Das Quadrat der halben Summe zweyer Grössen, ist gleich dem Producte derselben in einander, und dem Quadrate des halben Unterscheides.

§. 40.

Alles was hier von der gegenwärtigen Aufgabe gesagt worden, enthalten folgende Zeilen:

Die Summe $= a$ Die halbe Differ. $= x$
Das Product $= b$

$$\frac{1}{4}aa - xx = b$$

$$\frac{1}{4}aa = b + xx$$

$$\frac{1}{4}aa - b = xx$$

$$\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = x$$

§. 41.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen, und der Differentz ihrer Quadrate, die beyden Grössen zu finden.

Auflösung.

1) Benennung.

Es sey die Summe $= a$, Die halbe Diff. der Grössen $= y$
Die Differentz der Quadrate $= b$,

So ist die eine Grösse $= \frac{1}{2}a + y$.
Und die andere Grösse $= \frac{1}{2}a - y$.

Das

Das Quadrat der ersten wird also gefunden, wenn wir $\frac{1}{2}a + y$ mit sich selbst multipliciren, und das Quadrat der andern, wenn wir $\frac{1}{2}a - y$ mit sich selbst multipliren. Last uns dieses thun. Denn wenn wir die Quadrate beyder Grössen haben, so wird es uns leicht fallen, die Differentz dieser Grössen zu entdecken. Multipliciret also erstlich $\frac{1}{2}a + y$ durch $\frac{1}{2}a + y$.

$$\begin{array}{r}
\frac{1}{2}a + y \\
\frac{1}{2}a + y \\
\hline
\frac{1}{2}ay + yy \\
\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ay \quad\quad \\
\hline
\end{array}$$

So ist das Quadrat der grösten Zahl $\frac{1}{4}aa + ay + yy$

Multipliciret ferner

$$\begin{array}{r}
\frac{1}{2}a - y \\
\frac{1}{2}a - y \\
\hline
- \frac{1}{2}ay + yy \\
+ \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ay \quad\quad \\
\hline
\end{array}$$

So ist das Quadrat der kleinern Zahl $\frac{1}{4}aa - ay + yy$

Da nun die Differentz zweyer Grössen gefunden wird, wenn man die kleinere von der grösseren subtrahiret: so findet man die Differentz der Quadrate, wenn man von dem Quadrate der grösten Zahl das Quadrat der kleinern abziehet.

Nun

Nun ist das Quadrat der grössern $\frac{1}{4}aa + ay + yy$

das Quadrat der kleinern $\frac{1}{4}aa - ay + yy$

Derowegen ist die Differ. der Quadrate $= 2ay$

2) Gleichung.

Die Differentz der Quadrate ist $= b$ (n. 1.). Die Differentz der Quadrate ist $= 2ay$ (n 1.). Derowegen ist

$b = 2ay$ (§. 22. Ar.)

3) Ausführung.

$b = 2ay$ (n. 2.)

Hier ist bekanntes $2a$ mit dem unbekannten y verbunden durch die Multiplication. Man wird es also durch die Division voneinander trennen müssen (§. 18.), und dabey den Satz anbringen: Wenn man gleiches durch gleiches dividiret: so kommen gleiche Quotienten heraus (§. 27. Ar.). Hieraus ist folgendes begreiflich:

$$b = 2ay$$
$$2a = 2a$$
$$\frac{b}{2a} = y$$

Weil wir nun auf der einen Seite lauter bekannte und auf der andern nur eine unbekannte Grösse haben: so ist

ist die Rechnung geendiget (§. 18.), und wir haben unsre Absicht erreicht. Die Regel, welche wir aus der letzten Gleichung ziehen können, ist folgende: **Wenn die Differentz zweyer Quadrate durch das zweifache der halben Summe dividirt wird, so kömmt die halbe Differentz der Grössen heraus.**

§. 42.

Es sey die Differentz der Quadrate $= b = 40$. Die Summe der beyden Grössen $= a = 10$: So ist die halbe Differentz derselben $= 40 : (2 \times 10) = 40 : 20 = 2$.

Folgends die grössere Zahl $= \frac{1}{2}a + y$ (§. 20.) $= 5 + 2 = 7$,

und die kleinere $= \frac{1}{2}a - y$ (§. 20.) $= 5 - 2 = 3$.

§. 43.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen, und der Summe ihrer Quadrate, die beyden Grössen zu finden.

Auflösung.

1) **Benennung.**

Es sey die Summe der beyden Grössen $= a$,

die halbe Differentz $= y$,

die Summe ihrer Quadrate $= b$.

So ist die eine Grösse $\frac{1}{2}a + y$ (§. 20.)

und die andere $\frac{1}{2}a - y$

2) Gleichung.

Weil von der Summe der Quadrate beyder Grössen hier die Rede ist: so wollen wir diese Summe machen. Zu dem Ende werden wir beyde Grössen quadriren, und diese Quadrate zusammen addiren müssen. Nun ist die grössere $\frac{1}{2}a + y$. Man multiplicire also

$$\begin{array}{rl} & \frac{1}{2}a + y \\ & \frac{1}{2}a + y \\ \hline & \frac{1}{2}ay + yy \\ \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ay & \\ \hline \frac{1}{4}aa + ay + yy & \end{array}$$

das Quadr. der grössern.

Man multiplicire ferner die kleinere mit sich selbst.

$$\begin{array}{rl} & \frac{1}{2}a - y \\ & \frac{1}{2}a - y \\ \hline & -\frac{1}{2}ay + yy \\ +\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ay & \\ \hline \end{array}$$

$\frac{1}{4}aa - ay + yy$ das Quad. der kleinen.

$\frac{1}{4}aa + ay + yy$ das Quad. der grössern.

$\frac{1}{2}aa + yy$ die Summe der Quad.

Nun ist die Summe der Quadrate $= b$ (n. 1.)

Derowegen ist $b = \frac{1}{2}aa + yy$ (n. 2.)

3) Aus-

3) Ausführung.

$$
\begin{array}{lll}
b = \frac{1}{2}aa + yy & & (\text{n. 2.}) \\
\frac{1}{2}aa = \frac{1}{2}aa & & (\text{§. 20. Ar.}) \\
\hline
b - \frac{1}{2}aa = yy & & (\text{§. 25. Ar.})
\end{array}
$$

Weil wir aber nicht wissen wollen, was yy, sondern was y ist, und y die Quadratwurtzel von yy ist (§. 128. Anmerck.): so werden wir aus yy die Quadratwurtzel ausziehen müssen. Wenn wir aber aus yy die Quadratwurtzel ausziehen: so müssen wir sie auch aus $b - \frac{1}{2}aa$ ausziehen, wenn die Gleichheit erhalten werden soll (§. 18.). Nun ist die Quadratwurtzel von $b - \frac{1}{2}aa = \sqrt{(b - \frac{1}{2}aa)}$ und die Quadratwurtzel von $yy = y$. Derowegen ist $\sqrt{(b - \frac{1}{2}aa)} = y$. W. Z. E.

§. 44.

Folgendes Exempel kan zur Probe dienen: Es sey die Summe zweyer Zahlen $= a = 10$, die Summe ihrer Quadrate $= b = 58$: so ist ihre halbe Differentz $= y = \sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa)} = \sqrt{(29 - 25)} = \sqrt{4} = 2$.
Nun ist die grössere Zahl $= \frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$, und die kleinere $= \frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.
Also sind die beyden Zahlen 7 und 3.
Denn ihre Summe ist $= 10$,
das Quadrat von $7 = 49$,

das

das Quadrat von $3 = 9$,
Derowegen die Summe derer Quadr. $= 58$.

§. 45.

Ich habe gesagt, daß die Algebra ihre eigenen Kunstgriffe selbsten erfinde. Wir können davon an der unreinen quadratischen Gleichung eine Probe machen. Wir müssen also erst ausmachen, was eine unreine quadratische Gleichung (æquatio quadratica affecta) sey. Zu dem Ende erinnere man sich dessen, was ich in meinen Anmerckungen (§. 141.) erwiesen habe. Ich habe daselbst dargethan, daß das Quadrat einer binomischen Wurtzel aus dem Quadrate des ersten Theils, aus einem doppelten Producte des ersten Theils in den andern, und aus dem Quadrate des andern Theils bestehe. Denn das Quadrat von $a + b$ ist $a^2 + 2ab + b^2$. Nun stelle man sich vor, es sey eine Gleichung vorhanden, die eine Grösse dieser Gleichung würde ein Quadrat einer binomischen Wurtzel seyn, wenn nur nicht das Quadrat des einen Theils noch fehlte: so ist dieses eine unreine quadratische Gleichung (æquatio quadratica affecta). Z. E. Es sey:

$$x = a^2 + 2ab$$

So siehet man wohl, daß die eine Grösse $a^2 + 2ab$ ein vollkommenes Quadrat werden würde, wenn noch das b^2 hinzukäme.

§. 46.

Wenn dergleichen unreine quadratische Gleichung vorkömmt, und sie soll aufgelöset werden, so muß man sie ergäntzen. Und dieses geschiehet folgender gestalt. Wenn $c^2 = a^2 + 2ab$: so ist a^2 das Quadrat des ersten Theils, und folglich die Wurtzel von a^2, das ist a, der erste Theil selbst. Derowegen ist $2a$ der erste Theil zweymahl genommen. Da nun $2ab$ ein Product, aus dem ersten Theile zweymahl genommen, in dem andern Theil ist: so muß b der andere Theil der Wurtzel seyn. Nun fehlt uns noch das Quadrat des andern Theils, um das Quadrat der binomischen Wurtzel vollkommen zu machen, und es kan nicht schwer fallen, dasselbe zu finden, wenn wir nur bedencken, daß b der andere Theil der Wurtzel sey. Denn wenn dieses ist: so ist b^2 das Quadrat des andern Theils, welches noch hinzugesetzt werden muß. Es sey also wie vorhin

$$c^2 = a^2 + 2ab$$

so addiret $b^2 = b^2$ (§. 20. Ar.)

$$c^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (\text{§. 24. Ar.})$$

Weil nun gleiches herauskömmt, wenn man aus gleichen Grössen die Quadratwurtzel ausziehet: so ziehe man erstlich die Quadratwurtzel aus $c^2 + b^2$. Diese kan nicht anders angedeutet werden, als durch

$\surd(c^2+b^2)$. Ferner ziehe man auch aus $a^2+2ab+b^2$ die Quadratwurtzel. Diese ist $a+b$ (§. 141. Anmerck.). Derowegen ist

$$\surd(c^2+b^2)=a+b$$

§. 47.

Damit man sehe, wie die unreine quadratische Gleichung mit Nutzen gebraucht, und wie dadurch der Weg zur unbekannten Grösse entdeckt werden könne; so wollen wir folgende Gleichung annehmen:

$$x^2+ax=b^2.$$

In dieser Gleichung ist x^2 das Quadrat des andern Theils einer binomischen Wurtzel; ax ist ein Product aus dem ersten Theile 2mahl genommen in den andern. Da nun x der andere Theil ist: so muß a den ersten Theil zweymahl genommen vorstellen. Derowegen ist der erste Theil die Helfte von a das ist $\frac{1}{2}a$. Wenn nun $\frac{1}{2}a$ der erste Theil der Wurtzel ist: so ist das Quadrat des ersten Theils $\frac{1}{4}aa$ oder $\frac{1}{4}a^2$ (§. 154. Anmerck.), und dieses ist es eben, was uns noch fehlt, wenn das Quadrat vollständig gemacht werden soll. Man addire also zu der gegebenen Gleichung

x^2

$$x^2 + ax = b^2$$

(addirt) $\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$

$$\frac{1}{4}a^2 + ax + x^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2 \text{ (§. 24. Ar.)}$$

(Rad. extr.)

$$\frac{1}{2}a + x = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$$

(subtrahirt) $a = a$

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)} - a \text{ (§. 25. Ar.)}$$

Da wir nun nunmehro auf der einen Seite lauter bekannte, und auf der andern Seite nur eine unbekannte Grösse haben: so ist die unreine quadratische Gleichung vollkommen aufgelöst.

§. 48.

Es müssen eben nicht lauter würckliche Grössen in einer unreinen quadratischen Gleichung seyn, sondern sie kan auch aus verneinenden bestehen. Folgendes Exempel wird es deutlich machen.

Wenn $x^2 - ax = b^2$

so ist $+ x^2$ das Quadrat des andern Theils. Folglich $+ x$ der andere Theil selbst. $- ax$ ist ein Product aus dem andern Theile in dem ersten 2mahl genommen. Da nun allemahl der eine Factor herauskommen muß, wenn man mit dem andern in das Factum dividiret (§. 137. Anmerck.): so dividire man

$- ax$ durch $+ x$.

Wenn man dieses thut: so bekömmt man $-a$ (§. 15.). Derowegen ist $-a$ das doppelte des ersten Theils. Wird also nicht $-\frac{1}{2}a$ der erste Theil selbsten seyn? Wenn man $-\frac{1}{2}a$ durch $-\frac{1}{2}a$ multiplicirt: so bekömmt man $+\frac{1}{4}a^2$ (§. 68. Ar.). Also ist $+\frac{1}{4}a^2$ das Quadrat des erstern Theils, welches noch addirt werden muß. Dadurch gelanget man zu folgender Auflösung.

$$
\begin{array}{ll}
x^2 - ax = b^2 & \\
\frac{1}{4}a^2 \;=\; \frac{1}{4}a^2 & \text{(addirt.)} \\
\hline
\frac{1}{4}a^2 - ax + x^2 = b^2 + \frac{1}{4}a^2 & \text{(§. 24. Ar.)} \\
\hline
x - \frac{1}{2}a = \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)} & \text{(Rad. extrah.)} \\
+\frac{1}{2}a \;=\; +\frac{1}{2}a & \text{(addirt.)} \\
\hline
x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)} & \text{(§. 24. Ar.)}
\end{array}
$$

Will man die Probe machen, ob $x - \frac{1}{2}a$ die Quadratwurtzel von $\frac{1}{4}a^2 - ax + x^2$ sey: so darf man nur $x - \frac{1}{2}a$ mit sich selbst multipliciren.

$$
\begin{array}{rrr}
 & x & -\frac{1}{2}a \\
 & x & -\frac{1}{2}a \\
\hline
 & -\frac{1}{2}ax & +\frac{1}{4}a^2 \\
+x^2 & -\frac{1}{2}ax & \\
\hline
x^2 & -ax & +\frac{1}{4}a^2
\end{array}
$$

§. 49.

Damit wir den Gebrauch der unreinen quadratischen Gleichungen desto deutlicher einsehen: so wollen wir uns derselben bedienen, eine Aufgabe aufzulösen, welche wir oben auf eine andere Art aufgelöst haben.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Summe zweyer Zahlen, und dem Producte einer Zahl in die andere, die Zahlen selber zu finden.

Auflösung.

Es sey die Summe $= a$ die grosse Zahl $= y$
das Product $= b$ die kleine Zahl $= x$

So ist

$$a = y + x \qquad b = xy$$

(subtrah.) $y = y$ $\qquad$ $y = y$ (divid.)

$$a - y = x \qquad b : y = x$$

$a - y = b : y$ (§. 22. Ar.)

$-y = -y$ (multiplic.)

(æquat. quadr.) $-ay + y^2 = \dfrac{-by}{y} = -b$ (§. 15.)

$\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$ (add.)

$$\tfrac{1}{4}a^2 - ay + y^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - b$$

(Rad. extrah.) $\frac{1}{2}a - y = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)}$

$\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a$ (addirt.)

$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b)} + \tfrac{1}{2}a$$

§. 50.

Probe.

Es sey $a = 14$, $b = 48$: so ist $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)} = \sqrt{(49 - 48)} = 1$. Ferner $\frac{1}{2}a = 7$. Also $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)} + \frac{1}{2}a = 1 + 7 = 8 = y$ (§. 49.).

Wollte man aus der letzten Gleichung eine Regel machen, so würde sie nach der algebraischen Grammatica folgender gestalt lauten:

Wenn man aus der Summe und dem Producte zweyer Zahlen die Zahlen selber finden will: so muß man von dem Quadrate der halben Summe das Product subtrahiren, aus der gefundenen Zahl die Quadratwurtzel ausziehen, und die halbe Summe darzu addiren, so bekömmt man die gröste von denen beyden Zahlen, welche, wenn sie von der Summe abgezogen wird, die kleine übrig läst.

§. 51.

Hat man Lust, eine kleine mathematische Zauberey anzustellen: so kan solches durch die gegenwärtige und andere Aufgaben von dieser Art gar leichte geschehen. Man läst z. E. iemanden zwey Zahlen in die Gedancken nehmen, und läst sich von ihm nur ihre Summe und ihr Product sagen, so kan man

man wissen, was er vor Zahlen in den Gedancken gehabt hat.

§. 52.

Wir sehen nun immer mehr und mehr, daß ein Algebraiste die Wahrheit in seiner Gewalt habe, und daß er weiter nichts als Zeit und Papier nöthig habe, um sie zu entdecken. Solchergestalt ist er geschickt, seine Wissenschaft beständig zu bereichern, indem er immerfort neue Entdeckungen darinnen machen kan. Aber dieses ist auch eben mit eine Ursache, warum man die mathematischen Erfindungen nicht so hoch als andere zu schätzen gewohnt ist. Denn die Menschen beurtheilen den Werth der Dinge aus ihrer Seltsamkeit, sie haben sich also einen Maasstab verfertiget, welcher sehr unrichtig ist. Denn wenn wir die Welt mit unpartheyischen Augen betrachten, so werden wir finden, daß die gemeinsten Dinge öfters die alleredelsten sind. Was ist nützlicher und unentbehrlicher, als das Eisen, und gleichwol giebt man einer Perle und orientalischen Demante den Vorzug? Will man sich auf die schönen Farben berufen; diese besitzen die böhmischen Demante auch, und wenn man ia behaupten wollte, daß sie in den orientalischen noch schöner wären: so würde dieser Unterscheid doch nimmermehr so viel ausmachen, daß man seinethalben einen kleinen orientalichen Demant einer grossen Menge böhmischer Demante vorziehen sollte. Man thut es aber doch, und warum? Weil der erste weit her ist, und seltener gefunden wird. Denn so ist es:

> **Der Wahn macht falsche Güter groß,**
> **Damit wir was zu klagen haben.**

Gewiß, es ist in einigen Stücken mit den Menschen recht lächerlich beschaffen, und wer weiß, was uns die heydnischen Poeten mit ihrer Fabel haben sagen wollen; wenn sie erzehlen, es hätten sich die Götter einen Rausch getruncken gehabt, als sie den Menschen gemacht hätten, und da sie ihn betrachtet, nachdem sie wieder nüchtern geworden; so hätten sie sich des Lachens nicht darüber enthalten können.

§. 53.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Producte zweyer Grössen und ihrer Differentz die Grössen selber zu finden.

Auflösung.

Es sey das Product $= a$
Die Differentz $= b$
Die gröste Grösse $= x$
Die andere $= y$

So

So ist

(per hypoth.)	$a = xy$	(per hypoth.)	$b = x - y$
(dividirt.)	$y = y$	(addirt.)	$y = y$
(§. 27. Ar.)	$a : y = x$	(§. 24. Ar.)	$b + y = x$

Derowegen $a : y = b + y$ (§. 22. Ar.)

$y = y$ (multiplicirt.)

(æq. quadr. aff.) $a = by + y^2$ (§. 45.)

$\frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^2$ (§. 46.)

$a + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^2 + by + y^2$ (§. 24. Ar.)

(Rad. extr.) $\sqrt{(a + \frac{1}{4}b^2)} = \frac{1}{2}b + y$

$\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b$ (subtrahirt.)

$\sqrt{(a + \frac{1}{4}b^2)} - \frac{1}{2}b = y$ (§. 25. Ar.)

Das ist: *Wenn man zu dem Producte zweyer Zahlen das Quadrat ihrer halben Differentz addiret, aus der Summe die Quadratwurtzel auszieht, und die halbe Differentz davon subtrahirt, so kömmt die gröste von ihnen heraus.* Es bleibet demnach die kleinere übrig, wenn man von der grössern die Differentz abzieht.

§. 54.

Erklärung.

Drey oder vier Grössen sind *harmonisch proportional*, wenn im ersten Falle der Unterscheid der ersten und andern sich verhält zu dem Unterscheide der andern und dritten, wie die erste zu der dritten: im andern Falle aber der Unterscheid der ersten und anderen zu dem Unterscheide der dritten und vierten wie die erste zu der vierten. Dergleichen Zahlen sind 2, 3 und 6. Denn die Differentz zwischen 2 und 3 = 1, die Differentz zwischen 3 und 6 = 3, und es verhält sich 1 zu 3 wie die erste Zahl 2 zu der letzten 6. Man hat dieses darum eine harmonische Proportion genannt, weil man bemerckt hat, daß die Töne in der Music, welche eine angenehme Harmonie zusammen machen, dergleichen Verhältniß haben. Am allerbesten kan man sie bey einem Würffel behalten. An demselben finden wir Puncte, Linien und Flächen, und die Anzahl derselben macht eine harmonische Proportion aus. Denn ein Würffel hat 6 Flächen, 8 Puncte oder Ecken, und 12 Linien. 6, 8 und 12 aber sind in einer harmonischen Proportion. Denn es ist die Differentz des ersten und andern Gliedes = 2, die Differentz des andern und dritten ist = 4: also verhält sich die Differentz des ersten und andern Gliedes = 2, zu der Differentz des andern und dritten = 4, wie das erste = 6 zu dem letzten Gliede = 12. Wenn die Glieder vervielfältiget werden: so entstehet eine harmonische Progreßion.

§. 55.

§. 55.

Aufgabe.

Zu zwey gegebenen Grössen die dritte harmonische Proportionalgrösse zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste $= a$ die dritte $= x$
die andere $= b$

So ist

$$a - b : b - x = a : x \quad (\text{§. } 54.)$$

$$ax - bx = ab - ax \quad (\text{§. } 81. \text{ Ar.})$$
$$ax = ax \quad (\text{addirt.})$$

$$2ax - bx = ab \quad (\text{§. } 24. \text{ Ar.})$$
$$2a - b = 2a - b \quad (\text{dividirt.})$$

$$x = \frac{ab}{2a - b} \quad (\text{§. } 27. \text{ Ar.})$$

Es sey $a = 10$, $b = 16$: so ist $x = 10 \times 16 : 20 - 16 = 160 : 4 = 40$.

§. 56.

Aufgabe.

Zu drey gegebenen Grössen die vierte harmonische Proportionalgrösse zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste $= a$ die vierte $= x$
die andere $= b$
die dritte $= c$

So

So ist

$$\begin{array}{l} a-b:c-x=a:x \quad (\S.\ 54.) \\ \hline ax-bx=ac-ax \quad (\S.\ 81.\ Ar.) \\ \quad ax \quad = \quad ax \quad (\text{addirt.}) \\ \hline 2ax-bx=ac \quad (\S.\ 24.\ Ar.) \\ 2a-b=2a-b \quad (\text{dividirt.}) \\ \hline x = \frac{ac}{2a-b} \quad (\S.\ 27.\ Ar.) \end{array}$$

W. Z. F.

Probe.

Wir wollen setzen, es sey wie bey dem Würffel (§. 54.) $a=6$, $b=8$, $c=12$: so ist $x=\frac{ac}{2a-b}=\frac{6\times 12}{(2\times 6)-8}=\frac{72}{12-8}$ $=\frac{72}{4}=18$.

Denn es ist $2:6=6:18$.

§. 57.

Aufgabe.

Zwischen zwey gegebenen Grössen die mittlere harmonische Proportional-grösse zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste $=a$ die andere $=x$
die dritte $=b$

So

So ist

$$a - x : x - b = a : b \quad (\S. 54.)$$

$$ab - bx = ax - ab \quad (\S. 81. A.)$$

$$bx = bx \quad (\text{addiret.})$$

$$ab = ax + bx - ab$$

$$ab = ab$$

$$2ab = ax + bx$$

$$a + b = a + b$$

$$\frac{2ab}{a+b} = x.$$

§. 58.

Wenn man setzt: $a - b : b - x = a : x$, so sind dieses rationes majoris inæqualitatis (§. 95. Anmerck.). Sollen es rationes minoris inæqualitatis vorstellen: so ist die Proportion: $b - a : x - b = a : x$ (§. 95. Anm.) Es kömmt aber in beyden Fällen einerley Regel heraus.

§. 59.

Newton, dieser unvergleichliche Newton hat eine Regel erfunden, vermittelst welcher man eine iede Grösse zu einer ieden Dignität erheben, und aus einer ieden Grösse eine iede Wurtzel ausziehen kan. Sie ist so schön, und lehrt uns die Kunst zu abstrahiren auf eine so deutliche und reitzende Art, daß ich glaube, meine Leser würden nur halb vergnügt seyn, wenn sie hier keine Erklärung davon anträfen. Sie werden

den darinnen das Geheimniß erblicken, eine in der That unendliche Menge der Begriffe mit ohngefehr sechs Buchstaben auszudrücken. Die **ontologischen Abstractionen**, dadurch die Begriffe so subtil gemacht werden, daß sie sich dadurch nicht selten in ein würckliches Nichts verlieren, kommen dagegen in keine Vergleichung, indem man aus ihnen sehr selten die Bestimmungen mehr eingeschränckter Begriffe, und fast niemals die Merckmale eines eintzelnen Dinges herleiten kan. Gantz anders ist es mit diesen geheimnißvollen Buchstaben beschaffen, durch deren Erblickung man einen Begriff von allen noch nöthigen Bestimmungen bekömmt, welche erfordert werden, wenn man die allgemeine Regel auf einen besondern Fall appliciren soll. Um aber alle unnöthige Weitläuftigkeit dabey zu vermeiden, so lege ich alles dasienige zum Grunde, was ich in meinen **Anmerckungen über die Rechenkunst** im 4. Capitel, welches von denen Dignitäten oder Potentzen handelt, gesagt und erwiesen habe.

§. 60.

Das Quadrat von $a + b$ ist $a^2 + 2ab + b^2$ (§. 14. 1 Anmerck.). Das Quadrat von $a + b + c = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$ (§. 149. Anmerck.). Wenn man c als den einen und $a + b$ als den andern Theil der Wurtzel betrachtet: so kan man das Quadrat von $a + b + c$ noch auf eine andere Art fin-