КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 17 *Труды семинара по краевым задачам* *1980*

УДК 517.54

ОБ УЛУЧШЕНИИ РАЗДЕЛЯЮЩИХ ПОСТОЯННЫХ В КРИТЕРИИ ОДНОЛИСТНОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

М. А. Северин, П. Л. Шабалин

Пусть E_ρ — круг радиуса ρ, $\rho > 0$, с центром в начале координат, $E \equiv E_1$, $E(q, \rho) = \{q < |\zeta| < \rho\}$, $E\{q, \rho) = \{q \leqslant |\zeta| < \rho\}$. Нам понадобится класс Λ_k квазигладких функций Зигмунда [1], определяемых условием $|\nu(\theta + h) - 2\nu(\theta) + \nu(\theta - h)| < kh$, $0 < h < \pi$, и класс Липшица $H(k, 1)$.

Нас будет интересовать слабая проблема однолистности [см. 2, с. 41] общего решения внутренней обратной краевой задачи по параметру s. Как известно [3, 4], искомая область G_z в этом случае определяется отображением круга E функцией вида

$$z(\zeta) = \int_0^\zeta \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\zeta e^{-i\theta})\, d\nu(\theta)\right\} d\zeta,\quad \zeta \in E,$$

$$\nu(\theta) = \int p(\theta)\, d\theta + \nu_s(\theta),\quad S(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}. \tag{1}$$

Здесь $p(\theta)$ — суммируемая функция, определяющаяся по граничным условиям задачи, $\nu_s(\theta)$ — невозрастающая непрерывная функция с производной, почти везде на $[-\pi, \pi]$ равной нулю, — выбирается произвольно. Однолистность отображения (1) с $\nu_s(\theta) \not\equiv \mathrm{const}$ впервые исследовалась в статье [5]. Было доказано существование постоянной k_0, $0 < k_0 = k(z)$, и k_s, $k_s = k_s(z) < \infty$, таких, что включение $\nu(\theta) \in \Lambda_{k_0}$ ($\nu(\theta) \in \Lambda_{k_s}$) является достаточным (необходимым) условием однолистности $z = z(\zeta)$ в E. В работе [6] получены равномерные по всему классу однолистных отображений (1) оценки для разделяющих постоянных:

$$1/9{,}2 \leqslant k_0 < k_s \leqslant 155.$$

В. М. Миклюков при обсуждении результатов диссертации П. Л. Шабалина заметил, что в классе Λ_k^* функций, удовлетворяющих условию Зигмунда с данным k лишь локально, для малых h, оценка сверху для k_s может быть улучшена до $k_s^* < 21$. Ниже мы воспроизведем с несущественными изменениями доказательство этого факта. Обоснование ограничения для k_0 проводилось в [6] на пути подчинения функции (1) с $\nu(\theta)$ из Λ_k условию однолистности Беккера [7]:

$$|\zeta z''(\zeta)/z'(\zeta)| < (1-|\zeta|^2)^{-1},\ \zeta \in E. \tag{2}$$

В этой статье мы покажем, что неравенство для k_0 также можно несколько улучшить, если требовать выполнения (2) не во всем круге E, а лишь в кольце $E[q, 1)$, $0 < q < 1$. При этом нам понадобятся следующие условия однолистности аналитических функций: если аналитическая в круге E функция $z(\zeta)$, $z(0) = 0$, $z'(0) = 1$, удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re} \zeta \frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)} > -1,\ \zeta \in \overline{E}_q, \tag{3}$$

$$\left|\zeta \frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)}\right| < \frac{1}{1-|\zeta|^2},\ \zeta \in E[q, 1), \tag{4}$$

то $z(\zeta)$ будет однолистной в E [см. 8, 9].

В [9] доказано, что утверждение останется справедливым если условия (3), (4) заменить на

$$|\arg z'(\zeta)| < \arccos q,\ \zeta \in \overline{E}_q, \tag{5}$$

$$\left|\frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)}\right| < \frac{1}{1-|\zeta|^2},\ \zeta \in E[q,\ 1). \tag{6}$$

Отметим, что применение этих результатов позволяет не только увеличить постоянную k_0, но дает возможность судить о некоторых геометрических свойствах отображения (1) на окружностях, близких к единичной.

В частности, из теорем 1, 2 данной статьи следует, что $k_0 = \dfrac{1}{3{,}37}$ и при этом решение обратной краевой задачи будет выпуклым в E_{q_1}, $q_1 = 0{,}71$, и почти выпуклым в E_{q_2}, $q_2 = 0{,}99$. Кроме того, в работе доказаны два условия однолистности фундаментального решения исследуемой задачи. Эти условия получены в виде ограничений на коэффициент неравенства Липшица, которому подчинена функция

$$\nu(\theta) = \int p(\theta)\, d\theta.$$

Мы начнем изложение результатов статьи с доказательства вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть $\nu(r, \theta)$ — гармоническая в E функция, представимая через свои граничные значения $\nu(\theta)$ интегралом Пуассона. Если $\nu(\theta)\in\Lambda_k$, то в кольце $E[\rho, 1)$, $0{,}5<\rho<1$, справедлива оценка*

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\nu(r, \varphi)\right|\leqslant kA(\rho)\frac{1+r}{1-r},$$

где

$$A(\rho)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2C(\rho)}{\sqrt{3}(1+4I_m)^2}+\frac{1}{1+4I_m}-0{,}5\right],$$

$$I_m=\min_{\rho\leqslant r\leqslant 1}\frac{1+4r+r^2-\sqrt{1+34r^2+r^4}}{8(1-r)^2},$$

$$C(\rho)=\arcsin\left(\frac{1-\rho}{\sqrt{12\rho}}\right)\cdot\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}.$$

Доказательство. Обозначив через $P(r, t)$ ядро Пуассона, запишем

$$\nu(r, \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\nu(\theta)P(r, \theta-\varphi)\,d\theta.$$

От обеих частей этого равенства возьмем вторую частную производную по φ

$$\frac{\partial^2\nu(r, \varphi)}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\nu(\theta)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}P(r, \theta-\varphi)\,d\theta, \tag{7}$$

где

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}P(r, t)=\frac{2r(1-r^2)[2r(1+\sin^2 t)-(1+r^2)\cos t]}{(1+r^2-2r\cos t)^3}.$$

Проведем в (7) замену переменных, положив $\theta-\varphi=t$. Получим

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\nu(r, \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\nu(\varphi+t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}P(r, t)\,dt, \tag{8}$$

После замены в (8) t на $-t$ будем иметь

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\nu(r, \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\nu(\varphi-t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}P(r, t)\,dt. \tag{9}$$

Так как $\nu(\theta)\in\Lambda_k$, из (8) и (9) с учетом очевидного соотношения

$$\int_{-\pi}^{\pi} \nu(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(r,\ t)\, dt = 0$$

получим оценку

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \nu(r,\ \varphi) \right| \leqslant \frac{k}{2\pi} \int_0^{\pi} t \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(r,\ t) \right| dt. \tag{10}$$

Заметим теперь, что функция $\frac{\partial^2}{\partial t^2} P(r,\ t)$ меняет знак на интервале $[0,\ \pi]$ только в одной точке $\tau = \tau(r)$, которая определяется из уравнения $\cos\tau/(1+\sin^2\tau) = 2r/(1+r^2)$. Отсюда следует, что

$$\sin^2\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{1+4r+r^2-\sqrt{1+34r^2+r^4}}{8r} = \frac{(1-r)^2}{r} I(r).$$

Так как $\lim\limits_{r\to 1} I(r)$ существует и равен $1/12$ и $0 < \rho \leqslant r \leqslant 1$, то справедливы неравенства $I_m(1-r^2)/r \leqslant \sin^2\left(\frac{\tau}{2}\right) \leqslant I_M(1-r)^2/r$, где $I_m = \min\limits_{\rho \leqslant r \leqslant 1} I(r)$, $I_M = \max\limits_{\rho \leqslant r \leqslant 1} I(r) = I(1) = \frac{1}{12}$. Поэтому

$$\frac{1-r}{\sqrt{r}} \sqrt{I_m} \leqslant \sin\left(\frac{\tau}{2}\right) \leqslant \frac{1-r}{\sqrt{r}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$\frac{1-r}{\sqrt{r}} \sqrt{I_m} \leqslant \sin\tau \leqslant \frac{1-r}{\sqrt{r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{11}$$

$$\frac{1-r}{\sqrt{r}} 2\sqrt{I_m} \leqslant \tau \leqslant \frac{1-\rho}{\sqrt{r}} \cdot C(\rho) = \frac{1-r}{\sqrt{r}} \frac{\arcsin\{(1-\rho)/\sqrt{12\rho}\} \cdot 2\sqrt{\rho}}{1-\rho}. \tag{12}$$

Последняя оценка получена с помощью неравенства

$$\frac{\tau}{2}(1-\rho)/\sqrt{12\rho}\arcsin\left(\frac{1-\rho}{\sqrt{12\rho}}\right) \leqslant \sin\frac{\tau}{2}.$$

Перепишем теперь соотношение (10) в виде

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \nu(r,\ \varphi) \right| \leqslant \frac{k}{2\pi}\left(-\int_0^{\tau} + \int_{\tau}^{\pi}\right) t \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(r,\ t)\, dt =$$

$$= -\frac{k}{\pi} \tau \frac{\partial}{\partial t} P(r,\ \tau) + \frac{k}{\pi} P(r,\ \tau) - \frac{k}{2\pi} P(r,\ 0) - \frac{k}{2\pi} P(r,\ \pi).$$

Так как $-\frac{\partial}{\partial t}P(r,\tau)=(1-r^2)2r\sin\tau/(1+r^2-2r\cos\tau)^2$, учитывая (11), (12), получим утверждение леммы 1.

Лемма 2. *Если $F(\zeta)=u(\zeta)+iv(\zeta)$ регулярная в E функция, $F(0)=0$ и в кольце $E(\rho, 1)$, $\rho\geqslant 0{,}5$, имеем $|u(\zeta)|<A(\rho)(1+|\zeta|)/(1-|\zeta|)$, то неравенство*

$$|F(\zeta)|<\frac{8L(q)}{1-|\zeta|^2},\quad L(q)=\begin{cases}A\left(\frac{1+q}{2}\right)\cdot\frac{3+4q+q^2}{1+3q}, & q\leqslant 0{,}5,\\ A(0{,}75)\cdot 2{,}1, & q\geqslant 0{,}5,\end{cases}\tag{13}$$

справедливо для всех ζ, $q\leqslant|\zeta|<1$, с $q=2\rho-1$.

Доказательство. Оценим вначале функцию $|F'(\zeta)|$. Для каждого $r=|\zeta|$, $q\leqslant r<1$, рассмотрим $\rho_1=\frac{1+r}{2}$ и аналитическую в замкнутом круге $\overline{E}_{\rho_1}$ функцию

$$F_{\rho_1}(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(\rho_1,\theta)\,S_{\rho_1}(\zeta e^{-i\theta})\,d\theta,$$

где $u(\rho_1,\theta)=\operatorname{Re}F(\rho_1e^{i\theta})$, $S_{\rho_1}(\zeta)$ — ядро Шварца для круга E_{ρ_1}. Очевидно, что $F_{\rho_1}(\zeta)=F(\zeta)$ для $|\zeta|\leqslant\rho_1$ и, следовательно,

$$|F'(\zeta)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(\rho_1,\theta)\,S'_{\rho_1}(\zeta e^{-i\theta})\,d\theta\right|<$$

$$<\frac{2\rho_1}{\rho_1^2-r^2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u(\rho_1,\theta)|\,P_{\rho_1}(r,\theta-\varphi)\,d\theta.$$

При $\rho\leqslant\rho_1<1$ с учетом условий леммы имеем

$$|F'(\zeta)|<\frac{2\rho}{\rho^2-r^2}A(\rho)\frac{1+\rho}{1-\rho}=\frac{4A\widetilde{L}(r)}{(1-r)^2},\quad \widetilde{L}(r)=\frac{3+4r+r^2}{1+3r}\leqslant\widetilde{L}(q),$$

для $q\leqslant r<1$.

Интегрированием по радиусу получим

$$|F(\zeta)|<4A(\rho)\widetilde{L}(q)\left(\int_0^q\frac{dr}{(1-q)^2}+\int_q^r\frac{dr}{(1-r)^2}\right)=$$

$$=\frac{4A(\rho)\widetilde{L}(q)}{(1-r)}\cdot\left[1+\frac{(2q-1)(1-r)}{(1-q)^2}\right]\quad q\leqslant r<1.$$

Несложные вычисления позволяют нам убедиться в справедливости соотношения (13) в случае $q\leqslant 1/2$. При $q>1/2$ имеем

$$|F(\zeta)| < 8L\left(\frac{1}{2}\right)\Big/(1-|\zeta|^2)$$

для всех $\zeta \in E\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ и, следовательно, для $\zeta \in E[q, 1)$.

Лемма 3. *Пусть $F(\zeta)$ — регулярная в E функция, $F(0)=0$. Если известно, что в кольце $E[\rho, 1)$ $|\operatorname{Re} F(\zeta)| \leqslant kA(1+r)/(1-r)$, $|\zeta|=r$, то в E_q справедлива оценка* $|\operatorname{Im} F(\zeta)| \leqslant kT(q)$, где

$$T(q)=\frac{2}{\pi}A\frac{(2+q)}{(1-q)}\ln\frac{(1+5q)}{1-q}, \quad \rho=\frac{0,5+q}{1,5}.$$

Доказательство. Функция $F(\zeta)$ регулярна в замкнутом круге $\bar{E}_\rho$, $\rho=\dfrac{0,5+q}{1,5}$, и, следовательно, ее мнимая часть представляется формулой

$$\operatorname{Im} F(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re} F(\rho, \theta)\frac{2r\rho\sin(\varphi-\theta)}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)}\,d\theta, \quad \zeta=re^{i\varphi}\in\bar{E}_\rho.$$

Поэтому при $\zeta=qe^{i\varphi}$ выполняется неравенство

$$|\operatorname{Im} F(\zeta)| \leqslant \frac{kA(1+\rho)}{(1-\rho)\cdot 2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{2q\rho\sin(\varphi-\theta)}{q^2+\rho^2-2q\rho\cos(\varphi-\theta)}\right|d\theta=kT(q).$$

Лемма доказана.

Приступим к изложению основных результатов данной работы.

Теорема 1. *Решение* (1) *обратной краевой задачи будет однолистным в E, если $\nu(\theta)\in\Lambda_k$ с*

$$k \leqslant \min\left\{\frac{1}{T(q)}, \frac{1}{L(\sigma)}\right\}, \quad 0 \leqslant q < 1,$$

и выпуклым в E_{q_1}, где q_1 — корень уравнения

$$1=kT(q).$$

Доказательство. Обозначим через $g(\zeta)$ интеграл Шварца с плотностью $\nu(\theta)$. Не ограничивая общности, можно считать, что на концах интервала $[-\pi; \pi]$ значения функции $\nu(\theta)$ совпадают.

Из (1) следует равенство

$$\ln z'(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(\zeta e^{-i\theta})\,d\nu(\theta),$$

которое после интегрирования по частям примет вид

$$\ln z'(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \nu(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} S(\zeta e^{-i\theta})\,d\theta. \tag{14}$$

В силу очевидного соотношения

$$\frac{\partial}{\partial\theta} S(re^{-i(\theta-\varphi)}) = -\frac{\partial}{\partial\varphi} S(re^{-i(\theta-\varphi)}),\ \zeta = re^{i\varphi},$$

выражение (14) запишется следующим образом:

$$\ln z'(\zeta) = \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \nu(\theta) S(\zeta e^{-i\theta})\,d\theta = \frac{\partial}{\partial\varphi} g(\zeta). \tag{15}$$

После дифференцирования по φ получим

$$i\zeta\frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)} = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} g(\zeta),\ \zeta = re^{i\varphi}.$$

Последовательно применяя к функции $g(\zeta)$ утверждения лемм 1, 2 и 3, убедимся в справедливости для $z(\zeta)$ соотношений (3) и (4).

Заметим, что наибольшее k_0, которое удается получить из теоремы 1 при $q=0{,}71$, равно $1/3{,}37$. При этом функция (1) будет выпуклой в E_q, $q \geqslant 0{,}71$.

Теорема 2. *Решение* (1) *обратной краевой задачи будет однолистным в E и почти выпуклым в E_{q_1}, где q_1 — корень уравнения $k\pi = 2M(q_1)$, если* $\nu(\theta)\in\Lambda_k$ *с*

$$k \leqslant \min\left\{\frac{\arccos q}{M(q)},\ \frac{q}{L(q)}\right\},\ 0 \leqslant q < 1.$$

Обоснование этого результата проводится аналогично доказательству теоремы 1. Только условие однолистности в виде соотношений (3), (4) заменяется неравенствами (5), (6) и вместо леммы 3 нам понадобится

Лемма 4. *Пусть $z(\zeta)$ в круге E определена формулой* (1) с $\nu(\theta)\in\Lambda_k$. *Тогда для $|\zeta|\leqslant q$, $0<q<1$, справедливо соотношение*

$$|\arg z'(\zeta)| < kM(q),\ \zeta\in\bar{E}_q,$$

$$M(q) = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{4q}{1-q^2}\arccos\frac{2q}{1+q^2} + \ln\frac{(1+q^2)^2}{(1-q^2)(1+q)^2}\right\}.$$

Доказательство. Из (1) получим

$$\arg z'(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} Q(r,\ \theta-\varphi)\,d\nu(\theta),$$

где

$$Q(r,\ \theta-\varphi)=\operatorname{Im} S(\zeta e^{-i\theta})=\frac{2r\sin(\theta-\varphi)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)},\quad \zeta=re^{i\varphi}.$$

После интегрирования по частям будем иметь

$$\arg z'(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\nu(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}Q(r,\ \theta-\varphi)\,d\theta,$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}Q(r,\ \theta-\varphi)=\frac{2r(1+r^2)\cos(\theta-\varphi)-2}{(1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi))^2}.$$

Используя четность функции $\frac{\partial}{\partial\theta}Q(r,\ \theta-\varphi)$, преобразуем последнее соотношение к виду

$$\arg z'(\zeta)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\nu(\varphi+t)-2\nu(\varphi)+\nu(\varphi-t)]\frac{\partial}{\partial t}Q(r,\ t)\,dt.$$

Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial t}Q(r,\ t)$ меняет знак в точке $\tau=\tau(r)=$ $=\arccos\left[\frac{2r}{(1+r^2)}\right]$, запишем неравенство

$$|\arg z'(\zeta)|<\frac{k}{2\pi}\left\{\left(\int_0^{\tau}-\int_{\tau}^{\pi}\right)t\frac{\partial}{\partial t}Q(r,\ t)\,dt\right\}=$$

$$=\frac{k}{2\pi}\left\{2\tau Q(r,\ \tau)-\pi Q(r,\ \pi)-\int_0^{\tau}Q(r,\ t)\,dt+\int_{\tau}^{\pi}Q(r,t)\,dt\right\}.$$

Несложные вычисления показывают, что

$$|\arg z'(\zeta)|<\frac{k}{2\pi}\left\{\frac{4r}{1-r^2}\arccos\frac{2r}{1+r^2}+\ln\frac{1+r^2}{1-r^2}-\ln\frac{(1+r)^2}{1+r^2}\right\}\leqslant kM(q)$$

для всех $r\leqslant q<1$.

Докажем необходимое условие однолистности отображения (1).

Теорема 3. *Если функция $z(\zeta)$ однолистна в E, то* $\nu(\theta)\in\Lambda^{*}_{k_s}$, $k_s=21$.

Доказательство. После дифференцирования равенства (15) по ζ с использованием необходимого условия однолистности [10, с. 52]

$$\left|\frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)}\right|\leqslant\frac{6}{1-|\zeta|^2},\ |\zeta|<1, \tag{16}$$

имеем

$$\left|\frac{d}{\partial\zeta}(i\zeta g'(\zeta))\right| = \left|\frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)}\right| \leqslant \frac{6}{1-|\zeta|^2}, \ |\zeta| < 1. \qquad (17)$$

Пусть h — вещественное число, $0 < h < 1$, и $r_h = 1 - h$. Следуя [1, с. 421], рассмотрим тождество

$$g(e^{i\theta}) \equiv g(r_h e^{i\theta}) + (e^{i\theta} - r_h e^{i\theta}) g'(r_h e^{i\theta}) + \int_{r_h e^{i\theta}}^{e^{i\theta}} (e^{i\theta} - \zeta) g''(\zeta)\, d\zeta.$$

Заменяя θ на $\theta + h$ и $\theta - h$, получим аналогичные выражения для $g(e^{i(\theta+h)})$ и $g(e^{i(\theta-h)})$.

Составим для функции $g(e^{i\theta})$ конечную разность второго порядка, которую запишем в виде

$$g(e^{i(\theta+h)}) - 2g(e^{i\theta}) + g(e^{i(\theta-h)}) = I_1(h) + I_2(h) + I_3(h),$$

где

$$I_1(h) = \int_0^h dt \int_{r_h e^{i(\theta-t)}}^{r_h e^{i(\theta+t)}} \frac{d}{d\zeta}(\zeta g'(\zeta))\, d\zeta,$$

$$I_2(h) = \frac{h}{r_h} \int_0^h dt \int_{r_h e^{i(\theta-t)}}^{r_h e^{i(\theta+t)}} \frac{d}{d\zeta}\left[\zeta \frac{d}{d\zeta}(\zeta g'(\zeta))\right] d\zeta,$$

$$I_3(h) = \int_{r_h e^{i(\theta+h)}}^{e^{i(\theta+h)}} (e^{i(\theta+h)} - \zeta) g''(\zeta)\, d\zeta -$$

$$-2 \int_{r_h e^{i\theta}}^{e^{i\theta}} (e^{i\theta} - \zeta) g''(\zeta)\, d\zeta + \int_{r_h e^{i(\theta-h)}}^{e^{i(\theta-h)}} (e^{i(\theta-h)} - \zeta) g''(\zeta)\, d\zeta.$$

С учетом (17) получим

$$|I_1(h)| \leqslant \frac{3 r_h h^2 2}{(1-r_h)(1+r_h)} = 3h + o(h).$$

Условие (17) и лемма 1 из [5] позволяют заключить, что

$$\left|\frac{d^2}{d\zeta^2}(\zeta g'(\zeta))\right| \leqslant \frac{24}{(1-|\zeta|^2)^2}.$$

Поэтому

$$\left|\frac{d}{d\zeta}\left[\zeta \frac{d}{d\zeta}(\zeta g'(\zeta))\right]\right| \leqslant \frac{24}{(1-|\zeta|^2)^2} + \frac{6}{1-|\zeta|^2}.$$

Применяя это неравенство к оценке $I_2(h)$, будем иметь $|I_2(h)| \leqslant 6h + o(h)$. Далее нам потребуется следующее ограничение:

$$|g''(\zeta)| \leqslant \frac{6}{r(1-r^2)} + \frac{3}{r^2}\ln\frac{1+r}{1-r}, \quad \zeta = re^{i\varphi},$$

для доказательства которого достаточно заметить, что

$$|g'(\zeta)| \leqslant \frac{1}{|\zeta|}\left|\int_0^\zeta \frac{d}{d\zeta}[\zeta g'(\zeta)]\,d\zeta\right| \leqslant \frac{1}{r}\int_0^r \frac{6}{1-r^2}\,dr = \frac{3}{r}\ln\frac{1+r}{1-r},$$

и воспользоваться соотношением (17).

Теперь оценим $I_3(h)$:

$$|I_3(h)| \leqslant 4\int_{r_h}^1 (1-r)|g''(\zeta)|\,dr \leqslant 12h + o(h).$$

Итак, мы получили, что граничные значения функции $g(\zeta)$ принадлежат классу $\Lambda^*_{k_s}$, $k_s = 21$. С другой стороны, всюду на границе E выполняется равенство $\nu(\theta) = \operatorname{Re} g(e^{i\theta})$. Следовательно, $\nu(\theta) \in \Lambda^*_{k_s}$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\nu_s(\theta) \equiv \mathrm{const}$ и $\nu(\theta) \in H(k, 1)$. При таких $\nu(\theta)$ получается фундаментальное решение, допускающее счетное множество особых точек на границе. Для обоснования аналогов теорем 1, 2 нам потребуется следующая

Лемма 5. *Пусть $F(r, e^{i\varphi}) = \nu(r, \varphi) + iu(r, \varphi)$ — регулярная в E функция, представимая через граничные значения своей действительной части $\nu(\theta)$ интегралом Шварца, $F(0) = 0$. Если $\nu(\theta) \in H(k, 1)$, то в $E[q, 1)$ справедливы оценки*

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\nu(r, \varphi)\right| \leqslant 2kA(q)\frac{1+r}{1-r}, \tag{18}$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}u(r, \varphi)\right| \leqslant \frac{k\sqrt{12}}{\pi\cdot(1-r^2)}\left[1 + \frac{1}{2}B(q)\right], \tag{19}$$

где $A(q)$ из леммы 1,

$$B(q) = \arcsin\left[\sqrt{\frac{(1-q)^2(q^2+4q+1)}{4q(1+q^2)}}\right] \Big/ \sqrt{\frac{(1-q)^2(q^2+4q+1)}{4q(1+q^2)}}.$$

Доказательство. Неравенство (18) легко получается из леммы 1 с учетом того, что из $\nu(\theta) \in H(k, 1)$ следует $\nu(\theta) \in \Lambda_{2k}$. Для обоснования соотношения (19) запишем

$$\frac{\partial}{\partial\varphi^2}u(r,\ \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\nu(\theta)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}Q(r,\ \theta-\varphi)\,d\theta, \tag{20}$$

причем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}Q(r,\ t)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\operatorname{Im}S(re^{it})=$$

$$=-\frac{2r\sin t\,[(1+r^2)^2-8r^2+2r(1+r^2)\cos t]}{(1+r^2-2r\cos t)^3}.$$

Заменяя в (20) $\theta-\varphi$ на t, с учетом равенства

$$0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\nu(\varphi)\frac{\partial^2}{\partial t^2}Q(r,\ t)\,dt$$

получим

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}u(r,\ \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\nu(\varphi+t)-\nu(\varphi))\frac{\partial^2}{\partial t^2}Q(r,\ t)\,dt.$$

В силу принадлежности $\nu(\theta)$ классу $H(k,\ 1)$ будем иметь

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}u(r,\ \varphi)\right|\leqslant\frac{k}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}t\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}Q(r,\ t)\right|dt. \tag{21}$$

Легко видеть, что функция $\frac{\partial^2}{\partial t^2}Q(r,\ t)$ не меняет знак в интервале $[0,\pi]$ при $0<r<2-\sqrt{3}$, если же $2-\sqrt{3}\leqslant r<1$, то смена знака у этой функции происходит в единственной точке $\tau=\tau(r)$, которая определяется из уравнения

$$\cos\tau=-\frac{1+r^4-6r^2}{2r(1+r^2)}. \tag{22}$$

Пусть $0<r<2-\sqrt{3}$. Тогда неравенство (21) примет вид

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}u(u,\ \varphi)\right|\leqslant-\frac{k}{\pi}\pi\frac{\partial}{\partial t}Q(r,\ \pi)=\frac{2kr}{(1+r)^2}. \tag{23}$$

Нетрудно увидеть, что мажорирующая функция в (23) не больше, чем соответствующая функция из (19). Поэтому в случае $r<2-\sqrt{3}$ лемма доказана. Пусть теперь $2-\sqrt{3}\leqslant r<1$. Из (22) находим

$$\sin\frac{\tau}{2}=(1-r)\sqrt{r^2+4r+1}/\sqrt{4r(1+r^2)}.$$

Так как функция $(1-r\sqrt{r^2+4r+1}/\sqrt{4r(1+r^2)}$ убывает в интервале $2-\sqrt{3}\leqslant r<1$, получим

$$\tau \leqslant B(q)(1-r)\sqrt{r^2+4r+1}/\sqrt{r(1+r^2)}.$$

Перепишем неравенство (21) в виде

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}u(r,\ \varphi)\right| \leqslant -\frac{k}{\pi}\int\limits_0^\tau t\frac{\partial^2}{\partial t^2}Q(r,\ t)\,dt + \frac{k}{\pi}\int\limits_0^\pi t\frac{\partial^2}{\partial t^2}Q(r,\ t)\,dt =$$

$$= \frac{2k}{\pi}\frac{2r\sin\tau}{1+r^2-2r\cos\tau} - \frac{k}{\pi}\tau\frac{4r(1+r^2)\cos\tau-8r^2}{(1+r^2-2r\cos\tau)^2} - \frac{2kr}{(1+r)^2}. \qquad (24)$$

Подставляя (22) в (24) и привлекая ограничение на τ, запишем

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}u(r,\ \varphi)\right| \leqslant \frac{k}{\pi}\frac{\sqrt{14r^2-r^4-1}}{(1-r^2)} +$$

$$+\frac{k}{\pi}B(q)\frac{(1+r^2)}{(1+r)}\sqrt{\frac{(r^2+4r+1)(1+r^2)}{r(1-r^2)^2}} - \frac{2kr}{(1+r)^2} = kN(r). \qquad (25)$$

Исследование на экстремум функций

$$(1+r^2)\sqrt{(r^2+4r+1)(1+r^2)}/(1+r)\sqrt{r} \text{ и } \sqrt{14r^2-r^4-1}$$

показывает, что в интервале $[2-\sqrt{3},\ 1]$ они достигают максимума при $r=1$. Поэтому (25) можно переписать следующим образом:

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}u(r,\ \varphi)\right| \leqslant \frac{k}{1-r^2}\cdot\frac{\sqrt{12}}{\pi}\left[1+\frac{1}{2}B(q)\right],\quad 0\leqslant q<1.$$

Сформулируем подобные теоремам 1, 2 утверждения.

Теорема 4. *Пусть* $\nu(\theta)\in H(k,\ 1)$, *причем*

$$k \leqslant \min\left\{\frac{1}{N(q)},\ \left[64A^2(q)+\frac{12}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2}B(q)\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}.$$

Тогда решение (1) *обратной краевой задачи будет однолистным в* E *и выпуклым в* E_{q_1}, *где* q_1 — *корень уравнения* $kN(q)=1$.

Теорема 5. *Пусть* $\nu(\theta)\in H(k,\ 1)$, *причем*

$$k \leqslant \min\left\{\frac{\arccos q}{2M(q)},\ q\left[64A^2(q)+\frac{12}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2}B(q)\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right\},$$

$$0\leqslant q<1.$$

Тогда решение (1) *обратной краевой задачи будет однолистным в* E *и почти выпуклым в* E_{q_1}, *где* q_1 — *корень уравнения* $2kM(q)=\frac{\pi}{2}$.

Для обоснования этих результатов заметим, что выполнение условия (3) обеспечивается неравенством (25), а условие (5) следует из леммы 4 в силу включения: $\nu(\theta)\in H(k, 1)\subset \subset\Lambda_{2k}$. Справедливость неравенств (4), (5) очевидна.

Отметим, что наибольшее $k_0=\frac{1}{2,32}$ получается из теоремы 1 при $q=0,66$.

Авторы искренне благодарны проф. Л. А. Аксентьеву за внимание к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. 1. М., „Мир", 1965.

2. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций. — Успехи математических наук, т. 30, вып. 4, 1975, с. 3—60.

3. Андрианов С. Н. О существовании и числе решений обратной краевой задачи теории аналитических функций. — Ученые записки КГУ, т. 113, кн. 10, 1953, с. 21—30.

4. Гахов Ф. Д. Об обратных краевых задачах. — Ученые записки КГУ, т. 113, кн. 10, 1953, с. 9—20.

5. Duren P., Shapiro M., Shields A. Singular measures and domains not of Smirnov tupe. Duke Math. I. 33: 2, 1966, с. 247—254.

6. Шабалин П. Л. Исследование общего решения обратной краевой задачи теории аналитических функций. Автореферат канд. дисс. Казань, 1977.

7. Becker I. Löwnersche Differentialy gleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funcktionen. — J. Reine und Angew. Math., 255, 1972, с. 23—43.

8. Авхадиев Ф. Г., Шабалин П. Л. Об отображениях на многосвязные области, не принадлежащие классу В. И. Смирнова. — № 2550-76 ДЕП.

8. Шабалин П. Л. Классы однолистности и области В. И. Смирнова. — Труды семинара по краевым задачам. Вып. 16. Изд-во Казанск. ун-та, 1979, с. 218—226.

10. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., „Наука", 1966.

Доложено на семинаре 30 января 1979 г.