finden. Denn weil das Quadrat einer binomischen Wurtzel aus dem Quadrate des ersten Theils, aus einem doppelten Producte des ersten Theils in den andern und aus dem Quadrate des andern Theils bestehet (§. 141. Anmerck.): so ist $(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$. Nun ist $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (§. 141. Anmerck.). Derowegen ist $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2$ (§. 15. Anmerck.)

§. 61.

Eben so lassen sich alle Quadrate, welche multinomische Wurtzeln haben, nach dem Quadrate der binomischen beurtheilen. Man wollte z. E. das Quadrat von $a+b+c+d$ wissen: so sieht man $a+b+c$ als den einen, und d als den andern Theil der Wurtzel an: so ist $(a+b+c+d)^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2$ (§. 141. Anmerck.). Nun ist $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2$. (§. 60.). Man kan daher den einen Werth für den andern setzen (§. 15. Anmerck.), so bekömmt man: $(a+b+c+d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2$.

§. 62.

Man soll das Quadrat von $(a+b+c+d+e)$ finden. Setzet $(a+b+c+d)$ als den einen, und e als den andern Theil an: so ist $(a+b+c+d+e)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 + 2(a+b+c+d)e + e^2$ (§. 61.).

§. 63.

§. 63.

Dieses wird vollkommen hinreichend seyn, folgende Tabelle zu verstehen.

$1a$	$1b$									
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$								
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$							
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$						
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	$1b^5$					
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$				
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$			
$1a^8$	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	$1b^8$		
$1a^9$	$9a^8b$	$36a^7b^2$	$84a^6b^3$	$126a^5b^4$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36a^2b^7$	$9ab^8$	$1b^9$	
$1a^{10}$	$10a^9b$	$45a^8b^2$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45a^2b^8$	$10ab^9$	$1b^{10}$

§. 64.

Aus dieser Tabelle erhellet, daß eine iede Dignität aus verschiedenen Producten zusammengesetzt sey, und daß diese Producte durch verschiedene Zahlen multiplicirt werden. Es entstehen aber diese Producte, wenn man ieden Theil der Wurtzel zu allen übrigen Dignitäten als die gegeben ist, erhöhet, und sie hernach verkehrt in einander multiplicirt. Ein Exempel wird die gantze Sache deutlicher machen. Setzet, man soll sagen, was die sechste Dignität von $a + b$ wäre: so könnte man zwar $a + b$ zur sechsten Dignität erheben (§. 126. Anmerck.), aber last uns versuchen, ob wir es errathen können, ohne dieses zu thun. Man schreibe also alle Dignitäten von a bis auf die sechste, und hernachmals alle Dignitäten von b bis auf die sechste umgekehrt darunter, und multiplicire es mit einander.

$$\begin{array}{ccccccc} a^6 + & a^5 + & a^4 + & a^3 + & a^2 + & a^1 + & 1 \\ 1 + & b^1 + & b^2 + & b^3 + & b^4 + & b^5 + & b^6 \\ \hline \end{array}$$

$$a^6 + a^5b^1 + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + a^1b^5 + b^6$$

Wollte man die zehente Dignität von $a + b$ wissen; so schreibe man:

$$\begin{array}{c} a^{10} + a^9 + a^8 + a^7 + a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a^1 + 1 \\ 1 + b^1 + b^2 + b^3 + b^4 + b^5 + b^6 + b^7 + b^8 + b^9 + b^{10} \\ \hline \end{array}$$

$$1a^{10} + a^9b + a^8b^2 + a^7b^3 + a^6b^4 + a^5b^5 + a^4b^6 + a^3b^7 + a^2b^8 + a^1b^9 + b^{10}$$

Dieses sind alle Producte, welche in der zehnten Dignität vorkommen, aber es fehlen noch dieienigen Zahlen, so diese Producte multipliciren, wie man durch Vergleichung der vorher angeführten Tabelle ersehen kan, und welche Zahlen Unzen genennet werden. Wir wollen bald sehen, wie diese Unzen zu finden sind. Ehe wir aber dieses thun, wollen wir vorher von den Producten der Dignitäten einen allgemeinen Ausdruck suchen. Man siehet aus der Tabelle, daß der Anfang der vierten Dignität sey a^4, der fünften a^5, der sechsten a^6 u. s w. Da wir nun keinen Grund haben, eine Dignität vor der andern zu erwählen, sondern dieses nur besondere Begriffe sind, welche unter einem allgemeinern enthalten sind: so wollen wir den Exponenten auch nicht 4, 5 oder 6 nennen, sondern er soll m heissen, indem unter diesen m alle mögliche Zahlen verstanden, und dafür gesetzt werden können. Weil ferner die Dignitäten von a immer niedriger, und von b grösser gesetzt werden: so würden folgende Producte herauskommen:

(multipl.)

$$a^m + a^{m-1} + a^{m-2} + a^{m-3} + a^{m-4} + a^{m-5} + a^{m-6}$$

etc. in infinitum.

$$1 + b^1 + b^2 + b^3 + b^4 + b^5 + b^6 \text{ etc.}$$

$$a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + a^{m-4}b^4 +$$
$$a^{m-5}b^5 + a^{m-6}b^6 \text{ etc.}$$

Neh-

Nehmet an: m sey $=6$: so ist $m-1=6-1=5$, und $m-2=6-2=4$ u. s. w. also käme die sechste Dignität von $a+b$ heraus bis auf die Unzen.

§. 65.

Lasset uns nun sehen, wie wir auch die Unzen finden können. Dieses sind diejenigen Zahlen, welche in der Tabelle mit a und b multipliciret sind. Wir wollen sie von der ersten bis auf die siebente Dignität aus der Tabelle hierher setzen.

$1+1$
$1+2+1$
$1+3+3+1$
$1+4+6+4+1$
$1+5+10+10+5+1$
$1+6+15+20+15+6+1$
$1+7+21+35+35+21+7+1.$

Diese so unordentlich und doch ordentliche Zahlen können folgender gestalt gefunden werden. Man schreibet die Exponenten der Dignitäten die in einander multiplicirt werden, unter einander, und nimmt den Bruch aus den zwey ersten Zahlen für die Unze des andern Gliedes, den Bruch aus Multiplication der beyden ersten obern und untern Zahlen zur Unze des dritten Gliedes an, u. s. w. Z. E. Wir sollen die Unzen für die sechste Dignität finden, so setzen wir erstlich alle Dignitäten von a nach der Reihe hin, und darunter alle Dignitäten von b.

6.	5.	4.	3.	2.	1.
1.	2.	3.	4.	5.	6.

Alsdenn ist

$\frac{6}{1} = 6$ die Unze des andern Gliedes,

$\frac{6 \times 5}{1 \times 2} = \frac{30}{2} = 15$ die Unze des dritten,

$\frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = \frac{120}{6} = 20$ die U. des 4ten,

$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{360}{24} = 15$ des 5ten,

$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{720}{120} = 6$ d. 6ten,

$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = \frac{720}{720} = 1$

die Unze des letzten Gliedes.

Wenn man nun diese Unzen vor die vorher gefundene Producte setzet: so hat man alles, was zu wissen nöthig ist, wenn man sagen soll, was die sechste Dignität von a + b sey. Denn die Producte sind (§. 64.):

(multiplicirt)

$$a^6 + a^5b^1 + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + a^1b^5 + b^6$$

d. Unz. $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$

so ist $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$ die sechste Dignität.

§. 66.

Die Unzen der vierten Dignität sind $1 =$ Unze des ersten Gliedes.

$\frac{4}{1} = 4$ Unze des andern Gliedes.

$\frac{4 \times 3}{1 \times 2} = \frac{12}{2} = 6$ Unze des dritten,

$\frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3} = \frac{24}{6} = 4$ Unze des vierten

$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{24}{24} = 1$ U. des letzten Gl.

Die Producte der vierten Dignität sind:

$$a^4 + a^3b^1 + a^2b^2 + ab^3 + b^4$$

Unzen $1 + 4 + 6 + 4 + 1$

Also die 4te Dig. $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

§. 67.

Wenn man die Unzen der determinirten Dignitäten zu finden weiß: so kan man auch die Unzen einer Dignität, deren Exponente undeterminirt ist, das ist, aller Dignitäten überhaupt bestimmen. Es sey der Exponente = m. Weil wir, wie ich schon oben angemerckt habe, nicht einen gewissen Exponenten, als die andere, dritte, vierte Dignität, wissen wollen; sondern einen Exponenten, welcher auf alles passet, und dafür alle mögliche Exponenten gesetzt werden können. Wenn also der Exponente = m: so findet man die Unzen folgendergestalt (§. 65.):

Exponent. m . m—1.m—2.m—3.m—4.m—5 in infinitum.

1. 2. 3. 4. 5. 6

$\frac{m}{1}$ Unze des andern Gliedes

$\frac{m.\,m-1}{1.\;2}$ Unze des dritten

$\frac{m.\,m-1.\,m-2}{1.\;2.\;3.}$ Unze des vierten

$\frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m.\,3}{1.\;2.\;3.\;4.}$ Unze des fünften

$\frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3.\,m-4}{1.\;2.\;3.\;4.\;5}$ des sechsten

m.

$\frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3.\,m-4.\,m-5}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6}$ Unze des 7ten ∞ (§. 18. Anmerck.)

§. 68.

Weil die Unzen mit den Producten multiplicirt werden müssen (§. 64.): so bekommen wir die Dignität m von $a + b$, wenn wir die oben (§. 64.) gefundenen Producte von $a + b$ mit denen ietzo gefundenen Unzen (§. 67.) multipliciren. Auf diese Weise finden wir $(a + b)^m = a^m + \frac{m}{1} . a^{m-1}b$

$$+ \frac{m.\,m-1}{1\,.\,2} . a^{m-2}b^2 + \frac{m.\,m-1.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3} . a^{m-3}b^3 + \frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} . a^{m-4}b^4$$
$$+ \frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3.\,m-4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} . a^{m-5}b^5 + \frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3.\,m-4.\,m-5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}$$
$a^{m-6}b^6$ etc.

Der Punct ist das Multiplicationszeichen (§. 53. Anmerck.).

§. 69.

Es sey $m = 3$; so finden wir die dritte Dignität von $a + b$ vermöge des vorhergehenden (§. 68.), wenn wir an statt m eine 3 setzen, folgendergestallt:

$$a^3$$

$$+\frac{3}{1}\,.\,a^{3-1}b = 3a^2b$$

$$+\frac{3\,.\,(3-1)}{1\,.\,2}\,.\,a^{3-2}b^2 = \frac{3\,.\,2}{1\,.\,2}\,a^1b^2 = 3ab^2$$

$$+\frac{3\,.\,(3-1)\,.\,(3-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,a^{3-3}b^3 = \frac{6}{6}\,a^0b^3 =$$

$1b^3 = b^3$: Denn a^0 ist so viel als nichts: weil eine iede Zahl zum wenigsten in der ersten Dignität ist. Fahren wir weiter fort: so finden wir das folgende Glied

$$+\frac{3\,.\,(3-1)\,.\,(3-2)\,.\,(3-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,a^{3-4}b^4 = \frac{3\,.\,0}{24}$$

$$= a^{3-4}b^4 = \frac{0}{24}\,.\,a^{3-4}b^4 = 0\,.\,a^{-1}b^4 = 0.$$

Denn wenn eine Zahl durch o multiplicirt wird, so ist das Product = o. Weil nichts etliche mahl genommen, gerade so viel als nichts ist.

§. 70.

Hieraus sehen wir, wie eine undeterminirte unendliche Progeßion endlich werden könne, wenn sie durch genauere Bestimmungen eingeschränckt wird. Denn wenn wir die vorher (§. 69.) gefundenen Glieder der dritten Dignität zusammen nehmen: so bekommen wir folgenden Ausdruck:

a^3

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, wie wir ihn auf andere Art gefunden haben (§. 162. Anmerck.). Wir wollen um mehrerer Deutlichkeit willen noch einen Versuch thun, und die vierte Dignität von $a+b$ suchen, so ist $m=4$, und wir bekommen:

$$a^m = a^4$$

$$+\frac{m}{1}a^{m-1}b^1 = \frac{4}{1}a^3b^1 = 4a^3b$$

$$+\frac{m.m-1}{1\;.\;2}a^{m-2}b^2 = \frac{4\;.\;3}{1\;.\;2}a^2b^2 = \frac{12}{2}a^2b^2 = 6a^2b^2$$

$$+\frac{m.m-1.m-2}{1\;.\;2\;.\;3}a^{m-3}b^3 = \frac{24}{6}a^1b^3 = 4ab^3$$

$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4}a^{m-4}b^4 = \frac{24}{24}a^0b^4 = 1b^4 = b^4$$

$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4\;.\;5}a^{m-5}b^5 = \frac{24\;.\;0\;.}{120}a^{-1}b^5 = 0\;.\;a^{-1}b^5 = 0$$

Derowegen ist die vierte Dignität von $a+b = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ (§. 171. Anmerck.).

§. 71.

Es ist die andere Dignität von 2 oder $2^2 = 4$

Die dritte, oder $2^3 = 8$

Die vierte $= 2^4 = 16$

Die fünfte $= 2^5 = 32$

Die sechste $= 2^6 = 64$ u. s. w. (§. 126. Anmerck.). 2 ist die Wurtzel aller dieser Dignitäten. *Wenn man nun eine Dignität durch die Wurtzel dividiret: so kömmt die nächst kleinere Dignität derselbigen Wurtzel heraus.*

Z. E. man dividire 8, welches die dritte Dignität von 2 ist, durch die Wurtzel 2: so kömmt 4 heraus, und dieses ist die andere Dignität von 2. Man dividire 64 oder die sechste Dignität von 2 durch die Wurtzel = 2: so bekömmt man 32, welches die fünfte, und also die um einen Grad niedrigere Dignität von 2 ist. Und so ist es auch mit allen übrigen Zahlen beschaffen. Die Ursache ist nicht schwer zu errathen, sondern läst sich aus der Art und Weise, wie die Dignitäten entstehen, vollkommen herleiten. Denn wenn ich z. E. die sechste Dignität machen will, so muß ich die fünfte mit der ersten multipliciren (§. 126. Anm.). Es ist also die sechste Dignität ein Product aus der fünften in die erste, dessen beyde Factores die erste und fünfte Dignität sind. Da nun nichts gewisser ist, als daß der eine ne Factor herauskommen müsse, wenn man mit dem andern Factore in das Factum dividirt (§. 137 Anmerck.): so muß auch die fünfte Dignität herauskommen, wenn man mit der ersten in die sechste dividiret, oder überhaupt davon zu sprechen, wenn man eine Dignität durch die erste dividirt: so kömmt eine Dignität heraus, deren Exponente um 1 kleiner ist, als der Exponente der vorhergehenden. Derowegen ist

$$a^m : a = a^{m-1}$$
$$a^2 : a = a$$
$$a^3 : a = a^2$$
$$a^4 : a = a^3$$
$$a^5 : a = a^4$$
$$a^6 : a = a^5. \quad \text{etc.}$$

§. 72.

Die sechste Dignität von 2 ist = 64. Man dividire 64 durch die andere Dignität von 2 = 4: so kömmt 16 heraus, welches die vierte Dignität von 2, und also eine Dignität ist, deren Exponente um 2 kleiner ist, als der Exponente der vorhergehenden. **Wenn man also eine Dignität durch das Quadrat ihrer Wurtzel, oder welches gleich viel ist, durch die andere Dignität dividirt: so muß eine Dignität herauskommen, deren Exponente um 2 kleiner**

ner ist als der vorhergehende. Derowegen ist $a^m : a^2 = a^{m-2}$.

§. 73.

Die sechste Dignität von 2 ist = 64. Man dividire sie durch die dritte Dignität von 2 = 8: so kömmt die dritte Dignität von 2 = 8 heraus, deren Exponente um 3 kleiner ist, als der Exponente der sechsten Dignität. Das heist: **Wenn man eine Dignität durch die dritte Dignität der Wurtzel dividirt, so kömmt eine Dignität heraus, deren Exponente um 3 kleiner ist, als der Exponente derienigen Dignität, in welche man dividirt hatte.** Derowegen ist $a^m : a^3 = a^{m-3}$.

§. 74.

Weil $a^m : a^1 = a^{m-1}$ (§. 71.)

und $a^m : a^2 = a^{m-2}$ (§. 72.)

und $a^m : a^3 = a^{m-3}$ (§. 73.)

so ist die Folge leicht einzusehen, daß

$a^m : a^4 = a^{m-4}$

und $a^m : a^5 = a^{m-5}$

und $a^m : a^6 = a^{m-6}$ u. s. w.

Wenn aber dieses ist: so hat man die Freyheit, einen Ausdruck in die Stelle des andern zu setzen; indem gleiche Sachen der Grösse ohnbeschadet iederzeit vor einander gesetzt werden können (§. 15. Anmerck.).

Man

Man setze also in den vorigen allgemeinen Ausdrucke einer Dignität (§. 68.)

$a^m : a$ an statt a^{m-1}

$a^m : a^2$ an statt a^{m-2}

$a^m : a^3$ an statt a^{m-3}

$a^m : a^4$ an statt a^{m-4}

$a^m : a^5$ an statt a^{m-5}

$a^m : a^6$ an statt a^{m-6} u. s. w.

so verwandelt sich der gegebene allgemeine Ausdruck der Dignitäten (§. 68.) in folgende Gestalt:

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m\,a^m.\,b}{1\,a} + \frac{m\,.\,m-1\,.\,a^m b^2}{1\,.\,2\,a^2}$$

$$+ \frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\frac{a^m b^3}{a^3}$$

$$+ \frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2\,.\,m-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,.\,\frac{a^m b^4}{a^4}$$

$$+ \frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2\,.\,m-3\,.\,m-4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\,.\,\frac{a^m b^5}{a^5}$$

$$+ \frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2\,.\,m-3\,.\,m-4\,.\,m-5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}\,.$$

$$\frac{a^m b^6}{a^6} \quad \infty$$

§. 75.

§. 75.

Wenn wir dieses betrachten: so werden wir wahrnehmen, daß in allen Gliedern befindlich sey a und $\frac{b}{a}$. Man wird ferner befinden, daß das erste Glied in dem andern, das andere in dem dritten, das dritte in dem vierten, das vierte in dem fünften u. s. w. befindlich sey, und daß nur immer noch etwas hinzugesetzt werde. Es sey also (per Hypothesin) $a = P$ und $b : a = Q$, das erste Glied $= A$, das andere $= B$, das dritte $= C$, das vierte $= D$, das fünfte $= E$, u. s. w.

§. 76.

Es ist $(a + b)^m = \left(a + \left(\frac{b}{a} \cdot a\right)\right)^m$ (§. 63.)

Da nun $a = P$, und $\frac{b}{a} = Q$: so ist $(a + b)^m = (P + PQ)^m$ (§. 75.).

Deroweegen ist ferner $(P + PQ)^m = P^m$

$$+ \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} CQ$$

$$+ \frac{m-3}{4} DQ + \frac{m-4}{5} EQ + \frac{m-5}{6}$$

$$FQ + \frac{m-6}{7} GQ + \frac{m-7}{6} HQ \text{ u. s. w.}$$

§. 77.

§. 77.

Wenn ein Algebraiste von dieser Regel nur so viel weiß $P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2}$ BQ: so kan er vermöge des ihm beywohnenden prophetischen Geistes schon alles übrige errathen.

Diese wenige Buchstaben sind also hinreichend, sich von aller möglichen Zahlen möglichen Dignitäten einen deutlichen Begriff zu machen. Es ist aber die Menge der Zahlen so wol als ihrer Dignitäten in der That unendlich groß, ich sage in der That unendlich groß, weil ich es entweder für eine grosse Einfalt oder übertriebene Weisheit halte, wenn man uns weiß machen will, daß dergleichen Progreßionen in der That endlich wären, und nur darum unendlich genennet würden, weil man das Ende davon nicht absehen könte. Eine Ausflucht, dadurch man einen nicht allzuscharfsinnigen Weltweisen betriegen kan, aber keinen Mathematicker.

§. 78.

Ohnerachtet ich glauben sollte, daß alles klar wäre: so will ich doch noch eine Erläuterung beyfügen. Die gefundene Regel ist $(P + PQ)^m = P^m + \frac{m}{1.} AQ + \frac{m}{2.} - 1\, BQ +$

m—2

$\frac{m-2}{3}CQ + \frac{m-3}{4}DQ + \frac{m-4}{5}EQ + \frac{m-5}{6}$ FQ u. s. w. Nun ist ferner $a = P$ und $b : a = Q$, das erste Glied $= A$, das andere $= B$, das dritte $= C$, das vierte $= D$, das fünfte $= E$ u. s. w.

Derowegen ist $P^m = a^m$

$$\frac{m}{1} AQ = \frac{m}{1} \frac{a^m b}{a} = \frac{m}{1} a^{m-1} b \text{ (§. 74.).}$$

$$\frac{m-1}{2} BQ = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m}{1} \cdot \frac{a^{m-1}b}{a} \cdot b =$$

$$\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \frac{a^{m-1}b}{a} \cdot \frac{b}{a} = \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{a^m b^2}{a^2}$$

$$= \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \cdot a^{m-2} b^2 \text{ (§. 74.).}$$

$$\frac{m-2}{3} CQ = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{a^{m-2}b^2 \cdot b}{a}$$

$$= \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3$$

$$\frac{m-3}{4} DQ = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\frac{a^{m-3}b^3 \cdot b}{a} = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$a^{m-4}b^4$ (§. 74).

m—4

$$\frac{m-4}{5}\,EQ = \frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3 \,.\, m-4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}$$

$$\frac{a^{m-4}b^4 \,.\, b}{a} = \frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m \,.\, -3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$$

$$\frac{m-4}{.\,5} \,.\, a^{m-5}b^5.$$ u. s. w.

Denn $\frac{a^{m-4}}{a} = a^{m-5}$ (§. 73.) und $b^4 \times b = b^5$ (§. 129. Anmerck.).

§. 79.

Folgendes kan zur Probe dienen: Es sey $a = 10$, $b = 8$, $m = 4$: so wird die 4te Dignität von 18 folgendergestalt gefunden. $P = 10$, $Q = 8 : 10 = 4 : 5$, folgends $P^m = 10^4 = 10000 = A$

$$mAQ = 4 \,.\, 10000 \,.\, \tfrac{4}{5} = 32000 = B$$

$$\frac{m-1}{2}BQ = \tfrac{3}{2} \,.\, 32000 \,.\, \tfrac{4}{5} = 38400 = C$$

$$\frac{m-2}{3}CQ = \tfrac{2}{3} \,.\, 38400 \,.\, \tfrac{4}{5} = 20480 = D$$

$$\frac{m-3}{4}DQ = \tfrac{1}{4} \,.\, 20480\ \tfrac{4}{5} \,. = 4096 = E$$

$$\frac{m-4}{5}EQ = 0 \,.\, 4096 \,.\, \tfrac{4}{5} = 0 = F$$

10000 = A
32000 = B
38400 = C
20480 = D
4096 = E

104976 vierte Dignität von 18.

§. 80.

Ich habe oben zweyer Beschuldigungen gedacht, um welcher willen die meisten Gelehrten einen Abscheu vor der Algebra haben. Die erste besteht darinnen, daß sie allzuschwer sey, und ein ausserordentliches Kopfbrechen erfordere; und die andere ist, daß dergleichen Betrachtungen keinen Nutzen hätten. Ich gestehe es, wenn beyde Einwürfe wahr wären; so wird es sehr vernünftig seyn, mit der Algebra sich gar nicht einzulassen, und vor einer Sache zu fliehen, von welcher man weder Nutzen noch Vergnügen zu erwarten hätte. In Wahrheit, das menschliche Leben ist viel zu kurtz, unsere Zeit viel zu edel, und die Anzahl der Sachen, um welche man sich zu bekümmern hat, viel zu groß, als daß man alle seine Bemühung nur dahin richten sollte, um ein mühsames Nichts zu erhalten. Nein, es giebt fünf Sachen, welche so vortrefflich sind, daß sie ein Weltweiser nothwendig als die Absicht seiner Bemühungen ansehen muß. Dieses ist Verstand, Tugend, Gesundheit und ein langes und vergnüggnügtes Leben. Warum soll also ein $x+a$ der Hencker seyn, welcher ihn zu seinem Tode begleitet? Dieses Urtheil ist viel zu vernünftig, als daß ich ihm nicht Beyfall geben sollte; wenn man nur erst die beyden Kleinigkeiten ausgemacht hätte, daß die Algebra so ungeheuer schwer wäre, und gar keinen Nutzen hätte. Aber das ist es eben, woran ich zweifle. Denn daß die Algebra Anfängern so schwer vorkömmt, davon habe ich die Ursachen gezeiget, welche darinnen bestehen: daß man hier gewohnt ist, sehr viele Schlüsse auszulassen, nichts zu citiren, und sich überhaupt nirgends deutlich zu erklären. Denn wenn man dieses thäte: so fielen alle Schwierigkeiten hinweg, wovon die vorhergehenden Blätter einen deutlichen Beweiß geben, welche so eingerichtet sind, daß sich allemal die Auflösung einer Aufgabe mit der leichtesten Mühe in eine Reihe förmlicher Vernunftschlüsse verwandeln läst. Denn wo sollte nun wol eine Schwierigkeit stecken? gewiß, wem diese Erläuterungen nicht klar genug sind, der darf nur die Hoffnung fahren lassen, ein anderer Newton zu werden. Es können also diese Blätter einen Probierstein abgeben, daran man sehen kan, ob man zum Nachdencken geschickt ist, oder ob man sich nur um solche Sachen zu bekümmern habe, welche ohne Verstand müssen auswendig

dig gelernet werden, und doch hinreichend sind, einen dummen und faulen Menschen, welcher mehr als andere seyn will, seinen Lebensunterhalt zu verschaffen. So gewiß ich mir einbilde, den Einwurf, daß die Algebra allzuschwer sey, gehoben zu haben: so kan ich es doch den Mathematickverständigen nicht verdencken, daß sie die Algebra nicht auf eine deutliche und leichte Art und Weise vortragen: denn es ist eine verdrüßliche Sache zu buchstabiren, wenn man schon lesen kan, ich geschweige, daß man das Buchstabiren öfters gar verlernt, ohnerachtet man zu lesen weiß. Indessen wäre es doch zu wünschen, daß einmahl ein Gelehrter, dem keine ausserordentliche Gabe der Dunckelheit und Verwirrung zugeeignet wäre, dergleichen Arbeit unternähme. Er würde sich ohnfehlbar um das menschliche Geschlecht sehr verdient machen. Denn es hat und wird niemals an Leuten fehlen, die sich einbilden, klüger als andere zu seyn, und es auch öfters in der That sind, daher sie den großmüthigen Entschluß fassen, die Algebra zu erlernen. Das heist, wenn man die Wahrheit sagen soll, daß sie sich in einen Irrgarten begeben, dessen Ende sie nicht absehen, und darinnen sie mit der grösten Beschwerlichkeit und zum Schaden ihrer Gesundheit herumlaufen müssen, um den Ausgang wieder zu finden, wohin sie mit der leichtesten

Mühe

Mühe hätten gelangen können, wenn ihnen der Gärtner einen Faden in die Hand gegeben, und solchen an die erste Thüre angebunden hätte. Daher kan es freylich geschehen, daß man Zeit und Mühe über der Algebra verlieret. Aber was ist schuld daran? in Wahrheit nichts anders, als eine unzeitige Begierde, klüger zu seyn, als die von der Natur verliehenen Kräfte erlauben, und die Ungedult unserer Führer, die sie verleitet, Luftsprünge zu machen, wenn sie uns gehen lernen sollen. Da nun aber dieses ein vor allemal so und nicht anders ist: so rathe ich einem ieden, denen es an natürlicher Fähigkeit, Gedult, Zeit und Gesundheit, oder zum wenigsten an dem Gelde, welches die Seele grosser Handlungen ist, fehlet, sich mit der Algebra niemals in einige Vertraulichkeit einzulassen. Denn ausser der gedachten Unbequemlichkeit befindet sich noch diese dabey, daß sie eine Lehrmeisterin ist, die ihre Schüler allzuklug und doch nicht klug genug machet, daß sie sich ihrer Klugheit nicht bisweilen zur Verhinderung ihrer zeitlichen Glückseeligkeit gebrauchen sollten. Denn sie gewöhnen sich, iederzeit die Wahrheit zu sagen, wie sie sie erkennen, und nichts zu behaupten, als was sich erweisen läst. Man hat mich aber versichern wollen, daß dieses zwey Maximen sind, davon die erste unter den Menschen schon lange nicht mehr Mode, und die letztere nur bey wenigen im Gebrauche gewesen sey. Kan man aber wol wider die Mode handeln, ohne gehasset oder zum wenigsten ausgelacht zu werden?

§. 81.

Ich werde den andern Einwurf, daß die Algebra keinen Nutzen habe, nicht besser heben können, als wenn ich den Nutzen anzeige, welchen man von ihr zu erwarten hat. Es ist aber derselbige von einer gedoppelten Art. Man hat einen Nutzen von den algebraischen Wahrheiten selbst und auch von der Art und Weise, wie sie erfunden werden. Was den erstern anbetrift, so ist er so groß, als überhaupt der Nutzen mathematischer Wahrheiten in dem gemeinen Leben seyn kan. Wer wollte aber diesen leugnen? Trägt vielleicht die Mechanick, die Optick, die Astronomie, die Geographie und die Architecktur nichts zur Beförderung der menschlichen Glückseeligkeit bey? und wie groß ist nicht der Vortheil, den die Naturlehre von der Algebra zu erwarten hat? Ich habe an einem andern Orte die Naturlehre die Königin unter den Wissenschaften und die Mathematick den Großschatzmeister genennet. Solte aber wol diese Königin nicht reitzender seyn, wenn sie in ihren Reichskleinodien, welche der Schatzmeister verwahrt, als wenn sie in ihrer Nachtkleidung erschiene?

und ist wol iemahls die Naturlehre gewisser gewesen, als seit dem sie sich mit der Algebra verbunden hat? Newton war ohnstreitig einer der grösten Naturlehrer. Würde er es aber ohne Algebra iemahls geworden seyn? Man muß seine Schriften nicht gesehen haben, wenn man dieses behaupten will. Vielleicht verlohnt es aber sich nicht der Mühe, um der Naturlehre willen die Algebra zu studiren; sie beschäftiget sich nur mit den Körpern, das ist, mit Sachen, welche man hören, sehen, riechen, schmecken, fühlen kan, und um dergleichen gemeine Sachen bekümmert sich der Pöbel; aber eine erhabene Seele nimmt die Kräfte der Geister zu ihrem Zeitvertreibe, und man hat noch nicht gesehen, daß die Algebra iemanden in die Lehre von den einfachen Dingen eine grosse Einsicht verschaffet hätte. Ich muß gestehen, daß dieser Einwurf von einer solchen Wichtigkeit sey, daß ich ihn mit Stillschweigen werde übergehen müssen.

§. 82.

Nicht nur die algebraische Wahrheiten selbst, sondern auch die Art, dieselben herauszubringen, hat ihren Nutzen. Sie lernt uns gantz unvermerckt die Maximen, ordentlich zu dencken und neue Wahrheiten zu erfinden, ist aber dieses wol etwas so geringes? Ihr werdet sagen: dieses thut die Vernunftlehre auch. Ich habe aber aufser dem, was ich oben schon geantwortet, die Erfahrung auf meiner Seite. Wer hat wol iemals die Kräfte des menschlichen Verstandes vollkommener eingesehen, als **Locke, Malebranche, Tschirnhausen, Leibnitz** und **Wolff**? Sie gestehen aber insgesamt, daß sie dieses der Mathematick zu dancken haben. Und wo treffen wir auch schönere Exempel von der Art richtig zu dencken an, als in der Algebra?

§. 83.

Man wird mich nach dem, was ich hier von der Algebra gesagt habe, für einen Liebhaber dieser Wissenschaft halten. Ich bin es auch in der That; aber ich verehre sie nicht, wie ein irrender Ritter seine Geliebte, und glaube nicht, daß die gröste Art der Verdienste diese sey, die Quadratur des Circkels zu erfinden. Nein, man muß den Werth der Sachen nicht allein nach ihrer Gewißheit, sondern auch nach ihren Nutzen beurtheilen. Und nun käme es darauf an, ob man durch die Algebra verständiger, tugendhafter, gesünder und reicher werden könne, als ohne dieselbe. Das erstere will ich gewisser massen einräumen, von den übrigen aber habe ich noch keine Probe gesehen, und gleichwol wird die letztere Eigenschaft heut zu Tage fast durchgehends für die gröste Vollkommenheit eines Menschen gehalten. **Newton** wird wol der einzige Algebraiste

blei-

bleiben, welcher Großschatzmeister eines grossen Königes gewesen ist. Die Artzneygelehrten verschreiben die Algebra niemals in ihren Recepten; sondern verbieten vielmehr das Nachdencken, vermuthlich weil dieses ein Kraut ist, das sie nicht kennen, und ausser der Gedult wüste ich keine Tugend, die bey der Algebra ausgeübet würde. Es ist wahr, ich habe oben ihren Einfluß in die Naturlehre selbst behauptet, und ich würde mir ohnfehlbar widersprechen, wenn ich ihn in Zweifel ziehen wolte. Aber wenn man die Wahrheit sagen soll: so muß man gestehen, daß unter 10 algebraischen Sätzen kaum einer ist, welchen wir in der Naturlehre wieder anbringen können, und dieses hauptsächlich darum: weil wir theils die Sachen aus der Naturlehre nicht wissen, dabey sie angebracht werden können, theils die mathematischen Sätze solche Bedingungen haben, die zwar möglich, aber in der Welt, oder wenn es besser klingt, in unserer Welt nicht würcklich werden. Die Naturlehre aber hat es blos mit würcklichen Sachen zu thun. Herr Brockes sagt:

> Es hat ein iedes Ding zwey Seiten,
> So lange mans nicht hat, sieht mans stets von der schönen,
> Wenn mans besitzt, nur von der schlimmen Seite an.

Von der Algebra aber möchte man in Betrachtung der gantz unerhörten Lobeserhebungen, die sie von ihren Verehrern erhält, beynahe das Gegentheil behaupten und sagen:

Es hat die Algebra zwey Seiten.
Der, wer sie gar nicht kennt, sieht sie nur von der schlimmen,
Und wer sie kennt, stets von der schönen Seite an.

§. 84.

Nun habe ich nur noch drey Worte von den angehängten *Primzahlen* zu sagen. Primzahlen sind dieienigen, welche sich in keine Factores zerfällen lassen, durch deren Multiplication sie entstehen können. Die übrigen Zahlen werden numeri compositi genennet, und die Zerlegung derselben in ihre Factores heist anatomia numerorum. Sie haben in der Mathematick ihren Nutzen, welcher denen bereits bekannt ist, die sich mit der Mathematick beständig beschäftigen, und welchen ich denen, die gar nichts davon wissen, mit wenig Worten nicht begreiflich machen kan. Man muß daher dem *Herrn Peter Jäger, Roßschreiber und Quartiermeister zu Nürnberg* verbunden seyn, daß er sich die Mühe gegeben, nicht nur diese Zahlen weiter, als von iemanden