

Werk

Verlag: Izd. Kazanskogo universiteta; Совет казанского университета

Ort: Kazan

Kollektion: RusDML; Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN509860087_0017

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN509860087_0017

LOG Id: LOG_0028

LOG Titel: О распределении теплового потока на поверхности плавления при термическом бурении

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN509860087

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN509860087>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=509860087>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

УДК 536.24.01

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАВЛЕНИЯ ПРИ ТЕРМИЧЕСКОМ БУРЕНИИ

С. А. Фокин

Постановка задачи. Основными величинами, определяющими затраты энергии при термическом бурении методом плавления, являются скорость движения V термобура и плотность теплового потока, подводимого к поверхности плавления. Эти характеристики связаны с температурным режимом коронки термобура, с процессами тепло- и массопереноса в слое расплава между рабочей поверхностью термобура и породами [1], с распределением температуры в окружающем горном массиве. В общем случае при теоретическом исследовании процесса бурения плавлением определению подлежит также уравнение поверхности плавления.

По предварительным оценкам [2] толщина жидкого слоя под рабочей поверхностью термобура на три-четыре порядка меньше его характерных размеров. Таким образом, можно

считать, что поверхность плавления повторяет форму коронки термобура, которая известна. Схематично вертикальный разрез поверхности фазового перехода S_m и горного массива Ω представлен на рис. 1. Область, являющуюся дополнением области Ω до всего пространства, обозначим Ω' и будем считать, что поперечные размеры ее конечны. Плотность теплового потока определяется температурным полем окружающего коронку пород с учетом граничного условия на S_m , $t|_{S_m} = t_{пл}$, где $t_{пл}$ — температура плавления.

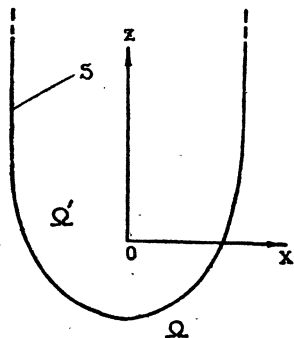


Рис. 1.

Свяжем с поверхностью плавления декартову систему координат так, чтобы направление оси z было противоположно направлению движения термобура. Тогда задача о распределении температуры в области Ω математически формулируется как задача решения уравнения теплопереноса

$$\Delta_m \theta - \text{Pe} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad m = 2, 3, \quad (1)$$

где

$$\theta = \frac{t - t_\infty}{t_{\text{пл}} - t_\infty}; \quad Z = \frac{z}{S}; \quad X = \frac{x}{S}; \quad Y = \frac{y}{S}; \quad \text{Pe} = \frac{VS}{a};$$

t_∞ — невозмущенная температура горного массива, a — коэффициент температуропроводности пород, S — характерный размер коронки, Δ_m — оператор Лапласа (индекс $m = 2, 3$ указывает на размерность задачи), ϵ граничными условиями

$$\theta|_{S_m} = 1, \quad \lim_{X^2 + Y^2 + Z^2 \rightarrow \infty} \theta = 0.$$

Сведение задачи к интегральному уравнению. Для функции θ — решения краевой задачи (1) справедливо следующее интегральное представление, являющееся аналогом формулы Грина для гармонических функций [3]

$$\theta(P_0) = \frac{1}{2^{m-1} \pi} \int_{S_m} \left[\varphi(P, P_0) \frac{\partial \theta(P)}{\partial n} - \theta(P) \frac{\partial \varphi(P, P_0)}{\partial n} - \text{Pe} \varphi(P, P_0) \theta(P) \frac{\partial Z}{\partial n} \right] dS_m, \quad (2)$$

где P_0 — некоторая внутренняя точка области Ω , P — точка на поверхности S_m , n — внешняя нормаль к поверхности S_m ,

$\varphi(P, P_0)$ — фундаментальное решение уравнения $\Delta_m \varphi + \text{Pe} \frac{\partial \varphi}{\partial Z} = 0$,

то есть такое решение, которое при $P \rightarrow P_0$ ведет себя как $\text{Ln}[1/\rho(P, P_0)]$, если $m=2$, и как $1/\rho(P, P_0)$, если $m=3$ ($\rho(P, P_0)$ — расстояние между точками P и P_0). Непосредственной проверкой можно убедиться, что фундаментальным решением сопряженного уравнения является функция

$$\varphi = \varphi_m(\rho) e^{\frac{\text{Pe}}{2}(z_0 - z)}, \quad (3)$$

где $\varphi_2 = K_0\left(\frac{\text{Pe}}{2}\rho\right)$, $\varphi_3 = e^{-\frac{\text{Pe}}{2}\rho}/\rho$, $K_0\left(\frac{\text{Pe}}{2}\rho\right)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка. С учетом формулы (3) преобразуем выражение (2) к виду

$$\theta(P_0) = \frac{1}{2^{m-1}\pi} \int_{S_m} \left[\varphi \frac{\partial \theta}{\partial n} - \theta \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial n} e^{\frac{Pe}{2}(Z_0-Z)} - \varphi_m \frac{\partial e^{\frac{Pe}{2}(Z_0-Z)}}{\partial n} \right) \right] dS_m, \quad (4)$$

$$P_0 \in \Omega, \quad m = 2, 3.$$

С другой стороны, нетрудно показать, что справедлива формула

$$1 = \frac{1}{2^{m-1}\pi} \int_{S_m} \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial n} e^{\frac{Pe}{2}(Z_0-Z)} - \varphi_m \frac{\partial e^{\frac{Pe}{2}(Z_0-Z)}}{\partial n} \right) dS_m, \quad (5)$$

$$P_0 \in \Omega', \quad m = 2, 3,$$

где нормаль n по отношению к Ω' является внутренней.

Формулы (4), (5) после перехода к пределу при $P_0 \rightarrow M \in S_m$ приводят к интегральному уравнению Фредгольма первого рода относительно $\frac{\partial \theta}{\partial n}$

$$1 = \frac{1}{2^{m-1}\pi} \int_{S_m} \varphi \frac{\partial \theta}{\partial n} dS_m, \quad P_0 \in S_m, \quad m = 2, 3. \quad (6)$$

Система (4), (6) полностью определяет распределение температуры в горном массиве и приведенную плотность теплового потока $\frac{\partial \theta}{\partial n}$ на поверхности плавления.

В случае $m = 2$, подставляя в (6) вместо φ ее выражение (3), получим

$$2\pi = \int_{S_2} \frac{\partial \theta}{\partial n} e^{\frac{Pe}{2}(Z_0-Z)} K_0 \left(\frac{Pe}{2} \sqrt{(X-X_0)^2 + (Z-Z_0)^2} \right) dS_2. \quad (7)$$

$$(X_0, Z_0) \in S_2.$$

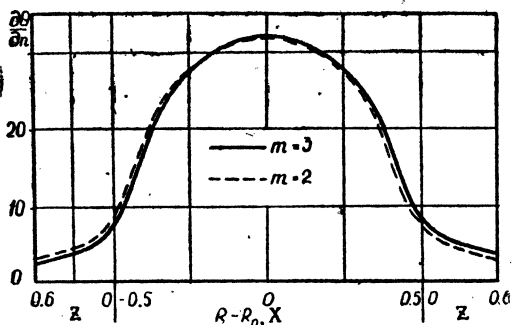


Рис. 2.

Был разработан алгоритм численного решения этого интегрального уравнения. В качестве примера на рис. 2 пунктирной линией приведено распределение плотности теплового потока $\frac{\partial \theta(X, Z)}{\partial n}$ на поверхности плавления, заданной в виде полуокружности

$$Z = -\sqrt{0,25 - X^2},$$

($|X| \leq 0,5$), сопряженной с вертикальными образующими $X = 0,5$ и $X = -0,5$ при $Pe = 30$.

Исследование трехмерной задачи ($m=3$). Рассмотрим случай, когда S_3 — поверхность вращения с осью симметрии Z , образующей S_2 . Тогда, переходя в (6) к цилиндрическим координатам $X=R \cos \alpha$, $Y=R \sin \alpha$, $Z=Z$ и вводя новую переменную $t=\sqrt{R^2+R_0^2-2RR_0 \cos \alpha+(Z_0-Z)^2}$, приведем уравнение (6) к виду

$$\pi = \int_{S_2} \frac{d\theta(R, Z)}{dn} I(R, Z, R_0, Z_0) e^{\frac{Pe}{2}(Z_0-Z)} R dS_2, \quad (R_0, Z_0) \in S_2, \quad (8)$$

где

$$I(R, Z, R_0, Z_0) = \int_c^d e^{-\frac{Pe}{2}t} dt / \sqrt{(t^2 - c^2)(d^2 - t^2)},$$

$$c = \sqrt{(R - R_0)^2 + (Z - Z_0)^2}, \quad d = \sqrt{(R + R_0)^2 + (Z - Z_0)^2}.$$

Будем считать, что при всех $R \in S_2$ выполняется строгое неравенство $d > c$, которое эквивалентно тому, что ось Z не пересекает контур S_2 . Физически это соответствует наличию в центре коронки отверстия для отбора проб породы. В этом случае при $Pe \rightarrow \infty$ удастся вывести асимптотическую формулу и значительно упростить ядро уравнения (8).

Асимптотическое разложение интегралов типа $I(R, Z, R_0, Z_0)$ удобно искать методом интегрирования по частям, изложенным в [4]. Так как интеграл I имеет на концах особенности, в [4] предлагается применить нейтралizador Ван дер Корпута $\nu(t)$, который обладает свойствами $\nu(t) \in C^\infty [c, d]$; $\nu(c) = 1$; $\nu^{(k)}(c) = 0$; $\nu^{(k)}(d) = 0$.

Левый $\nu_0(t)$ и правый $\nu_1(t)$ нейтралзаторы определяются следующим образом:

$$\nu_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [c, c_1], \\ \nu(t) & \text{при } t \in [c_1, d_1], \\ 0 & \text{при } t \in [d_1, d], \end{cases} \quad \nu_1(t) = 1 - \nu_0(t), \quad c < c_1 < d_1 < d.$$

Тогда после n -кратного интегрирования по частям исследуемого интеграла с учетом свойств нейтралзаторов получим формулу [4]

$$\int_c^d K(\beta, t) h(\beta, t) dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k K_{-k-1}^{(1)}(\beta, d) h_k^{(1)}(\beta, d) - \\ - \sum_{k=0}^n (-1)^k K_{-k-1}^{(0)}(\beta, c) h_k^{(0)}(\beta, c) + (-1)^{n+1} \int_c^{d_1} K_{-n-1}^{(0)}(\beta, t) \times$$

$$\times h_{n+1}^0(\beta, t)(dt) + (-1)^{n+1} \int_{c_1}^d K_{-n-1}^{(1)}(\beta, t) h_{n+1}^{(1)}(\beta, t) dt, \quad (9)$$

где

$$K_0^{(i)}(\beta, t) = K^{(i)}(\beta, t), \quad \frac{\partial}{\partial t} K_{-n-1}^{(i)}(\beta, t) = K_{-n}^{(i)}(\beta, t),$$

$$h_0^{(i)}(\beta, t) = h^{(i)}(\beta, t), \quad h_n^{(i)}(\beta, t) = \frac{\partial}{\partial t} (h_{n-1}^{(i)}(\beta, t) v_i(t)), \quad i = 0, 1. \quad (10)$$

В [4] также показано, что для интегрированных ядер $K_{-n-1}(\beta, t)$, стремящихся к нулю при $\beta \rightarrow \infty$, справедливо следующее представление:

$$K_{-n-1}(\beta, t) = - \int_t^\infty \frac{(t-\tau)^n}{n!} K(\beta, \tau) d\tau.$$

Полагая

$$K^{(0)}(\beta, t) = e^{-\frac{Pe}{2}t} / \sqrt{t^2 - c^2}, \quad h^{(0)}(t) = v_0(t) / \sqrt{d^2 - t^2}, \quad \beta = \frac{Pe}{2},$$

получим

$$K_{-n-1}^{(0)}\left(\frac{Pe}{2}, t\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} e^{-\frac{Pe}{2}c} (2c)^n \int_0^\infty u^{n-1/2} (u+t-c)^{-1/2} \times \\ \times (u+t+c)^{-1/2} du. \quad (11)$$

Полагая в (11) $t=c$, найдем искомое интегрированное ядро

$$K_{-n-1}^{(0)}\left(\frac{Pe}{2}, c\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} (2c)^n e^{-\frac{Pe}{2}c} \int_0^\infty u^{n-1/2} (u+1)^{-1/2} e^{-Pe \cdot c \cdot u} du.$$

Интеграл в правой части выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию $\psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ [5]. Таким образом,

$$K_{-n-1}^{(0)}\left(\frac{Pe}{2}, c\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \Gamma(n+1/2) e^{-\frac{Pe}{2}c} \times \\ \times \psi(1/2, 1-n, Pe \cdot c) \left(\frac{Pe}{2}\right)^{-n}.$$

Из формул (10), с учетом свойств нейтрализатора $v_0(t)$, найдем

$$h_n^{(0)}(c) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} [(d^2 - t^2)^{-1/2}]_{t=c}.$$

Следовательно, вторую сумму в правой части формулы (9) можно представить в виде

$$\Phi_n = e^{-\frac{Pe}{2}c} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k+1/2)}{k!} \psi(1/2, 1-k, Pe \cdot c) h_k^{(0)}(c) \left(\frac{Pe}{2}\right)^{-k}.$$

Для оценки остатка $R_n\left(\frac{Pe}{2}\right)$ необходимо оценить $K_{-n-1}\left(\frac{Pe}{2}, t\right)$.

Разобьем интервал интегрирования в (11) на $(0, 1)$ и $(1, \infty)$.

Так как

$$|t - c + u|^{-1/2} \leq |t - c|^{-1/2}, \quad |t + c + u|^{-1/2} \leq |t + c|^{-1/2},$$

нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \left| K_{-n-1}^{(0)}\left(\frac{Pe}{2}, t\right) \right| &\leq |t^2 - c^2|^{-1/2} \left[\int_0^1 u^n e^{-\frac{Pe}{2}uc} du + \right. \\ &\quad \left. + \int_1^\infty u^n e^{-\frac{Pe}{2}uc} du \right] e^{-\frac{Pe}{2}c} = \\ &= |t^2 - c^2|^{-1/2} \left[O\left(\frac{Pe^{-n-1}}{2}\right) + O\left(e^{-\frac{Pe}{2}c} \cdot \frac{Pe^{-1}}{2}\right) \right] e^{-\frac{Pe}{2}c} = \\ &= |t^2 - c^2|^{-1/2} O\left(e^{-\frac{Pe}{2}c} \cdot \frac{Pe^{-n-1}}{2}\right) \text{ и } \left| R_n^{(0)}\left(\frac{Pe}{2}\right) \right| = \\ &= \left| \int_c^{d_1} K_{-n-1}^{(0)}(\beta, t) |h_0^{(0)}(t) \nu_0(t)|^{(n+1)} dt \right| = \\ &= |\operatorname{Ln}(t - \sqrt{t^2 - c^2})|_c^{d_1} O\left(e^{-\frac{Pe}{2}c} \frac{Pe^{-n-1}}{2}\right). \end{aligned}$$

Тогда найдется такое k , что при всех $n \in N$

$$R_{n+k}^{(0)}\left(\frac{Pe}{2}\right) = o\left(K_{-n-1}^{(0)}\left(\frac{Pe}{2}, c\right)\right).$$

Положим

$$\begin{aligned} K^{(1)}\left(\frac{Pe}{2}, t\right) &= e^{-\frac{Pe}{2}t} / \sqrt{d-t}, \\ h^{(1)}(t) &= \nu_1(t) / \sqrt{(t^2 - c^2)(d+t)}. \end{aligned}$$

Проводя аналогичные оценки для $K_{-n-1}^{(1)}\left(\frac{Pe}{2}, d\right)$ и $R_n^{(1)}\left(\frac{Pe}{2}\right)$, можно показать, что

$$\begin{aligned} |R_n^{(1)}| &= O\left(e^{-\frac{Pe}{2}c_1} \cdot \frac{Pe^{-n-1}}{2}\right), \quad |K_{-n-1}^{(1)}\left(\frac{Pe}{2}, d\right)| = \\ &= O\left(e^{-\frac{Pe}{2}d} \cdot \frac{Pe^{-n-1/2}}{2}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, все другие слагаемые в правой части формулы (9), кроме Φ_n , при $d > c_1 > c$ входят в любой остаток ряда

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(n+1/2) e^{-\frac{Pe}{2}c} h_n^{(0)}(c) \psi(1/2, 1-n, Pe \cdot c) \left(\frac{Pe}{2}\right)^{-n} / n!$$

Если ограничиться первым членом этого асимптотического ряда и выразить ψ через модифицированную функцию Бесселя второго ряда по известной формуле [5], то уравнение (8) примет вид

$$2\pi = \int_{S_2} \frac{\partial \theta(R, Z)}{\partial n} \sqrt{\frac{R}{R_0}} e^{\frac{Pe}{2}(Z_0-Z)} K_0 \left[\frac{Pe}{2} \sqrt{(R-R_0)^2 + (Z-Z_0)^2} \right] dS_2 \quad (12)$$

Сравнивая уравнения (7) и (12), видим, что они отличаются лишь множителем $\sqrt{R/R_0}$, учитывающим радиальный характер распределения тепла в породах.

При численном решении уравнения (12) задавалась та же форма образующей и тоже значение $Pe = 30$, что и при решении уравнения (7). Причем радиус внутреннего отверстия r_0 выбирался равным ширине кольца S горизонтального сечения коронки, то есть $\bar{R}_0 = r_0/S = 1$. Распределение плотности теплового потока на S_2 приведено сплошной линией на рис. 2.

Результаты численных расчетов показывают, что при некоторых значениях параметров, определяющих процесс бурения кольцевым термобуром, например, при $\bar{R}_0 \geq 1$ и достаточно больших Pe , можно ограничиться решением двумерной задачи для $m = 2$.

В заключение хочу выразить глубокую признательность А. Н. Саламатину за интерес, проявленный к работе и ряд ценных замечаний в ходе решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фомин С. А. Уравнения тепло- и массопереноса в слое расплава под рабочей поверхностью термопенетратора. Казань, 1978 (Рукопись депонирована в ВИНТИ № 1534—78 Деп.).
2. Чистяков В. К., Чугунов В. А. Исследование процесса бурения методом плавления горных пород. — Сб.: Физические проблемы горного производства. Вып. 4. Л., 1977, с. 97—103.
3. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., ИИЛ, 1957.
4. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Т. I. Рига, 1974.
5. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М., Физматгиз. 1963.

Доложено на семинаре 6 декабря 1978 г.