КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 17 *Труды семинара по краевым задачам* *1980*

УДК 517.544.8

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С АВТОМОРФНЫМИ И КВАЗИАВТОМОРФНЫМИ ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ И СТЕПЕННЫМИ ЯДРАМИ, *I*

Чибрикова Л. И., Плещинский Н. Б.

В этой работе методом аналитического продолжения решаются в замкнутой форме некоторые интегральные уравнения первого рода, заданные на кусочно-гладкой линии L_0, лежащей внутри фундаментальной области R_0 некоторой конечнопорожденной функциональной группы Г дробно-линейных преобразований

$$\sigma_0(z) \equiv z,\ \sigma_k(z) = \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k},\ \alpha_k\beta_k - \beta_k\gamma_k = 1,\ k = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Группу Г считаем принадлежащей 1 классу, для которого

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' |\gamma_k|^{-2} < \infty. \tag{2}$$

Штрих у знака суммы означает, что при суммировании опускается конечное число членов ряда, для которых $\gamma_k = 0$. Область R_0 считаем областью Форда, т. е. внешностью всех изометрических окружностей $|\gamma_k z + \delta_k| = 1$, $k = 1, 2, \ldots$ группы, расположенной в одной из областей разрывности S группы Г. Предполагаем, что бесконечно удаленная точка есть обыкновенная точка группы. Для групп 1 класса в работе [1] построен квазиавтоморфный аналог ядра Коши

$$K(z, \tau) = \sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\sigma_j(\tau) - z} - \frac{1}{\sigma_j(\tau) - z_0}\right]\sigma_j'(\tau) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}{}'\left[\frac{1}{\tau - \sigma_j(z)} - \frac{1}{\tau - \sigma_j(z_0)}\right],\ z_0 \in R_0 \setminus L_0, \tag{3}$$

с основным групповым свойством

$$K[\sigma_k(z), \tau] = K(z, \tau) + \eta_k(\tau), \; k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

и автоморфный аналог ядра Коши

$$A(t, \tau) = \begin{vmatrix} K(z, \tau), K(z, a_1), \ldots, K(z, a_\rho) \\ \eta_1(\tau), \eta_1(a_1), \ldots, \eta_1(a_\rho) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_\rho(\tau), \eta_\pi(a_1), \ldots, \eta_\rho(a_\rho) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \eta_1(a_1), \ldots, \eta_1(a_\rho) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \eta_\rho(a_1), \ldots, \eta_\rho(a_\rho) \end{vmatrix} \tag{5}$$

с простыми полюсами в обыкновенных точках $a_1, \ldots, a_\rho$ области R_0; число полюсов ρ равно роду (жанру) области R_0. Ядра рассматриваемых в данной работе интегральных уравнений на каждой дуге $\alpha_k\beta_k$, входящей в состав линии L_0, либо совпадают со значениями интегралов

$$F_k(z, \tau) = \int_{\alpha_k\tau} \varphi_k(\zeta) K(z, \zeta)\, d\zeta, \quad \psi_k(z, \tau) = \int_{\alpha_k\tau} \varphi_k(\zeta) A(z, \zeta)\, d\zeta, \tag{6}$$

либо с показательной функцией от таких интегралов. Решения уравнений отыскиваются в классах H^* по Н. И. Мусхелишвили. Устанавливается зависимость числа линейно-независимых решений однородных уравнений и числа условий разрешимости неоднородных уравнений от индекса уравнения $\varkappa$, рода ρ фундаментальной области и числа особенных концов линии L_0.

§ 1. Интегралы с логарифмическими ядрами

1°. Предположим сначала, что L_0 есть простая гладкая разомкнутая дуга $\alpha\beta$ и что заданная на ней функция $\varphi(\zeta) \in H$ нигде не обращается в нуль. Полагая

$$F_\alpha(z, \tau) = \int_{\alpha\tau} \varphi(\zeta) K(z, \zeta)\, d\zeta, \tag{7}$$

рассмотрим свойства криволинейного интеграла

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) F_\alpha(z, \tau)\, d\tau, \tag{8}$$

когда $\nu(t)$ принадлежит классу $H^*(\alpha, c_1, \ldots, c_n, \beta)$.

Теорема 1. *Если* $\varphi(t) \in H$ *и* $\nu(t) \in H^*(\alpha, c_1, \ldots, c_n, \beta)$ *на гладкой дуге* $\alpha\beta$, *то интеграл*

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) F_\alpha(t, \tau)\, d\tau. \tag{9}$$

всюду на $\alpha\beta$, *кроме, может быть, концов, удовлетворяет условию* H.

При доказательстве теоремы надо учесть, что вблизи дуги $\alpha\beta$

$$K(z, \tau) = (\tau - z)^{-1} + B(z, \tau), \tag{10}$$

где $B(z, \tau)$ аналитическая по z и τ не только вблизи $\alpha\beta$, но и на $\alpha\beta$. Поэтому в представлении

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha\beta} \nu(\tau)\, d\tau \int_{\alpha\tau} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha\beta} \nu(\tau)\, d\tau \int_{\alpha\tau} \varphi(\zeta) B(t, \zeta)\, d\zeta$$

второй интеграл равномерно по t сходится и как аналитическая по t функция принадлежит классу $H(1)$ всюду на $\alpha\beta$, включая концы. Равномерная сходимость первого интеграла и его принадлежность классу $H(\mu)$, $\mu < 1$, всюду на $\alpha\beta$, исключая, может быть, концы, доказаны в работе [2] (теорема 1).

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *интеграл* (8) *представляет собой исчезающую в точке* $z = z_0$ *квазиавтоморфную кусочно-голоморфную функцию с линией скачков* $\alpha\beta$, *ограниченную на* $R \setminus \alpha\beta$ *и на конце* $z = \beta$ *и почти ограниченную на конце* $z = \alpha$. *Во всех внутренних точках дуги* $\alpha\beta$ *предельные значения функции* (8) *вычисляются по формулам*

$$\Phi^{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi(t) \int_{t\beta} \nu(\tau)\, d\tau + \Phi(t). \tag{11}$$

Доказательство. В криволинейном интеграле (8) подынтегральная функция $\nu(\tau) F_\alpha(z, \tau)$ является аналитической по z в плоскости с разрезом по дуге $\alpha\beta$ и кусочно-непрерывной по τ на дуге $\alpha\beta$. Значит, интеграл $\Phi(z)$ будет аналитической функцией в плоскости с разрезом $\alpha\beta$, если он будет равномерно сходящимся для всех $z \in R$, отличных от точек дуги $\alpha\beta$. Обозначим через R фундаментальное множество группы Г; оно получается присоединением к R_0 всех неконгруэнтных между собой точек ее границы ∂R_0. На множестве $R \setminus \alpha\beta$ ядро $K(z, \tau)$ по z ограничено, а вблизи $\alpha\beta$ имеем представление (10). Поэтому в любой области $\bar{D} \subset R \setminus \alpha\beta$ интеграл (7) ограничен по модулю, так что имеет место оценка

$$|\nu(\tau) F_\alpha(z, \tau)| \leqslant M |\nu(\tau)|, \ M > 0.$$

Отсюда и из абсолютной интегрируемости функции $\nu(\tau)$ следует равномерная сходимость интеграла (8).

Так как стремление функции $F_\alpha(z, \tau)$ к нулю при $z \to z_0$ равномерно относительно $\tau \in \alpha\beta$ и интеграл (8) сходится равномерно, то

$$\lim_{z\to z_0} \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha\beta} \nu(\tau) \lim_{z\to z_0} F_\alpha(z, \tau)\, d\tau = 0,$$

так что $\Phi(z_0) = 0$.

Равномерная сходимость интеграла (8) позволяет путем перехода к пределу под знаком интеграла получить заключение, что функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на все внутренние точки дуги $\alpha\beta$. Будем обозначать, что $z \to t^+$, если $z \to t \in \alpha\beta$, оставаясь все время слева от $\alpha\beta$, и $z \to t^-$, если $z \to t$, оставаясь справа от $\alpha\beta$. В силу условия $\varphi(t) \in H$ и представления (10)

$$\lim_{z\to t^\pm} F_\alpha(z, \tau) = F_\alpha(t^\pm, \tau) = \begin{cases} F_\alpha(t, \tau), & \tau \in \alpha t, \\ \pm i\pi\varphi(t) + F_\alpha(t, \tau), & \tau \in t\beta, \end{cases} \tag{12}$$

причем стремление к пределу равномерно относительно $\tau \in \alpha\beta$. На основании этих формул переходом к пределу под знаком интеграла (8) при $z \to t^\pm$ убеждаемся в справедливости формул (11)

$$\Phi^\pm(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha\beta} \nu(\tau) F_\alpha(t^\pm, \tau)\, d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha t} \nu(\tau) F_\alpha(t, \tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{t\beta} \nu(\tau) [\pm i\pi\varphi(t) + F_\alpha(t, \tau)]\, d\tau = \pm \frac{1}{2}\varphi(t) \int\limits_{t\beta} \nu(\tau)\, d\tau + \Phi(t).$$

Из теоремы 1 следует, что предельные значения $\Phi^\pm(t)$ удовлетворяют условию H всюду на $\alpha\beta$, кроме, может быть, конца $t = \alpha$. На этом конце ядро $F_\alpha(z, \tau)$ на основании (10) ведет себя как $-\varphi(\alpha)\ln(z - \alpha)$. Поэтому

$$\lim_{z\to\alpha} |z - \alpha|^\varepsilon F_\alpha(z, \tau) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

причем стремление к пределу равномерное относительно τ. Отсюда следует, что

$$\lim_{z\to\alpha} |z - \alpha|^\varepsilon\, \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha\beta} \nu(\tau) \lim_{z\to\alpha} |z - \alpha|^\varepsilon\, F_\alpha(z, \tau)\, d\tau = 0. \tag{13}$$

Значит, интеграл (8) в точке $z = \alpha$ почти ограничен. На конце $z = \beta$ интеграл (8) принимает вполне определенное конечное значение

$$\Phi(\beta) = \lim_{z\to\beta} \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha\beta} \nu(\tau) F_\alpha(\beta, \tau)\, d\tau. \tag{14}$$

Свойство Г-квазиавтоморфности интеграла (8) есть следствие такого же свойства ядра $K(z, \tau)$. Из соотношений (4) вытекают аналогичные соотношения

$$\Phi[\sigma_k(z)] = \Phi(z) + \Omega_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

но с постоянными слагаемыми

$$\Omega_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha\beta} \nu(\tau)\, d\tau \int\limits_{\alpha\tau} \varphi(\zeta)\, \eta_k(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha\beta} \varphi(\zeta)\, \eta_k(\zeta)\, d\zeta \int\limits_{\zeta\beta} \nu(\tau)\, d\tau. \tag{16}$$

В соотношениях (4) циклические слагаемые ядра $K(z, \tau)$

$$\eta_k(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\tau - \sigma_{jk}(z_0)} - \frac{1}{\tau - \sigma_j(z_0)}\right] = K[\sigma_k(z_0), \tau] \tag{17}$$

есть автоморфные формы измерения -2, обращающиеся в нуль во всех параболических точках группы [1]; они образуют векторное пространство измерения ρ, так что

$$\eta_k(\tau) = \sum_{q=1}^{\rho} M_{kq}\, \eta_q(\tau), \quad k > \rho. \tag{18}$$

Из формул (16) и (18) следует, что

$$\Omega_k = \sum_{q=1}^{\rho} M_{kq}\, \Omega_q, \quad k > \rho, \tag{19}$$

Значит, циклические постоянные $\{\Omega_k\}$ интеграла (8) образуют ρ-мерное векторное пространство с базисом $\Omega_1, \ldots, \Omega_\rho$.

Замечание 1. В условиях теоремы 1 интеграл (8) представим в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha\beta} \left[\varphi(\zeta) \int\limits_{\zeta\beta} \nu(\tau)\, d\tau\right] K(z, \zeta)\, d\zeta. \tag{20}$$

В самом деле, из формул (11)

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t) \int\limits_{t\beta} \nu(\tau)\, d\tau, \tag{21}$$

и интегральное представление (20) получается как единственное решение задачи о скачке (21) в классе Г-квазиавтоморфных функций с циклическими слагаемыми (16), исчезающих в точке $z = z_0$, ограниченных на конце $z = \beta$ и почти ограниченных на конце $z = \alpha$.

Представление (20) можно получить другим путем, вставив под знак интеграла (8) значение интеграла (7) и переставив в полученном повторном интеграле порядок интегрирования по формуле Дирихле.

Замечание 2. В интеграле (8) вместо обобщенного Г-квазиавтоморфного логарифмического ядра (7) можно брать такой же интеграл с переменным нижним пределом

$$F_\beta(z, \tau) = \int_{\tau\beta} \varphi(\zeta) K(z, \zeta)\, d\zeta. \tag{22}$$

Для вычисления предельных значений интеграла (8) с ядром (22) вместо формул (11) будем иметь

$$\Phi^\pm(t) = \pm\frac{1}{2}\varphi(t) \int_{\alpha t} \nu(\tau)\, d\tau + \Phi(t); \tag{23}$$

сам интеграл $\Phi(z)$ в этом случае ограничен в точке $z=\alpha$, а в точке $z=\beta$ может иметь логарифмическую особенность; в формулах (16) при вычислении циклических постоянных Ω_k дуги $\alpha\tau$ и $\tau\beta$ надо поменять местами.

2°. Пусть теперь L_0 есть кусочно-гладкая линия, состоящая из m простых гладких разомкнутых дуг $\alpha_j\beta_j$, не имеющих общих точек, за исключением, может быть, концов и расположенных внутри фундаментальной области R_0. Возьмем на первых r дугах $\alpha_j\beta_j$ интегралы вида (7) с переменным верхним пределом

$$F_j(z, \tau) = \int_{\alpha_j\tau} \varphi(\zeta) K(z, \zeta)\, d\zeta, \quad j = \overline{1, r}, \tag{24}$$

а на остальных—интегралы вида (22) с переменным нижним пределом

$$F_j(z, \tau) = \int_{\tau\beta_j} \varphi(\zeta) K(z, \zeta)\, d\zeta, \quad j = \overline{r+1, m}, \tag{25}$$

считая, что всюду не равная нулю на L_0 функция $\varphi(\zeta) = \varphi_j(\zeta)$, $\zeta \in \alpha_j\beta_j$ принадлежит классу H_0, если дуги $\alpha_j\beta_j$ имеют общие концы, и классу H на прерывистой гладкой линии L_0. В предположении, что $\nu(t) \in H^*$ на L_0, под Г-квазиавтоморфным интегралом с обобщенным логарифмическим ядром будем понимать сумму интегралов

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_j\beta_j} \nu(\tau) F_j(z, \tau)\, d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \nu(\tau) F(z, \tau)\, d\tau, \tag{26}$$

где

$$F(z, \tau) = F_j(z, \tau), \quad \tau \in \alpha_j\beta_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

В точках дуги $\alpha_k\beta_k$ только k-тое слагаемое в сумме (26) имеет разрыв, остальные слагаемые в точках этой дуги непрерывны и аналитичны. Поэтому для предельных значений интеграла (26) на дуге $\alpha_k\beta_k$ на основании теоремы 2 получаем аналоги формул Сохоцкого в виде

$$2\pi i\Phi^{\pm}(t) = \pm i\pi\varphi(t) \int_{t\beta_k} \nu(\tau)\,d\tau + \int_{L_0} \nu(\tau) F(t, \tau)\,d\tau, \quad k = \overline{1, r}, \tag{27}$$

$$2\pi i\Phi^{\pm}(t) = \pm i\pi\varphi(t) \int_{\alpha_k t} \nu(\tau)\,d\tau + \int_{L_0} \nu(\tau) F(t, \tau)\,d\tau, \quad k = \overline{r+1, m}. \tag{28}$$

Вместо (27) и (28) можно брать равносильные формулы

$$\Phi^{+}(t) + \Phi^{-}(t) = \frac{1}{i\pi} \int_{L_0} \nu(\tau) F(t, \tau)\,d\tau, \quad t \in L_0, \tag{29}$$

$$\Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t) = \varphi(t) \int_{\alpha_k\beta_k} \nu(\tau)\,\delta(\tau, t\beta_k)\,d\tau, \quad t \in \alpha_k\beta_k, \quad k = \overline{1, r}, \tag{30}$$

$$\Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t) = \varphi(t) \int_{\alpha_k\beta_k} \nu(\tau)\,\delta(\tau, \alpha_k t)\,d\tau, \quad t \in \alpha_k\beta_k, \quad k = \overline{r+1, m}. \tag{31}$$

Если на L_0 ввести функцию

$$\Delta(t, \tau) = \begin{cases} \delta(\tau, t\beta_k), & t, \tau \in \alpha_k\beta_k, \quad k = \overline{1, r}, \\ \delta(\tau, \alpha_k t), & t, \tau \in \alpha_k\beta_k, \quad k = \overline{r+1, m}, \\ 0, & t \in \alpha_k\beta_k, \quad \tau \in \alpha_j\beta_j, \quad k \neq j, \end{cases} \tag{32}$$

то вместо формул (29) — (31) можно записать

$$\Phi^{+}(t) + \Phi^{-}(t) = \frac{1}{i\pi} \int_{L_0} \nu(\tau) F(t, \tau)\,d\tau, \tag{33}$$

$$\Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t) = \varphi(t) \int_{L_0} \nu(\tau)\,\Delta(t, \tau)\,d\tau. \tag{34}$$

Эти формулы справедливы во всех обыкновенных точках линии L_0.

Интеграл (26) ограничен в точках $\beta_1, \ldots, \beta_r$ и $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_m$ и, самое большее, почти ограничен (логарифмически) в остальных узлах. Во всех точках множества $R \setminus L_0$ этот интеграл также ограничен. Квазиавтоморфность интеграла (26) характеризуется тем же соотношением (15) с циклическими постоянными

$$\Omega_k = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_j\beta_j} \varphi(\zeta)\,\eta_k(\zeta)\,d\zeta \int_{\zeta\beta_j} \nu(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \sum_{j=r+1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_j\beta_j} \varphi(\zeta)\,\eta_k(\zeta)\,d\zeta \int_{\alpha_j\zeta} \nu(\tau)\,d\tau, \tag{35}$$

обладающими свойством (19).

3°. В дальнейшем надо знать, при каких условиях заданная квазиавтоморфная кусочно-голоморфная функция с линией скачков $L_0 = \bigcup\limits_{j=1}^{m} \alpha_j\beta_j$ представима интегралом вида (26). Справедлива

Теорема 3. *Для того чтобы ограниченная в* $R \setminus L_0$ *Г-квазиавтоморфная кусочно-голоморфная функция* $\Phi(z)$, $\Phi(z_0) = 0$, *с линией скачков* $L_0 \subset R_0$ *и циклическими постоянными* $\Omega_1, \ldots \Omega_\rho$ *была представима в виде интеграла* (26) *с логарифмическим ядром и плотностью* $\nu(t)$ *из класса* $H^*(c_1, \ldots, c_n)$, *необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$\psi(t) = \frac{\Phi^+(t) - \Phi^-(t)}{\varphi(t)} \tag{36}$$

1) *была непрерывна на* L_0 *и обращалась в нуль в точках* $\beta_1, \ldots, \beta_r$ *и* $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_m$;

2) *была дифференцируема во всех обыкновенных точках линии* L_0;

3) *ее производная* $\psi'(t)$ *принадлежала классу* $H^*(c_1, \ldots, c_n)$;

4) *чтобы циклические слагаемые* Ω_k *выражались через скачок по формулам*

$$\Omega_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} [\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)]\,\eta_k(\tau)\,d\tau. \tag{37}$$

При выполнении этих условий плотностью интегрального представления (26) *будет функция*

$$\nu(t) = \mp\,\psi'(t),\quad t \in \alpha_k\beta_k,\quad k = \overline{1, m}, \tag{38}$$

где верхний знак соответствует первым r *дугам.*

Доказательство. Если Г-квазиавтоморфная кусочно-голоморфная функция $\Phi(z)$ представима в виде интеграла (26) с плотностью из класса H^*, то в силу формул (34), (35) ее циклические слагаемые действительно имеют значения (37), а функция

$$\psi(t) = \frac{\Phi^+(t) - \Phi^-(t)}{\varphi(t)} = \int_{L_0} \nu(\tau)\,\Delta(t, \tau)\,d\tau,$$

как интеграл с переменным пределом от интегрируемой функции на каждой дуге $\alpha_k\beta_k$, непрерывна во всех обыкновенных точках линии L_0, обращается в нуль на концах $\beta_1, \ldots, \beta_r$ и $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_m$, дифференцируема и во всех обыкновенных точках линии L_0 производная ее $\psi'(t) = \mp \nu(t)$.

Обратно, пусть для функции $\Phi(z)$ выполнены все условия теоремы. Построим интеграл с логарифмическим ядром вида (26), взяв в качестве плотности функцию (38)

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \nu(\tau)\,F(z, \tau)\,d\tau. \tag{39}$$

Разность предельных значений такого интеграла в силу (34) равна

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = \varphi(t) \int_{L_0} (\mp \psi'(\tau))\,\Delta(t, \tau)\,d\tau = \varphi(t)\,\psi(t).$$

С другой стороны, из (36)

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t)\,\psi(t).$$

Значит, обе функции $\Phi(z)$ и $\Phi_1(z)$ имеют одинаковые скачки на L_0 и в силу формул (35) и (37) одинаковые циклические слагаемые, так что их разность $\Phi(z) - \Phi_1(z) \equiv 0$ как простая Г-автоморфная функция, не имеющая особенностей на фундаментальном множестве R и обращающаяся в нуль в точке z_0. Теорема доказана.

4°. Если под знаком интеграла (26) ядро $F(z, \tau)$ заменить ядром

$$\Psi(z, \tau) = \Psi_j(z, \tau) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\alpha_j \tau} \varphi(\zeta)\,A(z, \zeta)\,d\zeta, & \tau \in \alpha_j\beta_j, \ j = \overline{1, r}, \\ \displaystyle\int_{\tau \beta_j} \varphi(\zeta)\,A(z, \zeta)\,d\zeta, & \tau \in \alpha_j\beta_j, \ j = \overline{r+1, m}, \end{cases} \tag{40}$$

где $A(z, \tau)$ есть Г-автоморфный аналог ядра Коши, имеющий вид (5), то полученная таким образом функция

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_j\beta_j} \nu(\tau)\,\Psi_j(z, \tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \nu(\tau)\,\Psi(z, \tau)\,d\tau \tag{41}$$

будет Г-автоморфной кусочно-мероморфной функцией с линией скачков L_0 и с простыми полюсами $a_1, \dots, a_\rho$ из области $R_0 \setminus L_0$. Интегралы (40) сходятся равномерно относительно z в любой ограниченной области $D \subset R \setminus L_0$, не содержащей точек $a_1, \dots, a_\rho$. Поэтому функция (41) непрерывно продолжима на все обыкновенные точки линии L_0 и для вычисления ее предельных значений остаются справедливыми формулы (27), (28) или, что все равно, формулы (33), (34), если в них заменить $F(t, \tau)$ на $\Psi(t, \tau)$.

Вычислим вычет функции (41) в точке a_k. Представив $A(z, \tau)$ в виде

$$A(z, \tau) = K(z, \tau) - \omega_1(\tau) K(z, a_1) - \dots - \omega_\rho(\tau) K(z, a_\rho), \tag{42}$$

видим, что функции $\omega_1(\tau), \dots, \omega_\rho(\tau)$ связаны с $\eta_1(\tau), \dots, \eta_\rho(\tau)$ системой линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{\rho} \eta_k(a_j)\, \omega_j(\tau) = \eta_k(\tau), \quad k = \overline{1, \rho}, \tag{43}$$

с определителем $\Delta = \det \| \eta_k(a_j) \| \neq 0$. Значит, функции $\omega_1(\tau), \dots, \omega_\rho(\tau)$ также составляют наряду с $\eta_1(\tau), \dots, \eta_\rho(\tau)$ базис множества $\{\eta_k(\tau)\}$. Из представления (42) следует, что

$$\operatorname*{res}_{z=a_k} A(z, \tau) = \omega_k(\tau). \tag{44}$$

Поэтому, опираясь на свойство равномерной сходимости интегралов (40), из (41) получим

$$V_k = \operatorname*{res}_{a_k} \Phi'(z) = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_j \beta_j} \nu(\tau)\, d\tau \int_{\alpha_j \tau} \varphi(\zeta)\, \omega_k(\zeta)\, d\zeta +$$

$$+ \sum_{j=r+1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_j \beta_j} \nu(\tau)\, d\tau \int_{\tau \beta_j} \varphi(\zeta)\, \omega_k(\zeta)\, d\zeta. \tag{45}$$

Если в каждом из входящих сюда интегралов поменять порядок интегрирования по формуле Дирихле и принять во внимание формулы (30) и (31), то формулу (45) можно переписать в виде

$$V_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} [\Phi^+(\zeta) - \Phi^-(\zeta)[\, \omega_k(\zeta)\, d\zeta, \quad k = \overline{1, \rho}. \tag{46}$$

Из формул (45) и (46) видно, что функции $\omega_1(\tau), \dots, \omega_\rho(\tau)$ при вычислении вычетов интеграла (41) в точках $a_1, \dots, a_\rho$

играют точно такую роль, как функции $\eta_1(\tau), \ldots, \eta_\rho(\tau)$ при вычислении циклических слагаемых интеграла (26). Благодаря этой аналогии тем же путем, что и теорема 3, может быть доказана

Теорема 4. *Для того чтобы заданная Γ-автоморфная функция $\Phi(z)$, $\Phi(z_0)=0$, с линией скачков L_0 и голоморфная в $R\setminus L_0$ всюду, за исключением полюсов $a_1, \ldots, a_\rho$ ядра $A(z, \tau)$, в которых она имеет простые полюсы с вычетами $V_1, \ldots, V_\rho$, была представима в виде интеграла* (41) *с логарифмическим ядром* (40) *и плотностью $\nu(t)$ из класса $H^*(c_1, \ldots, c_n)$, необходимо и достаточно, чтобы $\Phi(z)$ удовлетворяла условиям* 1) — 3) *теоремы* 3 *и чтобы ее вычеты V_k выражались через разность предельных значений $\Phi^+(t) - \Phi^-(t)$ по формулам* (46).

Следствием теорем 3 и 4 является

Теорема 5. *Γ-автоморфная кусочно-голоморфная функция $\Phi(z)$, $\Phi(z_0)=0$, с линией скачков $L_0 \subset R_0$, ограниченная в $R\setminus L_0$, тогда и только тогда представима в виде интеграла* (26) *или интеграла* (41) *с логарифмическим ядром и плотностью $\nu(t)$ из класса $H^*(c_1, \ldots, c_n)$, если она удовлетворяет условиям* 1) — 3) *теоремы* 3 *и если выполнены условия*

$$\int_{L_0} [\Phi^+(t) - \Phi^-(t)]\, \eta_k(t)\, dt = 0, \quad k = \overline{1, \rho}, \tag{47}$$

или равносильные им условия

$$\int_{L_0} [\Phi^+(t) - \Phi^-(t)]\, \omega_k(t)\, dt = 0, \quad k = \overline{1, \rho}. \tag{48}$$

§ 2. Дифференцирование некоторых особых интегралов

В дальнейшем нам придется при различных предположениях относительно плотности дифференцировать по параметру $t \in L_0$ автоморфные и квазиавтоморфные аналоги интеграла типа Коши, а также исследованные в § 1 интегралы с логарифмическими ядрами. Полученные здесь формулы будут обобщением известных формул дифференцирования обычного интеграла типа Коши [2, 4].

1°. При дифференцировании интеграла

$$\int_{\alpha\beta} \psi(\tau) K(t, \tau)\, d\tau = \int_{\alpha\beta} \frac{\psi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) B(t, \tau)\, d\tau$$

при условии $\psi'(\tau) \in H^*$ используем известную формулу дифференцирования первого интеграла и возможность дифференцирования по параметру под знаком второго. Получаем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\alpha\beta}\psi(\tau)K(t,\ \tau)\,d\tau=\frac{\psi(\beta)}{t-\beta}-\frac{\psi(\alpha)}{t-\alpha}+\int\limits_{\alpha\beta}\frac{\psi'(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\int\limits_{\alpha\beta}\psi(\tau)\,B'_t(t,\tau)\,d\tau. \tag{49}$$

На основании первого представления (3)

$$B'_t(t,\ \tau)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sigma'_j(\tau)}{[\sigma_j(\tau)-t]^2}$$

и в силу равномерной сходимости этого ряда всюду в области R_0, в том числе на дуге $\alpha\beta$, имеем

$$\int\limits_{\alpha\beta}\psi(\tau)\,B'_t(t,\ \tau)\,d\tau=\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{\alpha\beta}\psi(\tau)\,\frac{\sigma'_j(\tau)\,d\tau}{[\sigma_j(\tau)-t]^2}=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\left\{-\frac{\psi(\tau)}{\sigma_j(\tau)-t}\Bigg|_{\tau=\alpha}^{\tau=\beta}+\int\limits_{\alpha\beta}\frac{\psi'(\tau)\,d\tau}{\sigma_j(\tau)-t}\right\}=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{\psi(\beta)}{t-\sigma_j(\beta)}-\frac{\psi(\alpha)}{t-\sigma_j(\alpha)}-\int\limits_{\alpha\beta}\frac{\psi'(\tau)\,d\tau}{t-\sigma_j(\tau)}\right\}=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\psi(\beta)\left[\frac{1}{t-\sigma_j(\beta)}-\frac{1}{t-\sigma_j(z_0)}\right]-\psi(\alpha)\left[\frac{1}{t-\sigma_j(\alpha)}-\frac{1}{t-\sigma_j(z_0)}\right]-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{\alpha\beta}\psi'(\tau)\left[\frac{1}{t-\sigma_j(\tau)}-\frac{1}{t-\sigma_j(z_0)}\right]d\tau\right\}.$$

Подставив полученное выражение в (49), убеждаемся, что справедлива

Теорема 6. *Если на гладкой разомкнутой дуге* $\alpha\beta$ *имеем* $\psi(t)\in H$, $\psi'(t)\in H^*(\alpha,\ c_1,\ \dots,\ c_n,\ \beta)$, *то во всех обыкновенных точках этой дуги имеет место формула*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\alpha\beta}\psi(\tau)K(t,\ \tau)\,d\tau=\psi(\beta)K(\beta,\ t)-\psi(\alpha)K(\alpha,\ t)-$$

$$-\int\limits_{\alpha\beta}\psi'(\tau)K(\tau,\ t)\,d\tau. \tag{50}$$

Замечание 3. Нетрудно убедиться, что при условиях $\psi(t)\in H_0(c_1,\ \dots,\ c_n)$, $\psi'(t)\in H^*(\alpha,\ c_1,\ \dots,\ c_n,\ \beta)$ вместо формулы (50) имеет место формула

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha\beta}\psi(\tau)K(t,\tau)\,d\tau=\psi(\beta)K(\beta,t)-\psi(\alpha)K(\alpha,t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\Delta_j K(c_j,t)-\int_{\alpha\beta}\psi'(\tau)K(\tau,t)\,d\tau, \tag{51}$$

$$\Delta_j=\psi(c_j-0)-\psi(c_j+0),$$

а при условиях $\psi(t,\tau)\in H_0$, $\psi'_t(t,\tau)\in H^*$, $\psi'_\tau(t,\tau)\in H^*$

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha\beta}\psi(t,\tau)K(t,\tau)\,d\tau=\psi(t,\beta)K(\beta,t)-\psi(t,\alpha)K(\alpha,t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\Delta_j(t)K(c_j,t)-\int_{\alpha\beta}\{\psi'_t(t,\tau)+\psi'_\tau(t,\tau)\}K(\tau,t)\,d\tau. \tag{52}$$

2°. При дифференцировании интеграла с логарифмическим ядром вида (9) удобнее всего предварительно выразить его через главное значение интеграла с ядром $K(t,\tau)$. Для этого на основании (10) запишем этот интеграл в таком виде:

$$\int_{\alpha\beta}\nu(\tau)\,d\tau\int_{\alpha\tau}\varphi(\zeta)K(t,\zeta)\,d\zeta=\int_{\alpha\beta}\nu(\tau)\,d\tau\int_{\alpha\tau}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-t}+$$

$$+\int_{\alpha\beta}\nu(\tau)\,d\tau\int_{\alpha\tau}\varphi(\zeta)B(t,\zeta)\,d\zeta \tag{53}$$

и в каждом из этих повторных интегралов поменяем порядок интегрирования. Ко второму интегралу, очевидно, применима формула перестановки Дирихле. Покажем, что она применима и к первому интегралу.

В первом интеграле значение внутреннего определяется по любой из формул

$$\int_{\alpha\tau}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta=\int_{\alpha\tau}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(t)}{\zeta-t}\,d\zeta\mp i\pi\varphi(t)\delta(t,\alpha\tau)+\varphi(t)\ln\frac{\tau-t^{\pm}}{\alpha-t^{\pm}}, \tag{54}$$

где $\delta(t,\alpha\tau)=\{1,\ t\in\alpha\tau;\ 0,\ t\notin\alpha\tau\}$. Поэтому

$$\int_{\alpha\beta}\nu(\tau)\,d\tau\int_{\alpha\tau}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta=\int_{\alpha\beta}\nu(\tau)\,d\tau\int_{\alpha\tau}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(t)}{\zeta-t}\,d\zeta\mp$$

$$\mp i\pi\varphi(t)\int_{\alpha\beta}\delta(t,\alpha\tau)\nu(\tau)\,d\tau+\varphi(t)\int_{\alpha\beta}\nu(\tau)\ln\frac{\tau-t^{\pm}}{\alpha-t^{\pm}}\,d\tau=$$

$$= \int_{\alpha\beta} \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(t)}{\zeta-t}\, d\zeta \int_{\zeta\beta} \nu(\tau)\, d\tau \mp$$

$$\mp i\pi\varphi(t) \int_{t\beta} \nu(\tau)\, d\tau + \varphi(t) \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) \ln \frac{\tau-t^{\pm}}{\alpha-t^{\pm}}\, d\tau.$$

Но на основании известной формулы интегрирования по частям [5, с. 32—33; 6, с. 33—36], примененной к главному значению интеграла типа Коши с плотностью $\int_{\zeta\beta} \nu(\tau)\, d\tau$, при нашем понимании $\ln(\tau-t)$ имеем

$$\int_{\alpha\beta} \frac{\int_{\zeta\beta} \nu(\tau)\, d\tau}{\zeta-t}\, d\zeta = \pm i\pi \int_{t\beta} \nu(\tau)\, d\tau + \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) \ln \frac{\tau-t^{\pm}}{\alpha-t^{\pm}}\, d\tau. \tag{55}$$

Значит, к первому интегралу в правой части равенства (53) формула перестановки Дирихле действительно применима

$$\int_{\alpha\beta} \nu(\tau)\, d\tau \int_{\alpha\tau} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}\, d\zeta = \int_{\alpha\beta} \frac{\varphi(\zeta) \int_{\zeta\beta} \nu(\tau)\, d\tau}{\zeta-t}\, d\zeta, \tag{56}$$

и нами установлена

Теорема 7. *Если на гладкой дуге* $\varphi(\zeta) \in H$ *и* $\nu(\tau) \in H^{*}(\alpha, c_1, \ldots, c_n, \beta)$, *то во всех точках дуги, отличных от концов, имеет место формула перестановки*

$$\int_{\alpha\beta} \nu(\tau)\, d\tau \int_{\alpha\tau} \varphi(\zeta) K(t, \zeta)\, d\zeta = \int_{\alpha\beta} \varphi(\zeta) K(t, \zeta)\, d\zeta \int_{\zeta\beta} \nu(\tau)\, d\tau. \tag{57}$$

Формулы (57) и (56) можно рассматривать и как формулы интегрирования по частям интегралов типа Коши в их правых частях. Подтверждением служит известная формула (55), получающаяся из (57) как частный случай, когда группа Г является тождественной и $\varphi(\zeta) \equiv 1$; при этом спуске не надо только забывать, что в силу формулы (54) в данном случае

$$\int_{\alpha\tau} \frac{d\zeta}{\zeta-t} = \mp i\pi\delta(t, \alpha\tau) + \varphi(t) \ln \frac{\tau-t^{\pm}}{\alpha-t^{\pm}}. \tag{58}$$

На основании равенства (57) производную от интеграла (53) с Г-квазиавтоморфным логарифмическим ядром можно вычислить с помощью формулы (50), так как при $\nu(t) \in H^{*}(\alpha, c_1, \ldots, c_n, \beta)$ плотность $\varphi(t) \int_{t\beta} \nu(\tau)\, d\tau$ интеграла в правой части формулы (57) принадлежит классу H. Предполагая $\varphi'(t) \in H^{*}(\alpha, c_1, \ldots, c_n, \beta)$, после применения формулы (50) и повторного применения формулы (57) получим

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha\beta} \nu(\tau) F_\alpha(t, \tau)\, d\tau = \frac{d}{dt}\int_{\alpha\beta} \varphi(\zeta) K(t, \zeta)\, d\zeta \int_{\zeta\beta} \nu(\tau)\, d\tau =$$

$$= -\varphi(\alpha) K(\alpha, t) \int_{\alpha\beta} \nu(\tau)\, d\tau - \int_{\alpha\beta} \left[\varphi(\zeta) \int_{\zeta\beta} \nu(\tau)\, d\tau\right]' K(\zeta, t)\, d\zeta =$$

$$= -\varphi(\alpha) K(\alpha, t) \int_{\alpha\beta} \nu(\tau)\, d\tau + \int_{\alpha\beta} \varphi(\zeta) \nu(\zeta) K(\zeta, t)\, d\zeta -$$

$$- \int_{\alpha\beta} \varphi'(\zeta) K(\zeta, t)\, d\zeta \int_{\zeta\beta} \nu(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{\alpha\beta} \nu(\tau)\, d\tau \left\{ -\varphi(\alpha) K(\alpha, t) + \varphi(\tau) K(\tau, t) - \right.$$

$$\left. - \int_{\alpha\tau} \varphi'(\zeta) K(\zeta, t)\, d\zeta \right\} = \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) \frac{\partial}{\partial t} F_\alpha(t, \tau)\, d\tau.$$

Этим доказана

Теорема 8. *На гладкой дуге* $\alpha\beta \subset R_0$ *при условиях*

$$\nu(t) \in H^*(\alpha, c_1, \dots, c_n, \beta), \quad \varphi'(t) \in H^*(\alpha, c_1, \dots, c_n, \beta)$$

во всех точках $t \in \alpha\beta$, *отличных от концов, справедлива формула*

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha\beta} \nu(\tau) F_\alpha(t, \tau)\, d\tau = \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) \frac{\partial}{\partial t} F_\alpha(t, \tau)\, d\tau. \tag{59}$$

3°. Формулы дифференцирования автоморфного аналога интеграла типа Коши с ядром $A(t, \tau)$ более громоздки. Чтобы получить аналог формулы (50), на основании представления (42) записываем

$$\int_{\alpha\beta} \psi(\tau) A(t, \tau)\, d\tau = \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) K(t, \tau)\, d\tau - \sum_{k=1}^{\rho} K(t, a_k) \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) \omega_k(\tau)\, d\tau$$

и дифференцированием с применением формулы (50) получаем

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha\beta} \psi(\tau) A(t, \tau)\, d\tau = \psi(\beta) K(\beta, t) - \psi(\alpha) K(\alpha, t) -$$

$$- \int_{\alpha\beta} \psi'(\tau) K(\tau, t)\, d\tau - \sum_{k=1}^{\rho} \frac{d}{dt} K(t, a_k) \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) \omega_k(\tau)\, d\tau.$$

В интеграле с плотностью $\psi'(\tau)$ производим элементарные преобразования

$$\int_{\alpha\beta} \psi'(\tau) K(\tau, t)\, d\tau = \int_{\alpha\beta} \psi'(\tau) A(\tau, t)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\rho} \omega_k(t) \int_{\alpha\beta} \psi'(\tau) K(\tau, a_k)\, d\tau =$$

$$= \int_{\alpha\beta} \psi'(\tau) A(\tau, t)\, d\tau + \sum_{k=1}^{\rho} \omega_k(t) \psi(\beta) K(\beta, a_k) -$$

$$- \sum_{k=1}^{\rho} \omega_k(t) \psi(\alpha) K(\alpha, a_k) - \sum_{k=1}^{\rho} \omega_k(t) \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) \frac{d}{d\tau} K(\tau, a_k)\, d\tau$$

и убеждаемся, что имеет место

Теорема 9. *Если на гладкой разомкнутой дуге* $\alpha\beta \subset R_0$ *имеем* $\psi(t) \in H$ *и* $\psi'(t) \in H^*(\alpha, c_1, \ldots, c_n, \beta)$, *то при всех* $t \in \alpha\beta$, *отличных от концов, имеет место формула*

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) A(t, \tau)\, d\tau = \psi(\beta) A(\beta, t) -$$

$$- \psi(\alpha) A(\alpha, t) - \int_{\alpha\beta} \psi'(\tau) A(\tau, t)\, d\tau +$$

$$+ \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) \left\{ \sum_{k=1}^{\rho} \left[\omega_k(t) \frac{d}{d\tau} K(\tau, a_k) - \omega_k(\tau) \frac{d}{dt} K(t, a_k) \right] \right\} d\tau. \qquad (60)$$

В частном случае, когда $\rho = 0$, формула (60) упрощается

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) A(t, \tau)\, d\tau = \psi(\beta) A(\beta, t) -$$

$$- \psi(\alpha) A(\alpha, t) - \int_{\alpha\beta} \psi'(\tau) A(\tau, t)\, d\tau. \qquad (61)$$

Род $\rho = 0$ имеют фундаментальные области всех конечных групп и всех бесконечных элементарных, за исключением двоякопериодической, для которой $\rho = 1$. Все конечные группы, в том числе состоящие только из целых преобразований (все $\gamma_k = 0$), можно отнести к рассматриваемому здесь 1 классу, так как само определение этого класса (условие (2)) допускает наличие в группе конечного числа целых преобразований. Убедиться в справедливости формулы (61) в случае любой конечной группы можно и непосредственно, опираясь на функциональную структуру ядра $A(t, \tau)$. Известно [6, с. 181], что для конечных групп

$$A(z,\ \tau)=\sum_{j=0}^{m}\left[\frac{1}{\sigma_j(\tau)-z}-\frac{1}{\sigma_j(\tau)-z_0}\right]\sigma_j'(\tau)=$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\left[\frac{1}{\tau-\sigma_j(z)}-\frac{1}{\tau-\sigma_j(z_0)}\right],\quad z_0\in R_0\setminus\alpha\beta. \tag{62}$$

Общий член каждой из этих сумм совпадает с общим членом соответствующего ряда (3), определяющего ядро $K(z,\ \tau)$. Значит, все вычисления, проделанные при выводе формулы (50), останутся без изменения в случае автоморфного ядра (62) и приведут к формуле (61).

Бесконечные элементарные группы, состоящие целиком из целых преобразований или содержащие подгруппу из таких преобразований, к 1 классу не относятся, но для них выражение ядра $A(z,\ \tau)$ через преобразования группы известно и справедливость формулы (61) проверяется по той же схеме, как в случае конечных групп. Иногда вычисления при проверке упрощаются за счет специальных свойств $A(z,\ \tau)$.

Возьмем в качестве примера однопериодическую с периодом 2π группу. Для нее [6, с. 200] ядро

$$A(z,\ \tau)=\frac{1}{\tau-z}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\left[\frac{1}{\tau-z+2\pi k}-\frac{1}{2\pi k}\right]=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\tau-z}{2}$$

в силу свойства нечетности котангенса обладает свойством $A(z,\ \tau)=-A(\tau,\ z)$ и, следовательно, $A_t'(t,\ \tau)=-A_\tau'(\tau,\ t)$. Поэтому

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_{\alpha\beta}\psi(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\,d\tau=\frac{d}{dt}\int_{\alpha\beta}\frac{\psi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+$$

$$+\int_{\alpha\beta}\psi(\tau)\left[A(t,\ \tau)-\frac{1}{\tau-t}\right]_t' d\tau=\frac{\psi(\alpha)}{\alpha-t}-\frac{\psi(\beta)}{\beta-t}+$$

$$+\int_{\alpha\beta}\frac{\psi'(\tau)}{\tau-t}\,d\tau-\int_{\alpha\beta}\psi(\tau)\left[A(\tau,\ t)-\frac{1}{\tau-t}\right]_\tau' d\tau.$$

После интегрирования по частям в последнем интеграле получим

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha\beta}\psi(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\,d\tau=\psi(\beta)\operatorname{ctg}\frac{t-\beta}{2}-$$

$$-\psi(\alpha)\operatorname{ctg}\frac{t-\alpha}{2}+\int_{\alpha\beta}\psi'(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\,d\tau. \tag{63}$$

Отметим кстати, что в случае двоякопериодической группы с основными периодами h_1 и h_2 квазипериодическим ядром является

$$K(z, \tau) = \zeta(\tau - z), \ \zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{(h)}{}' \left\{ \frac{1}{z-h} + \frac{1}{h} + \frac{z}{h^2} \right\}, \tag{64}$$

$$h = m_1 h_1 + m_2 h_2.$$

Циклические слагаемые этого ядра постоянны и обычно выражаются через две из них, соответствующие порождающим преобразованиям группы $z + h_1$ и $z + h_2$ в виде линейной комбинации с целочисленными коэффициентами, так что

$$\zeta(z + h) = \zeta(z) + \eta, \ \eta = m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2.$$

Но среди постоянных η_1, η_2 одна через другую может быть выражена на основании соотношения Лежандра $h_1\eta_2 - h_2\eta_1 = 2\pi i$. Поэтому здесь $\rho = 1$. Из нечетности функции $\zeta(z)$ следует, что для ядра (64) имеет место соотношение $K(z, \tau) = -K(\tau, z)$ и, как следствие, соотношение $K'_t(t, \tau) = -K'_\tau(\tau, t)$. Поэтому формула

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) \zeta(\tau - t)\, d\tau = \psi(\beta) \zeta(t - \beta) - \psi(\alpha) \zeta(t - \alpha) + $$

$$+ \int_{\alpha\beta} \psi'(\tau) \zeta(\tau - t)\, d\tau, \tag{65}$$

являющаяся аналогом формулы (50), получается путем тех же вычислений, что и формула (63).

4°. Исследуем возможность дифференцирования квазиавтоморфного аналога интеграла типа Коши в более общем случае, когда плотность $\psi(\tau) \in$ классу H^* или H^*_ε, а в точках, отличных от отмеченных, дифференцируема.

Пусть $\psi(\tau) \in H^*(c_1, \ldots, c_n)$, при этом к числу отмеченных точек для простоты рассуждений отнесем и концы дуги $\alpha\beta$. В дальнейшем нам понадобится простая автоморфная функция $Q(z)$, для которой все точки $c_1, \ldots, c_n$ являются простыми нулями, а полюсы не лежат на дуге $\alpha\beta$. Такую функцию можно взять в виде

$$Q(z) = \exp \sum_{q=1}^{N} \int_{z_q}^{c_q} K(z, \tau)\, d\tau, \tag{66}$$

выбрав точки $z_q \in R \setminus \alpha\beta$ так, чтобы

$$\sum_{q=1}^{N} \int_{z_q}^{c_q} \eta_j(\tau)\, d\tau = 2\pi i p_j, \quad j = \overline{1, \rho}, \tag{67}$$

где p_j — любые целые числа. При $N \geqslant \rho$ такие точки $z_1, \dots, z_N$ всегда существуют и являются решением классической проблемы обращения Якоби. Поэтому при $n \geqslant \rho$ в равенствах (66) и (67) будем брать $N = n$, а при $n < \rho$ положим $N = \rho$. В последнем случае у функции $Q(z)$ простые нули, кроме точек $c_1, \dots c_n \in \alpha\beta$, будут еще в точках $c_{n+1}, \dots, c_\rho$; эти точки на $R_0 \setminus \alpha\beta$ можно взять произвольными и лишь после их выбора решать проблему обращения (67).

Рассмотрим произведение

$$Q(t) \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) K(t, \tau)\, d\tau = \int_{\alpha\beta} \psi_1(\tau) K_1(t, \tau)\, d\tau. \tag{68}$$

Здесь ядро

$$K_1(t, \tau) = \frac{Q(t)}{Q(\tau)} K(t, \tau)$$

по переменному τ есть Г-автоморфная форма измерения -2 с простыми полюсами $t, c_1, \dots, c_N$, которую всегда можно представить в виде

$$K_1(t, \tau) = K(t, \tau) + \sum_{q=1}^{N} \xi_q(t) K(c_q, \tau), \tag{69}$$

где $\xi_q(t)$ — вполне определенные непрерывно дифференцируемые на $\alpha\beta$ функции; в случае надобности их можно определить из условий $K_1(t, z_q) = 0$, $q = \overline{1, N}$. На основании разложения (69) равенство (68) можно записать в таком виде:

$$Q(t) \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) K(t, \tau)\, d\tau = \int_{\alpha\beta} \psi_1(\tau) K(t, \tau)\, d\tau + \sum_{q=1}^{N} \xi_q(t) \int_{\alpha\beta} \psi_1(\tau) K(c_q, \tau)\, d\tau.$$

Так как $\psi_1(\tau) = \psi(\tau) Q(\tau) \in H$ и $\psi_1(c_q) = 0$, то дифференцированием этого равенства по t в силу формулы (50) получим

$$Q(t) \frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) K(t, \tau)\, d\tau = -Q'(t) \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) K(t, \tau)\, d\tau - \int_{\alpha\beta} \psi_1'(\tau) K(\tau, t)\, d\tau + \sum_{q=1}^{N} \xi_q'(t) \int_{\alpha\beta} \psi_1(\tau) K(c_q, \tau)\, d\tau. \tag{70}$$

Затем из разложения (69) находим

$$\sum_{q=1}^{N} \xi'_q(t) K(c_q, \tau) = \frac{Q'(t)}{Q(\tau)} K(t, \tau) + \frac{Q(t) - Q(\tau)}{Q(\tau)} K'_t(t, \tau),$$

что позволяет записать равенство (70) в такой форме:

$$Q(t) \frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) K(t, \tau) d\tau = - \int_{\alpha\beta} [\psi(\tau) Q(\tau)]' K(\tau, t) d\tau +$$

$$+ \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) [Q(t) - Q(\tau)] K'_t(t, \tau) d\tau. \tag{71}$$

Нами доказана

Теорема 10. *Пусть на гладкой дуге* $\alpha\beta \in R_0$ *функция* $\psi(\tau)$ *принадлежит классу* H^* *или* H^*_ε *с отмеченными точками* $c_1, \ldots, c_n$, *к числу которых относятся и концы дуги* $\alpha\beta$, *и пусть к этому же классу* H^* *или* H^*_ε *принадлежит* $[\psi(\tau) Q(\tau)]'$, *где* $Q(z)$ *есть простая автоморфная функция вида* (66). *Тогда для всех точек* $t \in \alpha\beta$, *отличных от* $c_1, \ldots, c_n$, *имеет место формула дифференцирования* (71).

Формула (71) остается по форме той же самой и в случае конечных групп; надо помнить лишь, что в этом случае ядро $K(z, \tau) \equiv A(z, \tau)$ является автоморфным и определяется формулой (62), а функцию $Q(z)$ можно записать в виде

$$Q(z) = \prod_{q=1}^{n} [f(z) - f(c_q)], \tag{72}$$

где $f(z)$ — основной инвариант группы с единственным простым полюсом в точке z_0, через который ядро (62) выражается следующим образом [6, с. 184]:

$$A(z, \tau) = \frac{f'(\tau)}{f(\tau) - f(z)}. \tag{73}$$

Когда плотность интеграла в равенстве (68) зависит еще от параметра t, формула дифференцирования в условиях теоремы 10 несколько усложняется. В данном случае на основании разложения (69) имеем равенство

$$Q(t) \int_{\alpha\beta} \psi(t, \tau) K(t, \tau) d\tau = \int_{\alpha\beta} \psi_1(t, \tau) K(t, \tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{q=1}^{N} \xi_q(t) \int_{\alpha\beta} \psi_1(t, \tau) K(c_q, \tau) d\tau,$$

где $\psi_1(t, \tau) = Q(\tau) \psi(t, \tau)$. Из него дифференцированием получаем

$$Q(t)\frac{d}{dt}\int\limits_{\alpha\beta}\psi(t,\tau)K(t,\tau)\,d\tau+Q'(t)\int\limits_{\alpha\beta}\psi(t,\tau)K(t,\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{d}{dt}\int\limits_{\alpha\beta}\psi_1(t,\tau)K(t,\tau)\,d\tau+\int\limits_{\alpha\beta}\psi_1(t,\tau)\sum_{q=1}^{N}\xi_q'(t)K(c_q,\tau)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial t}\psi_1(t,\tau)\sum_{q=1}^{N}\xi_q(t)K(c_q,\tau)\,d\tau. \tag{74}$$

Так как $\psi_1(t,\tau)$ обращается в нуль при $\tau=c_q$, $q=\overline{1,n}$, то по формуле (52) находим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\alpha\beta}\psi_1(t,\tau)K(t,\tau)\,d\tau=-\int\limits_{\alpha\beta}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\psi_1(t,\tau)+\frac{\partial}{\partial\tau}\psi_1(t,\tau)\right\}K(\tau,t)\,d\tau.$$

На основании этой формулы и равенства (69) из соотношения (74) получим

$$Q(t)\frac{d}{dt}\int\limits_{\alpha\beta}\psi(t,\tau)K(t,\tau)\,d\tau=$$

$$=\int\limits_{\alpha\beta}[Q(t)-Q(\tau)]\frac{\partial}{\partial t}\{\psi(t,\tau)K(t,\tau)\}\,d\tau-$$

$$-\int\limits_{\alpha\beta}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\psi_1(t,\tau)+\frac{\partial}{\partial\tau}\psi_1(t,\tau)\right\}K(\tau,t)\,d\tau. \tag{75}$$

Значит справедлива

Теорема 11. *Если на гладкой разомкнутой дуге $\alpha\beta$ функция $\psi(t,\tau)$ по каждому из переменных принадлежит классу H^* или H_*^* с отмеченными точками $c_1,\ldots,c_n$, в число которых входят концы дуги $\alpha\beta$, и этим же классам принадлежат произведения $Q(t)\psi_t'(t,\tau)$ и $Q(\tau)\psi_\tau'(t,\tau)$, то при всех $t\in\alpha\beta$, отличных от точек $c_1,\ldots,c_n$, справедлива формула* (75).

§ 3. Интегральные уравнения с логарифмическими ядрами на кусочно-гладких линиях

1°. Пусть L_0 есть кусочно-гладкая линия, состоящая из m гладких разомкнутых дуг $\alpha_j\beta_j$, не имеющих общих точек, кроме, может быть, концов. Рассмотрим заданное на $L_0\subset R_0$ интегральное уравнение с Г-квазиавтоморфным ядром

$$C(t)\int\limits_{L_0}\nu(\tau)\Delta(t,\tau)\,d\tau+\frac{D(t)}{\pi i}\int\limits_{L_0}\nu(\tau)F(t,\tau)\,d\tau=f(t), \tag{76}$$

где характеристическая функция $\Delta(t,\tau)$ определяется равенствами (32), а ядро $F(z,\tau)$ формулами (24), (25) и соотношениями $F(z,\tau)=F_j(z,\tau)$, $\tau\in\alpha_j\beta_j$. Предположим, что коэффициенты уравнения $C(t)$, $D(t)$ и правая часть $f(t)$ удовлетворяют условию H_0 на L_0, допуская разрывы первого рода в узлах линии L_0 и в конечном числе ее обыкновенных точек. Решения уравнения (76) будем искать в классе $H^*(c_1,\ldots,c_n)$, относя к отмеченным точкам $c_1,\ldots,c_n$, вблизи которых у $\nu(t)$ допустимы интегрируемые особенности, все узлы линии L_0 и точки разрыва коэффициентов.

Введем вспомогательную функцию $\Phi(z)$ в виде интеграла (26) и, учитывая формулы (33) и (34), уравнение (76) запишем в виде

$$C(t)[\Phi^+(t)-\Phi^-(t)]+\varphi(t)D(t)[\Phi^+(t)+\Phi^-(t)]=\varphi(t)f(t). \tag{77}$$

При условии, что всюду на L_0

$$\Omega(t)=C^2(t)-\varphi^2(t)D^2(t)\neq 0, \tag{78}$$

соотношение (77) можно разрешить относительно $\Phi^+(t)$ и получить краевое условие задачи Римана в обычной форме

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in L_0\setminus\{c_1,\ldots,c_n\}, \tag{79}$$

$$G(t)=\frac{C(t)-\varphi(t)D(t)}{C(t)+\varphi(t)D(t)},\quad g(t)=\frac{\varphi(t)f(t)}{C(t)+\varphi(t)D(t)}. \tag{80}$$

Очевидно, $G(t)\in H_0(c_1,\ldots,c_n)$ и в силу предположения (78) $G(t)\neq 0$ всюду на L_0.

Формула (26) всякому решению $\nu(t)\in H^*$ уравнения (76) ставит в соответствие Г-квазиавтоморфное решение $\Phi(z)$ задачи Римана (79), ограниченное в $R\setminus L_0$, удовлетворяющее условию $\Phi(z_0)=0$ и ограниченное или почти ограниченное в узлах линии L_0. С другой стороны, если нам известно решение задачи Римана (77) с указанными свойствами и представимые в виде интеграла с Г-квазиавтоморфным ядром $F(z,\tau)$, то плотность этого представления в силу теоремы 3 равная

$$\nu(t)=\mp\frac{d}{dt}\,\frac{\Phi^+(t)-\Phi^-(t)}{\varphi(t)},\quad t\in\alpha_k\beta_k,\quad k=\overline{1,m}, \tag{81}$$

где верхний знак соответствует первым r дугам $\alpha_k\beta_k$, будет решением уравнения (76), что сразу следует из краевого условия (79) и формул (27) и (28), имеющих место для кусочно-голоморфных функций вида (26). Этим установлена

Теорема 12. *Интегральные уравнения* (76) *и краевая задача Римана* (79) *эквивалентны в том смысле, что между решениями уравнения из класса* H^* *и решениями задачи Римана, представимыми в виде интеграла с логарифмическим ядром и плотностью из класса* H^*, *существует взаимно однозначное соответствие. При этом плотность интегрального представления и решение интегрального уравнения совпадают.*

Значит, чтобы получить все решения интегрального уравнения (76) класса $H^*(c_1, \ldots, c_n)$, надо найти все решения краевой задачи (79), ограниченные в $R \setminus L_0$ и представимые в виде интеграла с Г-квазиавтоморфным логарифмическим ядром. Эти интегралы обращаются в нуль в точке z_0 и ограничены или почти ограничены в узлах линии интегрирования. Поэтому надо построить сначала общее решение задачи (79) с постоянными циклическими слагаемыми Ω_k, исчезающее в точке z_0 и принадлежащее самому узкому классу h_q по Н. И. Мусхелишвили, так как при определении классов h_q требования ограниченности и почти ограниченности равносильны [7, с. 327]. Затем из этого общего решения нужно выделить те решения, которые удовлетворяют условиям теоремы 3. Каждому такому решению задачи (79) по формуле (81) соответствует решение уравнения (76) класса $H^*(c_1, \ldots, c_n)$.

2°. Циклические слагаемые Ω_k искомой функции $\Phi(z)$, как следует из ее интегрального представления (26), имеют вид (35) или, что все равно, вид (37) и образуют ρ-мерное векторное пространство, в котором имеют место соотношения (19). Считая их пока известными, введем вспомогательную функцию

$$\Phi_1(z) = \Phi(z) - \sum_{j=1}^{\rho} V_j K(z, a_j), \tag{82}$$

где точки $a_1, \ldots, a_\rho \in R_0 \setminus L_0$ выберем так, чтобы $\det \| \eta_k(a_j) \| \neq 0$, что возможно [1]. На основании этого условия постоянные $V_1, \ldots, V_\rho$ в (82) можно подобрать так, чтобы

$$\sum_{j=1}^{\rho} V_j \eta_k(a_j) = \Omega_k, \quad k = \overline{1, \rho}. \tag{83}$$

Тогда функция $\Phi_1(z)$ будет Г-автоморфной, ограниченной всюду в $R \setminus L_0$, за исключением точек $a_1, \ldots, a_\rho$, где у нее простые полюсы с вычетами $V_1, \ldots, V_\rho$. Как видно из (82), при переходе через L_0 функция $\Phi_1(z)$ претерпевает разрыв с разностью предельных значений

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t). \tag{84}$$

Если в равенство (82) вместо $\Phi(z)$ подставить интеграл (26), под знаком которого ядро $K(z, \tau)$ выразить по формуле (42) через ядро $A(z, \tau)$ с простыми полюсами в выбранных нами точках $a_1, \dots, a_\rho$, то в силу равенств (83) суммы, содержащие функции $K(z, a_j)$, $j=\overline{1, \rho}$, взаимно уничтожатся и для автоморфной функции $\Phi_1(z)$ получится интегральное представление вида (41). Теперь подставим $\Phi(z)$ из (82) в краевое условие (79). Для функции $\Phi_1(z)$ получим краевое условие задачи Римана

$$\Phi_1^+(t) = G(t)\Phi_1^-(t) + g_1(t), \quad t \in L_0 \setminus \{c_1, \dots, c_n\}, \tag{85}$$

с тем же коэффициентом $G(t)$, но с новым свободным членом

$$g_1(t) = [G(t) - 1] \sum_{j=1}^{\rho} V_j K(t, a_j) + g(t). \tag{86}$$

Поведение интегралов (26) и (41) в узлах линии L_0 одинаково. Значит, справедлива

Теорема 13. *Отыскание всех решений интегрального уравнения* (76) *класса* $H^*(c_1, \dots, c_n)$ *равносильно построению всех* Г-*автоморфных решений задачи Римана* (85) *класса* $h_n = h(c_1, \dots, c_n)$ *с простыми полюсами* $a_1, \dots, a_\rho$ *и представимых интегралом* (41).

3°. Схема построения общего решения задачи Римана в различных классах автоморфных функций известна [8, 9]. В отличие от указанных работ мы запишем здесь общее решение интересующей нас задачи (85) через интегралы с ядром $K(z, \tau)$, а не с ядром $A(z, \tau)$, так как на последнем этапе вычислений при определении решения исходного уравнения (76) по формуле (81) надо осуществить дифференцирование функции с интегралами в смысле главного значения, а в § 2 мы видели, что формулы дифференцирования для интегралов с ядрами $K(z, \tau)$ проще.

На всех дугах $\alpha_k \beta_k$ линии L_0 выберем непрерывно изменяющееся значение одной из ветвей функции $\ln G(t)$ и для всех узлов вычислим числа

$$\lambda_j + i\mu_j = -\sum_{(k)} \frac{\ln G(\alpha_k)}{2\pi i} + \sum_{(k)} \frac{\ln G(\beta_k)}{2\pi i}, \tag{87}$$

где суммирование ведется по всем концам α_k и β_k, образующим рассматриваемый узел c_j. Для узлов, не являющихся узлами в геометрическом смысле, а точками разрыва коэффициента $G(t)$ или угловыми точками линии L_0,

$$\lambda_j + i\mu_j = \frac{1}{2\pi i}[\ln G(c_j - 0) - \ln G(c_j + 0)]. \tag{88}$$

Разделяем все узлы на особенные, которым соответствуют целые или равные нулю числа λ_j в (87) и (88), и неособенные в противном случае. Допустим, что среди всех узлов $c_1, \ldots, c_n$ первые p неособенные, остальные—особенные ($p \leqslant n$). Значит, нам надо построить общее решение задачи (85) класса h_p. Полагая

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \ln G(\tau) K(z, \tau)\, d\tau \tag{89}$$

и принимая во внимание (10), заключаем, что в окрестности любого узла c_j имеет место представление

$$\gamma(z) = (\lambda_j + i\mu_j) \ln(z - c_j) + \gamma_1(z).$$

Значит, во всех неособенных узлах и в особенных с $\lambda_j \neq 0$ функция $\exp \gamma(z)$ обращается в нуль или в бесконечность. Возьмем функции

$$E(z, \theta_0, c_j) = \exp \int_{c_j}^{\theta_0} K(z, \tau)\, d\tau \tag{90}$$

с нулем первого порядка в точке $\theta_0 \in R_0 \setminus L_0$, отличной от точек $a_1, \ldots, a_\rho$ и z_0. Целые числа $\varkappa_j$ в произведении

$$X(z) = \exp \gamma(z) \prod_{j=1}^{n} E^{\varkappa_j}(z, \theta_0, c_j) \prod_{k=1}^{\rho} E(z, \theta_k, \theta_0) \tag{91}$$

подберем так, чтобы оно принадлежало классу h_p:

$$0 < \lambda_j - \varkappa_j < 1,\ j = \overline{1, p};\ \ \lambda_j - \varkappa_j = 0,\ j = \overline{p+1, n}. \tag{92}$$

Во втором произведении точки $\theta_1, \ldots, \theta_\rho$ подбираем так, чтобы функция (91) была автоморфной. Это дает для определения точек $\theta_1, \ldots, \theta_\rho$ проблему обращения Якоби

$$\sum_{k=1}^{\rho} \int_{\theta_0}^{\theta_k} \eta_j(\tau)\, d\tau = 2\pi i p_j - \sum_{q=1}^{n} \varkappa_q \int_{c_q}^{\theta_0} \eta_j(\tau)\, d\tau -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \ln G(\tau)\, \eta_j(\tau)\, d\tau,\ \ j = \overline{1, \rho}. \tag{93}$$

Целыми числами p_j можно распорядиться так, чтобы решением этой проблемы были точки, не лежащие на L_0 и не совпадающие с точками $a_1, \ldots, a_\rho$ и z_0. Функция $X(z)$, удовлетворяющая однородному граничному условию $X^+(t) = G(t)X^-(t)$, и будет в классе h_p канонической. На фундаментальном множестве $X(z)$ имеет порядок $(-\varkappa)$, $\varkappa = \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_n$; в точках $\theta_1, \ldots, \theta_\rho$ у нее ρ нулей, а в точке θ_0 при $\varkappa \geqslant \rho$ нуль порядка $\varkappa - \rho$ и полюс порядка $\rho - \varkappa$ при $\varkappa < \rho$.

При помощи $X(z)$ краевое условие (85) приводится к виду

$$\frac{\Phi_1^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi_1^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g_1(t)}{X^+(t)}$$

и остается решить задачу о скачке для функции $\Phi_1(z)/X(z)$, обращающейся в нуль в точке z_0, голоморфной и ограниченной в $R \setminus L_0$ всюду, кроме точек $a_1, \ldots, a_\rho$ и $\theta_1, \ldots, \theta_\rho$, в которых должны быть простые полюсы, и точки θ_0, где при $\varkappa > \rho$ должен быть полюс порядка $\varkappa - \rho$. Таким путем получим общее решение задачи (85) класса h_p с нужными свойствами в таком виде:

$$\Phi_1(z) = X(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)} K(z, \tau)\,d\tau + W(z)\right\}, \tag{94}$$

$$W(z) = \sum_{j=1}^{\rho} P_j K(z, a_j) + \sum_{k=1}^{\rho} M_k K(z, \theta_k) + \sum_{q=1}^{\varkappa-\rho} N_q \xi_q(z, \theta_0),$$

где через $\xi_q(z, \theta_0)$ обозначена квазиавтоморфная функция

$$\xi_q(z, \theta_0) = (z - \theta_0)^{-q} + \sum_{j=1}^{\infty}\{[\sigma_j(z) - \theta_0]^{-q} - [\sigma_j(z_0) - \theta_0]^{-q}\} \tag{95}$$

с циклическими постоянными

$$\eta_{qk} = -\eta_k^{(q-1)}(\theta_0)/(q-1)!$$

и с полюсом порядка q в точке θ_0. К формуле (94) надо присоединить еще равенства

$$\sum_{l=1}^{\rho} P_l \eta_j(a_l) + \sum_{k=1}^{\rho} M_k \eta_j(\theta_k) +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)} \eta_j(\tau)\,d\tau + \sum_{q=1}^{\varkappa-\rho} N_q \eta_{qj} = 0, \; j = \overline{1, \rho}, \tag{96}$$

обеспечивающие автоморфность функции (94), а в случае $\varkappa < \rho$ еще равенства

$$\frac{d^j}{dz^j}\left[\frac{\Phi_1(z)}{X(z)}\right]_{z=\theta_0} = 0,\ j = \overline{0,\ \rho - \varkappa - 1}, \tag{97}$$

обеспечивающие ее голоморфность в точке θ_0.

Из (94) легко находим

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = g_1(t)\,\frac{1 + G(t)}{2G(t)} +$$

$$+ \frac{G(t) - 1}{G(t)}\ X^+(t)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)}K(t,\ \tau)\,d\tau + W(t)\right\}. \tag{98}$$

Предельное значение $X^+(t)$ вычисляется из формулы (91). Легко убедиться, что

$$X^+(t) = \widetilde{X}(t)\prod_{j=1}^{n}(t - c_j)^{\lambda_j - \varkappa_j + i\mu_j}, \tag{99}$$

где $\widetilde{X}(t)$ — функция класса H_0, не обращающаяся в нуль нигде на L_0.

На основании (10) также, как для обычной задачи Римана [7, с. 320], легко показать, что решение (94) задачи (85) ограничено вблизи особенных, которым соответствуют числа $\mu_j \neq 0$, и почти ограничены (логарифмически) вблизи особенных узлов, для которых $\mu_j = 0$. Вблизи всех неособенных концов, определяющих класс h_p, решение (94) также ограничено.

Займемся исследованием разности $\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)$ вблизи этих узлов и прежде всего в случае ограниченности $\Phi_1(z)$ вблизи узла c_j найдем значение разности (98) в этом узле и определим, при каких условиях эти значения равны нулю.

4°. Рассмотрим сначала случай, когда c_j — конец линии L_0, то есть конец только одной дуги, входящей в L_0.

Если c_j — неособенный конец, то в его окрестности, как следует из (99),

$$X^+(t) = \omega(t)(t - c_j)^{\sigma_j},\ \sigma_j = \lambda_j - \varkappa_j + i\mu_j,\ 0 < \lambda_j - \varkappa_j < 1, \tag{100}$$

где принадлежащая классу H_0 функция $\omega(t)$ не обращается в нуль в c_j. Используя представление интеграла типа Коши в окрестности конца линии интегрирования, на котором у плотности степенная особенность [7, с. 32], имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)}K(t,\ \tau)\,d\tau = \pm\frac{1}{2i}\,\frac{g_1(c_j)}{\omega(c_j)}\,\frac{\operatorname{ctg}\pi\sigma_j}{(t - c_j)^{\sigma_j}} + \Phi^*(t), \tag{101}$$

где функция $\Phi^*(t)$ в c_j может иметь степенную же особенность, но порядка меньшего, чем $\lambda_j - \varkappa_j$; здесь и далее верхний знак соответствует случаю $c_j = \alpha_k$, нижний — $c_j = \beta_k$. Значит, на основании (100) и (101) при $t \to c_j$ предел разности (98) равен

$$\frac{g_1(c_j)}{2G(c_j)}\left\{1 + G(c_j) \pm \frac{1}{i}\operatorname{ctg}\pi\sigma_j[G(c_j) - 1]\right\}. \tag{102}$$

Так как

$$\frac{1}{i}\operatorname{ctg}\pi\sigma_j = \frac{1}{i}\operatorname{ctg}\pi(\lambda_j + i\mu_j) = \frac{[G(c_j)]^{\mp 1} + 1}{[G(c_j)]^{\mp 1} - 1},$$

то

$$1 + G(c_j) \pm \frac{1}{i}\operatorname{ctg}\pi\sigma_j[G(c_j) - 1] = 0. \tag{103}$$

В силу этого соотношения второй множитель в (102) равен нулю и, следовательно, при $t \to c_j$ по L_0 разность (98) стремится к нулю.

Пусть c_j — особенный конец линии L_0, что будет иметь место, если $G(c_j)$ — вещественное положительное число. Если $G(c_j) \neq 1$, то есть если $\mu_j \neq 0$, то в окрестности конца c_j в силу (101)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)}K(t, \tau)\,d\tau = \pm\frac{\operatorname{ctg} i\pi\mu_j}{2i}\,\frac{g_1(c_j)}{\omega(c_j)}(t - c_j)^{-i\mu_j} + \Phi^*(t), \tag{104}$$

где $\Phi^*(t) \in H$ вблизи c_j и, как в случае неособенного конца, имеет место равенство (103). Тогда в правой части формулы (98) будет стоять почти ограниченная функция

$$\frac{G(t) - 1}{G(t)}\,\omega(t)(t - c_j)^{i\mu_j}\{\Phi^*(t) + W(t)\}.$$

Следовательно, предел разности (98) при $t \to c_j$ существует и равен нулю тогда и только тогда, если

$$\Phi^*(c_j) + W(c_j) = 0. \tag{105}$$

При $W(z) \not\equiv 0$ этого можно добиться за счет подбора одной из входящих в $W(z)$ постоянных; при $W(z) \equiv 0$ равенство (105) дает дополнительное условие на функцию $g_1(t)$.

Если $G(c_j) = 1$, то есть если $\mu_j = 0$, то в окрестности конца c_j [7, с. 91]

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)}K(t,\tau)\,d\tau = \mp\frac{g_1(c_j)}{2\pi i\omega(c_j)}\ln(t-c_j)+\Phi_0(t), \qquad (106)$$

где $\Phi_0(t)\in H$ вблизи c_j. Значит, при $t=c_j$ вся разность (98) принимает конечное значение $g_1(c_j)$. Итогом исследования является

Теорема 14. *Разность* (98) *предельных значений решения краевой задачи* (85), *ограниченного вблизи конца* c_j *линии* L_0, *обращается в нуль на этом конце тогда и только тогда, если*

1) c_j — *неособенный конец;*

2) c_j — *особенный конец, на котором* $G(c_j)\neq 1$ *и выполнено условие* (105);

3) c_j — *особенный конец, на котором* $G(c_j)=1$ *и* $g_1(c_j)=0$.

Естественно задать вопрос, не сохранятся ли свойства разности (98), описанные этой теоремой, при наличии у свободного члена $g_1(t)$ интегрируемой особенности на конце c_j.

Пусть вблизи c_j

$$g_1(t)=g_*(t)(t-c_j)^{-(\delta_j+i\Delta_j)},\ 0\leqslant\delta_j<1,\ g_*(t)\in H,\ g_*(c_j)\neq 0, \qquad (107)$$

При помощи тех же рассуждений, что и при доказательстве теоремы 14, легко убедиться, что разность (98) при условии (107) на конце c_j обращается в бесконечность всегда, за исключением одного случая, когда c_j — особенный конец, на котором $G(c_j)=1$ и в представлении (107) $\delta_j=0$. Вблизи такого особенного конца c_j разность (98) почти ограничена и ведет себя как

$$g_*(c_j)(t-c_j)^{-i\Delta_j}. \qquad (108)$$

Пусть теперь вблизи c_j

$$g_1(t)=g_*(t)\ln(t-c_j),\ g_*(t)\in H,\ g_*(c_j)\neq 0. \qquad (109)$$

При исследовании свойств интеграла в (98) в этом случае надо привлечь формулы И. М. Мельника [5, с. 74—76], характеризующие поведение интегралов с ядром Коши, когда плотность имеет логарифмическую или степенно-логарифмическую особенность. В окрестности неособенного конца c_j в этом случае имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)}K(t,\tau)\,d\tau = \pm$$

$$\pm\frac{g_*(c_j)}{\omega(c_j)}(t-c_j)^{-\sigma_j}\left\{\frac{\operatorname{ctg}\pi\sigma_j}{2i}\ln(t-c_j)+\frac{\pi}{2i\sin^2\pi\sigma_j}\right\}+\Phi^*(t), \qquad (110)$$

где вблизи c_j функция $\Phi^*(t)$ также имеет степенно-логарифмическую особенность, но с порядком степени меньше $\lambda_j - \varkappa_j$. Если правую часть (110) подставить в (98), то в силу равенства (103) коэффициент при $\ln(t - c_j)$, когда $t \to c_j$, обратится в нуль и пределом разности (98) будет отличное от нуля конечное число

$$\pm \frac{G(c_j) - 1}{G(c_j)} \frac{\pi g_*(c_j)}{2i \sin^2 \pi\sigma_j}. \tag{111}$$

В случае особенного конца c_j, на котором $G(c_j) \neq 1$, то есть $\mu_j \neq 0$, на основании того же представления (110) мы получим тот же предел (111), если на этом конце выполнено условие (105). Если же $G(c_j) = 1$, так что $\mu_j = 0$, то вблизи c_j вместо (110)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)} K(t, \tau)\, d\tau = \mp \frac{g_*(c_j)}{4\pi i \omega(c_j)} \ln^2(t - c_j) + \Phi_0(t),$$

где $\Phi_0(t) \in H$ вблизи c_j. Тогда вся разность (98) вблизи c_j ведет себя как

$$g_*(c_j) \ln(t - c_j). \tag{112}$$

Итогом является

Теорема 15. *При условии* (109) *разность предельных значений задачи Римана* (85) *будет на конце* c_j *конечной и равной значению* (111), *если*

1) c_j — *неособенный конец, на котором* $X(c_j) = 0$;

2) c_j — *особенный конец, на котором* $G(c_j) \neq 1$ *и выполнено условие* (105).

Исследование общего случая, когда в узле c_j сходится несколько гладких дуг $\alpha_k\beta_k$ линии L_0, проводится по той же схеме. Только формулы, определяющие значения разности (98) в рассматриваемом узле, имеют более сложный вид. Рассмотрим только наиболее часто встречающийся случай, когда в узле c_j сходятся две дуги, для одной из которых точка c_j является концом (входящая дуга), а для другой—началом (исходящая дуга). Предел любой заданной на линии L_0 функции $u(t)$ при $t \to c$ по входящей дуге, если он существует, будем обозначать $u(c - 0)$, а предел при $t \to c$ по исходящей дуге — $u(c + 0)$.

Пусть коэффициенты $G(t)$ и $g_1(t)$ краевой задачи удовлетворяют условию H_0 вблизи узла c (для краткости будем писать $\in H_0(c)$). Вообще говоря, разность (98) решения (94), ограниченного вблизи узла c, также имеет разрыв 1-го рода в самом узле. Пусть c — неособенный узел. В его окрестности

$$X^+(t)=\omega(t)(t-c)^{\sigma},\ \sigma=\lambda-\varkappa_c+i\mu,\ 0<\lambda-\varkappa_e<1, \tag{113}$$

где $\omega(t)\in H_0(c)$ и не обращается в нуль в самом узле. На основании известных формул, характеризующих в этом случае интеграл Коши [7, с. 116], для интеграла в формуле (98) получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)}K(t,\tau)\,d\tau=$$

$$=\left\{\frac{e^{i\pi\sigma}}{2i\sin\pi\sigma}\,\frac{g_1(c+0)}{\omega(c+0)}-\frac{\operatorname{ctg}\pi\sigma}{2i}\,\frac{g_1(c-0)}{\omega(c-0)}\right\}(t-c)^{-\sigma}+\Phi^*(t) \tag{114}$$

на входящей дуге,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)}K(t,\tau)\,d\tau=$$

$$=\left\{\frac{\operatorname{ctg}\pi\sigma}{2i}\,\frac{g_1(c+0)}{\omega(c+0)}-\frac{e^{-i\pi\sigma}}{2i\sin\pi\sigma}\,\frac{g_1(c-0)}{\omega(c-0)}\right\}(t-c)^{-\sigma}+\Phi^*(t) \tag{115}$$

на исходящей дуге, где функция $\Phi^*(t)$ может иметь в точке c особенность порядка меньшего, чем $\lambda-\varkappa_c$. Учитывая, что на основании (88)

$$\frac{e^{i\pi\sigma}}{2i\sin\pi\sigma}=\frac{e^{i\pi\sigma}}{e^{i\pi\sigma}-e^{-i\pi\sigma}}=\frac{1}{e^{2\pi i(\lambda+i\mu)}-1}=\frac{G(c+0)}{G(c+0)-G(c-0)}=S,$$

$$\frac{e^{-i\pi\sigma}}{2i\sin\pi\sigma}=\frac{G(c-0)}{G(c+0)-G(c-0)}=T,\quad\frac{1}{i}\operatorname{ctg}\pi\sigma=S+T,$$

в качестве предела разности (98) при $t\to c$ слева получим

$$\frac{1+G(c-0)}{2G(c-0)}\,g_1(c-0)+\frac{G(c-0)-1}{G(c-0)}\,\omega(c-0)\times$$
$$\times\left\{S\,\frac{g_1(c+0)}{\omega(c+0)}-\frac{S+T}{2}\,\frac{g_1(c-0)}{\omega(c-0)}\right\}, \tag{116}$$

а при $t\to c$ справа —

$$\frac{1+G(c+0)}{2G(c+0)}\,g_1(c+0)+\frac{G(c+0)-1}{G(c+0)}\,\omega(c+0)\times$$
$$\times\left\{\frac{S+T}{2}\,\frac{g_1(c+0)}{\omega(c+0)}-T\,\frac{g_1(c-0)}{\omega(c-0)}\right\}. \tag{117}$$

Пусть c — особенный узел, так что $\lambda-\varkappa_c=0$. Если $\mu\neq0$, то поведение интеграла в формуле (98) определяется теми же формулами (114) и (115), в которых $\Phi^*(t)\in H_0(c)$. Пределы разности (98) при $t\to c\pm0$ существуют только тогда, когда существуют пределы произведения

$$\frac{G(t)-1}{G(t)}\,\omega(t)(t-c)^{i\mu}\{\Phi^*(t)+W(t)\},$$

то есть когда

$$\Phi^*(c\pm 0)+W(c)=0. \tag{118}$$

Тогда значения разности (98) слева и справа в узле c будут равны тем же числам (116) и (117).

Если $\mu=0$, то $X^+(t)\in H_0(c)$ и $X^+(c\pm 0)\neq 0$. Имеет место представление

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)}K(t,\ \tau)\,d\tau=\left[\frac{g_1(c-0)}{X^+(c-0)}-\frac{g_1(c+0)}{X^+(c+0)}\right]\ln(t-c)+\Phi^*(t). \tag{119}$$

Если $G(c)\neq 1$, то из формулы (119) следует: чтобы пределы при $t\to c\pm 0$ разности (98) были конечны, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{g_1(c-0)}{X^+(c-0)}-\frac{g_1(c+0)}{X^+(c+0)}=0. \tag{120}$$

Тогда этими пределами будут значения

$$\frac{1+G(c\pm 0)}{2G(c\pm 0)}\,g_1(c\pm 0)+\frac{1-G(c\pm 0)}{G(c\pm 0)}\times$$

$$\times X^+(c\pm 0)\{\Phi^*(c\pm 0)+W(c)\}. \tag{121}$$

Если $G(c)=1$, то второе и третье слагаемые в правой части формулы (98) обратятся в нуль и пределами при $t\to c\pm 0$ будут числа

$$g(c\pm 0). \tag{122}$$

5°. Возвратимся к уравнению (76). Построим сначала все его решения в случае, когда L_0 — прерывистая гладкая линия, состоящая из m гладких дуг $\alpha_k\beta_k$ без общих концов. Предположим, что функция $\varphi(t)$, коэффициенты $D(t)$, $C(t)$ и правая часть $f(t)$ уравнения (76) имеют на L_0 производные $\varphi'(t)$, $D'(t)$, $C'(t)$, $f'(t)$, принадлежащие классу $H^*(c_1,\ldots,c_{2m})$, где $c_1,\ldots,c_{2m}$ — концы линии L_0, расположенные в некотором порядке. В силу этого предположения коэффициенты $G(t)$ и $g_1(t)$ краевой задачи Римана (85) принадлежат классу H и узлов, отличных от концевых точек $c_1,\ldots,c_{2m}$, задача (85) не имеет. Пусть среди концов $c_1,\ldots,c_p$ $(p\leqslant 2m)$ будут неособенные, остальные $c_{p+1},\ldots,c_{2m}$ — особенные. На основании теоремы 13 из Г-автоморфного решения (94) класса h_p надо выбрать те, которые удовлетворяют условиям теоремы 4.

Возьмем разность предельных значений решения (98) и, подставив в нее выражения коэффициентов $G(t)$ и $g_1(t)$ через коэффициенты интегрального уравнения (76), получим функцию

$$\psi(t)=\frac{\Phi_1^+(t)-\Phi_1^-(t)}{\varphi(t)}=\frac{C(t)}{\Omega(t)}f_1(t)-$$
$$-\frac{D(t)Z(t)}{\Omega(t)}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\varphi(\tau)f_1(\tau)}{Z(\tau)}K(t,\tau)\,d\tau+W(t)\right\},\tag{123}$$

где

$$f_1(t)=f(t)-2D(t)\sum_{k=1}^{\rho}V_kK(t,a_k),\tag{124}$$
$$Z(t)=X^+(t)\left[C(t)+\varphi(t)D(t)\right],$$

а функция $\Omega(t)$ определяется формулой (78).

Функция (123) в точках $\beta_1,\ldots,\beta_r$ и $\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_m$ должна обращаться в нуль. По теореме 14 это будет выполняться автоматически в тех из них, которые являются неособенными концами, и при выполнении условий вида

$$\Phi^*(c_j)+W(c_j)=0\tag{125}$$

или вида

$$f(c_j)=0,\tag{126}$$

если они являются концами особенными.

В предположении дифференцируемости функций $\varphi(t)$, $C(t)$, $D(t)$ и $f(t)$ во всех точках $t\in L_0$, отличных от концов, функция (123) тоже дифференцируема в этих точках. При вычислении производной от $\psi(t)$ используем теорему 10. После несложных вычислений с применением формулы (71) получим

$$\psi'(t)=\frac{C(t)}{\Omega(t)}f_1'(t)+\frac{D(t)Z(t)}{\Omega(t)Q(t)}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}f_1'(\tau)\frac{\varphi(\tau)Q(\tau)}{Z(\tau)}K(\tau,t)\,d\tau-$$
$$-\left[\frac{D(t)Z(t)}{\Omega(t)}W(t)\right]'+\left[\frac{C(t)}{\Omega(t)}\right]'f_1(t)-\left[\frac{D(t)}{\Omega(t)}\right]'\frac{Z(t)}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\varphi(\tau)f_1(\tau)}{Z(\tau)}K(t,\tau)\,d\tau+$$
$$+\frac{D(t)Z(t)}{\Omega(t)Q(t)}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\varphi(\tau)f_1(\tau)}{Z(\tau)}\left\{Q(\tau)\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)}-\right.\tag{127}$$
$$\left.-\left[Q(\tau)\frac{Z'(\tau)}{Z(\tau)}K(\tau,t)+Q(t)\frac{Z'(t)}{Z(t)}K(t,\tau)\right]\right\}d\tau-$$
$$-\frac{D(t)Z(t)}{\Omega(t)Q(t)}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\varphi(\tau)f_1(\tau)}{Z(\tau)}\left\{\left[Q(t)-Q(\tau)\right]K(\tau,t)\right\}_\tau'\,d\tau.$$

В силу принадлежности функций $\varphi'(t)$, $C'(t)$, $D'(t)$ и $f'(t)$ классу $H^*(c_1, \ldots, c_{2m})$ функция (127) будет, очевидно, удовлетворять условию $H^*(c_j)$ вблизи всех неособенных концов c_j и вблизи тех особенных, в которых выполняются условия (125) и (126). Поэтому, если среди $\beta_{r+1}, \ldots, \beta_m$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ есть концы особенные, мы для обеспечения принадлежности $\psi'(t) \in H^*$ вблизи этих концов в соответствии с теоремой 14 должны потребовать выполнения условий вида (125) для тех из них, в которых $G(c_j) \neq 1$, и условий вида (126) для тех, на которых $G(c_j) = 1$. Значит функция (123) будет удовлетворять требованиям 1) — 3) теоремы 3, если на каждом особенном конце выполняется условие (125) и (126). Последнее требование теоремы 4 — выполнение равенств (46). Подставив в эти равенства значение разности $\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)$ из (98) или из (123), получим еще ρ соотношений, связывающих между собой постоянные, входящие в правую часть (127). При выполнении этих ρ соотношений (46) все требования теоремы 4 будут выполнены и мы можем все решения уравнения (76) класса $H^*(c_1, \ldots, c_{2m})$ получить по формулам

$$\nu(t) = \mp \psi'(t), \quad t \in \alpha_k\beta_k, \quad k = \overline{1, m}, \tag{128}$$

где верхний знак соответствует первым r дугам $\alpha_k\beta_k$, а $\psi'(t)$ имеет вид (127).

Подсчитаем число условий разрешимости уравнения (76) и число произвольных постоянных, вошедших в формулы (128), (127).

Когда все концы линии L_0 неособенные, условия теоремы 4 для функций (123) и (127) выполняются автоматически и, значит, в общем решении задачи Римана (94) класса h_{2m} представимыми в виде интеграла (41) с логарифмическим ядром будут те решения, для которых выполняются соотношения (46). При $\varkappa \geqslant \rho$ в формулу (94) входят линейно постоянные P_j, M_k, N_q и вычеты V_s, которые нам тоже неизвестны. Всего имеем $2\rho + \varkappa$ постоянных. Все они связаны 2ρ соотношениями (46) и (96). Этим соотношениям можно удовлетворить подбором 2ρ постоянных, после чего в формуле (94) и в формуле (127) останется $\varkappa$ произвольных постоянных. При $\varkappa < \rho$ функция $W(z)$ в формуле (94) не содержит последней суммы, так что имеем 3ρ произвольных постоянных P_j, M_k, V_s и $3\rho - \varkappa$ связывающих их соотношений (46), (96) и (97); когда $\varkappa \geqslant 0$, число соотношений не превосходит числа постоянных, и в случае $\varkappa > 0$ после удовлетворения всем соотношениям в формулах (94) и (127) останется $\varkappa$ произвольных постоянных, а в случае $\varkappa = 0$ число уравнений и число неизвестных постоянных одинаково, поэтому когда из систем (46) и (96), например, мы выразим P_j и M_k через V_s и эти значения подставим в уравнения (97), то получим систему ρ уравнений с ρ неизвестными, ранг которой $\xi \leqslant \rho$ и, следовательно, в данном случае либо все постоянные определятся ($\xi = \rho$) и единственной вполне определенной функции (94) по формулам (127) и (128) будет соответствовать единственное решение $\nu(t)$ интегрального уравнения (76), либо определятся лишь ξ постоянных и в формулы (94) и (127) войдет $\rho - \xi$ произвольных постоянных при $\rho - \xi$ условиях разрешимости. При $\varkappa < 0$ число соотношений $3\rho - \varkappa$ превосходит число произвольных постоянных и здесь, как в случае $\varkappa = 0$, либо все постоянные определятся и мы получим единственное решение при $(-\varkappa)$ дополнительных условиях разрешимости вида (97), либо $\rho - \xi$ постоянных останутся произвольными и войдут в формулы (94) и (127), число же условий разрешимости будет $\rho - \varkappa - \xi$.

Пусть среди концов неособенных $p < 2m$, остальные $2m - p$ особенные. Предположим, что в l особенных концах $G(c_j) = 1$, что равносильно выполнению равенства $D(c_j) = 0$, и в остальных s особенных концах $G(c_j) \neq 1$ или, что все равно, $D(c_j) \neq 0$, так что $l + s = 2m - p$. Пусть $\varkappa > \rho$ и мы, проведя только что изложенные рассуждения, имеем $\varkappa$ произвольных постоянных в формулах (94) и (127); когда $\varkappa > s$, всем s условиям вида (125) можно удовлетворить подбором этих постоянных, после чего в формулах (94) и (127) останется произвольных постоянных $\varkappa - s$; значит, в общее решение уравнения (76) при выполнении l дополнительных условий вида (126) входит $\varkappa - s$ произвольных постоянных. Когда $\varkappa \leqslant s$, из условий (125) определятся ξ_1 постоянных, где ξ_1 — ранг системы (125), $0 \leqslant \xi_1 \leqslant s$, $\varkappa - \xi_1$ постоянных останутся произвольными и появятся $s - \xi_1$ условий разрешимости, к которым надо присоединить и l условий вида (126); значит, в этом случае уравнение (76) имеет либо единственное решение при l условиях (126), либо в решение войдет $\varkappa - \xi_1$ произвольных параметров при $l + s - \xi_1$ условиях разрешимости. Аналогичный вывод можно получить и при $\varkappa \leqslant 0$.

Итогом проведенного исследования является

Теорема 16. *Пусть на прерывистой гладкой линии $L_0 \subset R_0$ с концами $c_1, \dots, c_{2m}$ задано интегральное уравнение* (76) *с Г-квазиавтоморфным логарифмическим ядром и пусть $\varphi'(t)$, $C'(t)$, $D'(t)$, $f'(t)$ принадлежат классу $H^*(c_1, \dots, c_{2n})$. Разрешимость и число решений уравнения в классе $H^*(c_1, \dots, c_{2m})$ определяется числом особенных концов линии L_0 и величиной индекса задачи Римана* (85) *класса h_p, где $2m - p$ — число особенных концов, а также рангом системы* (97) *или* (46) *и родом фундаментального многоугольника.*

Если все концы $c_1, \dots, c_{2m}$ неособенные и $\varkappa$ — индекс класса h_{2m}, то при $\varkappa > 0$ уравнение (76) *безусловно разрешимо и его общее решение содержит $\varkappa$ произвольных* *постоянных. При $\varkappa = 0$ решение может быть единственным ($\xi = \rho$), либо будет содержать $\rho - \xi$ произвольных постоянных, если при этом $f(t)$ удовлетворяет $\rho - \xi$ условиям разрешимости системы* (97). *При $\varkappa < 0$ для разрешимости уравнения* (76) *необходимо и достаточно выполнение $\rho - \varkappa - \xi$ дополнительных условий, которым должна удовлетворять $f(t)$; при их выполнении в общее решение может войти $\rho - \xi$ произвольных постоянных.*

Если среди концов $c_1, \ldots, c_{2m}$ имеется $2m - p$ особенных, а среди них l характеризуется условием $D(c_j) = 0$ и s — условием $D(c_j) \neq 0$, то при $l \neq 0$ необходимо выполнение условий (126), *сужающих класс правых частей $f(t)$ уравнения* (76). *При их выполнении в случае $\varkappa > s > 0$ в общее решение уравнения* (76) *входит линейно $\varkappa - s$ произвольных постоянных; в случае $0 < \varkappa \leqslant s$ общее решение уравнения может содержать их $\varkappa - \xi_1$, $0 \leqslant \xi_1 \leqslant s$, при выполнении $s - \xi_1$ дополнительных условий разрешимости; при $\varkappa \leqslant 0$ возможно наличие $\rho - \xi - \xi_1$ произвольных постоянных при $\rho - \varkappa - \xi - \xi_1$ условиях разрешимости.*

6°. Может ли функция $\nu(t)$, определенная формулами (127), (128) в окрестности некоторого конца c_j по-прежнему удовлетворять условию $H^*(c_j)$, если, сохраняя прежние требования на $\varphi(t)$, $C(t)$ и $D(t)$, считать $f(t) \in H^*_\varepsilon(c_j)$?

Пусть в окрестности c_j

$$f(t) = f_*(t) \ln (t - c_j), \quad f'_*(t) \in H,$$

$$f'(t) = f_{**}(t)/(t - c_j), \quad f_{**}(t) \in H, \quad f_{**}(c_j) \neq 0. \tag{129}$$

На основании теоремы 15 на неособенном конце c_j можно допустить у $f(t)$ логарифмическую особенность только в том случае, если этот конец относится к совокупности $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ и $\beta_{r+1}, \ldots, \beta_m$; функция (123) принимает на таком конце постоянное отличное от нуля значение и потому этот неособенный конец c_j не может относиться к совокупности $\beta_1, \ldots, \beta_r$ и $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_m$, в каждой точке которой в силу теоремы 4 функция (123) должна обращаться в нуль. Из формулы (127) сразу видно, что в этом случае все интегралы в ее правой части существуют и что все слагаемые удовлетворяют условию $H^*(c_j)$, за исключением двух, содержащих $f'_1(t)$. Вблизи c_j

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \frac{Q(\tau)\, \varphi(\tau)\, f'_1(\tau)}{Z(\tau)} K(\tau, t)\, d\tau = \mp \frac{R_j Q_*(c_j) f_{**}(c_j) \operatorname{ctg} \pi\sigma_j}{2i\,(t - c_j)^{\sigma_j}} + \Phi^*(t),$$

где верхний знак в правой части соответствует случаю $c_j = \alpha_k$, нижний — $c_j = \beta_k$; R_j и $Q_*(c_j)$ — постоянные

$$R_j = \lim_{t\to c_j} (t - c_j)^{\sigma_j} Z(t), \quad Q_*(c_j) = \lim_{t\to c_j} Q(t)(t - c_j)^{-1};$$

$\Phi^*(t)$ может в точке c_j иметь степенную особенность, но порядка ниже $\lambda_j - \varkappa_j = \operatorname{Re}\sigma_j$. При помощи этого представления выделяем неинтегрируемый член из слагаемых правой части формулы (127), содержащих $f_1'(t)$. Получим

$$\frac{f_{**}(c_j)}{\Omega(c_j)} \; \frac{C(c_j) \pm iD(c_j)\varphi(c_j)\operatorname{ctg}\pi\sigma_j}{t - c_j}.$$

Но на основании (80) и (103) числитель второй дроби оказывается равным нулю, поэтому в формуле (127) этот член исчезает и $\nu(t) \in H^*(c_j)$.

В силу той же теоремы 15 логарифмическая особенность у $f(t)$ допустима на особенном конце c_j, на котором $D(c_j) \neq 0$, но при выполнении условия вида (125). И, наконец, из исследований 4° этого параграфа заключаем, что на особенном конце, где $D(c_j) = 0$, допускать логарифмическую особенность нельзя, так как на таком конце функция (123) будет иметь особенность вида (112) в качестве слагаемого и производная (127) будет неинтегрируемой вблизи этого конца; в этом же можно убедиться прямым исследованием правой части формулы (127), взаимного погашения неинтегрируемых особенностей у слагаемых, содержащих $f'(t)$, здесь не происходит.

Таким образом, имеет место

Теорема 17. *Утверждения теоремы* 16 *остаются в силе, если правая часть* $f(t)$ *уравнения* (76) *имеет логарифмическую особенность вида* (129) *на неособенных концах совокупности* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *и* $\beta_{r+1}, \ldots, \beta_m$ *или на особенных концах при условиях* $D(c_j) \neq 0$ *и* (125).

7°. Рассмотрим случай, когда на одной из дуг $\alpha_k\beta_k$ у $G(t)$ и $g_1(t)$ задачи (85) имеется точка разрыва c первого рода. По теореме 4 функция (123) должна быть непрерывной в этой точке. В 4° было показано, что разность (98) в такой точке терпит разрыв и были вычислены значения (116) и (117) ее левого и правого пределов. Значит, при совпадении этих пределов решения задачи Римана (85) класса h_p будут представимы интегралом вида (41).

Учтем, что когда c есть точка гладкости дуги $\alpha_k\beta_k$, в представлении (113) функция $\omega(t)$ непрерывна в точке c и $\omega(c) \neq 0$. В силу этого выражения (116) и (117) упрощаются и их приравнивание приводит к соотношению

$$[G(c-0)+G(c+0)]\,[g(c-0)-g(c+0)]=0, \qquad (130)$$

когда c — точка неособенная или особенная при условии $\mu \neq 0$; в последнем случае к соотношению (130) надо присоединить условие (118), обеспечивающее существование пределов (116) и (117). В случае особенной точки с условием $\mu=0$ непрерывность функции (123) в точке c обеспечивается только совпадением значений (122). Значит, справедлива

Теорема 18. *При наличии точек разрыва первого рода у коэффициентов и правой части уравнения* (76) *во внутренних точках линии* L_0 *эквивалентность между этим уравнением и краевой задачей Римана* (85) *в смысле теоремы* 12 *сохраняется тогда и только тогда, если для коэффициентов задачи* (85) *в неособенных точках разрыва выполняется соотношение* (130), *в особенных точках при* $\mu \neq 0$ *соотношения* (130) *и* (118), *в особенных точках при* $\mu=0$ *соотношение*

$$g(c-0)=g(c+0). \qquad (131)$$

В особенных точках разрыва при $\mu \neq 0$ условие (130) сводится к условию (131), так как равенство $G(c-0)+G(c+0)=0$ возможно только в неособенных точках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чибрикова Л. И., Сильвестров В. В. Построение автоморфного аналога ядра Коши для одного класса собственно разрывных групп.— Труды семинара по краевым задачам, вып. 16. Изд-во Казанского ун-та, 1979, с. 202—217.

2. Чибрикова Л. И., Плещинский Н. Б. Об интегральных уравнениях с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами.— „Изв. вузов. Математика“, 1976, № 6, с. 91—104.

3. Чибрикова Л. И., Плещинский Н. Б. Об интегральных уравнениях с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами, II.— „Изв. вузов. Математика“, 1977, № 10, с. 150—162.

4. Чибрикова Л. И., Плещинский Н. Б. Об интегральных уравнениях с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами, III.— „Изв. вузов. Математика“, 1978, № 6, с. 129—146.

5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., „Наука“, 1977.

6. Чибрикова Л. И. Основные граничные задачи для аналитических функций. Изд-во Казанского ун-та, 1977.

7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., „Наука“, 1968.

8. Чибрикова Л. И. Краевая задача Римана для автоморфных функций в случае групп с двумя инвариантами.— „Изв. вузов. Математика“, 1961, № 6, с. 121—131. Письмо в редакцию.—„Изв. вузов. Математика“, 1962, № 3, с. 81—94.

9. Чибрикова Л. И. О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений.— Сб.: Краевые задачи теории аналитических функций. Изд-во Казанск. ун-та, 1962, с. 95—124.

Доложено на семинаре 29 января 1979 г.