КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 17 *Труды семинара по краевым задачам* *1980*

УДК 517.544

ИНТЕГРАЛЫ ТИПА КОШИ ДЛЯ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. В. Показеев

Полианалитическую функцию $f(z)$ в области D будем определять соотношением

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n-1} f_k(z)\,\bar{z}^k,$$

в котором $f_k(z)$ — аналитические в D функции.

В настоящей работе вводятся и исследуются два полианалитических интеграла, играющие такую же роль в теории полианалитических функций, какую в классе аналитических функций играют интегралы типа Коши. Один из интегралов используется для решения одной краевой задачи в классе полианалитических функций.

1. Пусть $g_k(t)$, $k=0, 1, \dots, n-1$, есть непрерывные по Гёльдеру функции точек гладкого контура ∂D. Полианалитическим интегралом типа Коши будем называть интеграл

$$I(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}\left(\frac{\bar{z}}{z}-\frac{\bar{t}}{t}\right)^k\frac{g_k(t)}{t-z}\,dt. \qquad (1)$$

Заметим, что если $n=1$, то $I(z)$ становится интегралом типа Коши.

Теорема 1. *Интеграл $I(z)$ представляет собой полианалитическую функцию во всей плоскости комплексного переменного, за исключением контура ∂D, обращается в нуль в бесконечно удаленной точке, имеет особую точку ограниченности* [1, с. 103—104] *в начале координат, а предельные значения*

$$\frac{\partial^l I^+(t)}{\partial \bar{t}^l},\quad \frac{\partial^l I^-(t)}{\partial \bar{t}^l},\quad l=0, 1, \dots, n-1,$$

определяются формулами

$$\frac{\partial^l I^+(t)}{\partial \bar{t}^l}=\frac{1}{2}g_l(t)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\sum_{k=l}^{n-1}\frac{1}{(k-l)!}\left(\frac{\bar{t}}{t}-\frac{\bar{\tau}}{\tau}\right)^{k-l}\frac{\tau^k}{t^l}\,\frac{g_k(\tau)}{\tau-t}\,d\tau, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^l I^-(t)}{\partial \bar{t}^l}=-\frac{1}{2}g_l(t)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\sum_{k=l}^{n-1}\frac{1}{(k-l)!}\left(\frac{\bar{t}}{t}-\frac{\bar{\tau}}{\tau}\right)^{k-l}\frac{\tau^k}{t^l}\,\frac{g_k(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,$$

$$l=0,\ 1, \dots, n-1. \tag{3}$$

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что для всех $z\neq t$ производная порядка n от $I(z)$ по $\bar{z}$ равна нулю, или из представления

$$I(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\sum_{\nu=k}^{n-1}\frac{t^\nu}{\nu!}(-1)^{\nu-k}C_k^{\nu-k}\left(\frac{\bar{t}}{t}\right)^{\nu-k}\frac{g_\nu(t)\,z^{-k}}{t-z}\,dt\right)\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^k.$$

В бесконечно удаленной точке интеграл $I(z)$ обращается в нуль из-за ограниченности слагаемых $(\bar{z}/z)^s$, $s=0,\ 1, \dots,$ $n-1$, а наличие особой точки ограниченности в начале координат обусловливается разложением

$$I(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\sum_{\nu=k}^{n-1}\frac{1}{\nu!}(-1)^{\nu-k}C_k^{\nu-k}\left(\frac{\bar{t}}{t}\right)^{\nu-k}g_\nu(t)\,t^{\nu-1}\,dt\right)\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^k. \tag{4}$$

Формулы (2) и (3) получаются из соотношений

$$\frac{\partial^l I(z)}{\partial \bar{z}^l}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\sum_{k=l}^{n-1}\frac{1}{(k-l)!}\left(\frac{\bar{z}}{z}-\frac{\bar{t}}{t}\right)^{k-l}\frac{t^k}{z^l}\,\frac{g_k(t)}{t-z}\,dt$$

предельным переходом.

Теорема 2. *Если функции $g_k(t)$ являются предельными значениями полианалитических функций $\partial^k f/\partial\bar{z}^k$, $k=0, 1, \dots,$ $n-1$, регулярных* [1, с. 103] *в D^+ и непрерывных в $\bar{D}^+$, то имеет место следующая интегральная формула Коши*:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}\left(\frac{\bar{z}}{z}-\frac{\bar{t}}{t}\right)^k\frac{\partial^k f}{\partial\bar{t}^k}\,\frac{dt}{t-z}. \tag{5}$$

Утверждение теоремы следует из равенств

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}\left(\frac{\bar z}{z}-\frac{\bar t}{t}\right)^k\frac{\partial^k f(t)}{\partial \bar t^k}\,\frac{dt}{t-z}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\bar z}{z}\right)^k\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{t^k f_k(t)\,dt}{t-z}=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k(z)\,\bar z^k, & z\in D^+,\\ 0 & , z\in D^-.\end{cases}\qquad (6)$$

Теорема 3. *Если функции* $\partial^l f/\partial \bar z^l$, $l=0, 1, \ldots, n-1$, *регулярны в* D^+ *и непрерывны в* $\bar D^+$, *а* D*-конечная* $(m+1)$*-связная область, граница которой представляет собой совокупность попарно не пересекающихся замкнутых кусочно-гладких жордановых кривых* $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, *причем кривые* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ *лежат внутри области ограниченной кривой* Γ_0, *то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}\left(\frac{\bar z}{z}-\frac{\bar t}{t}\right)^k\frac{\partial^k f}{\partial \bar t^k}\,dt=0.\qquad (7)$$

Чтобы убедиться в справедливости теоремы 3, достаточно левую часть (7) преобразовать по схеме (6).

Теорема 4. *Для того чтобы функции* $g_l(t)$, $l=0, 1, \ldots, n-1$, *были предельными значениями полианалитических в* D *функций* $\partial^l F/\partial \bar z^l$, *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$-\frac{1}{2}g_l(t)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\sum_{k=l}^{n-1}\frac{1}{(k-l)!}\left(\frac{\bar t}{t}-\frac{\bar\tau}{\tau}\right)^{k-l}\frac{\tau^k}{t^l}\,\frac{g_k(\tau)\,d\tau}{\tau-t}=0,\qquad (8)$$

$$l=0, 1, \ldots, n-1.$$

Доказательство. Пусть

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}\left(\frac{\bar z}{z}-\frac{\bar t}{t}\right)^k\frac{g_k(t)}{t-z}\,dt.\qquad (9)$$

Если $z\in D^+$, то

$$\frac{\partial^l F^+(z)}{\partial \bar z^l}=g_l(z),\ l=0, 1, \ldots, n-1.\qquad (10)$$

Теперь для получения (8) остается, с учетом (10), применить к (9) формулу (2). Обратно. Если $g_l(t)$ удовлетворяет (8), то с учетом (3) получим

$$\frac{\partial^l F^-(t)}{\partial \bar{t}^l} = 0,$$

а затем и

$$g_l(t) = \frac{\partial^l F^+(t)}{\partial \bar{t}^l}.$$

2. Имея интегральную формулу Коши (5) и теорему 3, нетрудно получить разложение в кольце $r < |z| < R$ однозначной полианалитической функции $f(z)$ в равномерно сходящийся ряд

$$f(z) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s(z) z^s,$$

в котором

$$C_s(z) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{k,\, s-k} \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^k$$

являются ограниченными во всей комплексной плоскости функциями, а коэффициенты $C_{k,\, s-k}$ определяются формулами

$$C_{k,\, s-k} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=\rho} \sum_{\nu=k}^{n-1} \frac{1}{\nu!} (-1)^{\nu-k} C_\nu^{\nu-k} \left(\frac{\bar{t}}{t}\right)^{\nu-k} \frac{t^\nu}{t^{s+1}} \frac{\partial^\nu f(t)}{\partial \bar{t}^\nu} dt.$$

Разложение полианалитических функций в такие ряды и определенная классификация их изолированных особых точек уже рассматривались [1, с. 103—105]. Поэтому мы ограничимся здесь лишь указанием на то, что полианалитическая функция $f(z)$, ограниченная на всей плоскости и имеющая в бесконечно удаленной точке полюс порядка не выше p, допускает представление

$$f(z) = \sum_{s=0}^{p} C_s(z) z^s. \tag{11}$$

3. Наряду с полианалитическим интегралом типа Коши (1) можно рассматривать и другой полианалитический аналог интеграла типа Коши

$$I_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{(\overline{z-t})^k}{t-z} g_k(t)\, dt. \tag{12}$$

Интеграл $I_*(z)$, как и интеграл (1), является функцией полианалитической во всей комплексной плоскости за исключением точек контура ∂D; он имеет, в общем случае, в окрестности бесконечно удаленной точки полюс порядка $n-2$, что следует из его разложения

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\sum_{\nu=k}^{n-1}\frac{1}{\nu!}(-1)^{\nu-k}C_{\nu}^{\nu-k}\bar{t}^{\nu-k}t^{s-1}g_{\nu}\,dt\right)\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^{k}z^{k-s}.$$

Предельные значения интеграла $I_*(z)$ и его производных $\partial^l I_*/\partial\bar{z}^l$, $l=0, 1, \ldots, n-1$, определяются формулами

$$\frac{\partial^l I(t)^{\pm}}{\partial\bar{t}^l}=\pm\frac{1}{2}g_l(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\sum_{k=l}^{n-1}\frac{1}{(k-l)!}\,\frac{(\overline{t-\tau})^{k-l}}{\tau-t}\,g_k(\tau)\,d\tau.$$

Если функции $g_k(t)$ являются предельными значениями полианалитических функций $\partial^k f/\partial\bar{z}^k$, $k=0, 1, \ldots, n-1$, то, как и выше, нетрудно получить еще одну, отличную от (5), интегральную формулу Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\,\frac{(\overline{z-t})^k}{t-z}\,\frac{\partial^k f(t)}{\partial\bar{t}^k}\,dt,$$

принадлежащую Н. Теодореску [2].

4. Используя интеграл (1) или интеграл (12), нетрудно построить решение краевой задачи линейного сопряжения, являющейся непосредственным обобщением задачи Римана для аналитических функций.

Полианалитическую функцию $f(z)$ будем называть кусочно-полианалитической с линией скачков ∂D, если она является полианалитической всюду на комплексной плоскости, кроме, может быть, конечного числа изолированных особых точек и линии ∂D, на которой существуют непрерывные граничные значения $\partial^l f^+/\partial\bar{t}^l$, $\partial^l f^-/\partial\bar{t}^l$, $l=0, 1, \ldots, n-1$.

Рассмотрим следующую краевую задачу. Найти кусочно-полианалитическую функцию $f(z)$ с линией скачков ∂D, ограниченную на всей плоскости, кроме бесконечно удаленной точки, в которой она имеет полюс порядка не выше p по граничным условиям

$$\frac{\partial^l f^+(t)}{\partial\bar{t}^l}=G(t)\frac{\partial^l f^-(t)}{\partial\bar{t}^l}+g_l(t),\quad t\in\partial D,\quad G(t)\neq 0,$$
$$l=0, 1, \ldots, n-1, \tag{13}$$

в которых $G(t)$ есть непрерывная по Гёльдеру функция точек гладкого контура ∂D.

Пусть $X(z)$ — каноническая функция граничной задачи $\Phi^+=G\Phi^-$ для аналитической функции, а $\varkappa$ — индекс этой задачи. Заменяя $G(t)$ в краевых условиях (13) на $X^+(t)/X^-(t)$, получим

$$\frac{\partial^l \left(\frac{f}{\chi}\right)^+}{\partial \bar{t}^l} = \frac{\partial^l \left(\frac{f}{\chi}\right)^-}{\partial \bar{t}^l} + \frac{g_l(t)}{\chi^+(t)}, \quad t \in \partial D, \quad l = 0, 1, \dots, n-1. \tag{14}$$

В силу соотношений (2) и (3) кусочно-полианалитическая, исчезающая на бесконечности и ограниченная на всей комплексной плоскости функция

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \left(\frac{\bar{z}}{z} - \frac{\bar{t}}{t}\right)^k \frac{g_k(t)}{\chi^+(t)} \frac{dt}{t - z}$$

будет удовлетворять граничным условиям (14). Поэтому

$$\frac{\partial^l [f/\chi - I]^+}{\partial \bar{t}^l} = \frac{\partial^l [f/\chi - I]^-}{\partial \bar{t}^l}, \quad l = 0, 1, \dots, n-1.$$

Последние соотношения означают, что при $\varkappa + p > 0$ разность $f(z)/\chi(z) - I(z)$ является полианалитической функцией, ограниченной на всей комплексной плоскости и имеющей в бесконечно удаленной точке полюс порядка не выше $p + \varkappa$. Поэтому, принимая во внимание замечание, содержащееся в п. 2 относительно представления таких функций в виде (11) и разложение (4) интеграла $I(z)$, получим

$$f(z) = \chi(z) \left\{ I(z) + \sum_{k=0}^{n-1} (C_{k,-k} - b_k) \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^k + \sum_{s=1}^{p+\varkappa} C_s(z) z^s \right\}, \tag{15}$$

где

$$C_s(z) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{k,\, s-k} \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^k$$

с произвольными комплексными коэффициентами $C_{k,\, s-k}$, а числа

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{\nu=k}^{n-1} \frac{1}{\nu!} (-1)^{\nu-k} C_k^{\nu-k} \left(\frac{\bar{t}}{t}\right)^{\nu-k} g_\nu(t)\, t^{\nu-1}\, dt$$

определяются разложением (4). Если $\varkappa + p = 0$, то вторую сумму в (15) следует считать пустой. Когда же $\varkappa + p < 0$, решение задачи (13) будет определяться формулой

$$f(z) = \chi(z) I(z),$$

если коэффициенты краевого условия (13) подчинить следующим условиям разрешимости:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\sum_{\nu=k}^{n-1}\frac{t^{\nu}}{\nu!}(-1)^{\nu-k}C_{\nu}^{\nu-k}\left(\frac{\bar{t}}{t}\right)^{\nu-k}t^{s-1}g_{\nu}\,dt=0,\ k=0,1,\dots,\ n-1,$$

$$s=1,\ 2,\dots,\ -(p+\varkappa)-1.$$

Нам представляется, что приведенная схема решения является более естественной и компактной, нежели схема решения такой же задачи, приведенная в работе [1, с. 109—110], основанная на сведении задачи (13) к краевым задачам Римана для аналитических компонент $f_k(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Показеев В. И. Нерегулярные полианалитические функции.— „Изв. вузов. Математика", 1975, № 6, с. 103—113.
2. Teodorescu N. La derivée aréolaire... Thése, Paris, 1931.

Доложено на семинаре 29 января 1979 г.