§. 21.

Dieses ist es eben, was wir zu wissen verlangten, und wir sind unsers Wunsches theilhaft worden, da wir auf der einen Seite lauter bekannte, und auf der andern lauter unbekannte Grössen haben. Wir haben aber den oben gegebenen Regeln gefolgt (§. 18.). Last uns die Probe machen. Es sey also die Summe zweyer Zahlen, welche wir a genennt haben, $= 14$.
Ihre Differentz, welche b heist $= 2$:
so ist $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ (§. 20.).

Nun ist $\frac{1}{2}a = 7$
und $\frac{1}{2}b = 1$

Derowegen $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = 7 - 1 = 6$.

Also ist die kleineste von den beyden Zahlen, deren Summe 14, und deren Differentz 2 ausmacht, so viel als 6. Wird es nun wol ein grosses Kopfbrechen kosten, die grössere davon zu entdecken, wenn wir bedencken, daß die Summe zweyer Zahlen ein Gantzes sey, welches aus den zweyen Zahlen als zweyen Theilen zusammengesetzt ist? Denn wenn man dieses zum voraus setzt: so darf man nur von der Summe der beyden Zahlen, welche in unserm Exempel 14 ist, die kleinere Zahl, welche, wie wir gefunden haben, 6 ist, subtrahiren: so muß die grössere, 8 übrig bleiben.

Es sey $a = 30$, $b = 8$: so ist $\frac{(a - b)}{2} = \frac{(30 - 8)}{2} = 15 - 4 = 11 = x$.

Also die grössere Zahl $y = 30 - 11 = 19$.

§. 22.

Ich habe schon gedacht, daß es mehr als einen Weg gebe, zu der Erkäntniß der Wahrheit zu gelangen, obgleich einer immer kürtzer und leichter ist als der andere. Daher giebet es auch mehrere Auflösungen von einer algebraischen Aufgabe. Wir wollen bey unsrer gegenwärtigen bleiben, und sehen, wie sie sich noch auf mehrere Arten auflösen lasse. Es sey also wie vorhin (§. 20.).

$$\begin{array}{l} x + y = a \\ y - x = b \end{array} \quad (n.\ 2.)$$

$2y = a + b$ (§. 14.) gleiches zu gleichen addirt

$2 = 2$ (§. 20. Ar.)

$y = \frac{a + b}{2}$ (§. 27. Ar.)

und weil $\frac{a + b}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$: so ist $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

§. 23.

In voriger Auflösung haben wir die beyden Gleichungen zusammen addirt, nun wollen wir sie von einander subtrahiren.

Es sey also $a = x + y$

$$b = y - x \quad (\text{§. 20. n. 2})$$

so ist $a - b = 2x \quad (\text{§. 25. Ar.})$

$$2 = 2$$

also ist $\frac{a - b}{2} = x \quad (\text{§. 27. Ar.})$

und weil $\frac{a - b}{2} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$

so ist $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \quad (\text{§. 22. Ar.})$

Das ist, weil a die Summe, b die Differentz, und x die kleine Grösse ist (§. 20.), eben so viel, als wenn man gesagt hätte: **Wenn man von der halben Summe zweyer Grössen ihre halbe Differentz abziehet: so bleibt die kleinere von ihnen übrig.**

§. 24.

Last es uns noch auf eine andere Art versuchen.

Es sey die Summe zweyer Zahlen $= a$, ihre Differentz $= b$, die kleinere Zahl $= m$. Weil nun die grosse Zahl aus der kleinen und der Differentz bestehet, da z. E. 8 aus der kleinern Zahl 6 und der Differentz von 8, das ist 2, und folglich aus 6 und 2 zusammengesetzt ist (§. 21. Anmerck.): so kan man die grosse Zahl $m+b$ nennen.

Es ist also die kleine Zahl $= m$
Die grosse $= m+b$

Also die Summe beyder Zahlen $= 2m+b$
Nun ist die Summe $= a$ (n. 1.)

Also ist $a = 2m+b$ (§. 15. Anm.)
$b = b$ (§. 20. Ar.)

Derowegen ist $a-b = 2m$ (§. 25. Ar.)
$2 = 2$ (§. 20. Ar.)

Also ist $\frac{a-b}{2} = m$ (§. 27. Ar.)

und weil $\frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ (§. 20.)

so ist $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = m$ (§. 15. Anm.)

Das ist: **Wenn man von der halben Summe zweyer Zahlen $= \frac{1}{2}a$ subtrahiret die halbe Differentz derselben $= \frac{1}{2}b$: so bleibet die kleinere Zahl $= m$ übrig.**

§. 25.

Wer diese hier beygebrachte Ausführung betrachtet, der wird finden, daß sie

sich

sich durch Vergleichung mit den citirten paragraphis in lauter förmliche Schlüsse verwandeln lasse. Es beobachtet also auch die Algebra die Regeln der Vernunftlehre, und ihre Rechnungen sind nichts anders, als eine Menge aneinanderhängender Vernunftschlüsse. Also wird es vermuthlich denenjenigen, welche in die Logic und Metaphysic eine tiefe Einsicht besitzen, sehr leicht seyn, die Algebra zu erlernen, sie werden dieses als eine Art des Zeitvertreibes gebrauchen, wenn sie von Nachdencken ermüdet sind, und neue mathematische Wahrheiten zu entdecken, wird die allergeringste ihrer Beschäftigungen seyn. Ich kan nicht davon urtheilen, so viel aber weiß ich, daß man bisher sehr wenig solche Heldenthaten gesehen hat. Und dieses nimmt mich gar nicht Wunder. Denn die Vernunftlehre zeigt uns zwar, wie wir dencken sollen, aber sie giebt uns nicht die Fertigkeit, dieses zu thun. Sie ist also einem Tantzmeister ähnlich, welcher seinem Schüler alle Gänge und Wendungen, welche er bey dem Tantzen machen muß, gantz genau auf das Papier zeichnet, wodurch er, ohnerachtet er alles auf das deutlichste begreift, doch nimmermehr in den Stand gesetzt wird, eine Menuet zu tantzen. Ein grosser Mathematicker hat die Vernunftlehre daher dem Gesetze verglichen, welches uns zwar sagt, was wir thun sollen, aber keine Kraft giebt, die wir von dem Evangelio zu gewarten haben. Daher muß ich allemahl ein klein wenig lachen, wenn ich junge Leute, die ihren Verstand verbessern wollen, mit dem ausdrücklichen Befehle von ihren Vorgesetzten versehen erblicke, die Vernunftlehre, sonst aber nichts von der Mathematick und Philosophie zu studiren. Denn nach meinem Begriffe heist dieses nichts anders, als tantzen lernen, nachdem man sich von dem Tantzen einen deutlichen Begriff gemacht hat, ohne es iemals zu versuchen. Denn in Wahrheit, es ist in diesem Stücke mit dem Verstande nicht anders beschaffen, als mit dem Tantzen. Nun stelle man sich zwey Personen vor, welche tantzen lernen wollten, dem einen wären alle Täntze auf das genaueste auf das Papier gezeichnet, und er betrachtete sie mit der grösten Aufmercksamkeit, ohne sich zu bewegen, ein anderer aber wüste gar keine Regeln, wie er tantzen sollte, er gäbe aber darauf acht, wie andere tantzten, und suchte solches nach zu machen. Welcher von diesen beyden würde wol am ersten ein Tantzmeister werden? Ich glaube der letztere. Denn das Tantzen erfordert eine Fertigkeit, die nicht anders, als durch viele Uebung erhalten werden kan. Wollen wir dieses bey dem Verstande wieder anbringen, so würde folgen, daß eine Fertigkeit im Dencken nicht

so

so wol durch viele Regeln, als vielmehr durch vielfältige Uebungen zuwege gebracht werden könte. Wo treffen wir aber wol dergleichen Uebungen an, als in der Mathematick, und sind nicht die übrigen Wissenschaften nur blos darum hoch zu schätzen, weil sie dieser ihrer Königin ähnlich zu werden suchen. Darum hat der Herr **Baron von Wolf** gantz recht, wenn er einem ieden, der seinen Verstand schärfen will, rathet, die Mathematick noch vor der Vernunftlehre zu erlernen. Denn wenn man auf diese Art verfähret, so fehlt es niemals an Exempeln in der Vernunftlehre, und man erblickt die Gesetze mit Vergnügen, nach welchem man zu handeln gewohnt ist, ohne sie gekannt zu haben. Wäre es die Vernunftlehre, welche die Menschen klug machen sollte; so müste man zu denen Zeiten des Aristoteles und der Schulweisen ungemein klug gewesen seyn, man ist es aber niemals weniger gewesen, als eben damals. Man würde sich sehr irren, wenn man die Schuld davon auf die damalige Beschaffenheit der Vernunftlehre schieben wollte. Denn haben wir es nicht ihnen zu dancken, daß sie alle möglichen Figuren und Modos derer Syllogismen nicht nur entdeckt, sondern auch auf eine gewiß recht sinnreiche Art, welche eine Probe der Zeichenkunst abgeben kan, in ein **Barbara Celarent Darii Ferio**

rio

rio ꝛc. eingekleidet haben. Aber so groß die Gewißheit dieser Erfindung ist, so geringe ist ihr Nutzen. Denn man müste wahrhaftig Methusalems Alter haben, wenn man ein Algebraiste werden wollte, und es nicht nur vor nöthig hielte, alle seine Gedancken in förmliche Schlüsse zu verwandeln, sondern auch zu bestimmen, in welcher Figur und Modo ein ieder Schluß gemacht worden, und ob er den Regeln dieser Figur und Modi gemäß wäre. Deswegen verachte ich aber die Regeln der Vernunftlehre nicht, nein, ein Gelehrter muß einem Tanzmeister ähnlich seyn, welcher, nachdem er durch eine natürliche Geschicklichkeit und vielfältige Uebung tantzen gelernet hat, noch zur Zierde seiner Kunst die Täntze auf das Papier zu zeichnen weiß. Denn daß auch die natürliche Geschicklichkeit darzu erfordert werde, und daß die Vernunftlehre aus einem Esel keinen Menschen machen könne, ist mehr als zu gewiß, daß man sich aber so wenig darum bekümmert, kömmt daher, weil ein ieder von seiner Mutter die Versicherung hat, daß er ungemein klug sey.

§. 26.

Nachdem ich in der vorigen Auflösung den Mangel der fehlenden Sätze durch das Citiren ersetzt habe: so können es meine Leser schon wagen, dieselbe in der algebraischen Sprache zu lesen. Hier ist sie:

1) $$\begin{array}{c} a = x + y \\ b = y - x \\ \hline a - x = b + x \\ \hline a = b + 2x \\ \hline \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b = x \end{array}$$

2) $$\begin{array}{c} a = x + y \\ b = y - x \\ \hline a + b = 2y \\ \hline \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b = y \end{array}$$

3) $$\begin{array}{c} a = x + y \\ b = y - x \\ \hline a - b = 2x \\ \hline \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b = x \end{array}$$

4) $$\begin{array}{c} a = 2m + b \\ \hline a - b = 2m \\ \hline \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b = m \end{array}$$

§. 27.

## Aufgabe.

Man soll sagen, was es für eine Zahl sey, deren Hälfte, Drittel und Viertel um 1 grösser ist als die Zahl selbst.

Auf-

## Auflösung.

1) Benennung.

Weil nur eine Zahl zu finden ist: so nennet sie x.

2) Gleichung.

Da wir nicht mehr als eine unbekannte Zahl haben: so brauchen wir auch nur eine Gleichung. Diese giebt sich aus der Beschaffenheit der Aufgabe selbst. Denn es soll die Hälfte der unbekannten Zahl, das ist $\frac{1}{2}x$, das Drittel der unbekannten Zahl $= \frac{1}{3}x$ und das Viertel derselben $= \frac{1}{4}x$ so viel ausmachen, als die unbekannte Zahl und Eines, das ist $x + 1$. Also bekommen wir folgende Gleichung:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1.$$

3) Ausführung.

Es ist $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$. (n. 2.) Da diese Brüche zusammen addirt werden sollen, und doch verschiedene Nenner haben: so müssen sie vorher unter einerley Benennung gebracht werden (§. 65. Ar.). Wenn man dieses thut, so bekömmt man an statt $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ folgende gleichgültige Brüche: $\frac{12}{24} + \frac{8}{24} + \frac{6}{24}$.

Dero-

Derowegen ist

$\frac{12}{24}x + \frac{8}{24}x + \frac{6}{24}x = x + 1$ (§. 15. Anm.)

Nun ist

$\frac{12}{24}x + \frac{8}{24}x + \frac{6}{24}x = (12x + 8x + 6x) : 24$ (§. 58. Anmerck.)

---

Derowegen ist

$(12x + 8x + 6x) : 24 = x + 1$ (§. 22. Ar.)

Man addire diese Zahlen würcklich: so ist

$(12x + 8x + 6x) : 24 = \frac{26}{24}x$

---

Also ist $\frac{26}{24}x = x + 1$ (§. 22. Ar.)

$24 = 24$ (§. 20. Ar.)

---

Man multiplicire also mit 24:

so ist $26x = 24x + 24$ (§. 26. Ar.)

Denn wenn ich einen Bruch mit seinem Nenner multiplicire: so kömmt allemal der Zehler heraus; weil die Multiplication die Division wieder aufhebet. Derowegen wenn ich $\frac{26}{24}x$ durch 24 multiplicire: so bekomme ich $26x$. Und wenn ich $x + 1$ mit 24 multiplicire: so kömmt $24x + 24$ heraus.

Es ist also $26x = 24x + 24$

subtr. $24x = 24x$ (§. 20. Ar.)

$2x = 24$ (§. 25. Ar)

divid. $2 = 2$ (§. 20. Ar.)

$x = 12$ (§. 27. Ar.)

W. Z. E.

§. 28.

§. 28.

Es ist also 12 diejenige Zahl, deren Hälfte, Drittel und Viertel um 1 grösser ist, als sie selbst. Denn die Hälfte von 12 ist 6, das Drittel ist 4, und das Viertel ist 3. Dieses macht zusammen addirt 13 aus, welches um 1 mehr ist als 12.

§. 29.

Nun ist es kein Räzel mehr, wenn man lieset:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$$

$$\frac{26}{24}x = x + 1$$

$$26x = 24x + 24$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

§. 30.

Man kan zur Uebung noch allerley Exempel machen, als wenn man sezet $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 2$: so findet man $x = 24$. Also ist die Hälfte, das 3tel und 4tel von 24 um 2 grösser als 24. Denn $12 + 8 + 6 = 26 = 24 + 2$.

Sezet $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 3$:
so ist $x = 36$.
Und wenn $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 4$:
so ist $x = 48$. u. s. w.

## §. 31.

Nimmt man eine ungereimte Bedingung an: so bekömmt man auch etwas ungereimtes heraus, und die Falschheit des angenommenen Satzes wird immer grösser, je weiter wir die Rechnung fortsetzen. Daher zeigen sich entweder die Mittel, wie die Aufgabe aufzulösen sey, oder man findet, daß sie etwas widersprechendes in sich halte, und also an und vor sich selbst unter die Unmöglichkeiten gehöre. Last uns z. E. die unmögliche Bedingung annehmen, es sollte die Helfte, $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ einer Zahl eben so groß seyn als die Zahl selbst: so wäre

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x = x$$

$$\frac{12}{24}x + \frac{8}{24}x + \frac{18}{24}x = x \quad \text{(zu einerl. Benenn.)}$$

$$\frac{38}{24}x = x \quad \text{(würcklich addirt)}$$

$$38x = x \quad \text{(mit 24 multiplicirt.)}$$

Welches ungereimt ist. Denn es soll die Zahl eben so groß bleiben, als sie vorher war, ohnerachtet man sie durch 38 multiplicirt hat. Indessen wollen wir doch die Rechnung weiter fortsetzen. Es war:

$$38x = x$$
$$x = x \quad \text{(subtrah.)}$$

$$37x = 0$$
$$37 = 37 \quad \text{(divid.)}$$

$$x = \frac{0}{37} = 0$$

Also wäre x der 37ste Theil von Nichts. Der 37ste Theil von Nichts aber ist Nichts.

§. 32.

Es sey

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{8}x = x - 1$$

$$\tfrac{32}{64}x + \tfrac{16}{64}x + \tfrac{8}{64}x = x - 1 \qquad \text{(einerl. Ben.)}$$

$$\tfrac{56}{64}x = x - 1 \qquad \text{(würckl. addirt)}$$

$$\begin{array}{rcll} 56x & = & 64x - 64 & \text{(64 multipl.)} \\ 64 & = & 64 & \text{(addirt)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} 56x + 64 & = & 64x & \\ 56x & = & 56x & \text{(subtrahirt)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} 64 & = & 8x & \\ 8 & = & 8 & \text{(dividirt)} \end{array}$$

$$8 = x$$

Denn $\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{8}x = 4 + 2 + 1 = 7$
Es ist aber $7 = 8 - 1$.

§. 33.

Setzet ferner:

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{6}x + \tfrac{1}{8}x = x + 1$$

$$\tfrac{192}{384}x + \tfrac{96}{384}x + \tfrac{64}{384}x + \tfrac{48}{384}x = x + 1$$

$$\tfrac{400}{384}x = x + 1$$

$$400x = 384x + 384$$

$$\begin{array}{rcl} 16x & = & 384 \\ 16 & = & 16 \end{array}$$

$$x = 24$$

§. 34.

§. 34.

Ich habe mit Fleiß bey den letztern Exempeln die Citationen und Erläuterungen hinweggelassen. Denn man muß sich nach und nach gewöhnen, eine mathematische Auflösung auch ohne dieselben zu lesen; indem es sehr verdrüßlich seyn würde, einerley Sache vielfältig zu wiederholen. Nein, man muß nach und nach anfangen, auch härtere Speisen zu verdauen. Indessen gehört doch einige Klugheit dazu, wenn ein mathematischer Koch seinen Gästen lauter solche Dinge vorsetzen soll, die ihr Magen vertragen kan, und doch nicht eckelhaft sind. Das Kunststücke besteht hauptsächlich darinnen, daß man nur in denen Fällen, wo ein noch nicht erläuterter algebraischer Kunstgriff vorkömmt, seinen Zusammenhang mit den ersten mathematischen Grundwahrheiten zeiget, nicht aber durch vielfältige Wiederholung der deutlichsten Sachen seinen Lesern beschwerlich falle. Wir sehen es so gar in der Musick, daß uns allzuklare Vorstellungen fast eben so wie allzudunckle verdrüßlich fallen. Denn woher kömmt es, daß viele Octaven hintereinander übel klingen, ohnerachtet sie die vollkommensten Consonantien sind? In Wahrheit, aus keiner andern Ursache: als weil uns die ofte Wiederholung klarer Vorstellungen verdrüßlich fällt. Hieraus erhellet also, wie man es machen müsse, wenn man die Algebra auf eine leichte und iedermann begreifliche Art und Weise vortragen will. Das gantze Kunststücke ist so leichte und so natürlich, daß es mich Wunder nimt, warum man sich desselben nicht längstens bedienet. Vermuthlich aber ist es darum nicht geschehen, weil man sich eingebildet hat, es werde dadurch diese Wissenschaft ausserordentlich weitläuftig gemacht werden. Ich gestehe es, daß dieser Einwurf etwas wahres in sich enthalte. Denn ein Vortrag muß nothwendig weitläuftiger werden, wenn man alle die Sätze anführt, die man sonst auszulassen gewohnt ist. Aber diese Weitläuftigkeit ist so groß nicht, als man sich anfangs eingebildet: weil man nicht nöthig hat, in ähnlichen Fällen mehr als einmal alles deutlich aus einander zu setzen. Denn wer es hernach nicht begreiffen kan, der muß von Natur einen blöden Verstand haben; und da es besser ist, daß dergleichen Leute mit dem Studiren sich nichts zu thun machen: so halte ich es selber nicht vor nöthig, daß man um ihrer Einfalt willen einen Duodezband in einen Folianten verwandele. Da indessen aber doch die Buchdruckerfarbe keine so kostbare Materie ist, als der Nervensaft eines vernünftigen Menschen: so kan auch iene mit leichterer Mühe als diese verschwendet werden; und es ist besser zwey Zeilen mehr zu drucken, als sich zwey Stunden vergeblich den Kopf zu zerbrechen. Aber wenn man die Wahrheit sagen soll: so haben bisweilen die geschicktesten Algebraisten nicht die Geschicklichkeit, sich auf eine deutliche Art auszudrucken. Es geht ihnen vielmehr wie denen Gelehrten, von welchen man zu sagen pflegt: sie könnten es nicht von sich geben; und da alle Vomitive vergebens sind, weil sie zwar klare, aber keine deutliche Begriffe haben. Man thut also solchen Gelehrten zu viel, wenn man behauptet, es sey der Mangel der Erkänntniß schuld daran, daß sie sich nicht ausdrücken können. Nein, unsre Begriffe können dem ohnerachtet vollkommen klar seyn. Denn man stelle sich einen Blinden vor, welcher von uns eine Erklärung der rothen Farbe verlangte, werden wir sie ihm so geben können, daß er zufrieden seyn kan? nimmermehr. Nicht aber, weil wir gar keinen Begriff davon hätten, denn dieser ist vollkommen klar; sondern weil wir keinen deutlichen Begriff haben. Ohnerachtet nun hieraus so viel klar ist, daß ein Gelehrter, welcher es nicht von sich geben kan, dem ohnerachtet ein Gelehrter seyn könne: so sollten doch billig alle diejenigen, welche andern Wissenschaften entweder mündlich oder schriftlich vortragen sollen, mit einer deutlichen Erkäntniß versehen seyn. Denn es ist seltsam, wenn man iemanden etwas begreiflich machen will, das man ihm nicht sagen kan.

§. 35.

## Aufgabe.

Aus der gegebenen Summe zweyer Zahlen, und dem Producte einer Zahl in die andere, die Zahlen selber zu finden.

## Auflösung.

1) Benennung.

Weil die Summe der beyden Zahlen gegeben ist: so nennet sie a, und aus gleichmäßiger Ursache ihr Product b. An statt aber die grössere unbekannte Zahl y, und die kleinere x zu nennen, wollen wir blos die halbe Differentz der beyden unbekannten Zahlen suchen: Denn wenn wir diese wissen: so können wir gar leicht die Zahlen selber finden. Es sey also die halbe Differentz der unbekannten Zahlen = x. Nun haben wir gefunden, daß die grosse Zahl herauskomme, wenn man zu der halben Summe die halbe Differentz addiret, und daß die kleine gefunden werde, wenn man von der halben Summe die halbe Differentz subtrahirt (§. 20.).

Es

Es ist aber die Summe $= a$
Die halbe Differenz $= x$

Derowegen ist die gröste Zahl $= \frac{1}{2}a + x$
und die kleine $= \frac{1}{2}a - x$ (§. 20.)

2) Gleichung.

Das Product beyder Zahlen, welches wir b genennt haben (n. 1.) entstehet, wenn man beyde Zahlen mit einander multipliciret. Nun ist die eine Zahl $= \frac{1}{2}a + x$, und die andere $= \frac{1}{2}a - x$. Derowegen ist das Product $b = \frac{1}{2}a + x$ multiplicirt durch $\frac{1}{2}a - x$.

Man multiplicire also:
$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}a + x \\ \frac{1}{2}a - x \\ \hline -\frac{1}{2}ax - xx \\ \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ax \quad\quad \\ \hline \end{array}$$

so ist das Product $\frac{1}{4}aa - xx$
Derowegen ist $b = \frac{1}{4}aa - xx$.

3) Ausführung.

Es ist $b = \frac{1}{4}aa - xx$ (n. 2.)
$xx = xx$ (addiret)

Derowegen $b + xx = \frac{1}{4}aa$ (§. 24. Ar.)
$b = b$ (subtrahirt)

$xx = \frac{1}{4}aa - b$ (§. 25. Ar.)

xx ist so viel als x multiplicirt durch x. Eine Zahl, welche entsteht, indem eine andere durch sich selbst multiplicirt wird, ist das Quadrat der andern.

Also ist xx ein Quadrat, x aber die Wurtzel davon. Wir finden also x, wenn wir aus xx die Quadratwurtzel ausziehen. Damit aber die Gleichheit erhalten werde: so müssen wir auch aus $\frac{1}{4}aa - b$ die Quadratwurtzel ausziehen, und dieses zeigen wir dadurch an, wenn wir das Wurtzelzeichen $\surd$ davor setzen.

Es ist also $x = \surd(\frac{1}{4}aa - b)$

Denn daß gleiches herauskommen müsse, wenn man aus zwey gleichen Grössen die Quadratwurtzeln auszieht, ist aus dem arithmetischen Grundsatze klar: Wenn man gleiches durch gleiches dividiret, so kommen gleiche Quotienten heraus.

§. 36.

Last uns die Probe machen:

Es sey die Summe zweyer Zahlen $= a = 14$.
Das Product derselben $= b = 48$:
so ist $x = \surd(\frac{1}{4}aa - b)$
Nun $a = 14$. Also $aa = 14 \times 14 = 196$.
Also $\frac{1}{4}aa = \frac{196}{4} = 49$.
$b$ ist $= 48$. Derowegen ist $\frac{1}{4}aa - b = 49 - 48 = 1$ und $\surd(\frac{1}{4}aa - b) = \surd 1 = 1$. Also ist $x = 1$. Nun ist x die halbe Differentz der beyden Zahlen (§. 35. n. 1.), die grosse ist $\frac{1}{2}a + x$ und die kleine $\frac{1}{2}a - x$ (§. 20. n. 1.). Es ist aber $\frac{1}{2}a = 7$. Derowegen $\frac{1}{2}a + x = 7 + 1 = 8$, und $\frac{1}{2}a - x = 7 - 1 = 6$.

$=6$. Folglich sind 6 und 8 die beyden Zahlen, welche zusammen addiret 14 und mit einander multipliciret 48 ausmachen.

§. 37.

Weil $\frac{1}{4}aa = \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}a$ (§. 68. Ar.), und $\frac{1}{2}a$ in unserm Exempel $= 7$ (§. 36.): so ist $\frac{1}{4}aa = 7 \times 7 = 49$. Also hätte man $\frac{1}{4}aa$ auch auf diese Art finden können.

§. 38.

Wollte man wieder aus der letzten Gleichung eine Regel machen: so müste man sich gefallen lassen, sie mit Worten auszudrucken, alsdenn aber würde sie folgendergestalt lauten:

> **Die halbe Differentz zweyer Grössen wird gefunden, wenn man aus dem Unterschiede zwischen dem Quadrate, ihrer halben Summe, und ihrem Producte, die Quadratwurtzel ausziehet.**

§. 39.

Auch selbst dieienigen Gleichungen, welche unter währender algebraischer Rechnung vorkommen, enthalten öfters die allernützlichsten Lehrsätze. Wir haben in dem gegenwärtigen Exempel eine Probe davon. Denn die Gleichung $\frac{1}{4}aa = b + xx$ giebt den Lehrsatz an die Hand:

Das Quadrat der halben Summe zweyer Grössen, ist gleich dem Producte derselben in einander, und dem Quadrate des halben Unterscheides.

§. 40.

Alles was hier von der gegenwärtigen Aufgabe gesagt worden, enthalten folgende Zeilen:

Die Summe $= a$ Die halbe Differ. $= x$
Das Product $= b$

$$\frac{1}{4}aa - xx = b$$

$$\frac{1}{4}aa = b + xx$$

$$\frac{1}{4}aa - b = xx$$

$$\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = x$$

§. 41.

## Aufgabe.

Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen, und der Differentz ihrer Quadrate, die beyden Grössen zu finden.

## Auflösung.

1) Benennung.

Es sey die Summe $= a$, Die halbe Diff. der Grössen $= y$
Die Differentz der Quadrate $= b$,

So ist die eine Grösse $= \frac{1}{2}a + y$.
Und die andere Grösse $= \frac{1}{2}a - y$.

Das