КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 17 *Труды семинара по краевым задачам* *1980*

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА ТИПА ТРИКОМИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

И. Е. Плещинская

Рассмотрим систему уравнений

$$yu_y + v_x - \frac{1}{2}\, u = 0, \qquad (1)$$
$$u_x - v_y = 0,$$

которая эллиптична при $y > 0$ и гиперболична при $y < 0$. Исследованию подобных систем, эквивалентных им уравнений второго порядка и решению граничных задач для них посвящены работы Бауера [1], С. А. Терсенова [2] и Ю. М. Крикунова [3]. В статье [1] для уравнения, эквивалентного системе более общего вида, чем (1), получено представление решения при $y > 0$.

Пусть область D_1 совпадает с верхней полуплоскостью $y > 0$, а область D_2 есть характеристический треугольник системы (1), ограниченный отрезком вещественной оси AB с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ и характеристиками $AC: x - 2\sqrt{-y} = 0$ и $BC: x + 2\sqrt{-y} = 1$. Строя уравнение второго порядка исключением из системы (1) одной из искомых функций и привлекая [1], [3], можно получить для функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ следующее представление в области D_1:

$$u(x, y) = -2\varphi_x(x, \eta_1),\ v(x, y) = \eta_1 \cdot \varphi_{\eta_1}(x, \eta_1) - \varphi(x, \eta_1), \qquad (2)$$

где $\eta_1 = 2\sqrt{y}$, $\varphi_{xx} + \varphi_{\eta_1\eta_1} = 0$. Аналогичное представление имеем для решения системы (1) в D_2:

$$u(x, y) = -2\psi_x(x, \eta),\ v(x, y) = \eta \cdot \psi_\eta(x, \eta) - \psi(x, \eta), \qquad (3)$$

где $\eta = 2\sqrt{-y}$, $\psi_{xx} - \psi_{\eta\eta} = 0$.

Решим следующую задачу. В области $D = D_1 \cup AB \cup D_2$ требуется найти пару функций u, v, удовлетворяющих таким условиям:

1) в области D при $y \neq 0$ u, v — решение системы (1);

2) $u \in C(\bar{D})$, v непрерывна во всех конечных точках $\bar{D}$;

$$\lim_{x^2+4y\to\infty,\ y\geq 0} u(x, y) = 0,\ u,\ v \in C'(D_1 \cup D_2),\ u_x \in C(D_2 \cup AB),$$

u_x при стремлении x, y к точкам A и B из D_2 допускает интегрируемые особенности:

3) на отрезке (0, 1) выполняется следующее условие склеивания:

$$\lim_{y\to -0} \sqrt{-y}\, u_y(x, y) = \lim_{y\to +0} \sqrt{y}\, u_y(x, y) = \nu(x),\quad 0 < x < 1, \tag{4}$$

$\nu(x)$ в $x = 0$ и $x = 1$ допускает интегрируемые особенности;

4) на вещественных лучах $\Gamma: y = 0,\ x \leqslant 0,\ \sigma: y = 0,\ x \geqslant 1$ и на характеристике AC функция $u(x, y)$ принимает заданные значения

$$u|_{\Gamma\cup\sigma} = f(x),\ x \leqslant 0,\ x \geqslant 1, \tag{5}$$

$$f(0) = f_1(0),$$

$$u|_{AC} = f_1(x),\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}; \tag{6}$$

5) $v(0, 0) = 0.$ (7)

Относительно граничных функций $f(x)$ и $f_1(x)$ будем предполагать следующее:

$$f(x) \in H([-\infty, 0) \cup [1, \infty]),\ f_1'(x) \in H(0, 1),$$

$$f_1(x) = 0(x^\alpha \cdot (x-1)^\beta),\ \alpha > \frac{3}{4},\quad \beta > \frac{1}{4}. \tag{8}$$

Входящие в представление (2) и (3) функции $\varphi(x, \eta_1)$ и $\psi(x, \eta)$ определяются не однозначно, а с точностью до слагаемых $c_1\eta_1$ или $c_2\eta$ соответственно, где c_1, c_2 — произвольные постоянные. Таким образом, формулы (2), (3) вполне определенному решению u, v системы (1) ставят в соответствие целые классы функций $\varphi(x, \eta_1)$ в D_1 и $\psi(x, \eta)$ в D_2. С другой стороны, независимо от того, какая функция φ или ψ из некоторого класса будет подставлена в правую часть формул (2) или (3), мы всегда получим единственные u, v, соответствующие всему классу. Поэтому, с целью упрощения дальнейших рассуждений, условимся рассматривать в D_1 не весь класс функций $\varphi(x, \eta_1) + c_1\eta_1$, а лишь одну функцию из этого класса, удовлетворяющую, например, условию

$$\varphi_{\eta_1}(0,\ 0)=\frac{1}{2}f(0). \tag{9}$$

В таком случае вполне определенному решению u, v системы (1) будет поставлена в соответствие в D_1 единственная функция $\varphi(x, \eta_1)$ и обратно. Из условия склеивания (4) и равенства (9) следует, что этому же решению u, v системы (1) будет соответствовать в D_2 также единственная функция $\psi(x, \eta)$, удовлетворяющая условию $\psi_\eta(0, 0)=-\frac{1}{2}f(0)$.

Приступим к построению функций φ и ψ. Очевидно, они должны удовлетворять следующим условиям; φ, φ_x, φ_η непрерывны во всех конечных точках $\overline{D}_1$, $\varphi\in C^2(D_1)$, $\varphi_{x\eta_1}\in C(D_1\cup AB)$, $\psi\in C^1(\overline{D}_2)$, ψ_{xx}, $\psi_{x\eta}\in C(D_2\cup AB)$, $\psi_{\eta\eta}\in C(D_2)$.

Пусть $y<0$. Тогда известно, что функцию $\psi(x, \eta)$ можно записать в виде

$$\psi(x, \eta)=\Gamma_1(x+\eta)+\Gamma_2(x-\eta), \tag{10}$$

где Γ_1, Γ_2 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Используя краевое условие (6) и представление (10), получим

$$\Gamma_1'(x)=-\frac{1}{2}f_1\left(\frac{x}{2}\right)-\Gamma_2'(0),\ 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{11}$$

Тогда, с учетом (3), (10), (11), запишем

$$u(x,\ y)=f_1\left(\frac{x+\eta}{2}\right)-2\Gamma_2'(x-\eta)+2\Gamma_2'(0). \tag{12}$$

Следуя методу работы [4], продифференцируем выражение (12) и скомбинируем производные u_x и u_y, в итоге получим

$$u_x(x, y)-\sqrt{-y}u_x(x,\ y)=f_1'\left(\frac{x}{2}+\sqrt{-y}\right). \tag{13}$$

Устремим в соотношении (13) y к нулю. Тогда в силу непрерывности u_x в $D_2\cup AB$ и условия склеивания (4) будем иметь

$$u_x(x,\ 0)-\nu(x)=f_1'\left(\frac{x}{2}\right),\ 0<x<1.$$

Проинтегрируем последнее выражение в пределах $(0, x)$:

$$u(x,\ 0)-\int_0^x\nu(\xi)\,d\xi=2f_1\left(\frac{x}{2}\right)-2f_1(0)+u(0,\ 0),\ 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{14}$$

Так как $u(x, y)$ непрерывна на AB и $\lim\limits_{y\to+0}\sqrt{y}u_y(x, y) = -2\varphi_{x\eta_1}(x, 0) = \nu(x)$, $0 < x < 1$, то соотношение (14) окончательно примет вид

$$\varphi_x(x, 0) - \varphi_{\eta_1}(x, 0) = -f_1\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{a}{2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{15}$$

где $a = -f(0) + 2\varphi_{\eta_1}(0, 0)$. В силу условия (9) $a = 0$.

Используя представление для u (2), краевое условие (5) можно записать так:

$$\varphi_x(x, 0) = -\frac{1}{2}f(x), \quad x \leqslant 0, \ x \geqslant 1. \tag{16}$$

Введем теперь функцию

$$C(z) = \varphi_{\eta_1}(x, \eta_1) + i\varphi_x(x, \eta_1), \quad z = x + i\eta_1, \tag{17}$$

которая в силу выбора $\varphi(x, \eta_1)$ является аналитической в D_1. Граничные условия (15), (16) для $C(z)$ можно переписать в виде

$$\operatorname{Im} C(x) = -\frac{1}{2}f(x), \quad x \leqslant 0, \ x \geqslant 1,$$

$$\operatorname{Im} C(x) - \operatorname{Re} C(x) = -f_1\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

или

$$C(x) - \overline{C(x)} = -if(x), \quad x \leqslant 0, \ x \geqslant 1,$$

$$(1+i)C(x) + (1-i)\overline{C(x)} = 2f_1\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{18}$$

Таким образом, для нахождения $C(z)$ получили краевую задачу Гильберта с разрывными коэффициентами. В силу непрерывности u и v в точках $z = 0$ и $z = 1$, являющихся для коэффициентов задачи точками разрыва первого рода, функцию $C(z)$ в $z = 0$ и $z = 1$ будем строить непрерывной.

Полученную задачу Гильберта будем решать методом приведения ее к краевой задаче Римана. Обозначим через D_1^* область, симметричную D_1 относительно вещественной оси, и рассмотрим кусочно-аналитическую функцию

$$\Phi(z) = \begin{cases} C(z), & z \in D_1, \\ \overline{C(\bar{z})}, & z \in D_1^*. \end{cases} \tag{19}$$

Очевидно, что $\overline{\Phi(\bar{z})} = \Phi(z)$. В силу этой симметрии граничные условия (18) примут вид краевых условий задачи Римана

$$\Phi^+(x) = G(x)\Phi^-(x) + g(x), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{20}$$

$$G(x) = \{1,\ x < 0,\ x > 1;\ i,\ 0 < x < 1\},$$

$$g(x) = \begin{cases} -if(x), & x < 0,\ x > 1, \\ (1-i) f_1\left(\frac{x}{2}\right), & 0 < x < 1, \end{cases}$$

решение которой будем искать в классе симметричных кусочно-аналитических функций, непрерывных в точках $z = 0$ и $z = 1$ и ограниченных на бесконечности.

В качестве канонической функции соответствующей однородной задачи Римана можно взять функцию

$$X(z) = \sqrt[4]{\frac{z-1}{z}}, \tag{21}$$

однозначно определенную в плоскости с разрезом вдоль отрезка (0, 1). Очевидно, что $X(z)$ симметрична, на бесконечности ограничена, а в точках $z = 0$ и $z = 1$ имеет соответственно особенность и нуль порядка меньше единицы.

С помощью канонической функции общее решение задачи Римана запишется в виде

$$\Phi(z) = X(z)\{\Psi(z) + c\}, \tag{22}$$

где

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{X^+(x)} \frac{dx}{x-z}, \tag{23}$$

c — вещественная постоянная.

Так как решение $\Phi(z)$ должно быть в точке $z = 0$ ограничено, то получаем условие для определения $c: \Psi(0) + c = 0$, где под $\Psi(0)$ понимается главное значение интеграла типа Коши (23).

Окончательно функция $\Phi(z)$ будет иметь следующий вид:

$$\Phi(z) = X(z)\{\Psi(z) - \Psi(0)\},$$

то есть

$$\Phi(z) = X(z) \cdot \frac{z}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{X^+(x) \cdot x} \frac{dx}{x-z}. \tag{24}$$

Очевидно, что построенное решение задачи Римана единственно. В силу свойств $X(z)$ и функций, входящих в $g(x)$, интеграл в (24) сходится, причем поведение $\Phi(z)$ при $z = \infty$ совпадает с поведением $f(x)$ при $x = \infty$.

Обозначим $X(z)\cdot z = \widetilde{X}(z)$. Тогда, учитывая вид $X(z)$ (21), нетрудно получить, что в окрестности точки $z=0$

$$\widetilde{X}(z) = z^{\frac{3}{4}}\cdot X_1(z),$$

где под $z^{\frac{3}{4}}$ понимается однозначная в разрезанной по отрезку (0, 1) окрестности точки $z=0$ ветвь степенной функции, а $X_1(z)$ в $z=0$ ограничена. Аналогично в окрестности $z=1$

$$\widetilde{X}(z) = (z-1)^{\frac{1}{4}}\cdot X_2(z);$$

здесь в качестве однозначной ветви степенной функции выбрана ветвь в разрезанной по лучу $(1, \infty)$ окрестности точки $z=1$, $X_2(z)$ в $z=1$ ограничена. Используя теперь записанные представления $\widetilde{X}(z)$ в окрестностях $z=0$ и $z=1$ и формулы Н. И. Мусхелишвили (26.22), (26.24) [5], легко получить вывод о непрерывности построенного решения задачи Римана (24) в этих точках.

В силу определения функции $\Phi(z)$ (19) при $z\in D_1$ $\Phi(z)=C(z)$, то есть при $z\in D_1$, решение задачи Гильберта запишется по формуле (24).

Чтобы получить решение исходной задачи (4) — (7) для системы (1) в эллиптической области, обратимся к представлению (2). Так как согласно (17) $\varphi_{\eta_1}(x, \eta_1) = \operatorname{Re} C(z)$, $\varphi_x(x, \eta_1) = \operatorname{Im} C(z)$ и, следовательно,

$$\varphi(x, \eta_1) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,\eta_1)} \operatorname{Im} C(z)\,dx + \operatorname{Re} C(z)\,d\eta_1 + \varphi(0, 0),$$

то после подстановки этих функций в формулы (2) получим

$$u(x, y) = -2\operatorname{Im} C(z),$$

$$v(x, y) = \eta_1\cdot\operatorname{Re} C(z) - \int\limits_{(0,0)}^{(x,\eta_1)} \operatorname{Im} C(z)\,dx + \operatorname{Re} C(z)\,d\eta_1 - \varphi(0,0). \quad (25)$$

Заметим, что из (24) и (25) следует $\lim\limits_{x^2+4y\to\infty,\ y\geqslant 0} u(x, y) = 0.$

В гиперболической области с учетом соотношений (12), (25) и непрерывности $u(x, y)$ можно записать

$$u(x, 0) = f_1\left(\frac{x}{2}\right) - 2\Gamma_2'(x) + 2\Gamma_2'(0) = -2\operatorname{Im} C(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1,$$

где $C(x)$ находится по формуле Сохоцкого. Отсюда

$$\Gamma_2'(x-\eta)=\frac{1}{2}f_1\left(\frac{x-\eta}{2}\right)+\operatorname{Im}C(x-\eta)+\Gamma_2'(0). \qquad (26)$$

Теперь, зная $\Gamma_1'(x)$ из (11) и $\Gamma_2'(x-\eta)$ из (26), легко построить $\Gamma_1(x+\eta)$ и $\Gamma_2(x-\eta)$, а, следовательно, и функцию $\psi(x, \eta)$, имеющую вид (10). Подставляя выражения для ψ, ψ_x и ψ_η в представление (3), получим

$$u(x, y)=f_1\left(\frac{x+\eta}{2}\right)-f_1\left(\frac{x-\eta}{2}\right)-2\operatorname{Im}C(x-\eta),$$

$$v(x, y)=-\frac{\eta}{2}\left[f_1\left(\frac{x+\eta}{2}\right)+f_1\left(\frac{x-\eta}{2}\right)\right]-\eta\cdot\operatorname{Im}C(x-\eta)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x+\eta}f_1\left(\frac{\xi}{2}\right)d\xi-\frac{1}{2}\int\limits_0^{x-\eta}f_1\left(\frac{\xi}{2}\right)d\xi-\int\limits_0^{x-\eta}\operatorname{Im}C(\xi)\,d\xi-\Gamma_1(0)-\Gamma_2(0). \qquad (27)$$

В силу условия (7) из (25) и (27) следует, что $\varphi(0, 0)=\Gamma_1(0)+\Gamma_2(0)=0$.

Итак, построено единственное решение задачи типа Трикоми для системы (1). Оно дается формулами (25) при $\varphi(0, 0)=0$ в эллиптической области и формулами (27) при $\Gamma_1(0)=-\Gamma_2(0)$ в гиперболической области.

Нетрудно проверить, что при выполнении условий (8) производная u_x непрерывна в $D_2\bigcup AB$, а в точках (0, 0) и (1, 0) допускает интегрируемые особенности.

Замечание 1. Для системы (1), используя представление (2), (3), совершенно аналогично тому, как это было сделано выше, можно решить задачу, отличающуюся от рассмотренной краевым условием (5). А именно, вместо условия (5) запишем

$$\sqrt{y}u_y|_{\Gamma\bigcup\sigma}=f(x),\ x\leqslant 0,\ x\geqslant 1, \qquad (31)$$

и рассмотрим задачу (4), (31), (6), (7). При этом вместо (9) надо выбрать

$$\psi_{\eta_1}(0, 0)=\frac{1}{2}f_1(0). \qquad (32)$$

Тогда вместо граничного условия (16) мы получим условие вида

$$\varphi_{x\eta_1}(x, 0)=-\frac{1}{2}f(x),\ x\leqslant 0,\ x\geqslant 1,$$

вследствие чего краевые условия задачи Гильберта с учетом (32) запишутся следующим образом:

$$\operatorname{Re} C(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2} f_1(0),\ x \leqslant 0,\ x \geqslant 1,$$

$$\operatorname{Im} C(x) - \operatorname{Re} C(x) = -f_1\left(\frac{x}{2}\right),\ 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{33}$$

Вводя теперь кусочно-аналитическую функцию $\Phi(z)$, (19), на основании (33) придем к задаче Римана (20), где

$$G(x) = \{-1,\ x \in \Gamma \cup \sigma;\ i,\ 0 < x < 1\},$$

$$g(x) = \begin{cases} -\int_0^x f(\xi)\,d\xi + f_1(0),\ x < 0,\ x > 1, \\ (1-i) f_1\left(\frac{x}{2}\right),\ 0 < x < 1. \end{cases} \tag{35}$$

Нетрудно проверить, что в качестве канонической функции соответствующей однородной задачи Римана можно взять функцию

$$X(z) = \sqrt{z} \cdot \sqrt[4]{\frac{z-1}{z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z-1}}, \tag{36}$$

в которой в качестве значений радикалов выбраны однозначные ветви в плоскости с разрезом вдоль Γ, AB и σ соответственно. А тогда единственное непрерывное симметричное решение задачи Римана запишется в виде

$$\Phi(z) = X(z)\{\Psi(z) - \Psi(1)\}, \tag{37}$$

где $X(z)$ определена (36), $\Psi(z)$ — интеграл типа Коши с плотностью $g(x)/X^+(x)$, $g(x)$ имеет вид (35).

По решению (37) функции u и v строятся уже известным образом.

Замечание 2. Рассмотрим неоднородную систему

$$y u_y + v_x - \frac{1}{2} u = l_1(x, y),$$

$$u_x - v_y = l_2(x, y). \tag{38}$$

Очевидно, что зная частное решение этой системы $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$ при $y > 0$ и $u_1(x, y)$, $v_1(x, y)$ при $y < 0$, можно записать следующее представление для функций $u(x, y)$, $v(x, y)$:

$$y > 0 \quad \begin{aligned} u(x, y) &= -2\tilde{\varphi}_x(x, \eta_1) + u_0(x, \eta_1), \\ v(x, y) &= \eta_1 \cdot \tilde{\varphi}_{\eta_1}(x, \eta_1) - \tilde{\varphi}(x, \eta_1) + v_0(x, \eta_1), \end{aligned} \tag{39}$$

где $\tilde{\varphi}_{xx} + \tilde{\varphi}_{\eta_1\eta_1} = 0$,

$$y < 0 \quad \begin{aligned} u(x, y) &= -2\tilde{\psi}_x(x, \eta) + u_1(x, \eta), \\ v(x, y) &= \eta \cdot \tilde{\psi}_\eta(x, \eta) - \tilde{\psi}(x, \eta) + v_1(x, \eta), \end{aligned} \tag{40}$$

где $\tilde{\psi}_{xx} - \tilde{\psi}_{\eta\eta} = 0$.

Чтобы построить u_0 и v_0, можно воспользоваться формулой, полученной в работе [2, с. 83], при этом функции $l_1(x, y)$ и $l_2(x, y)$ должны удовлетворять в D_1 следующим требованиям: l_1, $l_2 \in H(D_1)$; при $x \to \infty$, $y \geqslant 0$ $l_1 = 0\left(\frac{1}{x^{2+\varepsilon}}\right)$, $l_2 = 0\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$; при $y \to \infty$ $\forall x\, l_1 = 0\left(\frac{1}{y^\varepsilon}\right)$, $l_2 = 0\left(\frac{1}{y^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}\right)$.

Что касается области D_2, то, распространяя метод Т. В. Чекмарева [6] на случай системы (38), здесь также удается найти u_1 и v_1 при следующих предположениях относительно $l_1(x, y)$ и $l_2(x, y)$: l_1, $l_2 \in H(D_2)$, при $y \to 0$ $l_1 = 0((-y)^\alpha)$, $\alpha > \frac{1}{2}$, $l_2 = 0((-y)^\beta)$, $\beta > 0$. А тогда для системы (38) можно решить задачу типа (4) — (7) (или (4), (31), (6), (7)) аналогично тому, как это было сделано выше для однородной системы (1), то есть используя представления (39) и (40), свести поставленную задачу типа Трикоми к краевой задаче Римана с разрывными коэффициентами. Единственное решение задачи Римана в этом случае запишется по формуле, аналогичной (24) (или (37)), только плотность интеграла будет несколько иной (в нее войдут еще граничные значения частных решений системы (38)). После получения подобной формулы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющие системе (38) и краевым условиям типа (4) — (7) (или (4), (31), (6), (7)), строятся аналогично тому, как это сделано для однородной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bauer K. W. Differential Operatoren bei einer Klasse verallgemeinerter Tricomi—Gleichungen. -Zeitchrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Band 54, Heft 11, 1974, s. 715—721.

2. Терсенов С. А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск, Изд-во Новосибирского ун-та, 1973.

3. Крикунов Ю. М. Видоизмененная задача Трикоми для уравнения $u_{xx} + yu_{yy} - \frac{1}{2}u_y = 0$.— Труды семинара по краевым задачам. Вып. 16. Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1979.

4. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. Изд-во АН СССР, 1959.

5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., „Наука", 1968.

6. Чекмарев Т. В. Решение системы дифференциальных уравнений смешанного типа в области гиперболичности.— „Изв. вузов. Математика", 1967, № 5.

Доложено на семинаре 29 января 1979 г.