КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 17 *Труды семинара по краевым задачам* *1980*

УДК 517.5

БИГОЛОМОРФНОСТЬ РЕШЕНИЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В C^n

Ю. Е. Хохлов

1. Введение. Данная работа является непосредственным продолжением статьи [8], посвященной рассмотрению вопросов биголоморфной разрешимости обратной краевой задачи в C^n. Основные определения, формулировка проблемы биголоморфной разрешимости и некоторые подходы к ее решению даны в [8] (см. также основополагающую работу [6]), к которой и отсылается читатель.

В настоящей работе получены (раздел 2) новые достаточные условия биголоморфности решений обратной краевой задачи по параметру x, имеющих вид $F=(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, где

$$f_k(z)=i\beta_k+S[x_k],\ k=1,\ 2,\ldots,n, \tag{1}$$

$\beta_k \in R^1$, а $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n): T^n \to P_x,\ x_k(\theta)=x_k(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$. Здесь $S[x_k]$ — оператор Шварца [3] для поликруга $U^n=\{z \in C^n | |z_k|<1,\ k=1,\ldots,n\}$, $T^n=R^n/2\pi Z^n$ — n-мерный тор, являющийся остовом поликруга U^n. При доказательстве использованы точные оценки для n-гармонических функций, полученные в [8] и один результат Островского]5].

Третий раздел посвящен рассмотрению внешней обратной краевой задачи в классе областей, бимероморфно эквивалентных внешности поликруга[1] $\Delta^n=\{z \in C^n | |z_k|>1,\ k=1,\ldots,n\}$. В этом случае для взаимнооднозначности отображения необходимо, чтобы оно имело полярную особенность не выше первого порядка, поэтому мы проводим исследование в классе Σ^n мероморфных отображений, имеющих в Δ^n разложение в кратные ряды вида

[1] Отметим, что внешность Δ^n и дополнение CU^n до C^n (при $n>1$) не одно и то же, имеет место строгое включение $\Delta^n \subset CU^n$.

$$F(z) = Bz + \begin{pmatrix} c_0(1) + \Sigma_{|\nu|=1}^{\infty} c_\nu(1) z^{-\nu} \\ \vdots \\ c_0(n) + \Sigma_{|\nu|=1}^{\infty} c_\nu(n) z^{-\nu} \end{pmatrix}, \quad z \in \Delta^n, \tag{2}$$

где B — неособое линейное преобразование, $B \in GL(n, \boldsymbol{C})$. Для интегральных представлений вида (1), дающих решение внешней обратной краевой задачи по параметру x, получены достаточные условия бимероморфности, выражаемые через плотности оператора Шварца.

2. Плотности с положительным якобианом. Как известно [см. 6, 8], обратная краевая задача по параметру x биголоморфно разрешима в классе $\mathscr{K}$, если оператор Шварца (1) осуществляет биголоморфное отображение поликруга U^n. Для изучения биголоморфности оператора Шварца воспользуемся одним результатом, полученным Островским [5]. Предварительно напомним понятия, используемые в теореме Островского.

Норма $\|\cdot\|: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^1_+$ вектора x из $\boldsymbol{R}^n$ называется $\boldsymbol{R}$-однородной, если для нее выполнены свойства: 1) $\|x\| > 0$, $x \neq 0$, 2) $\|cx\| = |c| \cdot \|x\|$ для ненулевого $c \in \boldsymbol{R}^1$, 3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. Далее, пусть A принадлежит $GL(n, \boldsymbol{R})$-группе квадратных матриц порядка n, тогда определим матричную норму $|||\cdot|||: GL(n, \boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}^1_+$, согласованную с векторной нормой $\|\cdot\|$, свойствами 1)—3) и постулатом

$$\|Ax\| \leqslant |||A||| \cdot \|x\| \tag{3}$$

для любого вектора x из $\boldsymbol{R}^n$ [см. 4].

Теорема 1 [5]. *Пусть G — выпуклая область в $\boldsymbol{R}^n$ и $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ — непрерывно дифференцируемое отображение G в $\boldsymbol{R}^n$. Если существует матрица $A \in GL(n, \boldsymbol{R})$ такая, что для всех $x \in G$ имеем*

$$|||DF(x) A^{-1} - E||| < 1, \tag{4}$$

$E = \mathrm{id}\, GL(n, \boldsymbol{R})$, $DF(x) = (D_k f_j(x))$, $k, j = 1, \dots, n$, *тогда отображение $F(x)$ — диффеоморфизм.*

Замечание 1. Эту теорему нетрудно обобщить на случай отображений комплексных пространств (вообще говоря, даже банаховых), при этом необходимо рассматривать $\boldsymbol{C}$-однородные нормы векторов z из $\boldsymbol{C}^n$ (они также характеризуются свойствами 1)—3), только скаляры нужно брать из поля комплексных чисел), а матричные нормы вводить так, чтобы выполнялось свойство (3).

Матричными нормами, согласованными с векторной нормой $\|z\|_\infty = \max |z_k|$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \boldsymbol{C}^n$, являются, например,

$$|||A|||_\infty = n \cdot \max_{k,j} |A_{kj}|,$$

$$S(A) = \sup_{x \neq 0} \|Az\|_\infty / \|z\|_\infty = \max_k \sum_j |A_{kj}|$$

и другие.

Введем класс n-гармонических функций $\Re\mathscr{P}(U^n)$, следы которых на T^n обладают той или иной дифференциально-разностной характеристикой. Наиболее подходящим для наших целей является класс $C_{N_1}^{k,\alpha}(T^n)$ непрерывно дифференцируемых до порядка k включительно функций с гельдеровыми k-ми производными. Мы говорим, что 2π — периодическая функция $u_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) \in C_{N_1}^{k,\alpha}(T^n)$, если для любых $\theta, \theta^* \in T^n$ функция $p_1(\theta) = \dfrac{\partial^{|\beta|} u_1(\theta)}{\partial\theta_1^{\beta_1}\partial\theta_2^{\beta_2}\ldots\partial\theta_n^{\beta_n}}$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = k$, удовлетворяет неравенству

$$|p_1(\theta) - p_1(\theta^*)| \leqslant \sum_{e=1}^{n} N_{1e} |\theta_e - \theta_e^*|^{\alpha_e},$$

$N_1 = (N_{11}, \ldots, N_{1n})$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Класс $C_{N_1}^{k,\alpha}(T^n)$ при $\alpha = (1, 1, \ldots, 1)$ обозначается в дальнейшем через $C^{k,1}(N_1)$, $C^{0,1}(N_1) \equiv \mathrm{Lip}(N_1)$.

Примером применения теоремы 1 к исследованию биголоморфности решения обратной краевой задачи служит

Теорема 2. *Пусть решение обратной краевой задачи по параметру x в классе $\mathscr{K}$ получено в виде* (1) *и выполнены* $(n \cdot m)$ *условий для* $x(\theta) = (x_1(\theta), x_2(\theta), \ldots, x_n(\theta))$

$$\int_{T^n} x(\theta) \exp[-2\pi i \langle\theta, \gamma\rangle]\, d\theta = \pi, \quad |\gamma| = 1, \tag{5}$$

$$\int_{T^n} x(\theta) \exp[-2\pi i \langle\theta, \gamma\rangle]\, d\theta = 0, \; |\gamma| = 2, 3, \ldots, m, \tag{6}$$

где $\langle\theta, \gamma\rangle = \theta_1\gamma_1 + \theta_2\gamma_2 + \ldots + \theta_n\gamma_n$. *Если* $p(\theta) = (p_1(\theta), p_2(\theta), \ldots, p_n(\theta)) = x(\theta) - \operatorname{Re} z\big|_{T^n}$, $p_k(\theta) \in C^{1,1}(N_k)$ *и* $N = (N_{kj})$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, *удовлетворяет условию*

1°. $S(N) < 2(m+1)/\pi$ *или* 2°. $|||N|||_\infty < 2(m+1)/\pi n$, *тогда обратная задача в классе* $\mathscr{K}$ *разрешима и ее решением является биголоморфный образ поликруга* U^n *при отображении* $F(z)$, *определенном в* (1).

Доказательство. Рассмотрим сужение отображения $F(z)$, у которого $\operatorname{Re} F(z) \in \Re\mathscr{P}(U^n)$, на остове поликруга T^n. Имеет место соотношение

$$\operatorname{Re} f_k(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) = x_k(\theta_1, \ldots, \theta_n), \; k = 1, \ldots, n.$$

Введем вспомогательное отображение $H(z)=(h_1(z), \ldots, h_n(z))=$ $=F(z)-z$. Если $S(DH(z))<1$, то в силу теоремы 1, применяемой в случае S-нормы с матрицей $A\equiv E$, отображение $F(z)$ будет осуществлять биголоморфное отображение поликруга U^n. Для нормы $\|\|\cdot\|\|_\infty$ доказательство проводится аналогично, поэтому мы на нем не останавливаемся.

На остове поликруга T^n для $H(z)$ выполнено соотношение

$$\operatorname{Re} h_j(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) = x_j(\theta_1, \ldots, \theta_n) - \cos\theta_j,$$

отсюда

$$\operatorname{Re} ie^{i\theta_k} D_k h_j(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) = D_k x_j(\theta_1, \ldots, \theta_n) + \delta_{kj}\cdot\sin\theta_k = p_{kj}(\theta).$$

Условия (5) обеспечивают разложение $p_{kj}(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ в кратные ряды Фурье, у которых отсутствуют первые m слагаемых. По предположению теоремы $p_{kj}(\theta)\in \operatorname{Lip}(N_k)$, поэтому в силу утверждения леммы 2 из [8] получаем

$$|iz_k D_k h_j(z_1, \ldots, z_n)| \leqslant \frac{\pi}{2(m+1)} N_{kj}|z_k|^{m+1}.$$

Здесь k фиксировано. Таким образом, в $\bar{U}_r^n=\{z\in C^n \mid |z_k|\leqslant r,$ $k=1, \ldots, n\}$ справедлива оценка

$$S(DH(z)) = \max_k \sum_j |D_k h_j(z)| \leqslant \max_k \sum_j \left(\frac{\pi}{2(m+1)} N_{kj}|z_k|^m\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2}\|z\|_\infty^m \max_k \sum_j (N_{kj}) \quad \frac{\pi S(N)}{2(m+1)}\|z\|_\infty^m.$$

В силу требования 1° теоремы $S(N)<2(m+1)/\pi$, поэтому сразу же делаем вывод, что $S(DH(z))<1$ во всем замкнутом поликруге $\bar{U}^n$, откуда и следует окончательное утверждение теоремы.

Замечание 2. В случае $n=1$ мы приходим к условию однолистности интеграла Шварца в единичном круге, полученному ранее Ф. Г. Авхадиевым [1].

Выбор в качестве матрицы A^{-1} в теореме 1 матрицы (A_{kj}), где $A_{kj}=(\varepsilon_k)^j$ — корни k-ой степени из единицы, возведенные в степень j, приводит нас, как показано в п. 4 из [8], к достаточному условию биголоморфности вида $\Sigma_{k=1}^n |D_k f_j - 1|^2<1$ при всех $j=1, 2, \ldots, n$. В применении к отображениям типа (1), легко устанавливается справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть решение обратной задачи в классе* $\mathcal{K}$ *получено в виде* (1). *Если* $x(\theta)=(x_1(\theta), x_2(\theta), \ldots, x_n(\theta))$,

$x_k(\theta) \in C^{1,1}(N_k)$, *выполнены условия* (5) *и* $\|N_l\|_2 = (\Sigma_{l=1}^n N_{kl}^2)^{1/2} \leqslant 2m/\pi$ *для всех* $k = 1, 2, \ldots, n$, *тогда обратная краевая задача разрешима в классе* $\mathscr{H}$ *и ее решением является биголоморфный образ* U^n *при отображении* $F(z)$.

3. Отображения класса Σ^n. В данном разделе мы обращаемся к рассмотрению бимероморфных отображений внешности поликруга Δ^n, имеющих разложения вида (2). Решение внешней обратной краевой задачи по параметру x в этом случае строится с помощью оператора Шварца для Δ^n и имеет вид $F(z) = (f_1(z), \ldots, f_n(z))$, где

$$f_k(z) = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} z_j - S[x_k], \; z \in \Delta^n, \tag{7}$$

$k = 1, 2, \ldots, n$. Как и в одномерном случае [2], для однозначной разрешимости задачи нужно потребовать выполнимости условия

$$\int_{T^n} x(\theta) \exp[-2\pi i \langle \theta, \gamma \rangle] \, d\theta = 0, \; |\gamma| = 1. \tag{8}$$

Мы будем предполагать это условие всегда выполненным.

Исследование бимероморфности отображения (7) будет основано на второй теореме Островского [5], которая в отличие от теоремы 1 применима и в том случае, когда область G невыпукла. Напомним еще одно полезное понятие из теории граничных свойств аналитических функций [2].

Расстоянием Мазуркевича между двумя точками z_1, z_2 из $G \subset C^n$ называется величина $\rho_M(z_1, z_2) = \inf\limits_{l \in G} \rho(z_1, z_2)$, равная нижней грани длин гладких кривых l, соединяющих две точки z_1, z_2 и принадлежащих области G. Если рассмотреть теперь отношение $\rho_M(z_1, z_2)/\rho_E(z_1, z_2)$, где ρ_E — евклидова метрика в C^n, то число

$$\lambda_G = \sup_{z_1, z_2 \in G} \rho_M(z_1, z_2)/\rho_E(z_1, z_2)$$

назовем характеристикой невыпуклости области G. Оно играет важную роль во второй теореме Островского. Учитывая сказанное в замечании 1, мы сразу сформулируем ее для случая C^n.

Теорема 4 [5]. *Пусть G — область из C^n с характеристикой невыпуклости $\lambda_G < \infty$ и $F(z) = (f_1(z), f_2(z), \ldots$ $\ldots, f_n(z))$ — голоморфное отображение G в C^n. Если существует матрица $A \in GL(n, C)$ такая, что для всех $z \in G$ имеем*

$$\| DF(z) A^{-1} - E \| < \lambda_G^{-1}, \tag{9}$$

то $F(z)$ — биголоморфное отображение.

Замечание 3. Эта теорема распространяется и на отображения класса Σ^n в Δ^n. Для Δ^n характеристику невыпуклости легко подсчитать — она равна $\lambda_{\Delta^n} = \pi/2$, поэтому условие (9) для отображений класса Σ^n перепишется в виде

$$||| DF(z) A^{-1} - E ||| < 2/\pi. \tag{10}$$

В частности, если в качестве $||| M |||$ взять $(\Sigma_{k, j} | M_{kj} |^2)^{1/2}$, то получится условие бимероморфности теоремы 6 из [8], найденное другим способом.

Перейдем к исследованию бимероморфности решений внешней обратной краевой задачи.

Теорема 5. *Пусть решение внешней обратной краевой задачи по параметру x получено в виде* (7) *и выполнены* $(n \cdot m)$ *условий* (6), (8). *Если* $x_k(\theta) \in C^{1, 1}(N_k)$ *и для* $N = (N_{kj})$ *справедливы оценки*

1°. $S(N) < 4(m+1)/\pi^2 S(B^{-1})$

или

2°. $||| N |||_\infty < 4(m+1)/\pi^2 n ||| B^{-1} |||_\infty$,

тогда внешняя обратная задача разрешима и ее решением является бимероморфный образ Δ^n *при отображении* $F(z)$, *заданном* (7).

Доказательство. Введем отображение $H(z) = F(z) - Bz$. Если $S(DH(z)) < 2/\pi S(B^{-1})$, то бимероморфность отображения $F(z)$ в Δ^n будет следовать из теоремы 4 при $A \equiv B$ в случае нормы $||| \cdot ||| = S(\cdot)$ из-за эквивалентности (10) условию

$$||| DF(z) - B ||| < (\pi ||| B^{-1} ||| /2)^{-1}.$$

На остове поликруга T^n выполнено соотношение

$$\operatorname{Re} h_j(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) = x_j(\theta_1, \ldots, \theta_n),$$

откуда

$$\operatorname{Re} ie^{i\theta_k} D_k h_j(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) = D_k x_j(\theta_1, \ldots, \theta_n) = q_{kj}(\theta).$$

Условия (6), (8) гарантируют отсутствие первых m слагаемых в разложении функций $q_{kj}(\theta)$ в кратные ряды Фурье. Так как $q_{kj}(\theta) \in \operatorname{Lip}(N_k)$, то опять, применяя лемму 2 из [8], приходим к оценке

$$| iD_k h_j(z_1, \ldots, z_n) | \leqslant \frac{\pi}{2(m+1)} N_{kj} | z_k |^m.$$

Таким образом, в $\bar{\Delta}^n_\rho = \{ z \in C^n \mid | z_k | \geqslant \rho, \ k = 1, \ldots, n \}$ справедливы оценки

$$S(DH(z)) = \max_k \sum_j | D_k h_j(z) | \leqslant \max_k \sum_j \left(\frac{\pi}{2(m+1)} N_{kj} | z_k |^m \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2(m+1)} \|z\|_\infty^m \max_k \sum_j (N_{kj}) = \frac{\pi S(N)}{2(m+1)} \|z\|_\infty^m .$$

В силу требования 1° теоремы $S(N) < 4(m+1)/\pi^2 S(B^{-1})$, поэтому можно сделать вывод, что $S(DH(z)) < 2/\pi S(B^{-1})$ во всей замкнутой внешности поликруга $\bar{\Delta}^n$, откуда и вытекает окончательное утверждение теоремы.

Замечание 4. Выбор матрицы $B = (\delta_{kj})$, приводит к условию бимероморфности отображения (6) вида $S(N) < < 4(m+1)/\pi^2$, что при $n = 1$ дает достаточное условие, найденное В. С. Рогожиным [7]. На других частных случаях, связанных с конкретным выбором матрицы B в теореме 5, мы не останавливаемся.

В заключение автор выражает признательность своему научному руководителю профессору Л. А. Аксентьеву за постоянное внимание к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авхадиев Ф. Г. Радиусы выпуклости и почти выпуклости некоторых интегральных представлений.— Математические заметки, 1970, т. 7, № 5, с. 581–592.

2. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций.— УМН, 1975, т. 30, № 4, с. 3–60.

3. Какичев В. А. Интеграл Шварца и формулы Гильберта для аналитических функций многих комплексных переменных.—„Изв. вузов. Математика", 1959, № 2, с. 80–93.

4. Ланкастер П. Теория матриц. М., „Наука", 1978.

5. Ostrowski A. Un nouveau critere d'univalence des transformations dans un R^n.—Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 1959, t. 248, p. 348–350.

6. Пивень Н. Н. Основная обратная краевая задача для областей биголоморфно эквивалентных бикругу, I, II. –„Изв. вузов. Математика", I–1974, № 4, с. 17–26; II–1977, № 6, с. 16–25.

7. Рогожин В. С. Достаточные условия однолистности решения обратных краевых задач.—ПММ, 1958, т. 22, № 6, с. 804–807.

8. Тихонов А. П., Хохлов Ю. Е. Биголоморфность решений обратной краевой задачи в C^n.— Труды семинара по краевым задачам. Вып. 16. Изд-во Казанского ун-та, 1979.

Доложено на семинаре 30 января 1979 г.