

Werk

Verlag: Izd. Kazanskogo universiteta; Совет казанского университета

Ort: Kazan

Kollektion: RusDML; Mathematica

Werk Id: PPN509860087_0017

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN509860087_0017 | LOG_0031

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

УДК 532.546.001.57

ФИЛЬТРАЦИОННЫЙ РАСЧЕТ НЕОДНОРОДНОЙ ПО ВЫСОТЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЕРЕМЫЧКИ НА ПРОНИЦАЕМОМ ОСНОВАНИИ АНАЛОГОВО-АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Ф. И. Шешукова

Основной частью высокой каменно-земляной плотины является ядро, проницаемость которого в общем случае является переменной величиной. Фильтрационный расчет такого ядра аналитическими методами крайне сложен. В работе [1] для решения задачи фильтрации через неоднородную по высоте земляную перемычку, расположенную на водопоре, предложен аналогово-аналитический метод, который намного упрощает решение. Ниже этот метод обобщается на случай проницаемого основания.

Постановка задачи. Рассматривается задача плоской установившейся фильтрации, подчиняющейся закону Дарси, в неоднородной по высоте прямоугольной перемычке, подстилаемой однородным проницаемым основанием (рис. 1). Область

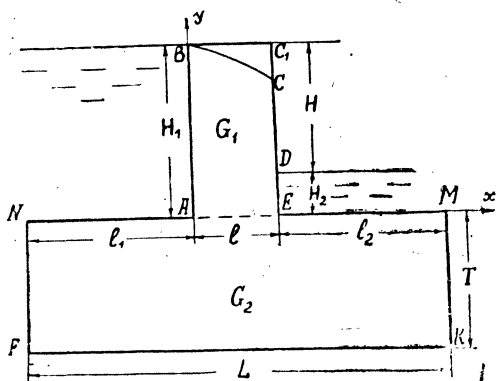


Рис. 1.

фильтрации в перемычке ABC_1CDE обозначим через G_1 , а в основании $NAEMKF$ — через G_2 ($G_1 \cup G_2 = G$). В области G_1 коэффициент фильтрации имеет специальную зависимость $\kappa_1 = a(y-b)^{-2}$ (a, b — постоянные), в области G_2 — постоянен, т. е. $\kappa_2 = \text{const}$. Действующий на гидросооружение напор $H = H_1 - H_2$, где H_1 и H_2 — уровни жидкости соответственно в верхнем и нижнем бьефах. На рис. 1 NAB — граница верхнего бьефа, DEM — граница нижнего бьефа, CD — промежуток высачивания, BC — неизвестная кривая депрессии, $NFKM$ — водоупор. Ось y направлена вдоль верхового откоса плотины, ось x — вдоль линии раздела грунтов AE .

В данной постановке фильтрация жидкости описывается следующей системой уравнений эллиптического типа (см., например, [2])

$$\kappa \frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1)$$

где h — пьезометрический напор, ψ — функция тока, $\kappa = \kappa_1$ в G_1 , $\kappa = \kappa_2 = \text{const}$ в G_2 .

После перехода к безразмерным параметрам $\tilde{h} = -h/H$, $\tilde{x} = x/H_1$, $\tilde{y} = y/H_1$, $\tilde{\kappa} = \kappa/\kappa_0$, $\tilde{\psi} = \psi/\kappa_0 H$ в G_1 , $\tilde{\psi} = \psi/\kappa_2 H$ в G_2 система (1) запишется в виде

$$\tilde{\kappa} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}, \quad \tilde{\kappa} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{y}} = - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}}, \quad (2)$$

где

$$\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}_1 = \tilde{b}^2 (\tilde{b} - \tilde{y})^{-2}, \quad \tilde{b} = b/H_1, \quad 0 < \tilde{y} \leq 1, \quad (3)$$

$\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}_2 = \text{const}$, $-T/H_1 \leq \tilde{y} < 0$, $\kappa_0 = a/b^2$ — значения κ_1 при $\tilde{y} = 0$.

Требуется достроить границу области G и найти в ней решение системы (2) по следующим граничным условиям: $\tilde{h} = -1$ на NAB , $\tilde{h} = 0$ на DEM , $\tilde{\psi} = 0$ и $\tilde{h} = -\frac{H_1}{H} \tilde{y} + \frac{H_2}{H}$ на BC и DC , $\tilde{\psi} = -\tilde{Q} = Q/\kappa_2 H$ на $NFKM$ и условиям сопряжения $\tilde{h}^+ = \tilde{h}^-$ и $\tilde{\psi}^+ = \tilde{\kappa}_2 \tilde{\psi}^-$ на AE , где \tilde{Q} — приведенный общий фильтрационный расход, знаки „+“ и „-“ указывают значения искомых функций при подходе к линии $\tilde{y} = 0$ соответственно сверху и снизу. В дальнейшем знак „~“ над безразмерными параметрами будем опускать.

Переход к гармоническим функциям. Как и в [1], введем в рассмотрение гармоническую в G_1 функцию

$$\Psi = \frac{b-y}{bx_2} \psi \quad (4)$$

и сопряженно-гармоническую ей $\Phi(x, y)$.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Тогда функции $h(x, y)$, $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ будут связаны выражением

$$dh = \frac{(b-y)x_2}{b} d\Phi - \frac{x_2}{b} \Psi dx. \quad (5)$$

В области G_2 сопряженно-гармонические функции $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ введем соотношениями

$$\Phi = h + 1, \quad \Psi = \psi. \quad (6)$$

Тогда на линии раздела сред AE будут выполняться условия сопряжения:

$$\Psi^+ = \Psi^- = \Psi_0, \quad (7)$$

$$x_2 \frac{\partial \Psi^+}{\partial y} + \frac{x_2}{b} \Psi^+ = \frac{\partial \Psi^-}{\partial y}, \quad (8)$$

где Ψ_0 — значение $\Psi(x, y)$ при $y = 0$.

Функция $\Psi(x, y)$ на границе области G , согласно формул (5), (6), удовлетворяет условиям:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad \text{и } x = l, \quad 0 \leq y \leq H_2/H_1;$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } -l_1 \leq x < 0, \quad y = 0 \quad \text{и } l < x \leq l + l_2, \quad y = 0;$$

$$\Psi = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq l, \quad y_C \leq y \leq 1; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{H_1 b}{x_2 H} \cdot \frac{1}{b-y} \quad \text{при } x = l, \quad H_2/H_1 \leq y \leq y_C;$$

$$\Psi = -Q \quad \text{при } x = -l_1, \quad -T \leq y \leq 0; \quad -l \leq x \leq l + l_2, \\ y = -T; \quad x = l + l_2, \quad -T \leq y \leq 0.$$

Кроме того, на кривой депрессии BC

$$\Phi = \frac{H_1 b}{x_2 H} \ln \left| \frac{b-y}{b-1} \right|. \quad (10)$$

О методе моделирования¹⁾. Так как $\Psi(x, y)$ в G является кусочно-гармонической, то для ее нахождения проще всего применять метод ЭГДА с использованием электропроводной бумаги.

¹⁾ В отличие от работ [1, 3] здесь моделирование приходится проводить для функции $\Psi(x, y)$, а не $\Phi(x, y)$, которая не является непрерывной при переходе через линию $y = 0$.

Условия сопряжения (7), (8) будем выполнять на модели дискретно. Для этого на малом расстоянии δ сверху и снизу от линии AE проводятся две вспомогательные линии, на которых $\Psi(x, y)$ принимает некоторые значения $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ соответственно. Тогда условие (8) в конечно-разностной форме с точностью до членов порядка δ запишется

$$\Psi_0 = \alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2, \quad (11)$$

где $\alpha = \kappa_2 b / (\kappa_2 b + b - \kappa_2 \delta)$, $\beta = b / (\kappa_2 b + b - \kappa_2 \delta)$.

Модель области G изготавливается из электропроводной бумаги одной проводимости. Выполнение условия (11) осуществляется с помощью специального аналогового устройства [3]

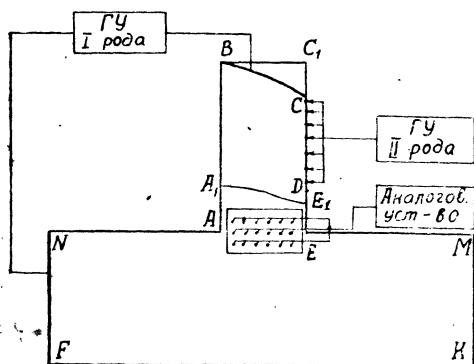


Рис. 2.

(рис. 2). Функция $\Psi(x, y)$ моделируется электрическим потенциалом $U = c\Psi$, где c — константа подобия. Кривая депрессии и водоупор являются линиями равного потенциала: $U = 0$ на BC , $U = U_{\max} = cQ$ на $NFKM$. Заметим, что потенциал U_{\max} определяется в процессе моделирования.

Так как на NAB и DEM $\frac{\partial u}{\partial n} = c \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$, то

в модели они являются

линиями изоляции. Вдоль промежутка высачивания CD для функции $\Psi(x, y)$ выполняются граничные условия II рода (9). Плотность тока вдоль CD равна [4]

$$j = \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{c}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{c}{\rho} \cdot \frac{H_1 b}{\kappa_2 H} \cdot \frac{1}{b-y},$$

где ρ — удельное сопротивление модели.

Разбиваем границу C_1CD на n участков точками $y = y_k$ ($k = 0, n$). Ток, приходящийся на каждый участок (y_k, y_{k+1}) границы, равен

$$i_k = \int_{y_k}^{y_{k+1}} j dy = \frac{c}{\rho} \frac{H_1 b}{\kappa_2 H} \ln \left| \frac{y_{k+1} - b}{y_k - b} \right|. \quad (12)$$

При моделировании ток i_k подается через контакты, расположенные в середине участков разбиения, с помощью блока граничных условий II рода.

Общий ток, протекающий через модель, принимает вполне определенное значение

$$I = \frac{c}{\rho} \int_{NFKM} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} d\sigma = \frac{c}{\rho} (\Phi_M - \Phi_N) = \frac{c}{\rho}, \quad (13)$$

где σ — дуговая абсцисса контура. С помощью блока граничных условий 1 рода между металлическими шинами на BC и $NFKM$ подбираем разность потенциалов U_{\max} , соответствующую общему току.

Неизвестная линия депрессии отыскивается методом последовательных приближений. За нулевое приближение принимается такая кривая, которая лежит заведомо выше истинной линии депрессии. После реализации на модели граничных условий (9) и условий сопряжения (7), (8) необходимо проверить выполнение условия (10). Для этого в G_1 строится эквипотенциальная линия A_1E_1 (рис. 2) и в области A_1BCDE_1 ставится краевая задача для $\Phi(x, y)$ по граничным условиям: $\Phi = 0$ на A_1B , $\Phi = \frac{H_1 b}{\alpha_2 H} \ln \left| \frac{b - H_2/H_1}{b - 1} \right|$ на DE , $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ на A_1E_1 , $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$, $\Phi = \frac{H_1 b}{\alpha_2 H} \ln \left| \frac{b - y}{b - 1} \right|$ на BC , $\Phi = \frac{H_1 b}{\alpha_2 H} \ln \left| \frac{b - y}{b - 1} \right|$ на CD . Строится модель этой области из электропроводной бумаги и задаются соответствующие граничные условия. Замеряя значения $\Phi(x, y)$ вдоль BC и используя условие (10), выбираем положение кривой депрессии в первом приближении. Устанавливая шину вдоль границы BC , найденной в первом приближении, решаем краевую задачу для $\Psi(x, y)$ в G в следующем приближении. Эту процедуру повторяем до тех пор, пока не выполнится с заданной точностью условие (10).

После нахождения кривой депрессии функция $\Psi(x, y)$ легко определяется во всей области простым замером потенциала. Учитывая условия (4) и (6), найдем функцию $\psi(x, y)$, общий фильтрационный расход $Q = -\psi_{NFKM} \cdot \alpha_2$, расход через участки нижнего бьефа $Q_{EM} = (\psi_E - \psi_M) \cdot \alpha_2$, $Q_{DE} = \psi_D - \psi_E$, а также расход через промежуток высачивания $Q_{CD} = Q - (Q_{EM} + Q_{DE})$.

Пример. Пусть $l/H_1 = 0,5$; $l_1/H_1 = l_2/H_1 = 1$; $H_2/H_1 = 0,25$; $T/H_1 = 0,75$; $L/H_1 = 2,5$, $b = 1,4625$, $\alpha_2 = 3$. Коэффициент фильтрации в перемычке, согласно (3), изменяется в пределах $1 \leq \alpha_1(y) \leq 10$ при $0 \leq y \leq 1$.

На рис. 3 показана найденная линия депрессии (кривая 2). Для сравнения на этом же рисунке построены кривые депрессии для случая фильтрации в однородном грунте, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ (кривая 4),

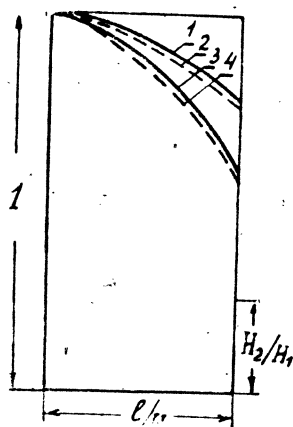


Рис. 3.

в неоднородной перемычке при $\alpha_1(y)$, расположенной на водоупоре (кривая 1) и в однородной перемычке с $\alpha_1 = 1$, подстилаемой водоупором (кривая 3). В таблице 1 приведены фильтрационные расходы для всех четырех случаев. Расчеты показывают влияние неоднородности грунта перемычки и наличия проницаемого основания на положение линии депрессии, участка высачивания и фильтрационного расхода.

Таблица 1

№ п/п	Q	Q_{CD}	Q_{DE}	Q_{EM}
1	2,73	1,9	0,83	—
2	4,29	1,809	1,344	1,137
3	0,97	0,52	0,45	—
4	1,55	0,51	0,434	0,606

ЛИТЕРАТУРА

1. Шешукова Ф. И. Об электро моделировании краевых задач напорной и безнапорной фильтрации в неоднородном грунте.—Труды семинара по краевым задачам. Вып. 16. Изд-во Казанск. ун-та, 1979.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., „Наука“, 1977.
3. Шешукова Ф. И. Аналоговый метод решения краевых задач напорной фильтрации в неоднородном грунте.—Труды семинара по краевым задачам. Вып. 15. Изд-во Казанск. ун-та, 1978.
4. Тетельбаум И. М. Электрическое моделирование. М., Физматгиз, 1959.

Доложено на семинаре 25 января 1979 г.