

Werk

Verlag: Izd. Kazanskogo universiteta; Совет казанского университета

Ort: Kazan

Kollektion: RusDML; Mathematica

Werk Id: PPN509860087_0017

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN509860087_0017 | LOG_0024

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

УДК 534.222

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О ВЗРЫВЕ ДВУХ
СИММЕТРИЧНЫХ ЗАРЯДОВ*Р. Б. Салимов, Н. К. Туктамышев*

В работах [1 и 2] в рамках модели явления взрыва, предложенной М. А. Лаврентьевым и примененной В. М. Кузнецовым [3], исследована задача о взаимодействии двух точечных и плоских шнуровых зарядов при взрыве на поверхности грунта. В настоящей работе в рамках той же модели рассмотрены две задачи об определении формы выемки выброса при взрыве двух симметричных зарядов, причем, как и в [2], предполагается, что всюду в области течения скорость больше критической. Решена задача о взрыве двух поверхностных зарядов, толщина сечений которых меняется по линейному закону. Кроме того, рассмотрен случай взрыва двух плоских перпендикулярных свободной поверхности зарядов, примыкающих к свободной поверхности. В случае плоских зарядов положение и размеры, а в случае поверхностного заряда переменной толщины расстояние между зарядами определяются в процессе решения.

§ 1. Пусть при взрыве двух бесконечно длинных симметричных относительно оси u зарядов сечениями $ABB'A'$ и $A'B'B'A'$ образовалась выемка выброса грунта $C'DC$ с зоной покоя $NHMH^*N$. В силу симметрии будем рассматривать лишь правую половину области течения (рис. 1), которую обозначим через G_z , а границу последней — через $\Gamma_z (z = x + iy)$.

Согласно модели должен существовать комплексный потенциал $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $\varphi = -P/\rho$, P — импульсное давление, ρ — плотность грунта. Пусть $AA' = q_1$, $BB' = q_2$, причем $q_1 > q_2$. Тогда функция, характеризующая изменение толщины заряда, запишется в виде [4]

$$\delta(x) = (q_2 - q_1)x/l + q_1 - (q_2 - q_1)L/l \quad (L < x < L + l),$$

где l — ширина заряда (т. е. длина AB), $2L$ — удаленность зарядов друг от друга. Учитывая, что $P = k\delta$ [5], где k — известный коэффициент пропорциональности, на участке AB границы Γ_z получим $\varphi = a_1x + a_2$ ($L < x < L + l$), где

$$a_1 = k(q_1 - q_2)/(lp),$$

$$a_2 = k(q_2 - q_1)L/(pl) - kq_1/\rho.$$

На остальных участках Γ_z имеем: $\psi = 0$ на $QNHMDC$, $\varphi = 0$ на CB , AQ , $v = v_0$ на NHM , DC , где $v_0 = \text{const}$ — известная критическая скорость.

Итак, требуется определить форму выемки выброса грунта по вышенаписанным граничным условиям.

Введем плоскость годографа комплексной скорости $\omega = \frac{dw}{dz} = v_x + i(-v_y) = \left| \frac{dw}{dz} \right| e^{-i\theta}$, где v_x, v_y — проекции скорости $\vec{v}$ на координатные оси.

Учитывая граничные условия и то, что всюду в области G_z должно быть $v > v_0$, построим область G_ω в плоскости ω (рис. 2) (соответственные точки в различных областях обозначены одними и теми же буквами). Область G_ω будет определена полностью, если будет известно положение точек E и F . Для простоты будем считать, что положение точек E и F задано, и в процессе решения задачи будем отыскивать параметр a_2 , влияющий на форму заряда, и величину L , характеризующую удаленность зарядов. Пусть функция $\omega = \omega(\zeta)$ конформно отображает полуплоскость $\text{Im} \zeta > 0$ переменного $\zeta = \xi + i\eta$ на область G_ω так, что точкам $-3, -2, +1$ оси ξ соответствуют точки B, A, C границы области G_ω . Пусть точкам Q, N, M, D, H области G_ω соответствуют точки q, n, m, d, h оси ξ .

Введем в рассмотрение аналитическую в полуплоскости $\text{Im} \zeta > 0$ функцию $z(\zeta) = x(\xi, \eta) + iy(\xi, \eta)$, конформно отображающую эту полуплоскость на область G_z . Так как участки NHM и DC — линии тока, то на них

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \sin \theta - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cos \theta = 0 \quad (n < \xi < m, d < \xi < 1),$$

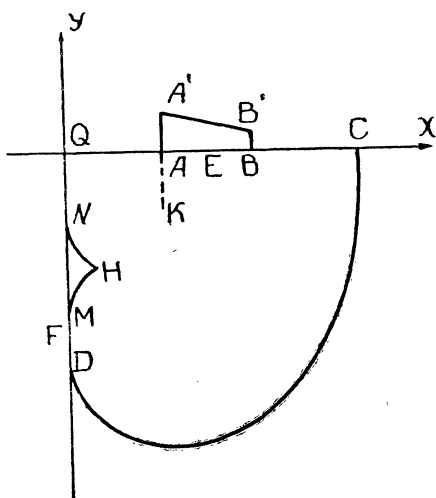


Рис. 1.

где $x = x(\xi, 0)$, $y = y(\xi, 0)$, а $\theta = \theta(\xi)$ — функция определяемая из соответствия точек границ при конформном отображении области G_ω на полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$. На остальных участках имеем

$$\partial y / \partial \xi = 0 \quad (1 < \xi < \infty, -\infty < \xi < q),$$

$$\partial x / \partial \xi = 0 \quad (q < \xi < n, m < \xi < d).$$

Итак, для нахождения функции $dz/d\zeta = \partial x / \partial \xi + i \partial y / \partial \xi$ имеем однородную краевую задачу Гильберта

$$u(\xi) \frac{\partial x}{\partial \xi} - v(\xi) \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0, \quad (1.1)$$

где

$$u(\xi) = \sin \theta(\xi), \quad v(\xi) = \cos \theta(\xi) \quad (m < \xi < n, d < \xi < 1),$$

$$u(\xi) = 0, \quad v(\xi) = -1 \quad (1 < \xi < \infty, -\infty < \xi < q),$$

$$u(\xi) = 1, \quad v(\xi) = 0 \quad (q < \xi < n, m < \xi < d).$$

Так же, как это сделано в работе [6, с. 227], можно показать, что функция $z'(\zeta)$ имеет в точке C особенность порядка $1/2$, в точках N, M, D ограничена, в точке H имеет нуль второго порядка. С учетом сказанного можно записать

$$\zeta dz/d\zeta = (\zeta - h) \Phi(\zeta) / (\zeta + i)^3, \quad (1.2)$$

где $\Phi(\zeta) = \mu(\xi, \eta) + i\nu(\xi, \eta)$ — функция, ограниченная в точках m, n, d , а также в точке $\xi = \infty$ и, имеющая в точках $q, 1$ особенность половинного порядка. Исходя из (1.1) и (1.2), легко получить краевые условия для функции $\Phi(\zeta)$.

$$a(\xi) \mu(\xi) - b(\xi) \nu(\xi) = 0,$$

где

$$a(\xi) = (\xi^3 - 3\xi) u(\xi) - (1 - 3\xi^2) v(\xi),$$

$$b(\xi) = (1 - 3\xi^2) u(\xi) + (\xi^3 - 3\xi) v(\xi).$$

Полученную задачу Гильберта решим методом, указанным в [7]. Введем функцию $G(\xi) = a(\xi) - ib(\xi)$, причем

$$G(\xi) = -i(\xi + i)^3 e^{i\theta(\xi)} \quad \text{при } n < \xi < m, d < \xi < 1,$$

$$G(\xi) = i(\xi + i)^3 \quad \text{при } -\infty < \xi < q, 1 < \xi < \infty,$$

$$G(\xi) = (\xi + i)^3 \quad \text{при } q < \xi < n, m < \xi < d.$$

Пусть $\gamma(\xi) = \arg G(\xi)$ и $\vartheta(\xi) = \arg(\xi + i)$, причем под $\arg(\zeta + i)$ понимается ветвь, непрерывная в верхней полуплоскости $\text{Im } \zeta > 0$ которая при $\zeta = \xi \rightarrow +\infty$ стремится к нулю. Выберем значения $\gamma(\xi)$ в соответствии с установленным классом решений

$$\begin{aligned}
\gamma(\xi) &= -\pi/2 + 3\theta(\xi) + \theta(\xi) & \text{при } \xi_0 < \xi < 1, \\
\gamma(\xi) &= 5\pi/2 + 3\theta(\xi) & \text{при } 1 < \xi < \infty, \\
\gamma(\xi) &= \pi/2 + 3\theta(\xi) & \text{при } -\infty < \xi < q, \\
v(\xi) &= 3\theta(\xi) + 2\pi & \text{при } q < \xi < n, \\
\gamma(\xi) &= 3\pi/2 + 3\theta(\xi) + \theta(\xi) & \text{при } n < \xi < m, \\
v(\xi) &= 8\theta(\xi) + 4\pi & \text{при } m < \xi < d, \\
\gamma(\xi) &= 7\pi/2 + 3\theta(\xi) + \theta(\xi) & \text{при } d < \xi < \xi_0,
\end{aligned}$$

где $d < \xi_0 < 1$.

Введем функцию $\varphi_1(\xi) = \gamma(\xi) - \beta(\xi)\pi$, где $\beta(\xi) = 0$ при $\xi_0 < \xi < 1$, $1 < \xi < \infty$, $\beta(\xi) = 1$ при $-\infty < \xi < q$, $\beta(\xi) = 2$ при $q < \xi < n$, $n < \xi < m$, $\beta(\xi) = 3$ при $m < \xi < d$, $\beta(\xi) = 4$ при $d < \xi < \xi_0$. Отсюда видно, что индекс задачи Гильберта $\kappa = 0$, следовательно, функция $\Phi(\zeta)$ определяется с точностью до постоянного множителя

$$\Phi(\zeta) = i\gamma_0 \frac{(\zeta + i)X(\zeta)}{V(\zeta - 1)(\zeta - q)}, \quad (1.3)$$

где $\gamma_0 = \bar{\gamma}_0$ — неизвестная постоянная. Функция $X(\zeta)$ выражается формулой

$$X(\zeta) = \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\xi_1) \frac{d\xi_1}{\xi_1 - \zeta} \right],$$

причем

$$\psi_1(\xi) = \gamma(\xi) - \beta(\xi)\pi + [\theta_1(\xi) + \theta_2(\xi)]/2,$$

$$\theta_1(\xi) = \arg(\xi - 1) - \arg(\xi + i), \quad \theta_2(\xi) = \arg(\xi - q) - \arg(\xi + i),$$

где $\arg(\xi - 1)$, $\arg(\xi - q)$ есть значения при $\zeta = \xi$ ветвей соответственно $\arg(\zeta - 1)$, $\arg(\zeta - q)$ непрерывных в полуплоскости $\text{Im } \zeta > 0$ и удовлетворяющих условию $0 < \arg(\zeta - 1)$, $\arg(\zeta - q) < \pi$.

Граничные значения $X(\zeta)$ определяются формулой

$$X(\xi) = \exp(i\psi_1(\xi))f(\xi),$$

где

$$f(\xi) = \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\xi_1) \frac{d\xi_1}{\xi_1 - \xi} \right).$$

С учетом (1.2) и (1.3) имеем

$$z(\zeta) = i\gamma_0 \int_q^{\zeta} (\zeta - h) X(\zeta) (\zeta + i)^{-2} [(\zeta - 1)(\zeta - q)]^{-\frac{1}{2}} d\zeta.$$

Осуществляя в последней формуле предельный переход при $\zeta \rightarrow \xi$, выделяя действительные и мнимые части, легко получить параметрические уравнения границы Γ_z .

Как видно из предыдущего, параметры n , m , d определяются из соответствия точек при конформном отображении области G_ω на полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$. Точки N , M границы Γ_z должны лежать на одной вертикали. Учитывая это, приходим к условию $\text{Re } z(m) = 0$, которое можно удовлетворить подбором h . Получаем

$$h = \frac{\int_n^m \frac{\xi [(\xi^2 - 1) \cos \psi_1(\xi) + 2\xi \sin \psi_1(\xi)] f(\xi) d\xi}{(\xi^2 + 1)^2 V(1 - \xi)(\xi - q)}}{\int_n^m \frac{[(\xi^2 - 1) \cos \psi_1(\xi) + 2\xi \sin \psi_1(\xi)] f(\xi) d\xi}{(\xi^2 + 1)^2 V(1 - \xi)(\xi - q)}}$$

В силу соотношения $d\omega = \omega(\zeta) (dz/d\zeta) d\zeta$ будем иметь

$$\omega(\zeta) = i\gamma_0 \int_q^\zeta (\zeta - h) \omega(\zeta) X(\zeta) (\zeta + i)^{-2} [(\zeta - q)(\zeta - 1)]^{-\frac{1}{2}} d\zeta.$$

Отсюда для определения параметра q имеем уравнение

$$\text{Re } i \int_q^1 \frac{(\xi - h) \omega(\xi) X(\xi) d\xi}{(\xi + i)^2 V(\xi - q)(\xi - 1)} = 0. \quad (1.4)$$

Длина участка AB границы Γ_z известна и равна l , поэтому

$$l = \gamma_0 \int_{-2}^{-3} \frac{(\xi - h) f(\xi) d\xi}{(\xi^2 + 1)^2 V(1 - \xi)(q - \xi)}.$$

Отсюда определяется значение γ_0 .

Удаленность зарядов $2L$ друг от друга находится по формуле

$$L = \gamma_0 \int_q^{-2} (\xi - h) (\xi^2 + 1)^{-2} [(1 - \xi)(q - \xi)]^{-1/2} f(\xi) d\xi.$$

Для определения параметра a_2 , с учетом (1.4), имеем соотношение

$$a_1 L + a_2 = \lim_{\substack{\xi \rightarrow -2 \\ \xi < -2}} \text{Re } \omega(\xi).$$

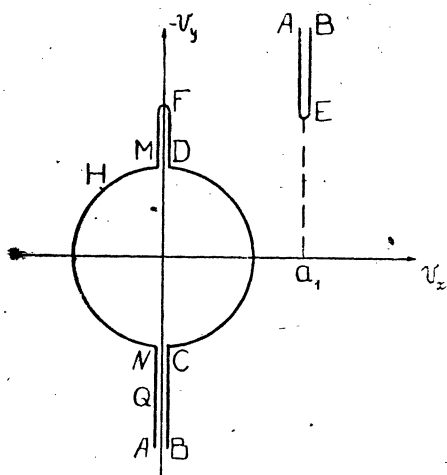


Рис. 2.

§ 2. Пусть при взрыве двух симметричных относительно оси y плоских зарядов AK и A^*K^* , перпендикулярных свободной поверхности, образовалась выемка выброса CDC^* с зоной покоя $NHMH^*N$. В силу симметрии будем рассматривать лишь правую половину области течения (рис. 1, заряд AK показан пунктирной линией), которую обозначим через G_z , а границу последней — через Γ_z .

Функция

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

на границе Γ_z удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi = 0 \text{ на } QNHMDC, \varphi = 0 \text{ на } CA, AQ, \varphi = -\varphi_0 = \text{const на } AK, \quad (2.1)$$

$v = v_0$ на NHM, DC , где величины v_0 — значение модуля критической скорости, φ_0 — значение потенциала на заряде AK будем считать известными.

Исходя из условия (2.1), построим область комплексного потенциала G_w (рис. 3). Это будет бесконечная полоса с разрезом $QNHMDC$ (соответственные точки в разных областях обозначены одними и теми же буквами). Положение конца разреза и точек N, M, D, K пока неизвестно. Для построения решения удобно ввести вспомогательную полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ переменной $\zeta = \xi + i\eta$. Обозначим эту полуплоскость через G_ζ .

Конформное отображение области G_ζ на область G_w дается интегралом Кристоффеля—Шварца. Пусть точкам $A^+, K, A^-, Q, N, M, H, D, C$ соответствуют точки $-a, k, a_1, -1, n, m, h, d, a$ оси ξ . Для производной $\omega'(\zeta)$ этого отображения получим соотношение

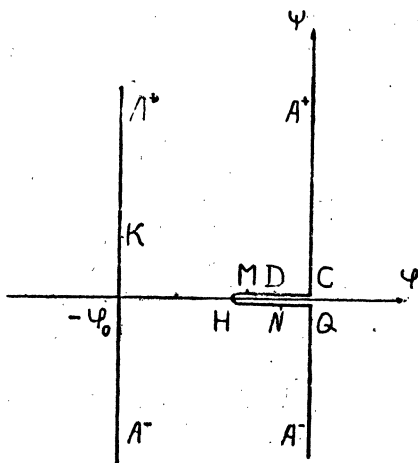


Рис. 3.

$$\omega'(\zeta) = iK_1 \frac{\zeta - h}{(\zeta + a)(\zeta - a_1) \sqrt{(\zeta - a)(\zeta + 1)}},$$

где

$$K_1 = \frac{2\varphi_0 \sqrt{2a(a-1)}}{\pi} \cdot \frac{3a^2 + 1}{a^3 + 7a^2 - a + 1},$$

$$h = \frac{a^3 - 4a^2 - a}{3a^2 + 1}, \quad a_1 = -\frac{a^4 + 7a^2 - a^3 + a}{a^3 + 7a^2 - a + 1}.$$

Введем функцию

$$X(w) = u_1 + iv_1 = \ln \frac{v_0}{w'(z)}, \quad (w = w(z)).$$

Для ее определения имеем следующую смешанную краевую задачу с граничными условиями: $v_1 = \pi/2$ на A^+QN , $u_1 = 0$ на NHM и DC , $v_1 = 3\pi/2$ на MD , $v_1 = +5\pi/2$ на CA^+ , $v_1 = +2\pi$ на A^+K , $v_1 = \pi$ на KA^- . Учитывая, что функция $X[\omega(\zeta)] - i5\pi/2$ должна быть ограниченной в окрестности точек N, M, D, C , определим ее по формуле Синьорини [8]

$$X[\omega(\zeta)] - i5\pi/2 = R(\zeta) \left[-\frac{1}{2} \int_{-a}^k \frac{1}{|R(\tau)|} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \int_k^{a_1} \frac{1}{|R(\tau)|} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} - 2 \int_{a_1}^n \frac{1}{|R(\tau)|} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} + \int_m^d \frac{1}{|R(\tau)|} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} \right], \quad (2.2)$$

где $R(\zeta) = \sqrt{(\zeta - n)(\zeta - m)(\zeta - d)(\zeta - a)}$ (под $R(\zeta)$ понимается непрерывная и однозначная в области G_ζ ветвь, которая на участке (a, ∞) действительной оси принимает положительные значения). При этом должно выполняться условие разрешимости

$$\int_{-a}^k \frac{d\tau}{|R(\tau)|} + 3 \int_k^{a_1} \frac{d\tau}{|R(\tau)|} + 4 \int_{a_1}^n \frac{d\tau}{|R(\tau)|} - 2 \int_m^d \frac{d\tau}{|R(\tau)|} = 0. \quad (2.3)$$

Учитывая соотношение $w'(z) = \omega'(\zeta)/z'(\zeta)$ и формулу (2.2), получим функцию, отображающую конформно полуплоскость G_ζ на область G_z

$$z(\zeta) = \frac{1}{v_0} \int_{-1}^{\zeta} \exp(X[\omega(\zeta)]) \omega'(\zeta) d\zeta. \quad (2.4)$$

Переходя в соотношении (2.4) к пределу при $\zeta \rightarrow \xi$ и отделяя действительные и мнимые части, легко получить координаты границы Γ_z .

Требуя, чтобы $\operatorname{Re} z(m) = 0$ и точки A^+ , A^- в физической плоскости совпадали, придем к соотношениям

$$\int_n^m (\xi - h) (\xi + a)^{-1} (\xi - a_1)^{-1} [(a - \xi) (\xi + 1)]^{-1/2} \sin \Phi(\xi) d\xi = 0, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^n \frac{\exp(\Phi(\xi)) (\xi - h) d\xi}{(\xi + a) (\xi - a_1) V(a - \xi) (\xi + 1)} + \int_n^m \frac{(\xi - h) \cos \Phi(\xi) d\xi}{(\xi + a) (\xi - a_1) V(a - \xi) (\xi + 1)} - \\ & - \int_m^d \frac{(\xi - h) \exp(-\Phi(\xi)) d\xi}{(\xi + a) (\xi - a_1) V(a - \xi) (\xi + 1)} + \\ & + \int_d^a \frac{(\xi - h) \cos \Phi(\xi) d\xi}{(\xi + a) (\xi - a_1) V(a - \xi) (\xi + 1)} = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) = |R(\xi)| & \left[-\frac{1}{2} \int_{-a}^k \frac{1}{|R(\tau)|} \frac{d\tau}{\tau - \xi} - \frac{3}{2} \int_k^{a_1} \frac{1}{|R(\tau)|} \frac{d\tau}{\tau - \xi} - \right. \\ & \left. - 2 \int_{a_1}^n \frac{1}{|R(\tau)|} \frac{d\tau}{\tau - \xi} + \int_m^d \frac{1}{|R(\tau)|} \frac{d\tau}{\tau - \xi} \right]. \end{aligned}$$

Параметры a и k , входящие в формулу (2.4), будем считать заданными, тогда для определения m , n , d имеем систему уравнений (2.3), (2.5), (2.6).

Решая эту систему, находим параметры m , n , d по формуле (2.4) — координаты Γ_z . Ширина заряда l и расстояние между зарядами $2L$ определяются по формулам

$$l = \frac{K_1}{v_0} \int_k^{a_1} \frac{\exp(\Phi(\xi)) (\xi - h) d\xi}{(\xi + a) (\xi - a_1) V(a - \xi) (-1 - \xi)},$$

$$L = -\frac{K_1}{v_0} \int_{a_1}^{-1} \frac{\exp(\Phi(\xi)) (\xi - h) d\xi}{(\xi + a) (\xi - a_1) V(a - \xi) (-1 - \xi)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. М., Поляк Э. Б., Шер Е. Н. О гидродинамическом взаимодействии шнуровых зарядов В. В.—ПМТФ, 1975, № 5, с. 93—101.

2. Ильинский Н. Б., Якимов Н. Д. О взаимодействии двух плоских шнуровых зарядов при взрыве на поверхности грунта—ПМТФ, 1977, № 1, с. 147—150.

3. Кузнецов В. М. О форме воронки выброса при взрыве на поверхности грунта.—ПМТФ, 1960, № 3, с. 152—156.

4. Ильинский Н. Б., Лабуткин А. Г., Салимов Р. Б. Об одном случае взрыва симметричного поверхностного заряда переменной толщины.—ПМТФ, 1976, № 3, с. 154—161.

5. Кузнецов В. М., Лаврентьев М. А., Шер Е. И. О направленном метании грунта при помощи взрывчатого вещества.—ПМТФ, 1960, № 4, с. 49—50.

6. Салимов Р. Б. Некоторые основные задачи об изменении контуров теории аналитических функций и их приложения к механике жидкостей. Казань, 1970.

7. Салимов Р. Б., Селезнев В. В. К решению краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами.—Труды семинара по краевым задачам. Вып. 16. Изд-во Казанского ун-та, 1979.

8. Нужин М. Т., Ильинский Н. Б. Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений. Изд-во Казанского ун-та, 1963.

Доложено на семинаре 25 января 1979 г.