КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 17 *Труды семинара по краевым задачам* *1980*

УДК 517.544

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ КОЛЬЦА

Р. Б. Салимов, В. В. Селезнев

Краевая задача Гильберта для многосвязной области изучалась в работах [1—6]. Случай, когда область представляет собой внешность разрезов вдоль действительной оси, рассмотрен в статьях [5, 7]. Решение краевой задачи Гильберта для кольца дано Л. И. Чибриковой [8] и Р. Д. Банцури [9].

Как известно, Ф. Д. Гахов [3, с. 264—289] дал эффективное решение краевой задачи Гильберта для односвязной области, основанное на отыскании регуляризирующего множителя. Э. И. Зверович [5] получил решение этой задачи для многосвязной области, используя метод построения однозначного регуляризирующего множителя. Аналогичный метод для случая многосвязных областей впервые был разработан И. Н. Векуа применительно к однородной краевой задаче Гильберта [2, с. 272—282].

Во всех вышеупомянутых работах, исключая [7], коэффициенты краевого условия предполагаются непрерывными.

В настоящей статье метод, разработанный Э. И. Зверовичем, с некоторыми изменениями обобщается на случай разрывных коэффициентов, когда область имеет форму кольца.

Пусть в плоскости $z=x+iy$ дано кольцо $D: q<|z|<1$ и $L=L_0+L_1$ — граница области D, где L_0 есть окружность $|z|=1$, L_1 — окружность $|z|=q$. За положительное направление обхода примем такое, при котором область D остается слева. Требуется найти функцию $F(z)=u(z)+iv(z)$, аналитическую и однозначную в D, непрерывно продолжимую на все точки контура L, кроме, быть может, заданных точек $t_{j,k_j}, k_j=\overline{1, m_j}, j=0, 1, |t_{0,k_0}|=1, |t_{1,k_1}|=q$, вблизи которых

$$|F(z)| < \frac{\text{const}}{|z - t_{j,k_j}|^{\lambda}}, \quad 0 \leqslant \lambda = \text{const} < 1,$$

по краевому условию

$$a(t)\,u(t) - b(t)\,v(t) = c(t), \tag{1}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — заданные на L действительные функции, имеющие разрывы первого рода в точках t_{j,k_j}, $k_j = \overline{1, m_j}$, $j = 0, 1$ и удовлетворяющие условию Гельдера на каждой из дуг $t_{j,k_j} t_{j,k_j+1}$, $k = \overline{0, m_j}$, $j = 0, 1$, включая концы, причем $t_{j,0} = t_{j,m_j+1} = q^j$, $j = 0, 1$. Примем, что точки $t = 1$ и $t = q$ не являются точками разрыва коэффициентов условия (1). При этом будем считать, что при обходе контура L_j в положительном направлении за точкой t_{j,k_j} следует точка t_{j,k_j+1}, $k_j = \overline{0, m_j}$, $j = 0, 1$. Предположим, что $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$ всюду на L.

Условие (1) перепишем в виде

$$\operatorname{Re}\{e^{-i\nu(t)} F(t)\} = \frac{c(t)}{|G(t)|}, \tag{2}$$

где $G(t) = a(t) - ib(t)$, а $\nu(t)$ — ветвь $\arg G(t)$, выбранная так, чтобы в точках разрыва выполнялось неравенство $0 \leqslant \nu(t_{j,k_j} + 0) - \nu(t_{j,k_j} - 0) < 2\pi$. Через $\nu(t_{j,k_j} - 0)$ и $\nu(t_{j,k_j} + 0)$ обозначены пределы, к которым стремится $\nu(t)$, когда точка t стремится к t_{j,k_j} соответственно в положительном и отрицательном направлении. Поскольку функция $G(t)$ непрерывна в точках $t = q^j$, $j = 0, 1$, то $\nu(t_{j,0} - 0) - \nu(t_{j,0} + 0) = 2\pi l_j$, где l_j — целые числа, $j = 0, 1$.

Введем функцию $\varphi(t) = \nu(t) - \beta(t)\pi$, где $\beta(t)$ принимает целые значения β_{j,k_j} на каждой из дуг $t_{j,k_j} t_{j,k_j+1}$, $k_j = \overline{0, m_j}$, $j = 0, 1$. Значение β_{j,k_j} подберем так, чтобы число $\delta_{j,k_j} = \varphi(t_{j,k_j} + 0) - \varphi(t_{j,k_j} - 0)$ удовлетворяло неравенству $-\pi < \delta_{j,k_j} \leqslant 0$, если ищется решение, ограниченное вблизи точки t_{j,k_j} и неравенству $0 < \delta_{j,k_j} < \pi$, если ищется решение, неограниченное вблизи точки t_{j,k_j}. Полагая $\beta_{j,0} = 0$, $j = 0, 1$, получим определенную на всем контуре L функцию $\beta(t)$. Очевидно, что

$$\varphi(t_{j,0} - 0) - \varphi(t_{j,0} + 0) = 2\pi l_j - \beta_{j,m_j}\pi = \varkappa_j \pi, \quad j = 0, 1.$$

Назовем число $\varkappa = \varkappa_0 + \varkappa_1$ индексом задачи, отвечающим данному классу решений.

1. Пусть $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ — четные числа. Введем в рассмотрение функцию

$$\psi(t) = \varphi(t) + \frac{\varkappa_1}{2} \arg t - \left(\frac{\varkappa}{2} - 1\right) \arg(t-p) - \\ - \arg(t - z_1) + \beta_1(t) \pi n, \quad t \in L, \tag{3}$$

где $z_1 = re^{i\alpha}$, $q < r < 1$, $0 \leqslant \alpha < \pi$, $q < p < 1$, $\beta_1(t) = 0$ при $t \in L_0$, $\beta_1(t) = 1$ при $t \in L_1$, n — целое число; $\arg t$—значение на L ветви $\arg z$, непрерывной и однозначной в плоскости, разрезанной вдоль полуоси $y = 0$, $x \geqslant 0$, $\arg(t-p)$ — значение на L ветви $\arg(z-p)$, непрерывной и однозначной в плоскости с разрезом вдоль линии $y = 0$, $x \geqslant p$, причем $0 \leqslant \arg z < 2\pi$, $0 \leqslant \arg(z-p) < 2\pi$, $\arg(t - z_1)$ — значение на L определенной ветви $\arg(z - z_1)$, непрерывной и однозначной в плоскости с разрезом вдоль линии, соединяющей точки $z = z_1$ и $z = 1$ и лежащей внутри верхнего полукольца. Здесь $z = p$ — заданная точка, $z_1 = re^{i\alpha}$ — точка, положение которой будет определено ниже.

Условие (2) можно записать так:

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-i\psi(t)} \frac{t^{\varkappa_1/2} F(t)}{(t-z_1)(t-p)^{\frac{\varkappa}{2}-1}}\right\} = \frac{c(t)\,|t|^{\varkappa_1/2} \cos(\beta_1(t)\pi n)}{|G(t)|\,|t-z_1|\,|t-p|^{\frac{\varkappa}{2}-1} \cos(\beta(t)\pi)}. \tag{4}$$

Будем искать однозначную и аналитическую в области D функцию $\Gamma(z)$, граничные значения мнимой части которой равны $\psi(t)$. Такая функция существует, если выполняется условие однозначности [10, с. 237]

$$\int_0^{2\pi} \psi(e^{i\gamma})\, d\gamma - \int_0^{2\pi} \psi(qe^{i\gamma}) d\gamma \equiv \int_L \psi(t) \frac{dt}{it} = 0. \tag{5}$$

Подберем точку $z_1 = re^{i\alpha}$ так, чтобы это условие выполнялось.

После несложных вычислений приходим к соотношению

$$\int_L \arg(t - z_1) \frac{dt}{it} = -2\pi\alpha.$$

Учитывая это соотношение и формулу (3), условие (5) запишем в виде

$$\int_L \varphi(t)\,\frac{dt}{it} = -2\pi\alpha + 2\pi^2 n. \tag{6}$$

Из формулы (6) видно, что целое число N можно подобрать так, чтобы

$$2\pi^2 N \leqslant -\int_L \varphi(t)\,\frac{dt}{it} < 2\pi^2(N+1). \tag{7}$$

Тогда, полагая $n = -N$, из формулы (6) найдем

$$\alpha = -N\pi - \frac{1}{2\pi}\int_L \varphi(t)\,\frac{dt}{it}, \tag{8}$$

причем, как показывает неравенство (7), $0 \leqslant \alpha < \pi$. Следовательно, теперь число $\alpha = \arg z_1$ выбрано так, что выполняется условие (5). Число $r = |z_1|$, $q < r < 1$, не влияет на выполнение условия (5) и оно может быть выбрано произвольно. Причем всюду в дальнейшем в случае $\alpha = 0$ будем считать $r \neq p$ для $\varkappa \neq 0$. Далее с помощью формулы Вилля находим функцию

$$\Gamma(z) = iS(\psi, z), \tag{9}$$

где

$$S(\psi, z) = \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \psi(e^{i\gamma})\,\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln z - \frac{\omega}{\pi}\gamma\right)d\gamma - \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \psi(qe^{i\gamma}) \times$$

$$\times\left[\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln z - \frac{\omega}{\pi}\gamma - \omega'\right) + \eta'\right]d\gamma \equiv$$

$$\equiv \frac{\omega}{\pi^2}\int_L \psi(t)\left[\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln z - \frac{\omega}{\pi i}\ln t\right) + \beta_1(t)\,\eta'\right]\frac{dt}{t}, \quad q = \exp(\pi i\omega'/\omega)$$

(см., например, [10, с. 238]). При $z \to t$ из D функция $\Gamma(z)$ принимает значение $\Gamma^+(t) = \Gamma_0(t) + i\psi(t)$, где

$$\Gamma_0(t) = -\frac{\omega}{\pi^2}\int_L \psi(\tau)\left[\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln t - \frac{\omega}{\pi i}\ln\tau\right) + \beta_1(\tau)\,\eta'\right]\frac{d\tau}{i\tau}.$$

Умножая условие (4) на $e^{-\Gamma_0(t)}$, получим

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-\Gamma^+(t)}\,\frac{t^{\varkappa_1/2}F(t)}{(t-z_1)(t-p)^{\frac{\varkappa}{2}-1}}\right\} = c_1(t) \equiv$$

$$\equiv \frac{c(t)\,|t|^{\varkappa_1/2}\cos(\beta_1(t)\pi n)\,e^{-\Gamma_0(t)}}{|G(t)|\cos(\beta(t)\pi)\,|t-z_1|\,|t-p|^{\frac{\varkappa}{2}-1}}. \tag{10}$$

а) Пусть $\varkappa \geqslant 2$. При $\varkappa > 2$ выражение, стоящее в фигурных скобках, представляет собой граничное значение функции, аналитической в области D, кроме простого полюса в точке $z=z_1$ и полюса порядка $\frac{\varkappa}{2}-1$ в точке $z=p$. Будем искать эту функцию в виде [5, 3, с. 388]

$$\frac{e^{-\Gamma(z)} z^{\varkappa_1/2} F(z)}{(z-z_1)(z-p)^{\frac{\varkappa}{2}-1}} = \Phi(z) + \sum_{k=1}^{\frac{\varkappa}{2}-1} \frac{\mu_k}{(z-p)^k} + \frac{\nu}{z-z_1} + iC_0, \tag{11}$$

где $\Phi(z)$ — новая неизвестная аналитическая в области D функция, C_0 — произвольная действительная постоянная, $\nu = \nu' + i\nu''$, $\mu_k = \mu_k' + i\mu_k''$ — неопределенные комплексные постоянные. С учетом формулы (11) на основании условия (10) получаем краевую задачу Шварца для функции $\Phi(z)$:

$$\operatorname{Re}\Phi(t) = c_1(t) - \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\frac{\varkappa}{2}-1} \frac{\mu_k}{(t-p)^k} - \operatorname{Re}\frac{\nu}{t-z_1}. \tag{12}$$

Функция $\Phi(z)$ должна быть однозначной, поэтому должно выполняться условие

$$\int_L \operatorname{Re}\Phi(t)\,\frac{dt}{it} = 0 \tag{13}$$

или

$$\int_L \left[c_1(t) - \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\frac{\varkappa}{2}-1} \frac{\mu_k}{(t-p)^k} - \operatorname{Re}\frac{\nu}{t-z_1}\right]\frac{dt}{it} = 0.$$

После ряда несложных вычислений это условие можно привести к виду

$$\frac{2\pi}{r}(\nu'\cos\alpha + \nu''\sin\alpha) - 2\pi\sum_{k=1}^{\frac{\varkappa}{2}-1} \frac{\mu_k'}{(-p)^k} = d, \tag{14}$$

здесь и всюду в дальнейшем используется обозначение $d = \int_L c_1(t)\,\frac{dt}{it}$. Условие (14) можно удовлетворить подбором вещественной постоянной μ_1', при этом

$$\mu_1' = \frac{pd}{2\pi} - \frac{p}{r}(\nu'\cos\alpha + \nu''\sin\alpha) - \sum_{k=2}^{\frac{\varkappa}{2}-1} \frac{\mu_k'}{(-p)^{k-1}}. \tag{15}$$

Тогда функцию $\Phi(z)$, с учетом (12), найдем по формуле Вилля, и решение исходной задачи, как показывает соотношение (11), будет определяться формулой

$$F(z) = \frac{(z-z_1)(z-p)^{\frac{\varkappa}{2}-1}}{z^{\varkappa_1/2}} e^{\Gamma(z)} \times$$

$$\times \left\{ S(\widetilde{c}_1, z) + iC_0 + \sum_{k=1}^{\frac{\varkappa}{2}-1} \frac{\mu_k}{(z-p)^k} + \frac{\nu}{z-z_1} \right\}, \tag{16}$$

где

$$\widetilde{c}_1 = \widetilde{c}_1(t) \equiv c_1(t) - \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\frac{\varkappa}{2}-1} \frac{\mu_k}{(t-p)^k} - \operatorname{Re} \frac{\nu}{t-z_1}.$$

Это решение зависит от $\varkappa$ произвольных действительных постоянных C_0, ν', ν'', μ_1'', μ_k', μ_k'', $k = 2, \frac{\varkappa}{2} - 1$.

В случае $\varkappa = 2$ в условии (14) мы должны положить $\mu_k' = 0$ для $k \geqslant 1$ и это условие удовлетворим подбором ν'' при $\alpha > 0$ или ν' при $\alpha = 0$. Тогда решение исходной задачи будет определяться формулой (16), в которой нужно положить равными нулю все μ_k. Решение будет зависеть от произвольных постоянных C_0, ν' при $\alpha > 0$ и C_0, ν'' при $\alpha = 0$.

б) Пусть $\varkappa = 0$. Условие (2) запишем в виде

$$\operatorname{Re}\left\{ e^{-i\psi(t)} \frac{(t-z_1)\,t^{\varkappa_1/2}}{t-p} F(t) \right\} = \frac{c(t)\,|t-z_1|\,|t|^{\varkappa_1/2}\cos(\beta_1(t)\pi n)}{|G(t)|\,|t-p|\cos(\beta(t)\pi)}, \tag{17}$$

где

$$\psi(t) = \varphi(t) + \frac{\varkappa_1}{2}\arg t - \arg(t-p) + \arg(t-z_1) + \beta_1(t)\pi n. \tag{18}$$

Как и выше, определим число $\alpha = \arg z_1$ так, чтобы функция (18) удовлетворяла условию (5) и по формуле (9) найдем $\Gamma(z)$. Далее условие (17) представим в виде

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-\Gamma^+(t)}\frac{(t-z_1)\,t^{\varkappa_1/2}}{t-p}F(t)\right\}=c_1(t)\equiv$$
$$\equiv\frac{c(t)\,|t-z_1|\,|t|^{\varkappa_1/2}\cos(\beta_1(t)\pi n)\,e^{-\Gamma_0(t)}}{|G(t)|\,|t-p|\cos(\beta(t)\pi)}. \tag{19}$$

По аналогии с соотношением (11) запишем

$$\frac{e^{-\Gamma(z)}(z-z_1)\,z^{\varkappa_1/2}}{z-p}F(z)=\Phi(z)+\frac{\mu_1'}{z-p}+iC_0+iC_1g(z), \tag{20}$$

где μ_1', C_0, C_1 — действительные постоянные,

$$g(z)=\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{\ln q}\ln p\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{\ln q}\ln z\right)-\operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{\ln q}\ln p\right)},\quad q=e^{-\pi K/K'},$$

где $\operatorname{sn} z$ — эллиптическая функция с периодами $4K$ и $2iK'$, причем $w=g(z)$ — функция, отображающая конформно область D на внешность разрезов вдоль отрезков вещественной оси плоскости w и переводящая окружность $|z|=1$ в берега разреза вдоль отрезка $[-1, 0]$ [см. 10, с. 190—192].

Выражение $iC_0+iC_1g(z)$ дает общее решение задачи об определении функции, аналитической в области D, кроме простого полюса в точке $z=p$, граничные значения действительной части которой равны нулю [3, с. 404—405]. С учетом формул (19), (20) приходим к следующей краевой задаче для функции $\Phi(z)$:

$$\operatorname{Re}\Phi(t)=c_1(t)-\mu_1'\operatorname{Re}\frac{1}{t-p}. \tag{21}$$

Подберем постоянную μ_1' так, чтобы функция (21) удовлетворяла условию (13) и найдем $\mu_1'=pd/2\pi$. Тогда $\Phi(z)=S(\tilde{c}_1, z)$, где

$$\tilde{c}_1=\tilde{c}_1(t)\equiv c_1(t)-\mu_1'\operatorname{Re}\frac{1}{t-p}.$$

Далее из формулы (20) находим

$$F(z)=\frac{(z-p)\,e^{\Gamma(z)}}{(z-z_1)\,z^{\varkappa_1/2}}\left\{S(\tilde{c}_1, z)+\frac{\mu_1'}{z-p}+iC_0+iC_1g(z)\right\}. \tag{22}$$

Для того, чтобы формула (22) определяла решение исходной задачи, необходимо, чтобы функция, стоящая в фигурных скобках, в точке $z=z_1$ обращалась в нуль:

$$S(\widetilde{c}_1, z_1)+\frac{\mu_1'}{z_1-p}+iC_0+iC_1g(z_1)=0. \tag{23}$$

Выделяя в равенстве (23) действительную и мнимую части, получим

$$\operatorname{Re} S(\widetilde{c}_1, z_1)+\mu_1' \operatorname{Re}\frac{1}{z_1-p}+C_1\operatorname{Re} ig(z_1)=0,$$

$$\operatorname{Im} S(\widetilde{c}_1, z_1)+\mu_1' \operatorname{Im}\frac{1}{z_1-p}+C_0+C_1\operatorname{Im} ig(z_1)=0.$$

Если $\alpha>0$, то число $g(z_1)$ является комплексным и первое из этих равенств удовлетворим выбором постоянной C_1, второе—выбором постоянной C_0. После того, как найдены постоянные C_0 и C_1, единственное решение задачи определяется формулой (22).

Пусть теперь $\alpha=0$. Полагая в условии (19) $z_1=p$, получим

$$\operatorname{Re}\{e^{-\Gamma^+(t)}t^{\varkappa_1/2}F(t)\}=c_1(t)\equiv\frac{c(t)\,|t|^{\varkappa_1/2}\cos(\beta_1(t)\pi n)\,e^{-\Gamma_0(t)}}{|G(t)|\cos(\beta(t)\pi)}.$$

Пусть выполняется условие

$$\int_L c_1(t)\frac{dt}{it}=0. \tag{24}$$

Тогда решение исходной задачи определяется формулой

$$F(z)=\frac{e^{\Gamma(z)}}{z^{\varkappa_1/2}}\{S(c_1, z)+iC_0\}$$

и зависит от одной произвольной действительной постоянной C_0. При невыполнении условия (24) рассматриваемая задача неразрешима.

в) Пусть $\varkappa\leqslant-2$. Условие (2) запишем в виде

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-i\psi(t)}\frac{(t-z_1)\,t^{\varkappa_1/2}}{(t-p)^{\frac{\varkappa}{2}+1}}F(t)\right\}=\frac{c(t)\,|t-z_1|\,|t|^{\varkappa_1/2}\cos(\beta_1(t)\pi n)}{|G(t)|\,|t-p|^{\frac{\varkappa}{2}+1}\cos(\beta(t)\pi)}, \tag{25}$$

где

$$\psi(t)=\varphi(t)+\frac{\varkappa_1}{2}\arg t-\left(\frac{\varkappa}{2}+1\right)\arg(t-p)+$$
$$+\arg(t-z_1)+\beta_1(t)\pi n. \tag{26}$$

Требуя, чтобы функция (26) удовлетворяла условию (5), найдем число $\alpha=\arg z_1$ и по формуле (9) определим функцию $\Gamma(z)$. Затем условие (25) представим в виде

$$\operatorname{Re}\left\{ e^{-\Gamma^{+}(t)} \frac{(t-z_1)\, t^{\varkappa_1/2}}{(t-p)^{\frac{\varkappa}{2}+1}} F(t) \right\} = c_1(t) \equiv$$

$$\equiv \frac{c(t)\, |t-z_1|\, |t|^{\varkappa_1/2} \cos(\beta_1(t)\pi n)\, e^{-\Gamma_0(t)}}{|G(t)|\, |t-p|^{\frac{\varkappa}{2}+1} \cos(\beta(t)\pi)}. \tag{27}$$

Отсюда видно, что для разрешимости рассматриваемой задачи необходимо выполнение условия

$$\int_L c_1(t) \frac{dt}{it} = 0. \tag{28}$$

При выполнении этого условия на основании формулы (27) имеем

$$e^{-\Gamma(z)} (z-z_1)\,(z-p)^{-\frac{\varkappa}{2}-1} z^{\frac{\varkappa_1}{2}} F(z) = S(c_1,\ z) + iC_0.$$

Из последнего соотношения видно, что функция, стоящая в его правой части, должна обращаться в нуль в точке $z = z_1$ и иметь в точке $z = p$ нуль порядка не ниже $-\frac{\varkappa}{2} - 1$ при $\varkappa < -2$. Это будет иметь место, если выполняются условия:

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L c_1(t) \left[\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i} \ln p - \frac{\omega}{\pi i} \ln t \right) + \beta_1(t)\,\eta' \right] \frac{dt}{t} + iC_0 = 0, \tag{29}$$

$$\int_L c_1(t)\, \zeta^{(k)} \left(\frac{\omega}{\pi i} \ln p - \frac{\omega}{\pi i} \ln t \right) \frac{dt}{t} = 0,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ -\frac{\varkappa}{2} - 2, \tag{30}$$

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L c_1(t) \left[\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i} \ln z_1 - \frac{\omega}{\pi i} \ln t \right) + \beta_1(t)\,\eta' \right] \frac{dt}{t} + iC_0 = 0. \tag{31}$$

Из изложенного ясно, что задача разрешима, если выполняются условия (28), (29), (30), (31). Выделяя в (29), (30), (31) действительные и мнимые части, придем к $-\varkappa$ действительным соотношениям. Одно из них можно удовлетворить подбором постоянной C_0. Таким образом, изучаемая задача разрешима при выполнении $-\varkappa$ действительных условий. В этом случае имеет место единственное решение, определяемое при $\varkappa < -2$ формулой

$$F(z) = e^{\Gamma(z)} [S(c_1,\ z) + iC_0]/(z-z_1)(z-p)^{-\frac{\varkappa}{2}-1} z^{\varkappa_1/2}.$$

При $\varkappa = -2$ решение задачи определяется последней формулой, если выполняются условие (28) и условие, получаемое из (31) выделением действительных частей (выделяя в (31) мнимые части, приходим к соотношению, из которого находится C_0).

2. Рассмотрим случай, когда $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ — нечетные числа. Краевое условие (2) можно записать в виде

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-i\psi(t)}\frac{(t-1)(t-q)\,t^{(\varkappa_1-1)/2}}{(t-z_1)(t-p)^{\varkappa/2}}F(t)\right\}=$$

$$=\frac{c(t)\,|t-1|\,|t-q|\,|t|^{(\varkappa_1-1)/2}\cos(\beta_1(t)\pi n)}{|G(t)|\,|t-z_1|\,|t-p|^{\varkappa/2}\cos(\beta(t)\pi)}, \tag{32}$$

где

$$\psi(t)=\varphi(t)+\frac{\varkappa_1+1}{2}\arg t-\frac{\varkappa}{2}\arg(t-p)+\arg(t-1)+$$

$$+\arg\frac{t-q}{t}-\arg(t-z_1)+\beta_1(t)\pi n. \tag{33}$$

В формуле (33) под $\arg(t-1)$ понимается значение на L ветви $\arg(z-1)$, непрерывной и однозначной в плоскости, разрезанной вдоль линии $y=0$, $x>1$; $\arg\frac{t-q}{t}=\arg(t-q)-\arg t$, под $\arg(z-q)$ понимается значение на L ветви $\arg(z-q)$, непрерывной и однозначной в плоскости, разрезанной вдоль линии $y=0$, $x \geqslant q$, причем $0 \leqslant \arg(z-1)<2\pi$, $0 \leqslant \arg(z-q)<2\pi$.

Определим число $\alpha=\arg z_1$ так, чтобы функция (33) удовлетворяла условию (5) и с помощью формулы (9) найдем функцию $\Gamma(z)$. Затем соотношение (32) представим в виде

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-\Gamma^+(t)}\frac{(t-1)(t-q)\,t^{(\varkappa_1-1)/2}}{(t-z_1)(t-p)^{\varkappa/2}}F(t)\right\}=c_1(t)\equiv$$

$$\equiv\frac{c(t)\,|t-1|\,|t-q|\,|t|^{(\varkappa_1-1)/2}\cos(\beta_1(t)\pi n)\,e^{-\Gamma_0(t)}}{|G(t)|\,|t-z_1|\,|t-p|^{\varkappa/2}\cos(\beta(t)\pi)}. \tag{34}$$

а) Предположим, что $\varkappa \geqslant 2$. По аналогии с формулой (11) запишем

$$\frac{e^{-\Gamma(z)}(z-1)(z-q)\,z^{(\varkappa_1-1)/2}}{(z-z_1)(z-p)^{\varkappa/2}}F(z)=\Phi(z)+\frac{\mu_1'}{z-p}+iC_1g(z)+iC_0+$$

$$+\sum_{k=2}^{\varkappa/2}\frac{\mu_k'+i\mu_k''}{(z-p)^k}+\frac{\nu'+i\nu''}{z-z_1}, \tag{35}$$

где C_1 — действительная постоянная. Здесь вместо слагаемого $\mu_1/(z-p)$ в формуле (11) взято выражение $\frac{\mu_1'}{z-p}+iC_1 g(z)$. Нетрудно проверить, что такая замена законна. Поступая далее аналогично тому, как это сделано в пункте 1, получим

$$F(z)=\frac{(z-z_1)(z-p)^{\varkappa/2}e^{\Gamma(z)}}{(z-1)(z-q)z^{(\varkappa_1-1)/2}}\left\{S(\widetilde{c}_1,\quad z)+iC_0+\frac{\mu_1'}{z-p}+iC_1 g(z)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{\varkappa/2}\frac{\mu_k'+i\mu_k''}{(z-p)^k}+\frac{\nu'+i\nu''}{z-z_1}\right\}, \tag{36}$$

где

$$\widetilde{c}_1=\widetilde{c}_1(t)\equiv c_1(t)-\mu_1'\operatorname{Re}\frac{1}{t-p}-\operatorname{Re}\sum_{k=2}^{\varkappa/2}\frac{\mu_k'+i\mu_k''}{(t-p)^k}-\operatorname{Re}\frac{\nu'+i\nu''}{t-z_1},$$

$$\mu_1'=\frac{pd}{2\pi}-\frac{p}{r}(\nu'\cos\alpha+\nu''\sin\alpha)-\sum_{k=2}^{\varkappa/2}\frac{\mu_k'}{(-p)^{k-1}}.$$

Из формулы (36) видно, что граничные значения функции, стоящей в фигурных скобках, в точках $z=1$ и $z=q$ должны обращаться в нуль. Учитывая, что $c_1(1)=0$ и $c_1(q)=0$, приходим к выводу, что это будет иметь место, если выполняются два действительных условия

$$\frac{\omega}{\pi^2}\int_L\widetilde{c}_1(t)\left[\zeta\left(j\omega'-\frac{\omega}{\pi i}\ln t\right)+\beta_1(t)\eta'\right]\frac{dt}{it}+C_0+C_1 g(q^j)+$$

$$+\sum_{k=2}^{\varkappa/2}\frac{\mu_k''}{(q^j-p)^k}+\operatorname{Im}\frac{\nu'+i\nu''}{q^j-z_1}=0,\ j=0,\ 1. \tag{37}$$

Рассматривая последние условия как систему двух линейных уравнений относительно неизвестных C_0 и C_1, найдем выражения для C_0 и C_1 и подставим их в формулу (36). При этом формула (36) будет определять решение исходной задачи. Найденное решение содержит $\varkappa$ произвольных действительных постоянных ν', ν'', μ_k', μ_k'', $k=\overline{2,\ \varkappa/2}$.

б) Пусть $\varkappa=0$. В этом случае в правой части формулы (35) мы отбрасываем слагаемые, имеющие полюс в точке $z=p$, и, кроме того, не нарушая общности представления (35), заменим слагаемое $(\nu'+i\nu'')/(z-z_1)$ на $\nu' e^{i\alpha}/(z-z_1)+iC_1\widetilde{g}(z)$, где $\widetilde{g}(z)=g(ze^{-i\alpha})$. Поступая далее, как и выше, будем иметь

$$F(z)=\frac{(z-z_1)\,e^{\Gamma(z)}}{(z-1)(z-q)\,z^{(\varkappa_1-1)/2}}\times$$

$$\times\left\{S(\widetilde{c}_1, z)+\frac{\nu' e^{i\alpha}}{z-z_1}+iC_0+iC_1\widetilde{g}(z)\right\}, \tag{38}$$

где

$$\widetilde{c}_1=\widetilde{c}_1(t)\equiv c_1(t)-\nu' \operatorname{Re}\frac{e^{i\alpha}}{t-z_1},\quad \nu'=\frac{pd}{2\pi}.$$

Для того, чтобы функция (38) являлась решением исходной задачи, необходимо соблюдение условий, аналогичных условиям (37)

$$\frac{\omega}{\pi^2}\int\limits_L \widetilde{c}_1(t)\left[\zeta\left(j\omega'-\frac{\omega}{\pi i}\ln t\right)+\beta_1(t)\,\eta'\right]\frac{dt}{it}+$$

$$+\operatorname{Im}\frac{\nu' e^{i\alpha}}{q^j-z_1}+C_0+C_1\widetilde{g}(q^j)=0,\ j=0,\ 1.$$

После того, как из этой системы определены постоянные C_0 и C_1, единственное решение задачи выражается формулой (38).

в) В случае $\varkappa\leqslant-2$ получим

$$F(z)=\frac{(z-z_1)(z-p)^{\varkappa/2}\,e^{\Gamma(z)}}{(z-1)(z-q)\,z^{(\varkappa_1-1)/2}}\times$$

$$\times\left\{S(\widetilde{c}_1, z)+iC_0+\frac{\nu' e^{i\alpha}}{z-z_1}+iC_1\widetilde{g}(z)\right\}, \tag{39}$$

где

$$\widetilde{c}_1=\widetilde{c}_1(t)\equiv c_1(t)-\nu' \operatorname{Re}\frac{e^{i\alpha}}{t-z_1},\quad \nu'=\frac{pd}{2\pi}.$$

Формула (39) будет определять решение исходной задачи, если выполняются условия

$$\frac{\omega}{\pi^2}\int\limits_L \widetilde{c}_1(t)\left[\zeta\left(j\omega'-\frac{\omega}{\pi i}\ln t\right)+\beta_1(t)\,\eta'\right]\frac{dt}{it}+\nu' \operatorname{Re}\frac{e^{i\alpha}}{q^j-z_1}+$$

$$+C_0+C_1 g(q^j)=0,\ j=0,\ 1, \tag{40}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\omega}{\pi^2}\int_L \widetilde{c}_1(t)\left[\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln p-\frac{\omega}{\pi i}\ln t\right)+\beta_1(t)\eta'\right]\frac{dt}{t}+\\&\qquad+iC_0+\frac{\nu' e^{i\alpha}}{p-z_1}+iC_1\widetilde{g}(p)=0\\&\frac{\omega}{\pi^2}\int_L \widetilde{c}_1(t)\,\zeta^{(k)}\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln p-\frac{\omega}{\pi i}\ln t\right)\frac{dt}{t}+\frac{\nu' e^{i\alpha}(-1)^k k!}{(p-z_1)^{k+1}}+\\&\qquad+iC_1\widetilde{g}^{(k)}(p)=0,\quad k=1,\ 2,\dots,\ -\frac{\varkappa}{2}-1.\end{aligned}\right\}\tag{41}$$

Условия (40) удовлетворим подбором постоянных C_0 и C_1. Условия (41) являются условиями разрешимости задачи. При их выполнении решение рассматриваемой задачи будет определяться формулой (39), если в ней под C_0, C_1 понимать постоянные, определяемые из (40). Выделяя в (41) действительные и мнимые части, получим $-\varkappa$ действительных условий.

Таким образом, исходная задача при $\varkappa\leqslant -2$ разрешима (единственным образом) лишь при соблюдении $-\varkappa$ дополнительных условий.

3. В случае, когда $\varkappa_0$ — четное, $\varkappa_1$ — нечетное число, краевое условие (2) представим в виде

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-i\psi(t)}\frac{(t-q)\,t^{(\varkappa_1-1)/2}}{(t-z_1)(t-p)^{(\varkappa-1)/2}}F(t)\right\}=$$

$$=\frac{c(t)\,|t-q|\,|t|^{(\varkappa_1-1)/2}\cos(\beta_1(t)\pi n)}{|G(t)|\,|t-z_1|\,|t-p|^{(\varkappa-1)/2}\cos(\beta(t)\pi)},\tag{42}$$

где

$$\psi(t)=\varphi(t)+\frac{\varkappa_1+1}{2}\arg t-\frac{\varkappa-1}{2}\arg(t-p)+\arg\frac{t-q}{t}-$$

$$-\arg(t-z_1)+\beta_1(t)\pi n.\tag{43}$$

Определяя число $\alpha=\arg z_1$ так, чтобы функция (43) удовлетворяла условию (5), найдем по формуле (9) функцию $\Gamma(z)$. Затем условие (42) перепишем в виде

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-\Gamma^+(t)}\frac{(t-q)\,t^{(\varkappa_1-1)/2}}{(t-z_1)(t-p)^{(\varkappa-1)/2}}F(t)\right\}=c_1(t)\equiv$$

$$\equiv\frac{c(t)\,|t-q|\,|t|^{(\varkappa_1-1)/2}\cos(\beta_1(t)\pi n)\,e^{-\Gamma_0(t)}}{|G(t)|\,|t-z_1|\,|t-p|^{(\varkappa-1)/2}\cos(\beta(t)\pi)}.\tag{44}$$

а) Пусть $\varkappa \geqslant 1$. При $\varkappa > 1$ аналогично предыдущему получим

$$F(z) = \frac{(z-z_1)(z-p)^{(\varkappa-1)/2} e^{\Gamma(z)}}{(z-q) z^{(\varkappa_1-1)/2}} \times$$

$$\times \left\{ S(\widetilde{c}_1,\ z) + iC_0 + \sum_{k=1}^{(\varkappa-1)/2} \frac{\mu_k' + i\mu_k''}{(z-p)^k} + \frac{\nu' + i\nu''}{z-z_1} \right\}, \tag{45}$$

где

$$\widetilde{c}_1 = \widetilde{c}_1(t) \equiv c_1(t) - \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{(\varkappa-1)/2} \frac{\mu_k' + i\mu_k''}{(t-p)^k} - \operatorname{Re} \frac{\nu' + i\nu''}{t-z_1},$$

$$\mu_1' = \frac{pd}{2\pi} - \frac{p}{r}(\nu' \cos\alpha + \nu'' \sin\alpha) - \sum_{k=2}^{(\varkappa-1)/2} \frac{\mu_k'}{(-p)^{k-1}}.$$

Для того, чтобы функция (45) являлась решением изучаемой задачи, необходимо соблюдение условия, аналогичного условию (37) при $j = 1$

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \widetilde{c}_1(t) \left[\zeta\left(\omega' - \frac{\omega}{\pi i} \ln t\right) + \beta_1(t)\eta' \right] \frac{dt}{it} + C_0 + \sum_{k=1}^{(\varkappa-1)/2} \frac{\mu_k''}{(q-p)^k} +$$

$$+ \operatorname{Im} \frac{\nu' + i\nu''}{q-z_1} = 0. \tag{46}$$

Отсюда найдем выражение для постоянной C_0. При этом решение исходной задачи будет даваться формулой (45). Полученное решение содержит $\varkappa$ произвольных постоянных ν', ν'', μ_1'', μ_k', μ_k'', $k = 2, (\varkappa-1)/2$.

При $\varkappa = 1$ формула (45) будет определять решение исходной задачи, если в ней положить $\mu_k' = \mu_k'' = 0$ для $k \geqslant 1$,

$$\nu'' = \frac{rd}{2\pi \sin\alpha} - \nu' \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$C_0 = -\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \widetilde{c}_1(t) \left| \zeta\left(\omega' - \frac{\omega}{\pi i} \ln t\right) + \beta_1(t)\eta' \right] \frac{dt}{it} - \operatorname{Im} \frac{\nu' + i\nu''}{q-z_1}$$

в случае $\alpha > 0$ и $\mu_k' = \mu_k'' = 0$ для $k \geqslant 1$, $\nu' = rd/2\pi$,

$$C_0 = -\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \widetilde{c}_1(t) \left| \zeta\left(\omega' - \frac{\omega}{\pi i} \ln t\right) + \beta_1(t)\eta' \right| \frac{dt}{it} - \frac{\nu''}{q-r},$$

когда $\alpha = 0$.

Решение задачи будет содержать одну произвольную постоянную ν' при $\alpha > 0$ или ν'' при $\alpha = 0$.

б) В случае $\varkappa \leqslant -1$ получим

$$F(z) = \frac{(z-z_1)(z-p)^{(\varkappa-1)/2}\, e^{\Gamma(z)}}{(z-q)\, z^{(\varkappa_1-1)/2}} \times$$

$$\times \left\{ S(\widetilde{c}_1, \ z) + iC_0 + \frac{\nu' e^{i\alpha}}{z-z_1} + iC_1 \widetilde{g}(z) \right\}, \tag{47}$$

где

$$\widetilde{c}_1 = \widetilde{c}_1(t) \equiv c_1(t) - \nu' \operatorname{Re} \frac{e^{i\alpha}}{t-z_1}, \quad \nu' = \frac{pd}{2\pi}.$$

Для того, чтобы формула (47) определяла решение исходной задачи необходимо потребовать, чтобы функция, стоящая в фигурных скобках, имела в точке $z = p$ нуль порядка не ниже $-\frac{\varkappa-1}{2}$. Кроме того, должно выполняться условие аналогичное условию (37) при $j = 1$. Все это будет иметь место, если справедливы равенства

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \widetilde{c}_1(t) \left[\zeta\left(\omega' - \frac{\omega}{\pi i} \ln t\right) + \beta_1(t) \eta' \right] \frac{dt}{it} +$$

$$+ \nu' \operatorname{Im} \frac{e^{i\alpha}}{q-z_1} + C_0 + C_1 \widetilde{g}(q) = 0, \tag{48}$$

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \widetilde{c}_1(t) \left[\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i} \ln p - \frac{\omega}{\pi i} \ln t\right) + \beta_1(t) \eta' \right] \frac{dt}{t} +$$

$$+ iC_0 + \frac{\nu' e^{i\alpha}}{p-z_1} + iC_1 \widetilde{g}(p) = 0, \tag{49}$$

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \widetilde{c}_1(t) \zeta^{(k)}\left(\frac{\omega}{\pi i} \ln p - \frac{\omega}{\pi i} \ln t\right) \frac{dt}{t} + \frac{\nu' e^{i\alpha} (-1)^k k!}{(p-z_1)^{k+1}} +$$

$$+ iC_1 \widetilde{g}^{(k)}(p) = 0, \quad k = 1, \ 2, \dots, \ -\frac{\varkappa-1}{2} - 1. \tag{50}$$

Условие (48), а также условие, получающееся выделением мнимых частей из (49), удовлетворим подбором постоянных C_0, C_1 и найдем из них значение указанных постоянных. Найденные значения C_0, C_1 подставим в формулы (47), (50), значение C_1 — в условие, получающееся выделением действительных частей из (49). При этом последнее условие, а также условия (50) равносильны $-\varkappa$ действительным условиям. Формула (47) определяет решение рассматриваемой задачи, если выполняются указанные $-\varkappa$ действительных условий.

4. В случае, когда $\varkappa_0$ — нечетное, $\varkappa_1$ — четное число, краевое условие (2) представим в виде

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-i\psi(t)}\frac{(t-1)\,t^{\varkappa_1/2}}{(t-z_1)\,(t-p)^{(\varkappa-1)/2}}\,F(t)\right\}=$$

$$=\frac{c(t)\,|t-1|\,|t|^{\varkappa_1/2}\cos(\beta_1(t)\,\pi n)}{|G(t)|\cos(\beta(t)\,\pi)\,|t-z_1|\,|t-p|^{(\varkappa-1)/2}}, \qquad (51)$$

где

$$\psi(t)=\varphi(t)+\frac{\varkappa_1}{2}\arg t-\frac{\varkappa-1}{2}\arg(t-p)+\arg(t-1)-$$

$$-\arg(t-z_1)+\beta_1(t)\,\pi n. \qquad (52)$$

Определяя число $\alpha=\arg z_1$ так, чтобы функция (52) удовлетворяла условию (5), по формуле (9) найдем $\Gamma(z)$. Затем условие (51) перепишем в виде

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-\Gamma^+(t)}\frac{(t-1)\,t^{\varkappa_1/2}F(t)}{(t-z_1)\,(t-p)^{(\varkappa-1)/2}}\right\}=c_1(t)\equiv$$

$$\equiv\frac{c(t)\,|t-1|\,|t|^{\varkappa_1/2}\cos(\beta_1(t)\,\pi n)\,e^{-\Gamma_0(t)}}{|G(t)|\,|t-z_1|\,|t-p|^{(\varkappa-1)/2}\cos(\beta(t)\,\pi)}. \qquad (53)$$

а) Пусть $\varkappa\geqslant 1$. При $\varkappa>1$ по аналогии с предыдущим получим

$$F(z)=\frac{(z-z_1)\,(z-p)^{(\varkappa-1)/2}\,e^{\Gamma(z)}}{(z-1)\,z^{\varkappa_1/2}}\times$$

$$\times\left\{S(\widetilde{c}_1,\ z)+iC_0+\sum_{k=1}^{(\varkappa-1)/2}\frac{\mu_k'+i\mu_k''}{(z-p)^k}+\frac{\nu'+i\nu''}{z-z_1}\right\}, \qquad (54)$$

где

$$\widetilde{c}_1=\widetilde{c}_1(t)\equiv c_1(t)-\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{(\varkappa-1)/2}\frac{\mu_k'+i\mu_k''}{(t-p)^k}-\operatorname{Re}\frac{\nu'+i\nu''}{t-z_1},$$

$$\mu_1'=\frac{pd}{2\pi}-\frac{p}{r}\,(\nu'\cos\alpha+\nu''\sin\alpha)-\sum_{k=2}^{(\varkappa-1)/2}\frac{\mu_k'}{(-p)^{k-1}}.$$

Для того, чтобы функция (54) являлась решением исходной задачи, необходимо соблюдение условия, аналогичного соотношению (37) при $j=0$

$$\frac{\omega}{\pi^2}\int\limits_L \widetilde{c}_1(t)\left[\zeta\left(-\frac{\omega}{\pi i}\ln t\right)+\beta_1(t)\eta'\right]\frac{dt}{it}+C_0+$$

$$+\sum_{k=1}^{(\varkappa-1)/2}\frac{\mu_k''}{(1-p)^k}+\operatorname{Im}\frac{\nu'+i\nu''}{1-z_1}=0.$$

Это равенство удовлетворим подбором постоянной C_0 и из него найдем выражение для C_0. Тогда решение исходной задачи определяется формулой (54) и будет содержать $\varkappa$ произвольных постоянных ν', ν'', μ_1'', μ_k', μ_k'', $k=\overline{2,(\varkappa-1)/2}$. При $\varkappa=1$ формула (54) будет определять решение исходной задачи, если в ней положить $\mu_k'=\mu_k''=0$ для $k\geqslant 1$,

$$\nu''=\frac{rd}{2\pi\sin\alpha}-\nu'\operatorname{ctg}\alpha,\ C_0=-\frac{\omega}{\pi^2}\int\limits_L \widetilde{c}_1(t)\times$$

$$\times\left[\zeta\left(-\frac{\omega}{\pi i}\ln t\right)+\beta_1(t)\eta'\right]\frac{dt}{it}-\operatorname{Im}\frac{\nu'+i\nu''}{1-z_1}$$

в случае $\alpha>0$ и $\mu_k'=\mu_k''=0$ для $k\geqslant 1$, $\nu'=rd/2\pi$,

$$C_0=-\frac{\omega}{\pi^2}\int\limits_L \widetilde{c}_1(t)\left[\zeta\left(-\frac{\omega}{\pi i}\ln t\right)+\beta_1(t)\,\omega'\right]\frac{dt}{it}-\frac{\nu''}{1-r},$$

когда $\alpha=0$. Решение будет содержать произвольную постоянную ν' при $\alpha>0$ или ν'' при $\alpha=0$.

б) В случае $\varkappa\leqslant -1$ получим

$$F(z)=\frac{(z-z_1)(z-p)^{(\varkappa-1)/2}\,e^{\Gamma(z)}}{(z-1)\,z^{\varkappa_1/2}}\times$$

$$\times\left\{S(\widetilde{c}_1,\,z)+iC_0+\frac{\nu' e^{i\alpha}}{z-z_1}+iC_1\widetilde{g}(z)\right\},\tag{55}$$

где

$$\widetilde{c}_1=\widetilde{c}_1(t)\equiv c_1(t)-\operatorname{Re}\frac{\nu' e^{i\alpha}}{t-z_1},\ \nu'=pd/2\pi.$$

Чтобы формула (55) определяла решение исходной задачи, необходимо соблюдение условия

$$\frac{\omega}{\pi^2}\int\limits_L \widetilde{c}_1(t)\left[\zeta\left(-\frac{\omega}{\pi i}\ln t\right)+\beta_1(t)\eta'\right]\frac{dt}{it}+$$

$$+\nu'\operatorname{Im}\frac{e^{i\alpha}}{1-z_1}+C_0+C_1\widetilde{g}(1)=0,$$

а также условий (49), (50), в которых под функцией $c_1(t)$, входящей в выражение для $\widetilde{c}_1(t)$, следует понимать функцию, указанную в соотношении (53). Повторяя рассуждения, приведенные в конце предыдущего пункта после формулы (47), заключаем, что решение задачи определяется формулой (55), если выполняются $-\varkappa$ действительных условий.

Замечание. Если $\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_L \varphi(t)\,\frac{dt}{it} = N$, где N — целое число, то выполнение условия (5) можно добиться за счет выбора лишь целого числа n и не вводить в рассмотрение искомую точку $z_1 = re^{i\alpha}$, для которой в указанном случае число α оказывается равным нулю. При этом в вышеприведенные рассуждения и формулы для случая $\alpha = 0$ следует внести очевидные изменения.

Например, в формулах (4), (10), (11), (12), (16) для $\varkappa > 2$ нужно отбросить множители и слагаемые, содержащие z_1 и ν и заменить $\frac{\varkappa}{2} - 1$ на $\varkappa/2$ и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Квеселава Д. А. Задача Римана—Гильберта для многосвязной области. —Сообщения АН Груз. ССР, 6, 1945, № 8, с. 581—590 (на груз. яз.).
2. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., „Наука“, 1977.
4. Гахов Ф. Д., Хасабов Э. Г. О краевой задаче Гильберта для многосвязной области.— „Изв. вузов. Математика“, т. 2, 1958, № 1, с. 12—21.
5. Зверович Э. И. Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровых классах на римановых поверхностях.— „Успехи математических наук“, т. XXVI, вып. 1, 1971, с. 113—179.
6. Боярский Б. В. Об особом случае задачи Римана—Гильберта.— ДАН СССР, т. 119, 1958, № 3, с. 411—414 (см. также в книге Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959, с. 361—380).
7. Черепанов Г. П. Задача Римана—Гильберта для внешности разрезов вдоль прямой и вдоль окружности.— ДАН СССР, 1964, т. 156, № 2, с. 275—277.
8. Чибрикова Л. И. О граничных задачах для прямоугольника.— Краевые задачи теории функций комплексного переменного. Изд-во Казанск. ун-та, 1964, с. 15—39.
9. Банцури Р. Д. О задаче Римана—Гильберта для двусвязных областей.— Сообщения АН Груз. ССР, 80, 1975, № 3, с. 549—552.
10. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М., „Наука“, 1970.

Доложено на семинаре 26 января 1979 г.