КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 17 *Труды семинара по краевым задачам* *1980*

УДК 517.544 : 517.862

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОЙ БЕСКОНЕЧНО-СВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ В КЛАССЕ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В. В. Сильвестров

В настоящей работе для конечносвязной или бесконечно-связной области, граница которой состоит из конечного или счетного множества окружностей, конгруэнтных между собой относительно некоторой функциональной группы Γ дробно-линейных преобразований [1], и множества точек сгущения этих окружностей, решается краевая задача Гильберта в классе функций, автоморфных относительно Γ. С помощью метода симметрии и закона автоморфности эта задача сводится к эквивалентной задаче Римана для автоморфных функций относительно новой группы $\widetilde{\Gamma}$, определяемой группой Γ. При условии, что $\widetilde{\Gamma}$ является группой первого класса [2, с. 391—397], решения задачи Гильберта записываются через интегралы и ряды, выражаемые явно через преобразования группы $\widetilde{\Gamma}$.

§ 1. Постановка задачи

1°. Пусть Γ — конечнопорожденная функциональная группа дробно-линейных преобразований $\sigma_0(z)\equiv z$, $\sigma_k(z)$, $k=1, 2, \ldots$ с областью инвариантности S. Обозначим через R фундаментальное множество группы Γ, расположенное в S. Оно получается присоединением к R_0 (R_0 — внешность всех изометрических окружностей группы, расположенная в S) всех неконгруэнтных между собой точек границы ∂R_0.

В фундаментальной области R_0 возьмем окружность или прямую L_0, ограничивающую односвязную область, принадлежащую R_0. Внешность всех окружностей $L_k=\sigma_k(L_0)$, $k=0, 1, \ldots$, расположенную в S, обозначим через D. Так как окружности L_k расположены вне друг друга, то D является конечносвязной (случай конечной группы Г) или бесконечносвязной (Г — бесконечная группа) областью с границей $\partial D = \partial S \cup \{L_k\}_{k=0}^{\infty}$. ∂S есть множество точек сгущения окружностей L_k, $k=0, 1, \ldots$

В дальнейшем будем рассматривать функции $f(z)$, однозначные и аналитические на множестве D^*, получаемом присоединением к D всех параболических точек p границы ∂S, удовлетворяющие условиям

$$f[\sigma_k(z)] = f(z), \ \forall z \in D^*, \ \forall \sigma_k \in \Gamma. \tag{1}$$

Аналитичность $f(z)$ в точке $p \in D^*$ означает, что $f(z)$ при $z \to p$ по точкам области D имеет вполне определенный конечный предел. Такие функции будем называть Г-*автоморфными на множестве* D^* *или автоморфными на* D^* *относительно группы* Г.

Особый класс функций на D^* образуют решения следующей краевой задачи Гильберта:

Найти все аналитические Г-*автоморфные на множестве* D^* *функции* $f(z) = u(z) + iv(z)$, *непрерывно продолжимые на* $L_0 \subset R_0$, *по граничному условию*

$$a(t)\,u(t) + b(t)\,v(t) = c(t), \ t \in L_0, \tag{2}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — *действительные функции, удовлетворяющие на* L_0 *условию Гёльдера; причем* $a^2(t) + b^2(t) = 1$.

Используя соотношения (1), легко записать краевые условия для $f(z)$ на всех окружностях L_k. Они имеют вид

$$a[\sigma_k^{-1}(t)]\,u(t) + b[\sigma_k^{-1}(t)]\,v(t) = c[\sigma_k^{-1}(t)], \ t \in L_k, \ k = 0, 1, \ldots$$

Следовательно, задача (1), (2) представляет собой задачу Гильберта для конечносвязной или бесконечносвязной области D в классе Г-автоморфных функций.

В иной постановке задача (1), (2) и более общая задача в случае фуксовых групп второго рода рассматривалась Л. И. Чибриковой [3—5]. В этих работах условие (2) задается на свободных дугах главной окружности, которые в силу конгруэнтности концов играют роль замкнутых кривых, а функция $f(z)$ ищется внутри главной окружности. Используя метод симметрии и закон автоморфности, автор этих работ исследует задачу (1), (2) сведением к эквивалентной краевой задаче Римана для автоморфных функций заданной группы.

§ 2. Сведение к эквивалентной задаче Римана

Без ограничения общности можем считать, что L_0 совпадает с действительной осью $(-\infty; +\infty)$, ибо в противном случае можем брать изоморфную группу $W \circ \Gamma \circ W^{-1}$, подобрав дробно-линейное преобразование $W(z)$ так, чтобы $W(L_0) = (-\infty; +\infty)$.

2°. Итак, пусть $L_0 = (-\infty; +\infty)$ и ограничивает односвязную область, принадлежащую R_0, т. е. граница ∂R_0 расположена по одну сторону от L_0. Для определенности будем считать, что ∂R_0 расположена в верхней полуплоскости. Преобразованпе $T(z) = \bar{z}\,(T^{-1} = T)$ преобразует ∂R_0 в ∂R_0^*, симметричную с ∂R_0 относительно L_0. ∂R_0^* является границей фундаментальной области R_0^* группы $\Gamma^* = T \circ \Gamma \circ T$ дробно-линейных преобразований $T\sigma_k T(z)$, $k = 0, 1, \ldots$, которая также функциональна. Так как ∂R_0 и ∂R_0^* расположены по разные стороны от L_0, то внешность и граница области R_0 содержатся полностью внутри области R_0^*, а внешность и граница области R_0^* — внутри R_0. Поэтому [1, с. 65—68] группа $\tilde{\Gamma}$, порожденная группами Γ и Γ^*, является функциональной и имеет фундаментальную область $\tilde{R}_0 = R_0 \cap R_0^*$, симметричную относительно L_0. $\tilde{\Gamma}$ называется группой типа Шоттки. Обозначим преобразования группы $\tilde{\Gamma}$ через

$$w_0(z) \equiv z,\ w_k(z) = \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k},\ \alpha_k\delta_k - \beta_k\gamma_k = 1,\ k = 1, 2, \ldots$$

Лемма 1. *Если* $w \in \tilde{\Gamma}$, *то* $TwT \in \tilde{\Gamma}$.

Возможны три случая:

1) $w \in \Gamma$. Тогда $TwT \in \Gamma^* \subset \tilde{\Gamma}$.

2) $w \in \Gamma^*$. Тогда найдется преобразование $\sigma \in \Gamma$, что $w = T\sigma T$. Следовательно, $TwT = TT\sigma TT = \sigma \in \tilde{\Gamma}$.

3) $w \notin \Gamma \cup \Gamma^*$. Представим w в виде $w = w_{k_1} w_{k_2} \ldots w_{k_\nu}$, где $w_{k_j} \in \Gamma \cup \Gamma^*$. Тогда преобразование

$$TwT = Tw_{k_1}T \circ Tw_{k_2}T \circ \ldots \circ Tw_{k_\nu}\,T,$$

являясь суперпозицией преобразований $Tw_{k_j}T \in \Gamma \cup \Gamma^*$, снова будет принадлежать пруппе $\tilde{\Gamma}$.

Лемма 2. *Область инвариантности* $\tilde{S}$ *группы* $\tilde{\Gamma}$, *а также множество* $\tilde{S} \setminus \tilde{L}$, $\tilde{L} = \bigcup_{k=0}^{\infty} w_k(L_0)$ *симметричны относительно* L_0.

Доказательство. Пусть $z \in \widetilde{S}$. Тогда найдется преобразование $w \in \widetilde{\Gamma}$, что $z = w(\xi)$, $\xi \in \widetilde{R}$. Имеем

$$\bar{z} = T(z) = Tw(\xi) = TwTT(\xi) = TwT(\bar{\xi}),$$

где $TwT \in \widetilde{\Gamma}$, а $\bar{\xi} \in \widetilde{R}$, так как фундаментальное множество $\widetilde{R}$ симметрично относительно L_0. Следовательно, $\bar{z} \in \widetilde{S}$, т. е. $\widetilde{S}$ симметрична относительно L_0.

Аналогично доказывается и симметричность множества $\widetilde{S} \setminus \widetilde{L}$ относительно L_0.

3°. Рассмотрим функцию $\Phi(z)$, которая на множестве $\widetilde{R} \setminus L_0$ определяется формулой

$$\Phi(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D_0, \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in D_0^* \end{cases} \tag{3}$$

(D_0 — часть множества R, расположенная в верхней полуплоскости; $D_0^* = T(D_0)$), а на всем множестве $\widetilde{S} \setminus \widetilde{L}$ получается согласно закону $\widetilde{\Gamma}$-автоморфности

$$\Phi(z) = \Phi[w_k^{-1}(z)], \quad z \in w_k(\widetilde{R}) \setminus w_k(L_0), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

В области D функция $\Phi(z) \equiv f(z)$. Это следует из теоремы единственности и тождества $\Phi(z) \equiv f(z)$, $z \in D_0 \subset D$.

Записав краевое условие (2) в виде

$$(a - ib) f(t) + (a + ib)\overline{f(t)} = 2c(t),$$

с учетом равенств $\Phi^+(t) = f(t)$, $\Phi^-(t) = \overline{f(t)}$, $t \in L_0$, получаем

$$\Phi^+(t) = -\frac{a + ib}{a - ib}\Phi^-(t) + \frac{2c(t)}{a - ib}, \quad t \in L_0. \tag{5}$$

В точках множества $\widetilde{S} \setminus \widetilde{L}$ функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условию симметрии

$$\overline{\Phi(\bar{z})} = \Phi(z), \quad \forall z \in \widetilde{S} \setminus \widetilde{L}. \tag{6}$$

Действительно, для $\forall z \in \widetilde{S} \setminus \widetilde{L}$ найдется преобразование $w \in \widetilde{\Gamma}$, что $z = w(\xi)$, $\xi \in \widetilde{R} \setminus L_0$. Согласно свойству (4), леммы 1 и формулы (3) имеем

$$\Phi(z) = \Phi[w(\xi)] = \Phi(\xi),$$

$$\overline{\Phi(\bar{z})} = \overline{\Phi[T(z)]} = \overline{\Phi[Tw(\xi)]} = \overline{\Phi[TwT(\bar{\xi})]} = \overline{\Phi(\bar{\xi})} =$$

$$= \begin{cases} f(\xi), & \xi \in D_0, \\ \overline{f(\bar{\xi})}, & \xi \in D_0^* \end{cases} = \Phi(\xi) = \Phi(z).$$

Следовательно, $\Phi(z)$ является ограниченным $\widetilde{\Gamma}$-автоморфным решением краевой задачи Римана (5), удовлетворяющим условию симметрии (6). Очевидно, имеет место и обратное, т. е. любое ограниченное $\widetilde{\Gamma}$-автоморфное решение задачи (5), (6) определяет в области D Γ-автоморфное решение задачи Гильберта (2).

§ 3. Построение канонической функции

4°. В дальнейшем будем считать, что $\widetilde{\Gamma}$ является группой I класса, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k|^{-2} < \infty. \tag{7}$$

Группы Γ, для которых выполняется это условие, образуют достаточно широкий класс. Укажем некоторые из них.

1) Γ — фуксова группа второго рода, неподвижная (т. е. главная) окружность C_0 которой ортогональна L_0. Ясно, что C_0 будет неподвижной окружностью и для Γ^*. Каждое преобразование группы $\widetilde{\Gamma}$, являясь суперпозицией конечного числа преобразований, принадлежащих Γ или Γ^*, будет оставлять C_0 на месте. Значит, $\widetilde{\Gamma}$ также является фуксовой группой второго рода, т. е. принадлежит I классу.

2) Γ — группа Шоттки, фундаментальная область R_0 которой ограничена $2n$ окружностями одинакового радиуса r_0, расположенными вне друг друга на расстоянии большем, чем $(4n-5/2)r_0$ и удаленными от действительной оси L_0 на расстояние, большее, чем $\frac{1}{2}\left(4n-\frac{5}{2}\right)r_0$. Тогда $\widetilde{\Gamma}$ также является группой Шоттки. Фундаментальная область $\widetilde{R}_0$ группы $\widetilde{\Gamma}$ ограничена $4n$ окружностями одинакового радиуса r_0, расстояние между которыми больше, чем $(4n-5/2)r_0$. Как показал Т. Аказа [6], для таких групп тета-ряды Пуанкаре измерения -1, значит, и измерения -2, сходятся. Так как выполнение условия (7) равносильно сходимости тета-рядов Пуанкаре измерения -2, то $\widetilde{\Gamma}$ является группой I класса.

Пусть ρ — род фундаментальной области R_0. Тогда фундаментальная область $\widetilde{R}_0$ группы $\widetilde{\Gamma}$ будет иметь род $\widetilde{\rho}=2\rho$.

5°. Решение задачи (5), (6) для $\widetilde{\Gamma}$ — автоморфных функций начнем с построения канонической функции $X(z)$ однородной задачи, удовлетворяющей условию симметрии (6) (схема Л. И. Чибриковой [5]). Обозначив через

$$2\varkappa = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a+ib}{a-ib}\right]_{L_0} - \frac{1}{\pi}\left[\arg(a+ib)\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

индекс задачи (5), рассмотрим в классе $\widetilde{\Gamma}$-автоморфных функций вспомогательную однородную задачу Римана

$$X_0^+(t) = i(a+ib)X_0^-(t),\quad t \in L_0, \tag{8}$$

имеющую индекс $\varkappa$. Краевое условие (8) задано на бесконечном контуре. Это создает некоторое неудобство при решении задачи. Поэтому в силу $\widetilde{\Gamma}$-автоморфности $X_0(z)$ запишем рассматриваемую задачу так:

$$X_0^+(t) = i\left(a\left[\sigma_1^{-1}(t)\right] + ib\left[\sigma_1^{-1}(t)\right]\right)X_0^-(t),\quad t \in L_1 = \sigma_1(L_0). \tag{8'}$$

Приняв точку $t_1 = \sigma_1(\infty)$ за начало обхода L_1, будем искать $X_0(z)$ в виде

$$X_0(z) = e^{\Gamma(z)} E^{-\varkappa}\left[z, t_1, \sigma_1(\theta_0)\right]\prod_{j=1}^{2\rho} E(z, \theta_j, \theta_0)\prod_{j=1}^{2n} E^{m_j}\left[z, w_j(\theta_0), \theta_0\right],$$

где $\theta_0 \in \widetilde{R}_0 \setminus L_0$ — фиксированная точка; $\theta_j \in \widetilde{R}_0 \setminus L_0$, $\theta_j \neq \theta_0$, $j = \overline{1, 2\rho}$; m_j — целые числа; $w_1(z), \ldots, w_{2n}(z)$ — порождающие преобразования группы $\widetilde{\Gamma}$;

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \ln\left\{i\left(a\left[\sigma_1^{-1}(\tau)\right] + ib\left[\sigma_1^{-1}(\tau)\right]\right)\right\} K(z, \tau)\, d\tau,$$

$$E(z, \theta, \theta_0) = \exp\left(\int_{\theta_0}^{\theta} K(z, \tau)\, d\tau\right),$$

а ядро $K(z, \tau)$ определяется рядом [7, 8]

$$K(z, \tau) = \sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\tau - w_j(z)} - \frac{1}{\tau - w_j(\infty)}\right] = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{w_j'(\tau)}{w_j(\tau) - z}, \tag{9}$$

сходящимся абсолютно и равномерно по z на любом компакте множества $\widetilde{S} \setminus \widetilde{L}$. При преобразованиях $w_k(z)$ ядро $K(z, \tau)$ приобретает слагаемые

$$\eta_k(\tau) = K\left[w_k(z), \tau\right] - K(z, \tau) = K\left[w_k(\infty), \tau\right],\quad k = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

среди которых 2ρ слагаемых (пусть это $\eta_1(\tau), \ldots, \eta_{2\rho}(\tau)$) линейно независимы, а все остальные выражаются через них. Интегралы [9]

$$\varphi_k(z) = \int_{\theta_0}^{z} \eta_k(\tau)\, d\tau,\quad k = \overline{1, 2\rho}, \tag{11}$$

рассматриваемые как функции компактной римановой поверхности $\widetilde{S}^*/\widetilde{\Gamma}$, $\widetilde{S}^* = \widetilde{S} \cup \{p\}$, образуют базис интегралов первого рода. Каждый из слагаемых

$$\eta_{k,j} = \varphi_k[w_j(z)] - \varphi_k(z) = \varphi_k[w_j(\theta_0)] = \int_{\theta_0}^{w_j(\theta_0)} \eta_k(\tau)\,d\tau, \quad j = 1, 2, \ldots$$

функции $\varphi_k(z)$ либо совпадает с одним из циклических периодов интеграла $\varphi_k(z)$ на $\widetilde{S}^*/\widetilde{\Gamma}$, либо является линейной комбинацией с целыми коэффициентами от этих периодов. Обратно, все циклические периоды интеграла $\varphi_k(z)$ надо искать среди слагаемых $\eta_{k,j}$, $j = \overline{1, 2n}$ и числа $2\pi i$, так как значения функции $\varphi_k(z)$ определяются, вообще говоря, с точностью до $2\pi i$. Значит, все периоды интеграла $\varphi_k(z)$ представляют собой линейную комбинацию с целыми коэффициентами от слагаемых $\eta_{k,j}$, $j = \overline{1, 2n}$ и $2\pi i$.

Функция $E(z, \theta, \theta_0)$ в области $\widetilde{S}$ однозначна и в случае неконгруэнтных между собой точек θ_0 и θ в этих точках имеет простой полюс и нуль кратности 1 соответственно. Если точки θ_0 и θ между собой конгруэнтны, то $E(z, \theta, \theta_0)$ в области $\widetilde{S}$ ограничена и нигде не обращается в нуль.

Учитывая соотношение

$$K[z, \sigma_1(\tau)]\,d[\sigma_1(\tau)] = K(z, \tau)\,d\tau,$$

запишем $X_0(z)$ в виде

$$X_0(z) = e^{\Gamma(z)} E^{-\varkappa}(z, \infty, \theta_0) \prod_{j=1}^{2\rho} E(z, \theta_j, \theta_0) \prod_{j=1}^{2n} E^{m_j}[z, w_j(\theta_0), \theta_0],$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} K(z, \tau)\ln[i(a+ib)]\,d\tau. \tag{12}$$

$X_0(z)$, удовлетворяя краевым условиям (8) и (8′), вообще говоря, не будет $\widetilde{\Gamma}$-автоморфной, ибо в силу (10)

$$X_0[w_k(z)] = X_0(z)\,e^{H_k},$$

$$H_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} \eta_k(\tau)\ln[i(a+ib)]\,d\tau - \varkappa\int_{\theta_0}^{\infty}\eta_k(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2\rho}\int_{\theta_0}^{\theta_j}\eta_k(\tau)\,d\tau + \sum_{j=1}^{2n} m_j \int_{\theta_0}^{w_j(\theta_0)} \eta_k(\tau)\,d\tau =$$

$$= h_k - \varkappa\varphi_k(\infty) + \sum_{j=1}^{2\rho}\varphi_k(\theta_j) + \sum_{j=1}^{2n} m_j \eta_{k,j}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Потребовав, чтобы все $H_k \equiv 0 \pmod{2\pi i}$, с учетом линейной зависимости функций $\eta_1(\tau), \ldots, \eta_{2\rho}(\tau)$, $\eta_k(\tau)$ при $k > 2\rho$ для определения точек θ_j, $j = \overline{1, 2\rho}$ и целых чисел m_j, $j = \overline{1, 2n}$, n_k, $k = \overline{1, 2\rho}$, получим следующую проблему обращения Якоби:

$$\sum_{j=1}^{2\rho} \varphi_k(\theta_j) + \sum_{j=1}^{2n} m_j \eta_{k,j} + n_k 2\pi i = -h_k + \varkappa \varphi_k(\infty), \quad k = \overline{1, 2\rho}, \tag{13}$$

интегралов (11). Как известно [10, с. 296—322], проблема (13) всегда разрешима и решениями ее с точностью до периодов интегралов (11) являются нули Θ-функции Римана, явно выражаемой через базис (11) (значит, и через преобразования группы $\widetilde{\Gamma}$), или некоторой ее частной производной по интегралам (11). Вычислив нули Θ-функции или соответствующей производной Θ-функции, подберем числа m_j и n_k так, чтобы все равенства (13) выполнялись. Причем, используя произвол точки θ_0, всегда можем добиться, чтобы точки θ_j, $j = \overline{1, 2\rho}$, принадлежали множеству $\widetilde{R}_0 \setminus L_0$ и не совпадали с точками θ_0, $\overline{\theta}_0$, а также с точками $\overline{\theta}_k$, $k = \overline{1, 2\rho}$. Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_m$ все эти точки с кратностями $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ($\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 2\rho$) соответственно, различные между собой. Тогда функция $X_0(z)$ $\widetilde{\Gamma}$-автоморфна, удовлетворяет граничному условию (8) и имеет в точках $\theta_1, \ldots, \theta_m$ нули кратностей $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ соответственно, а в точке θ_0 имеет порядок $\varkappa - 2\rho$.

Рассмотрим функцию $X_1(z) = \overline{X_0(\overline{z})}$. Согласно лемме 2 областью определения $X_1(z)$ является множество $\widetilde{S} \setminus \widetilde{L}$. Из $\widetilde{\Gamma}$-автоморфности функции $X_0(z)$ и леммы 1 следует, что

$$X_1[w(z)] = \overline{X_0[\overline{w(\overline{z})}]} = \overline{X_0[TwT(\overline{z})]} = \overline{X_0(\overline{z})} = X_1(z),$$

$$\forall z \in \widetilde{S} \setminus \widetilde{L}, \ \forall w \in \widetilde{\Gamma},$$

т. е. $X_1(z)$ автоморфна относительно $\widetilde{\Gamma}$. Так как вдоль L_0 $X_1^{\pm}(t) = \overline{X_0^{\mp}(t)}$, а $X_0(t)$ удовлетворяет условию (8), то

$$X_1^{+}(t) = \frac{1}{-i(a-ib)} X_1^{-}(t), \quad t \in L_0. \tag{14}$$

Из краевых условий (8) и (14) следует, что

$$X(z) = X_0(z) X_1(z) = X_0(z) \overline{X_0(\overline{z})}$$

является $\widetilde{\Gamma}$-автоморфной канонической функцией однородной задачи (5), $c(t) \equiv 0$, удовлетворяющей на множестве $\widetilde{S} \setminus \widetilde{L}$

условию симметрии $\overline{X(\overline{z})} = X(z)$. В точках $\theta_k, \overline{\theta}_k$, $k = \overline{1, m}$ $X(z)$ имеет нули кратностей λ_k, $k = \overline{1, m}$, соответственно, а в каждой из точек θ_0 и $\overline{\theta}_0$ имеет порядок $\varkappa - 2\rho$.

§ 4. Общее решение задачи

6°. Используя соотношение

$$-\frac{a+ib}{a-ib} = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}, \quad t \in L_0,$$

запишем краевое условие (5) в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{2c(t)}{X^+(t)(a-ib)}, \quad t \in L_0. \tag{15}$$

Это есть задача о нахождении $\widetilde{\Gamma}$-автоморфной кусочно-мероморфной функции $\Phi(z)/X(z)$ по скачку (15), имеющей в точках $\theta_1, \overline{\theta}_1, \ldots, \theta_m, \overline{\theta}_m$ множества $\widetilde{R} \setminus L_0$ полюсы порядков не выше $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ соответственно, в каждой из точек θ_0, $\overline{\theta}_0$ имеющей порядок $2\rho - \varkappa$ и удовлетворяющей условию симметрии (6).

Решение полученной задачи Римана будем проводить по схеме, указанной Л. И. Чибриковой [11, с. 179], используя автоморфный аналог ядра Коши [8]

$$A(z, \tau) = K(z, \tau) - \sum_{j=1}^{2\rho} \omega_j(\tau) K(z, a_j).$$

Точки a_j, $j = \overline{1, 2\rho}$, выберем так, чтобы они принадлежали множеству $\widetilde{R}_0 \setminus L_0$, не совпадали с точками θ_q, $\overline{\theta}_q$, $q = \overline{0, m}$, и, кроме того, удовлетворяли условию $a_{\rho+j} = \overline{a}_j$, $j = \overline{1, \rho}$. Такой выбор возможен. Очевидно, функция $X(z)\,[F_0(z) + \overline{F_0(\overline{z})}]$, где

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{c(\tau)}{X^+(\tau)(a-ib)} A(z, \tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{c(\tau)}{X^+(\tau)(a-ib)} K(z, \tau)\, d\tau - \sum_{j=1}^{2\rho} d_j K(z, a_j), \tag{16}$$

$$d_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{c(\tau)}{X^+(\tau)(a-ib)} \omega_j(\tau)\, d\tau, \quad j = \overline{1, 2\rho},$$

$\widetilde{\Gamma}$-автоморфна и удовлетворяет условиям (15), (6). Теперь через коэффициенты

$$\zeta_\nu(z;\theta_q)=\frac{1}{(z-\theta_q)^\nu}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{[w_k(z)-\theta_q]^\nu}-\frac{1}{[w_k(\infty)-\theta_q]^\nu}\right\}-$$
$$-\sum_{j=1}^{2\rho} d_{j,\nu}^{(q)}K(z,a_j),\ d_{j,\nu}^{(q)}=-\omega_j^{(\nu-1)}(\theta_q)/(\nu-1)!, \tag{17}$$
$$q=\overline{0,m};\ \nu=1,2,\ldots$$

тейлоровского разложения

$$A(z,\tau)=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\zeta_\nu(z;\theta_q)(\tau-\theta_q)^{\nu-1},\ \theta_q\in\widetilde{R}_0\setminus L_0,$$

общее решение задачи (5), (6) запишется формулой

$$\Phi(z)=X_0(z)\overline{X_0(\bar z)}[F_0(z)+\overline{F_0(\bar z)}+\Psi_0(z)+$$
$$+\overline{\Psi_0(\bar z)}+\Psi_1(z)+\overline{\Psi_1(\bar z)}],$$
$$\Psi_0(z)=c_0+\sum_{q=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{\lambda_q}c_{q,\nu}\zeta_\nu(z;\theta_q), \tag{18}$$
$$\Psi_1(z)=\sum_{\nu=1}^{\varkappa-2\rho}c_\nu\zeta_\nu(z;\theta_0),\ \varkappa>2\rho;\ \Psi_1(z)\equiv 0,\ \varkappa\leqslant 2\rho,$$

где постоянные $c_{q,\nu}$, а также постоянные c_ν при $\varkappa>2\rho$ должны удовлетворять системе

$$\sum_{q=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{\lambda_q}(c_{q,\nu}d_{j,\nu}^{(q)}+\bar c_{q,\nu}\bar d_{\rho+j,\nu}^{(q)})+\sum_{\nu=1}^{\varkappa-2\rho}(c_\nu d_{j,\nu}^{(0)}+\bar c_\nu\bar d_{\rho+j,\nu}^{(0)})=$$
$$=-d_j-\bar d_{\rho+j},\ j=\overline{1,\rho}. \tag{19}$$

При $\varkappa<2\rho$, кроме системы (19), где все $c_\nu=0$, должны выполняться еще $2\rho-\varkappa$ комплексных условий

$$\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}[\Psi_0(z)+\overline{\Psi_0(\bar z)}]=b_j,\quad b_j=-\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}[F_0(z)+\overline{F_0(\bar z)}], \tag{20}$$
$$j=\overline{1,2\rho-\varkappa}.$$

Так как при любом $\varkappa$ число полюсов функции $\Psi(z)=\Psi_0(z)+\overline{\Psi_0(\bar z)}+\Psi_1(z)+\overline{\Psi_1(\bar z)}$ не меньше $4\rho=\widetilde{2\rho}$, т. е. всегда больше $\widetilde{2\rho}-2$, то в силу теоремы Римана — Роха [10, с. 125—131] и соотношения $\overline{\Psi(\bar z)}=\Psi(z)$ функция $\Psi(z)$ при $\varkappa\geqslant 2\rho$ содержит $2\varkappa-2\rho+1$ произвольных вещественных постоянных, а при $\varkappa<2\rho$ число этих постоянных равно $2\rho+1$.

Притом эти постоянные при $\varkappa < 2\rho$ должны удовлетворять системе $4\rho - 2\varkappa$ вещественных линейных уравнений (20). Обозначим через r ранг матрицы вещественной системы (20)

$$0 < r \leqslant \min\{4\rho - 2\varkappa;\ 2\rho + 1\}.$$

Если система (20) неоднородна, т. е. $c(t) \not\equiv 0$, то ее разрешимость эквивалентна выполнению следующих $4\rho - 2\varkappa - r$ вещественных условий

$$\sum_{j=1}^{2\rho-\varkappa} (M_{j,k} \operatorname{Re} b_j + M_{j+2\rho-\varkappa,k} \operatorname{Im} b_j) = 0,\ k = \overline{1,\ 4\rho - 2\varkappa - r}, \quad (21)$$

где $M_{1,k}$, $M_{2,k}, \ldots$, $M_{4\rho-2\varkappa,\varkappa}$, $k = \overline{1, 4\rho - 2\varkappa - r}$ — полная система линейно-независимых решений соответствующей однородной транспонированной вещественной системы. При выполнении этих условий система (20) имеет $l = 2\rho - r + 1$ линейно-независимых над полем вещественных чисел решений. Причем при $r = 2\rho + 1$ решение будет единственным.

Пусть теперь $c(t) \equiv 0$. При $\rho \leqslant \varkappa < 2\rho$ число уравнений всегда меньше числа неизвестных. Поэтому однородная система (20) имеет $l_0 = 2\rho - r + 1$ решений, линейно-независимых над полем вещественных чисел. Однородная система (20) имеет нетривиальные решения и тогда, когда $0 \leqslant \varkappa < \rho$ и $r < 2\rho + 1$. Если же $r = 2\rho + 1$, то нетривиальных решений нет. Если $\varkappa < 0$, то $\widetilde{\Gamma}$-автоморфная функция $\Phi(z)/X(z)$ в $\widetilde{R}$ должна иметь 4ρ полюсов и $4\rho - \varkappa$ нулей, что не может быть, ибо $4\rho - \varkappa > 4\rho$. Поэтому $\Phi(z) \equiv 0$. Это значит, что однородная система (20) имеет лишь тривиальное решение, т. е. $r = 2\rho + 1$.

Итогом изложенного является следующая таблица.

	l_0	l	l_*
$\varkappa \geqslant 2\rho$	$2\varkappa - 2\rho + 1$	$2\varkappa - 2\rho + 1$	нет
$0 \leqslant \varkappa < 2\rho,\ r < 2\rho + 1$	$2\rho - r + 1$	$2\rho - r + 1$	$4\rho - 2\varkappa - r$
$0 \leqslant \varkappa < \rho,\ r = 2\rho + 1$	нет	единственно	$2\rho - 2\varkappa - 1$
$\varkappa < 0$	нет	единственно	$2\rho - 2\varkappa - 1$

В таблице через l_0 и l обозначены числа линейно-независимых над полем вещественных чисел решений однородной и неоднородной задач Гильберта (1), (2) соответственно;

l_* — число условий разрешимости (21) неоднородной задачи (1), (2); r — ранг матрицы вещественной системы (20); $\varkappa$ — индекс задачи (1), (2).

Для получения общего решения задачи Гильберта (1), (2) (если задача разрешима) просто надо положить $f(z) = \Phi(z)$, $z \in D$, где $\Phi(z)$ определяется формулами (16) — (20), (12).

7°. Используя изложенный выше метод решения задачи (1), (2), сведением к эквивалентной задаче Римана можно решать и более общие задачи. Не останавливаясь на самих решениях, укажем 2 такие задачи.

1) Краевая задача Римана — Гильберта для конечносвязной или бесконечносвязной области D в классе кусочно-мероморфных функций, которые при преобразованиях группы Г приобретают мероморфные в D слагаемые и множители, когда на окружности L_0 задается краевое условие Гильберта, а на кусочно-гладкой линии $\Lambda_0 \subset D$ — краевое условие Римана. Одна подобная задача рассмотрена в [5].

2) Краевая задача Римана — Гильберта — Карлемана для фундаментальной области функциональной группы дробно-линейных преобразований, из которой выкинута односвязная область, ограниченная окружностью L_0. В этом случае краевое условие Гильберта задается на L_0, краевое условие Римана — на кусочно-гладкой линии Λ_0, расположенной в рассматриваемой области, а краевое условие Карлемана, в котором сдвиг определяется порождающими преобразованиями группы, — на границе фундаментальной области. Кроме того, у искомой функции допускаются полюсы в конечном числе точек рассматриваемой области.

Частные случаи задачи 2) для прямоугольника и фундаментальных областей фуксовых групп первого рода, когда окружность L_0 отсутствует или отсутствуют L_0 и линия разрыва Λ_0, рассмотрены в работах [4, 12 — 15].

§ 5. Задача Шварца

8°. Рассмотрим частный случай задачи (1), (2), когда $a(t) \equiv 1$, $b(t) \equiv 0$, т. е. задачу восстановления аналитической Г-автоморфной в конечносвязной или бесконечносвязной круговой области D функции $f(z)$ по значениям ее действительной части на границе $L_0 = (-\infty; +\infty)$.

Для конечносвязных круговых областей, удовлетворяющих различным геометрическим условиям, эта задача различными методами решалась многими авторами, подробный обзор результатов которых имеется в [16]. В работе [17] указана схема решения этой задачи в одном классе аналитических функций, определенных в счетно-связных круговых областях, удовлетворяющих некоторым геометрическим условиям. Решения этой задачи записываются в виде рядов интегралов, ядра которых определяются функциями Гильберта. Однако явный вид этих функций не приводится. Е. Л. Пацевич [18], используя метод симметрии, построила эти функции в явной форме в виде равномерно сходящихся рядов в случае, когда все центры граничных окружностей расположены на одной прямой.

В нашем случае, как было показано в § 2, эта задача эквивалентна задаче Римана

$$\Phi^{+}(t) = -\Phi^{-}(t) + 2c(t), \quad t \in L_0, \tag{22}$$

в классе $\widetilde{\Gamma}$-автоморфных функций, удовлетворяющих условию (6). Непосредственно проверяем, что канонической функцией однородной задачи $X^{+}(t) = -X^{-}(t)$, $t \in L_0$, удовлетворяющей условию (6), является кусочно-постоянная $\widetilde{\Gamma}$-автоморфная функция $X^{+}(z) = i$, $X^{-}(z) = -i$. Функция

$$\begin{gathered} \Phi(z) = X(z)\left[F_0(z) + \overline{F_0(\bar{z})} + c_0\right], \\ F_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c(\tau)}{i}A(z, \tau)\,d\tau, \end{gathered} \tag{23}$$

где c_0 — вещественная постоянная, удовлетворяя условиям (22), (6), имеет в точках a_j и $a_{j+\rho} = \bar{a}_j$, $j = \overline{1, \rho}$, простые полюсы с вычетами $d_j + \bar{d}_{j+\rho}$ и $\bar{d}_j + d_{j+\rho}$ соответственно:

$$d_j = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} c(\tau)\,\omega_j(\tau)\,d\tau, \quad j = \overline{1, 2\rho}.$$

Для того, чтобы она была аналитическим решением задачи (22), (6), необходимо и достаточно, чтобы все $d_j + \bar{d}_{j+\rho}$ были равны нулю, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c(\tau)\left[\omega_j(\tau) + \overline{\omega_{j+\rho}(\tau)}\right]d\tau = 0, \quad j = \overline{1, \rho}. \tag{24}$$

При выполнении условий (24) решение задачи Шварца дается формулой $f(z) = \Phi^{+}(z)$, $z \in D$. Из (23) и (24) находим

$$f(z) = i\left[-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} c(\tau)K(z, \tau)\,d\tau - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} c(\tau)\overline{K(\bar{z}, \tau)} + c_0\right].$$

По формуле (9)

$$\overline{K(\overline{z}, \tau)} = \sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\overline{\tau} - \overline{w_j(\overline{z})}} - \frac{1}{\overline{\tau} - \overline{w_j(\infty)}}\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\tau - Tw_jT(z)} - \frac{1}{\tau - Tw_jT(\infty)}\right], \ \tau \in L_0. \tag{25}$$

Согласно лемме 1 преобразование Tw_jT также принадлежит группе $\widetilde{\Gamma}$, причем когда w_j пробегает все преобразования группы $\widetilde{\Gamma}$, преобразование Tw_jT также пробегает все преобразования группы $\widetilde{\Gamma}$, не повторяя дважды ни одно из них. Поэтому в силу абсолютной сходимости ряда (25) $\overline{K(\overline{z}, \tau)} = K(z, \tau)$ и

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} c(\tau)\, K(z, \tau)\, d\tau + ic_0, \tag{26}$$

где c_0 — вещественная постоянная.

На основе изложенного можем сделать такое заключение: *Задача Шварца для области D в классе* Γ-*автоморфных функций разрешима и имеет решение, определяемое формулами* (26), (9), *тогда и только тогда, когда выполнены* ρ *условий разрешимости* (24).

В заключение выражаю глубокую благодарность профессору Л. И. Чибриковой за помощь и постоянное внимание к работам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Форд Р. Автоморфные функции. М.— Л., ОНТИ, 1936.

2. Голубев В. В. Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции. М., Физматгиз, 1961.

3. Чибрикова Л. И. О краевой задаче Гильберта на конечной римановой поверхности. — Сб.: Краевые задачи теории функций комплексного переменного. Изд-во Казанского ун-та, 1962, с. 59—72.

4. Чибрикова Л. И. К решению краевой задачи Гильберта. — Труды семинара по обратным краевым задачам. Вып. 2. Изд-во Казанского ун-та, 1964, с. 201—212.

5. Чибрикова Л. И. Граничная задача Римана на римановой поверхности с краем. — Ученые записки Казанского ун-та, т. 123, кн. 9, 1964, с. 3—14.

6. Akaza T. Poincare theta series and singular sets of Schottky groups. — Nagoya mathematical journal, v. 24, 1964, p. 43—65.

7. Чибрикова Л. И., Сильвестров В. В. К вопросу об эффективности решения краевой задачи Римана для автоморфных функций. — „Известия вузов. Математика“, 1978, № 12.

8. Чибрикова Л. И., Сильвестров В. В. Построение автоморфного аналога ядра Коши для одного класса собственно разрывных групп. — Труды семинара по краевым задачам. Вып. 16. Изд-во Казанского ун-та, 1979, с. 202—217.

9. Сильвестров В. В. Построение кусочно-мероморфных квазиавтоморфных функций. Деп. в ВИНИТИ, № 3701-78 ДЕП.

10. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. М.—Л., Гостехиздат, 1948.

11. Чибрикова Л. И. Основные граничные задачи для аналитических функций. Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1977.

12. Чибрикова Л. И. О граничных задачах для прямоугольника. — Ученые записки Казанского ун-та, т. 123, кн. 9, 1964, с. 15—39.

13. Показеев В. И. Краевая задача Карлемана для фундаментального многоугольника. — Там же, с. 40—57.

14. Показеев В. И. Задача Римана для одного класса аналитических функций, определенных на фундаментальном многоугольнике.— Там же, с. 58—70.

15. Кабайла В. Условия существования обобщенных автоморфных функций и краевая задача Карлемана. — Литовский математический сборник, т. 7, № 1, 1967, с. 45—55.

16. Александров И. А., Сорокин А. С. Задача Шварца для многосвязных круговых областей.— Сибирский математический журнал, т. 13, № 5, 1972, с. 971—1001.

17. Дундученко Л. Е. Интеграл Шварца для одного класса функций, регулярных в счетно-связной круговой δ-области.— Математические заметки, т. 12, № 4, 1972, с. 349—354.

18. Пацевич Е. Л. Экстремальные свойства гармонических функций и применение к обратным краевым задачам. Автореф. канд. дисс. Казань, 1976.

Доложено на семинаре 20 декабря 1978 года.