородной задачи Маркушевича. В случае же $|b(t)|>1$ необходимое условие разрешимости запишется в виде $\varkappa-\varkappa_1+n^+\geq 0$, где $\varkappa_1=\operatorname{Ind}b(t)$, $\varkappa=\operatorname{Ind}a(t)$, n^+ — число нулей функции $\Phi^+(z)$ в D^+.*

Утверждение леммы при $|b(t)|<1$ было получено Михайловым Л. Г. [5, с. 141—164].

Приступим к решению задачи (2), считая L единичной окружностью. Перепишем (2) в виде

$$\Phi^+(t) = \frac{a(t)}{b(t)+1}\Phi^-(t) + \frac{2b(t)}{b(t)+1}\operatorname{Re}\Phi^+(t) \tag{4}$$

и, считая $\operatorname{Re}\Phi^+(t)$ известной, рассмотрим соотношение (4) как краевое условие задачи Римана. Обозначим через $X(z)$ каноническую функцию этой задачи. Тогда ее решение запишется в виде [10, с. 111—117] $\Phi(z) = X(z)[\Psi(z) + P_{x_0-1}(z)]$,

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{2b(\tau)\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)}{[b(\tau)+1]X^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z},$$

где

$$x_0 = \operatorname{Ind}\frac{a(t)}{b(t)+1} = \begin{cases} x, & \text{если } |b(t)| < 1, \\ x - x_1, & \text{если } |b(t)| > 1. \end{cases}$$

Обратим здесь внимание на то, что в силу леммы 1 в случае $|b(t)| < 1$ нас интересуют решения при $x \geqslant 0$, а в случае $|b(t)| > 1$ — при $x - x_1 + n^+ \geqslant 0$. В случае $-n^+ \leqslant x - x_1 < 0$ возникает $-(x - x_1)$ условий разрешимости

$$\int\limits_L \frac{2b(\tau)\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)}{[b(\tau)+1]X^+(\tau)}\tau^k\,d\tau = 0, \quad k = \overline{1, \ -(x-x_1)}.$$

На окружности L имеем

$$\Phi^+(t) = X^+(t)\left[\frac{b(t)\operatorname{Re}\Phi^+(t)}{[b(t)+1]\cdot X^+(t)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{b(\tau)\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)}{[b(\tau)+1]X^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - t} + P_{x_0-1}(t)\right]. \tag{5}$$

С другой стороны, заметим, что функция $\Phi^+(z)$ определяется с точностью до мнимого постоянного через значение своей действительной части на контуре

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \operatorname{Re}\Phi^+(\varphi)\frac{\tau + z}{\tau - z}\,d\varphi + iC, \quad \tau = e^{i\varphi},$$

откуда будем иметь на L

$$\Phi^+(t) = \operatorname{Re}\Phi^+(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)}{\tau}\,d\tau + iC. \tag{6}$$

Следовательно, из соотношений (5) и (6) получаем

$$\operatorname{Re}\Phi^+(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)}{\tau}\,d\tau + iC =$$

$$= \frac{\chi^+(t)}{\pi i} \int\limits_L \frac{b(\tau)\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)}{[b(\tau)+1]\cdot\chi^+(\tau)} \times$$

$$\times \frac{d\tau}{\tau - t} + \frac{b(t)}{b(t)+1}\operatorname{Re}\Phi^+(t) + \chi^+(t)P_{x_0-1}(t),$$

или что все равно

$$\operatorname{Re}\Phi^+(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)}{\tau - t} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \left[\frac{b(t)+1}{b(\tau)+1}\cdot\frac{\chi^+(t)}{\chi^+(\tau)}\cdot b(\tau) - b(t)\right]\frac{\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)}{\tau - t} d\tau =$$

$$= \frac{b(t)+1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)}{\tau} d\tau + [b(t)+1]\cdot[\chi^+(t)P_{x_0-1}(t) + iC].$$

Мы пришли к вырожденному сингулярному интегральному уравнению типа

$$\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(\tau, t)\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t).$$

Рассмотрим частный случай, когда в однородной задаче Маркушевича

$$\Phi^+(t) = \frac{a(t)}{b(t)+1}\Phi^-(t) + \frac{2b(t)}{b(t)+1}\operatorname{Re}\Phi^+(t)$$

$\frac{a(t)}{b(t)+1}$ аналитически продолжимо с контура L на внешность единичного круга. В этом случае получим вырожденное характеристическое уравнение

$$\frac{\operatorname{Re}\Phi^+(t)}{b(t)+1} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)}{b(\tau)+1}\cdot\frac{d\tau}{\tau - t} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)}{\tau} d\tau + P_{x_0-1}(t) + C_0. \tag{7}$$

Введем кусочно-аналитическую функцию [11]

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)}{b(\tau)+1}\cdot\frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Согласно формулам Сохоцкого уравнение (7) примет вид

$$\Psi^+(t) = \frac{1}{2}[d + P_{x_0-1}(t)], \quad d = c_0 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Решение этой односторонней задачи запишется в виде

$$\Psi^+(z) = \frac{1}{2}[d + P_{x_0-1}(z)],$$

$$\Psi^-(z) = -\varphi_1^-(z) + \varphi_1(\infty),$$

$\varphi^-(z)$ — произвольная аналитическая в области D^- функция. Условие аналитической продолжимости в область D^+ функции $\frac{1}{2}[d + P_{x_0-1}(t)]$, очевидно, выполняется, следовательно, на контуре L имеем

$$\frac{\operatorname{Re}\Phi^+(t)}{b(t)+1} = \frac{1}{2}[d + P_{x_0-1}(t)] - \varphi^-(t). \tag{8}$$

Отсюда, полагая $\Psi_1^-(z) = \frac{1}{2}[d + P_{x_0-1}(z)] - \varphi^-(z)$, получаем

$$\operatorname{Im}\{[b(t)+1]\cdot\Psi_1^-(t)\} = 0. \tag{9}$$

Это задача Гильберта для функции $\Psi_1^-(z)$, аналитической в области D^-, всюду, исключая бесконечно удаленную точку, где у нее должен быть полюс порядка $x_0 - 1$. Индекс задачи (9)

$$2x_1' = \operatorname{Ind}\left[\frac{b(t)+1}{\overline{b(t)}+1}\right] = \begin{cases} 2x_1, & \text{если } |b(t)| > 1, \\ 0, & \text{если } |b(t)| < 1 \end{cases}$$

и ее решением будет функция (12, с. 143—148]

$$\Psi_1^-(z) = \chi_1(z)\,[Q_{x_0+x_1'-1}(z) + \overline{Q_{x_0+x_1'-1}(z^*)}]. \tag{10}$$

Отсюда видно, что задача имеет отличные от нуля решения в случае $x_0 + x_1' > 0$. Если $|b(t)| < 1$, то $x_1' = 0$, $x_0 = x$ и задача имеет $2x$ линейно-независимых решений над полем R. Учитывая (8), (10), имеем на L

$$\operatorname{Re}\Phi^+(t) = [b(t)+1]\cdot[\chi_1^-(t)\{Q_{x_0+x_1'-1}(t) + \overline{Q_{x_0+x_1'-1}(t)}\}] \tag{11}$$

и соотношение (4) принимает вид

$$\Phi^+(t) = \frac{a(t)}{b(t)+1}\Phi^-(t) + 2b(t)\chi_1^-(t)\times$$
$$\times\{Q_{x_0+x_1'-1}(t) + \overline{Q_{x_0+x_1'-1}(t)}\}].$$

Для функции

$$\Omega(z) = \begin{cases} \Phi^+(z), & z \in D^+ \\ \dfrac{a(z)}{b(z)+1}\Phi^-(z), & z \in D^-, \end{cases}$$

имеем задачу о скачке. Ее решение запишется в виде

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{2b(\tau)\chi_1^-(\tau)\{Q_{x_0+x_1'-1}(\tau)+\overline{Q_{x_0+x_1'-1}(\tau)}\}}{\tau-z}\,d\tau+P_{x_0-1}(z)$$

и, следовательно, общее решение задачи Маркушевича определится формулами

$$\Phi(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_L \frac{2b(\tau)\chi_1^-(\tau)\{Q_{x_0+x_1'-1}(\tau)+\overline{Q_{x_0+x_1'-1}(\tau)}\}}{\tau-z}\,d\tau+\\ \qquad\qquad +P_{x_0-1}(z),\quad z\in D^+,\\ \dfrac{b(z)+1}{a(z)}\left[\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_L \frac{2b(\tau)\chi_1^-(\tau)\{Q_{x_0+x_1'-1}(\tau)+\overline{Q_{x_0+x_1'-1}(\tau)}\}}{\tau-z}\,d\tau+\right.\\ \qquad\qquad \left.+P_{x_0-1}(z)\right],\quad z\in D^-.\end{cases} \tag{12}$$

Обращаем здесь внимание на то, что, задавая постоянные в многочлене $P_{x_0-1}(z)$, мы тем самым задаем главную часть на бесконечности функции $\Psi_1^-(z)$, т. е. в общей сложности мы имеем $2x$ линейно-независимых решений над полем R.

Предполагая теперь, что в случае $|b(t)|>1$ у нас $x_0\geqslant 0$, имеем: однородная задача Маркушевича при $x>0$ разрешима и имеет $2x$ линейно-независимое решение над полем R. При $x<0$ однородная задача неразрешима. Пусть теперь при $|b(t)|>1$ у нас $x_0<0$, т. е. $x-x_1<0$, тогда:

а) в случае $x_1\leqslant 0$ однородная задача неразрешима.

б) при $x-x_1<-n^+$, в силу леммы 1, задача также неразрешима, здесь n^+—число нулей функции $\Phi^+(z)$ в D^+.

в) при $x_1>0$, $-n^+\leqslant x-x_1<0$, в этом случае возникает $-(x-x_1)$ условий разрешимости

$$\int\limits_L b(\tau)\chi_1^-(\tau)\,[Q_{x_1-1}(\tau)+\overline{Q_{x_1-1}(\tau)}]\,\tau^l\,d\tau=0, \tag{13}$$

где $l=\overline{0,\ -(x-x_1)}$.

Исследуем подробнее последний случай. Учитывая, что

$$Q_{x_1-1}(\tau)+\overline{Q_{x_1-1}(\tau)}=2\alpha_0+\sum_{k=1}^{x_1-1}\alpha_k\,[\tau^k+\bar\tau^k]+$$

$$+\,i\sum_{k=1}^{x_1-1}\beta_k\,[\tau^k-\bar\tau^k],\quad \tau=e^{i\varphi},\quad c_k=\alpha_k+i\beta_k,$$

перепишем (13) в виде

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{2\varkappa_1-1} y_k d_k^l = 0, \\ &\sum_{k=0}^{2\varkappa_1-1} y_k b_k^l = 0, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

где $y_k = \alpha_k$, $k = \overline{0,\ \varkappa_1 - 1}$; $y_{k+i} = \beta_i$, $i = \overline{1,\ \varkappa_1 - 1}$;

$$d_k^l = \int_0^{2\pi} [u(\varphi)\{\cos(l+k+1)\varphi + \cos(l+1-k)\varphi\} -$$

$$- v(\varphi)\{\sin(k+l+1)\varphi + \sin(l+1-k)\varphi\}]\, d\varphi,\ k = \overline{0,\ \varkappa_1 - 1};$$

$$d_{k+i}^l = \int_0^{2\pi} [u(\varphi)\{\sin(i+l+1)\varphi + \sin(l+1-i)\varphi\} -$$

$$- v(\varphi)\{\cos(i+1+l)\varphi - \cos(l+1-i)\varphi\}]\, d\varphi,\quad i = \overline{1, \varkappa_1 - 1};$$

$$b_k^l = \int_0^{2\pi} [u(\varphi)\{\sin(k+l+1)\varphi + \sin(l+1-k)\varphi\} +$$

$$+ v(\varphi)\{\cos(k+l+1)\varphi + \cos(l+1-k)\varphi\}]\, d\varphi,\ k = \overline{0,\ \varkappa_1 - 1};$$

$$b_{k+i}^l = \int_0^{2\pi} [u(\varphi)\{\cos(i+l+1)\varphi - \cos(l+1-i)\varphi\} -$$

$$- v(\varphi)\{\sin(i+l+1)\varphi - \sin(l+1-i)\varphi\}]\, d\varphi,\quad i = \overline{1,\ \varkappa_1 - 1};$$

$$l = \overline{0,\ -(\varkappa - \varkappa_1)}.$$

Здесь

$$u(\varphi) + iv(\varphi) = b(\tau(\varphi)) \cdot X_1^-(\tau(\varphi)).$$

Мы получили однородную систему уравнений относительно неизвестных y_k. Число уравнений здесь $2(\varkappa_1 - \varkappa)$, неизвестных $2\varkappa_1 - 1$, следовательно, однородная система будет иметь решения, отличные от нулевого, в случае, если $r < 2\varkappa_1 - 1$, где r — ранг матрицы коэффициентов в системе (14). Число решений будет $(2\varkappa_1 - 1) - r$.

Заметим, что если $2\varkappa_1 - 2\varkappa < 2\varkappa_1 - 1$, т. е. $\varkappa > 0$, ранг системы заведомо меньше $2\varkappa_1 - 1$, следовательно, система разрешима, и это значит, что в случае $-n^+ \leqslant \varkappa - \varkappa_1 < 0$ и $\varkappa > 0$ решение однородной задачи Маркушевича всегда существует и число решений будет $(2\varkappa_1 - 1) - r$ над полем R. Если же $\varkappa < 0$, то в этом случае число уравнений больше числа неизвестных (напомним, что здесь $x_1 > 0$), и либо система разрешима и число решений будет $(2x_1 - 1) - r$, либо необходимо выполнение $-(x - x_1)$ условий разрешимости, который должен удовлетворять коэффициент $b(t)$.

Но, с другой стороны, так как $\frac{a(t)}{b(t)+1}$ есть функция, аналитически продолжимая с контура L в область D^-, то вводя функцию $\Psi_2^-(z) = \frac{b(z)+1}{a(z)}\Psi_1^-(z)$, перепишем соотношение (9) в виде

$$\operatorname{Im}\{a(t)\Psi_2^-(t)\} = 0. \tag{15}$$

Это уже задача Гильберта для функции $\Psi_2^-(z)$, аналитической в области D^-, в бесконечно удаленной точке она должна иметь нуль первого порядка. Ее решением будет функция [12, с. 143—148]

$$\Psi_2^-(z) = X_1(z)\,[Q_{x-1}(z) + \overline{Q_{x-1}(z^*)}]. \tag{16}$$

Отсюда видно, что в случае $x > 0$ задача имеет $2x$ линейно-независимых решений, в случае $x \leqslant 0$ задача неразрешима.

В итоге можно сделать вывод.

Теорема 1. *Если коэффициенты* $a(t)$, $b(t)$ *однородной задачи Маркушевича такие, что* $\frac{a(t)}{b(t)+1}$ *аналитически продолжимо с контура* L *в область* D^-, *где* L — *единичная окружность, то задача*:

1) *при* $x > 0$ *разрешима и имеет* $2x$ *решений, как в случае* $|b(t)| < 1$, *так и в случае* $|b(t)| > 1$, *но в последнем случае предполагается* $x_0 = x - x_1 \geqslant 0$, *и решение записывается в виде* (12);

2) *при* $x \leqslant 0$ *не имеет решений, отличных от нулевого, как в случае* $|b(t)| > 1$, *так и в случае* $|b(t)| < 1$;

3) $x - x_1 < -n^+$, $x > 0$, *не будет иметь решений, отличных от нулевого (здесь* n^+ — *число нулей функции* $\Phi^+(z)$ *в* D^+);

4) *при* $-n^+ \leqslant x - x_1 < 0$, $x > 0$ *решение всегда существует и число решений будет* $(2x_1 - 1) - r$ *над полем* R.

3°. Рассмотрим теперь неоднородную задачу Маркушевича (1). Перепишем соотношение (1) в виде

$$\Phi^+(t) = \frac{a(t)}{b(t)+1}\Phi^-(t) + \frac{2b(t)}{b(t)+1}\operatorname{Re}\Phi^+(t) + \frac{q(t)}{b(t)+1}. \tag{17}$$

Пусть L — единичная окружность, $\frac{a(t)}{b(t)+1}$ аналитически продолжимо с контура L на область D^-. Рассуждая аналогично случаю однородной задачи, придем к вырожденному сингулярному интегральному уравнению

$$\operatorname{Re}\Phi^+(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_L\left[\frac{b(t)+1}{b(\tau)+1}\cdot\frac{X^+(t)}{X^+(\tau)}\cdot b(\tau)-b(t)\right]\frac{\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=$$

$$=\frac{b(t)+1}{2\pi i}\int_L \frac{\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)}{\tau}\,d\tau+[b(t)+1]\cdot[\chi^+(t)P_{x_0-1}(t)+iC]+$$

$$+\frac{g(t)}{2}+\frac{[b(t)+1]\cdot\chi^+(t)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{[b(\tau)+1]\,\chi^+(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-t},\quad \frac{\chi^+(t)}{\chi^-(t)}=\frac{a(t)}{b(t)+1},$$

$$x_0=\operatorname{Ind}\left[\frac{a(t)}{b(t)+1}\right]=\begin{cases} x, & \text{если } |b(t)|<1,\\ x-x_1, & \text{если } |b(t)|>1.\end{cases}$$

В случае $x_0<0$ у нас $P_{x_0-1}(z)\equiv 0$ и возникает $-x_0$ условий разрешимости:

$$\int_L\left[\frac{2b(\tau)}{b(\tau)+1}\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)+\frac{g(\tau)}{b(\tau)+1}\right]\cdot\frac{1}{\chi^+(\tau)}\cdot\tau^k\,d\tau=0.$$

$$k=\overline{0,\,-x_0-1}.$$

Учитывая, что в нашем случае $\frac{a(t)}{b(t)+1}$ аналитически продолжимо с контура L на область D^-, получим

$$\frac{\operatorname{Re}\Phi^+(t)}{b(t)+1}+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)}{[b(\tau)+1]}\cdot\frac{d\tau}{\tau-t}=\frac{1}{2}\cdot\frac{g(t)}{[b(t)+1]}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{[b(\tau)+1]}\cdot\frac{d\tau}{\tau-t}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)}{\tau}\,d\tau+iC+P_{x_0-1}(t). \tag{18}$$

При $x_0<0$ условия разрешимости тогда примут вид

$$\int_L\left[\frac{2b(\tau)}{b(\tau)+1}\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)+\frac{g(\tau)}{b(\tau)+1}\right]\tau^k d\tau=0,\quad k=\overline{0,\,-x_0-1}.$$

Перепишем соотношение (18) в виде

$$\frac{2\operatorname{Re}\Phi^+(t)-g(t)}{2[b(t)+1]}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)-g(\tau)}{b(\tau)+1}\,\frac{d\tau}{\tau-t}=d+P_{x_0-1}(t),$$

где

$$d=C_1-iC+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\operatorname{Re}\Phi^+(\tau)}{\tau}\,d\tau=\text{const}.$$

Если мы теперь введем кусочно-аналитическую функцию

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\,\mathrm{Re}\,\Phi^+(\tau) - g(\tau)}{b(\tau)+1} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z},$$

то согласно формулам Сохоцкого уравнение (18) примет вид $\Psi^+(t) = d + P_{x_0-1}(t)$, т. е. придем, как и в случае однородной задачи, к односторонней задаче. Решением ее [11] является функция

$$\Psi^+(z) = P_{x_0-1}(z) + d,$$

$$\Psi^-(z) = -\varphi_1^-(z) + \varphi_1(\infty),$$

где $\varphi_1^-(z)$ — произвольная аналитическая в области D^- функция. Следовательно, на контуре L имеем

$$\frac{2\,\mathrm{Re}\,\Phi^+(t)}{b(t)+1} - \frac{g(t)}{b(t)+1} = d + P_{x_0-1}(t) - \varphi^-(t). \qquad (19)$$

Отсюда, полагая

$$\Psi_1^-(z) = d + P_{x_0-1}(z) - \varphi^-(z),$$

получаем

$$\mathrm{Im}\,[\Psi_1^-(t)\,\{b(t)+1\}] = \mathrm{Im}\,\overline{g(t)}. \qquad (20)$$

Как и в случае однородной задачи, мы пришли к задаче Гильберта для функции $\Psi_1^-(z)$, аналитической в области D^- всюду, исключая бесконечно удаленную точку, где у нее должен быть полюс порядка $x_0 - 1$. Общее решение задачи (20) запишется в виде [12, с. 143—148]

$$\Psi_1^-(z) = \frac{X_1(z)}{4\pi i} \int_L \frac{g_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} \cdot \frac{\tau + z}{\tau - z} \cdot \frac{d\tau}{\tau} +$$

$$+ X_1(z)\,[Q_{x_0+x_1'-1}(z) + \overline{Q_{x_0+x_1'-1}(z^*)}]. \qquad (21)$$

Отсюда видно, что задача (20) имеет отличные от нуля решения в случае $x_0 + x_1' \geqslant 0$. Если же $x_0 + x_1' < 0$, то для существования решения необходимо и достаточно выполнение $-(x_0 + x_1')$ условий разрешимости, которым должны удовлетворять коэффициент $b(t)$ и свободный член $g(t)$:

$$\int_L \frac{\mathrm{Im}\,\overline{g(t)}}{\overline{b(t)}+1} \cdot \frac{dt}{t^{k+1}} = 0, \quad k = \overline{0, -(x_0 + x_1') - 1}.$$

Если $|\,b(t) < 1$, то $x_0 = x$, $x_1' = 0$, и при $x \geqslant 0$ общее решение задачи (20) зависит от $2x$ произвольных постоянных. Если же $|b(t)|>1$, то $x_1'=x_1$, $x_0=x-x_1$, и в случае $x_0\geqslant 0$ и $x\geqslant 0$ решение задачи опять же зависит от $2x$ произвольных постоянных.

Учитывая (19), (20), имеем на L

$$\operatorname{Re}\Phi^+(t)=\frac{b(t)+1}{2}\left[\frac{\chi_1^-(t)}{2}\left\{-\frac{g_1(t)}{\chi_1^+(t)}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g_1(\tau)}{\chi_1^+(\tau)}\cdot\frac{\tau+t}{\tau-t}\cdot\frac{d\tau}{\tau}\right\}+\right.$$

$$\left.+\chi_1^-(t)\left\{Q_{x_0+x_1'-1}(t)+\overline{Q_{x_0+x_1'-1}(t)}\right\}\right]+\frac{g(t)}{2},\qquad(22)$$

где $g_1(t)=\dfrac{\operatorname{Im}\overline{g(t)}}{\overline{b(t)}+1}$.

Возвращаясь к соотношению (17) и принимая во внимание (22), приходим для функции

$$\Omega(z)=\begin{cases}\Phi^+(z), & z\in D^+,\\ \dfrac{a(z)}{b(z)+1}\Phi^-(z), & z\in D^-\end{cases}$$

к задаче о скачке. Ее решение запишется в виде

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{b(\tau)\chi_1^-(\tau)\left[-\dfrac{g_1(\tau)}{2\chi_1^+(\tau)}+\dfrac{1}{4\pi i}\displaystyle\int_L\frac{g_1(\tau_1)}{\chi_1^+(\tau_1)}\cdot\frac{\tau_1+\tau}{\tau_1-\tau}\cdot\frac{d\tau_1}{\tau_1}\right]}{\tau-z}d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{b(\tau)\chi_1^-(\tau)\left[Q_{x_0+x_1'-1}(\tau)+\overline{Q_{x_0+x_1'-1}(\tau)}\right]}{\tau-z}d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)}{\tau-z}d\tau+P_{x_0-1}(z)$$

и, следовательно, общее решение неоднородной задачи Маркушевича определится формулами

$$\Phi^+(z)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{b(\tau)\chi_1^-(\tau)\left[-\dfrac{g_1(\tau)}{2\chi_1^+(\tau)}+\dfrac{1}{4\pi i}\displaystyle\int_L\frac{g_1(\tau_1)}{\chi_1^+(\tau_1)}\cdot\frac{\tau_1+\tau}{\tau_1-\tau}\cdot\frac{d\tau_1}{\tau_1}\right]}{\tau-z}d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)}{\tau-z}d\tau+$$

$$
+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{b(\tau)\chi_1^-(\tau)\,[Q_{x_0+x_1'-1}(\tau)+\overline{Q_{x_0+x_1'-1}(\tau)}]}{\tau-z}\,d\tau+P_{x_0-1}(z),\ z\in D^+,
\tag{23}
$$

$$
\Phi^-(z)=\frac{b(z)+1}{a(z)}\times
$$

$$
\times\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{b(\tau)\chi_1^-(\tau)\left[-\dfrac{g_1(\tau)}{2\chi_1^+(\tau)}+\dfrac{1}{4\pi i}\displaystyle\int\limits_{L}\frac{g_1(\tau_1)}{\chi_1^+(\tau_1)}\cdot\frac{\tau_1+\tau}{\tau_1-\tau}\cdot\frac{d\tau_1}{\tau_1}\right]}{\tau-z}\,d\tau+\right.
$$

$$
+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{g(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+
$$

$$
\left.+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{b(\tau)\chi_1^-(\tau)\,[Q_{x_0+x_1'-1}(\tau)+\overline{Q_{x_0+x_1'-1}(\tau)}]}{\tau-z}\,d\tau+P_{x_0-1}(z)\right\},
$$

$$
z\in D^-.
$$

Предполагая теперь, что в случае $|b(t)|>1$ у нас $x_0\geqslant 0$, имеем: при $x\geqslant 0$ неоднородная задача Маркушевича разрешима и общее решение линейно зависит от $2x$ произвольных постоянных; при $x<0$ в случае $|b(t)|>1$ для разрешимости задачи необходимо и достаточно выполнение $-x$ — условий разрешимости, которым должны удовлетворять коэффициент $b(t)$ и свободный член $g(t)$:

$$
\int\limits_{L}\frac{\operatorname{Im}\overline{g(t)}}{\overline{b(t)}+1}\cdot\frac{dt}{t^{k+1}}=0,\quad k=\overline{0,-x-1}.
\tag{24}
$$

В этом случае $Q_{x_0+x_1'-1}(z)\equiv 0$, т. е. при выполнении условий разрешимости общее решение задачи зависит от $2(x-x_1)=2x_0$ произвольных постоянных; при $x<0$ в случае $|b(t)|<1$ для разрешимости необходимо и достаточно выполнение $-x$ условий разрешимости

$$
\int\limits_{L}\left\{b(\tau)\chi_1^-(\tau)\left[-\frac{g_1(\tau)}{2\chi_1^+(\tau)}+\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L}\frac{g_1(\tau_1)}{\chi_1^+(\tau_1)}\cdot\frac{\tau_1+\tau}{\tau_1-\tau}\cdot\frac{d\tau_1}{\tau_1}\right]+g(\tau)\right\}\tau^k d\tau=0
\tag{25}
$$

и в этом случае $Q_{x_0+x_1'-1}(z)\equiv 0$, $P_{x_0-1}(z)\equiv 0$, т. е. при выполнении этих условий имеем единственное решение.

Пусть теперь при $|b(t)|>1$ у нас $x_0<0$, т. е. $x-x_1<0$, тогда:

а) при $x_1 < 0$ условия разрешимости задачи запишутся в виде

$$\int_L \left\{ b(\tau)\chi_1^-(\tau)\left[-\frac{g_1(\tau)}{2\chi_1^+(\tau)} + \frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{g_1(\tau_1)}{\chi_1^+(\tau_1)}\cdot\frac{\tau_1+\tau}{\tau_1-\tau}\cdot\frac{d\tau_1}{\tau_1}\right] + g(\tau)\right\}\tau^k d\tau = 0,$$

$$k = \overline{0, -(x-x_1)}$$

$$\int_L \frac{g_1(\tau)}{\chi_1^+(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau^{k+1}} = 0, \quad k = \overline{0, -x_1-1},$$

т. е. всего $-x$ условий разрешимости, в этом случае

$$Q_{x_0+x_1'-1}(z) \equiv 0, \quad P_{x_0-1}(z) \equiv 0$$

и задача при выполнении этих условий разрешимости имеет единственное решение;

б) при $x_1 \geqslant 0$ имеем $-(x-x_1)$ условий разрешимости вида

$$\int_L \left\{ b(\tau)\chi_1^-(\tau)\left[-\frac{g_1(\tau)}{2\chi_1^+(\tau)} + \frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{g_1(\tau_1)}{\chi_1^+(\tau_1)}\cdot\frac{\tau_1+\tau}{\tau_1-\tau}\cdot\frac{d\tau_1}{\tau_1}\right] + g(\tau)\right\}\tau^k d\tau +$$

$$+ \int_L g(\tau)\tau^k d\tau + \int_L b(\tau)\chi_1^-(\tau)\left[Q_{x_1'-1}(\tau) + \overline{Q_{x_1'-1}(\tau)}\right]\tau^k d\tau = 0,$$

$$k = \overline{0, -(x-x_1)-1}.$$

При выполнении этих условий общее решение будет зависеть от $2x_1$ произвольных постоянных.

Исследуем условия разрешимости (26). Возвращаясь к исследованию условий разрешимости в случае однородной задачи и производя аналогичные преобразования, мы приходим к неоднородной системе линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{2x_1-1} y_k d_k^l = f_l, \\ &\sum_{k=0}^{2x_1-1} y_k b_k^l = \psi_l, \end{aligned}\right. \quad l = \overline{0, -(x-x_1)-1}. \tag{27}$$

И, следовательно, в случае несовместимости системы имеем при выполнении $-(x-x_1)$ условий разрешимости, и общее решение задачи (17) зависит от $2x_1$ произвольных постоянных. Если система совместна и $r = -2(x-x_1) = 2x_1 - 1$, т. е. $2x-1$, где r — ранг системы (27), имеем, что задача Маркушевича разрешима и имеет единственное решение. Если же в случае совместности системы $r < -2(x-x_1)$, то задача заведомо разрешима и общее решение зависит от $-2(x-x_1)-r$ произвольных постоянных. В итоге справедлива

Теорема 2. *При тех же предположениях относительно коэффициентов $a(t)$, $b(t)$ и контура L, что и в теореме 1, неоднородная задача Маркушевича:*

1) *при* $\varkappa \geqslant 0$ *разрешима и общее решение зависит от* $2\varkappa$—*произвольных постоянных* (*в случае* $|b(t)|>1$ *предполагается* $\varkappa-\varkappa_1 \geqslant 0$), *решение записывается в виде* (23);

2) *при* $\varkappa<0$ *в случае* $|b(t)|<1$ *имеем* $-\varkappa$—*условий разрешимости* (25), *решение будет единственное*;

3) *при* $\varkappa<0$ *в случае* $|b(t)|>1$, *но* $\varkappa-\varkappa_1 \geqslant 0$ *мы также имеем* $-\varkappa$ — *условий разрешимости* (24), *общее решение при выполнении этих условий разрешимости будет зависеть от* $2(\varkappa-\varkappa_1)$ *произвольных постоянных*;

4) *при* $\varkappa-\varkappa_1<0$, $\varkappa_1<0$ *в случае* $|b(t)|>1$ *мы имеем единственное решение, если выполняются* $-(\varkappa-\varkappa_1)$ *условий разрешимости* (25) *и* $-\varkappa_1$ *условий разрешимости* (24);

5) *при* $\varkappa-\varkappa_1<0$, *но* $\varkappa_1 \geqslant 0$ *в случае* $|b(t)|>1$ *общее решение будет зависеть от* $2\varkappa_1$ *произвольных постоянных, если система* (27) *несовместна и если выполняются* $-(\varkappa-\varkappa_1)$ *условий разрешимости* (26); *в случае же совместности системы* (27) *и* $r=-2(\varkappa-\varkappa_1)=2\varkappa_1-1$ *имеем единственное решение, если же* $r<-2(\varkappa-\varkappa_1)$, *то общее решение зависит от* $-2(\varkappa-\varkappa_1)-r$ *произвольных постоянных.*

Отметим здесь, что в случае произвольного замкнутого, гладкого контура Ляпунова можно теперь сказать как о числе решений, так и о числе условий разрешимости, как в случае $|b(t)|>1$, так и в случае $|b(t)|<1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркушевич А. И. Об одной граничной задаче теории аналитических функций.— Учен. записки МГУ. Т. 1. Вып. 100 (1946 г.), с. 20—30.

2. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959, с. 454—455.

3. Векуа Н. П. Об одной задаче теории функций комплексного переменного.— ДАН, **86**, № 3, 1952, с. 457—460.

4. Боярский Б. В. Об обобщенной граничной задаче Гильберта.— Сообщения АН Груз. ССР, 25, № 4, 1960, с. 338—390.

5. Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с ингулярными коэффициентами.— Труды АН Тадж. ССР. Душанбе. Т. 1, 1963, с. 141—164.

6. Сабитов И. Х. Об одной граничной задаче нелинейного сопряжения.— Математический сборник, 64 (106), № 2, 1964, с. 262—274.

7. Сабитов И. Х. Об одной задаче линейного сопряжения на окружности.— Сибирский математический журнал, 5, № 1, 1964, с. 124—129.

8. Салехов Л. Г. Исследование одной общей задачи линейного сопряжения методом симметрии. Автореферат дисс. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук. Казань, 1969.

9. Литвинчук Г. С. Об устойчивости одной краевой задачи теории аналитических функций.— ДАН СССР, 1974, № 6, 1967, с. 1268—1270.

10. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., „Наука“, 1977, с. 111—115.

11. Гахов Ф. Д. Вырожденные случаи особых интегральных уравнений с ядром Коши.— Дифференциальные уравнения. Т. II. Вып. 4, Минск, „Наука и техника“, 1966, с. 533—544.

12. Чибрикова Л. И. Основные граничные задачи для аналитических функций. Изд-во Казанск. ун-та, 1977, с. 143—148.

Доложено на семинаре 29 января 1979 г.