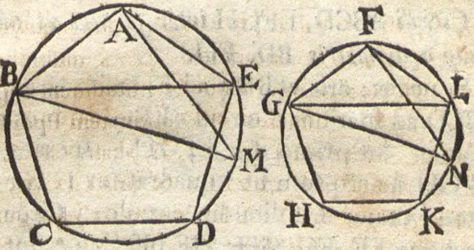
EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER XII.

PROP. I. THEOR.



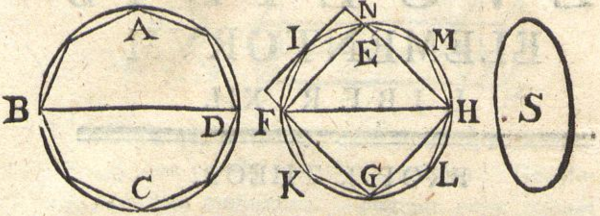
Similia polygona ABCDE, FGHKL *circulis inſcripta inter ſe ſunt vt quadrata a diametris* BM, GN.

Iungantur BE, AM, GL, FN. Quia polygona ſimilia ſunt: eſt $^{\alpha}$ ang. BAE = GFL, α. 1. def. 6.
& BA : AE = GF : FL; ideoque $^{\beta}$ ang. AEB β. 6. 6.
= FLG. Ergo ang. AMB = $^{\gamma}$ FNG; et, γ. 21. 3. & 1. ax. 1.
quia praeterea ang. BAM = $^{\delta}$ GFN, eſt BM : δ. 31. 3.
GN = $^{\varepsilon}$ BA : GF. Hinc pol. ABCDE : pol. ε. 4. 6.
FGHKL = $^{\kappa}$(BA : GF)^2 = $^{\lambda}$(BM : GN)^2 = $^{\kappa}$ κ. 20. 6.
BMq : GNq. Q. E. D. λ. 1. ſch. 22. 5.

* *Schol.* Et quia AB : GF = BC : GH &c. = BM : GN : patet, $^{\mu}$ ſimilium polygonorum circulis μ. 12. 5.
inſcriptorum perimetros AB + BC + CD + DE + EA, & FG + GH + HK + KL + LF, eſſe in ratione diametrorum.

PROP.

PROP. II. THEOR.



Circuli ABCD, EFGH *inter ſe ſunt vt quadrata a diametris* BD, FH.

Si negas: erit vt BDq ad FHq, ita circulus
ABCD ad ſpatium S circulo EFGH minus vel
maius. Sit primo S < EFGH. In circulo
ν. 6. 4. EFGH deſcriptum ſit ν quadratum HGFE,
ξ. ſch. 7. 4. quod ξ maius erit dimidio circulo. Circum-
ο. 30. 3. ferentiae EF, FG, GH, HE biſectae ο ſint in
I, K, L, M, & iungantur EI, IF, FK, KG, GL,
LH, HM, ME. Erit ſimiliter quodlibet △
EIF > ½ ſegmento EIF, quoniam, ducta per I
parallela ad EF & completo pgro rectangulo
NF, eſt △ EIF = ½ NF. Reliquis ergo cir-
cumferentiis ſemper biſectis, & talibus trian-
gulis a reliquis ſegmentis ſemper ablatis: re-
linquentur tandem ſegmenta, quae ſimul ſum-
π. 1. 10. ta erunt π < EFGH — S. Sint reliqua haec
ſegmenta, quae ſunt ſuper rectis EI, IF, FK,
KG, GL, LH, HM, ME. Ergo polygonum
ρ. 5. ax. 1. EIFKGLHM > ρ S. Deſcribe in circulo AB-
CD polygonum ABCD ∾ ipſi EIFKG-
LHM. Erit ergo illud polygonum ad hoc,
σ. 1. 12. vt σ BDq ad FHq, ſiue vt τ circulus ABCD
τ. hyp. ad ſpatium S. Minus autem eſt pol. AB-

CD

CD circulo, in quo inſcriptum eſt: ergo & polyg. EIFKGLHM < ᵛ S. Q. E. ᵛ. 14. 5. A. Non ergo eſt vt BDq ad FHq ita circ. ABCD ad ſpatium minus circulo EFGH.

2. Si ponis S > EFGH: quia ſic erit vt FHq ad BDq ita S ad circ. ABCD, atque S ad circ. ABCD ᵛ vt circulus EFGH ad ſpatium minus circulo ABCD: erit vt FHq ad BDq ita circ. EFGH ad ſpatium minus circulo ABCD. Q. F. N. φ φ. per pait. Quare vt BDq ad FHq ita circ. ABCD ad 1. circ. EFGH. Q. E. D.

* *Schol.*

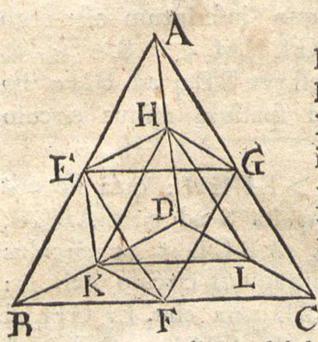
Similia ergo ᵞ polygona, in circulis inſcripta, σ. 1. 18. ſunt vt iidem circuli.

PROP. III. THEOR.

Omnis pyramis ABCD †, *triangularem habens baſin* ABC, *diuiditur in duas pyramides aequales & ſimiles inter ſe, quae triangulares baſes habent, easque ſimiles toti, nec non in duo priſmata aequalia, quae dimidio quidem totius pyramidis ſunt maiora.*

Biſeca

† Nota, litterarum pyramidem deſignantium vltimam nobis ſemper eam eſſe, quae vertici eſt appoſita, tres autem priores eas, quae ad baſin pertinent. Contra, in angulo ſolido deſignando prima eſt, quae ad verticem.



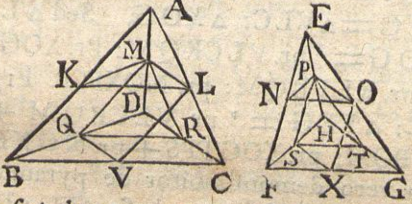
Biseca enim AB, BC, CA, AD, DB, DC, in punctis E, F, G, H, K, L, & iunge EG, EH, HG, per quas ductum planum abscindet pyramid. AEGH. Iunge etiam HK, KL, LH, & ducto per has plano a reliquo solido abscindetur pyr. HKLD. Iam quia $AE = EB$, & $AH = HD$: erunt EH, BD [χ] parallelae. Simili-
ter quia $AH = HD$, & $BK = KD$: erunt &
χ. 2. 6. HK, AB [χ] parallelae. Quare $HK =$ [ψ] BE
ψ. 34. 1. $= EA$. Sed est [ω] ang. $KHD = EAH$. Er-
ω. 29. 1. go $\triangle KDH = \backsim$ [α] $\triangle o\ EHA$ & $EH =$
α. 4. 1. & sch. 6. 6. KD. Eodem modo patet $\triangle HDL = \backsim \triangle o$ HAG, & $DL = GH$. Et quia ob parallelas EH, BD, & HG, DC, ang. KDL
β. 10. 11. $=$ [β] EHG; erit $\triangle KDL$ [α] $= \backsim \triangle o\ EHG$.
Eadem ratione ostenditur $\triangle KHL = \backsim \triangle o$
γ. 10. def. 11. EAG. Ergo pyr. $HKLD = \backsim$ [γ] pyr. AEGH.
Porro, quum AB, HK parallelae sint, $\triangle a$
δ. 3. sch. 4. 6. ADB, HDK [ω] aequiangula, ideoque [δ] similia sunt; & eadem ratione $\triangle BDC \backsim$ [δ] $\triangle o\ KDL$; nec non $\triangle ADC \backsim$ [δ] $\triangle o\ HDL$; atque, quum
ε. 2. sch. 4. 6. sit ang. $BAC = KHL$, & $BA : KH =$ [ε] $AD : DH$
ζ. 6. 6. $= AC : HL$, $\triangle BAC \backsim$ [ζ] $\triangle o\ KHL$. Hinc erit pyr. BACD [γ] $\backsim$ pyr. KHLD $\backsim$ pyr. AEGH.

Deinde iunctis KF, FG, reliquum solidum diuidi poterit in duo prismata, quorum vnum habet

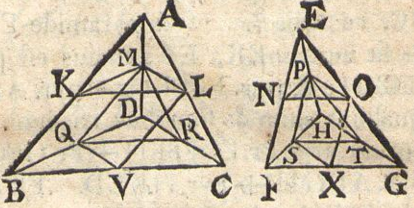
habet basin Pgr. EGFB, & lineam basi oppositam HK, alterum basin △ GFC & oppositam basin △ HKL. Sunt ergo haec prisma a aeque alta, &, quia Pgr EGFB = [η] 2 △i GFC, aequalia [ϑ]. Sed pyramide EFBK, quae fit iunctis EK, EF, maius est prisma EGFBKH; & pyr. EBFK = [γ] pyr. AEGH (aequalibus enim & similibus triangulis continentur): ergo Pr. EGFBKH + Pr. GFCLKH > pyr. AEGH + pyr. HKLD. Est autem Pr. EGFBKH + Pr. GFCLKH + pyr. AEGH + pyr. HKLD = pyr. ABCD. Ergo pr. EGFBKH + pr. GFCLKH > ½ pyr. ABCD. Q.E.D.

η. 41. 1.
ϑ. 40. 11.

PROP. IV. THEOR.



Si sint duae pyramides aeque altae ABCD, EFGH, *quae triangulares bases habent* ABC, EFG; *diuidatur autem vtraque ipsarum & in duas pyramides* AKLM, MQRD, ENOP, PSTH, *aequales inter se similesque toti, & in duo prismata aequalia* KLVBQM, LVCRQM, NOXFSP, OXGTSP; *atque oriarum pyramidum vtraque eodem modo diuidatur, idque semper fiat: erit vt vnius pyramidis basis* ABC *ad basin* EFG *alterius, ita prismata omnia in* *vna pyramide* ABCD *ad prismata omnia in altera pyramide* EFGH *numero aequalia.*



ι. 15. 5. Quia BC = 2 CV, & FG = 2 GX: erit[ι] BC: CV = FG: GX. Sed quum, vt in praecedenti propositione, constet, △ ABC ∾ △o VLC, & △FEG ∾ △o XOG: erit △ ABC: △VLC
κ. 22. 6. =[κ] △ FEG: △ XOG, & alternando △ ABC: △ FEG = △VLC: △XOG. Sed △ LVC:
λ. Lemma sequens. △ XOG =[λ] pr. VLCRQM: Pr. XOGTPS =[μ] pr. KLVBQM: pr. NOXFSP. Ergo △
μ. 7. 5. ABC: △ FEG =[ν] pr. VLCRQM + pr.
ν. 12. 5. KLVBQM: pr. XOGTPS + pr. NOXFSP. Idem vero demonstrabitur de pyramidibus AKLM, ENOP, scilicet vt basis AKL ad basin ENO ita esse duo prismata aequalia in pyr. AKLM ad duo prismata aequalia in pyr. ENOP. Itaque, quia eodem, quo modo vsi sumus, argumento, patet esse[κ] △ ABC: △ EFG = △ AKL: △ ENO: erunt[ν] vt △ ABC ad △ EFG sic 4 prismata in pyr. ABCD ad 4 prismata in pyr. EFGH. Et similiter procedit demonstratio ad quotcunque paria prismatum in vtraque pyramide. Q. E. D.

LEM-

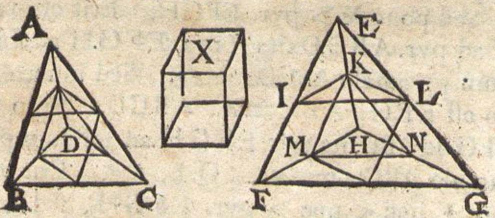
LEMMA.

Ostendendum est, vti △ LVC ad △ XOG, ita esse prisma VLCRQM ad prisma OXGTPS.

Intelligantur enim ex punctis D, H in bases VLC, XOG demissa perpendicula, quae [o] aequalia erunt. Iam quia perpendicularis ex D demissa, & recta DC secantur a planis QMR, VLC, quae ob parallelas [π] MR & AC, RQ & CV parallela [ρ] sunt: erit pars perpendicularis inter D & planum MQR ad partem reliquam [σ], vt DR ad RC. Sed DR = [τ] RC: quare pars perpendiculi inter basin VLC & basin oppositam QMR prismatis VLCRMQ erit dimidium perpendiculi totius ex D demissi. Eadem ratione pars perpendiculi ex H cadentis, quae est inter bases prismatis OXGTSP dimidium erit totius. Erunt ergo prismata VLCRMQ & OGXSTP [υ] aeque alta, ac ob id in ratione [φ] basium VLC, OXG. Q.E.D.

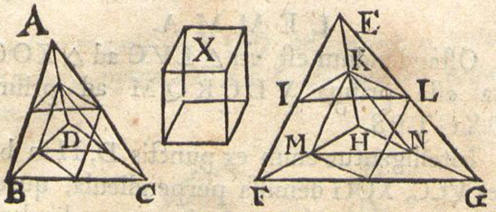
o. hyp. & 4. def. 6.
π. dem. 3. 12.
ρ. 15. 11.
σ. 17. 11.
τ. hyp.
υ. 7. ax. 1.
φ. 32. 11.

PROP. V. THEOR.



Pyramides ABCD, EFGH, *quae in eadem sunt altitudine, & triangulares bases* ABC, EFG *habent, inter se sunt vt bases* ABC, EFG.

Si

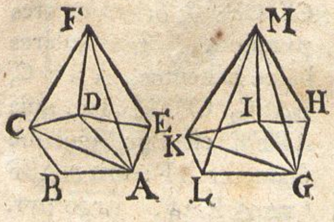


Si negas: ſit ABC: EFG = ABCD: X, ſitque primo X < pyr. EFGH. Diuidatur pyr. EFGH vt in prop. III. & rurſus pyramides ortae eodem modo diuidantur, fiatque hoc
χ. 1. 10. ſemper, vſque dum χ duae reliquae pyramides EILK + KMNH < pyr. EFGH — X. Erunt itaque reliqua duo priſmata in pyr. EF-
ψ. 5. ax. 1. GH > ψ ſolido X. Diuidatur etiam pyr. ABCD ſimiliter & in totidem partes ac pyr. EFGH. Ergo priſmata in pyr. ABCD erunt
ω. 4. 12. ad priſmata in pyr. EFGH = ω ABC: EFG = ABCD: X. Quare quum pyr. ABCD ſit maior priſmatis, quae in ipſa ſunt: erit & ſo-
α. 14. 5. lidum X maius α quam priſmata in pyr. EFGH, & ergo quam ipſa pyramis EFGH; contra hypotheſin.

Sed pone X > pyr. EFGH. Erit ergo vt X ad pyr. ABCD, ita α pyr. EFGH ad ſolidum pyramide ABCD minus. Sed inuertendo eſt EFG: ABC = X: ABCD. Ergo vt EFG ad ABC, ita pyr. EFGH ad ſolidum py-
β. per part. 1. ramide ABCD minus. Q. E. A β. Erit itaque X nec < nec > pyr. EFGH, ſed ipſi aequale. Ergo ABC: EFG = ABCD: EFGH. Q. E. D.

PROP.

PROP. VI. THEOR.

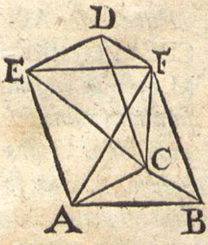


Pyramides ABCDEF, GHIKLM, *quae in eadem sunt altitudine, & polygonas bases habent, inter se sunt vt bases.*

Bases diuidantur in triangula ABC, ACD, ADE, GHI, GIK, GKL, super quibus intelligantur pyramides aeque altae ipsis ABCDEF, GHIKLM. Iam quia pyr. ABCF : ACDF $=^{\gamma}$ △ ABC : △ ACD: erit componendo pyr. ABCDF : pyr. ACDF = ABCD : ACD. γ. 5. 12.
Sed pyr. ACDF : ADEF $=^{\gamma}$ ACD : ADE. Ergo ex aequo pyr. ABCDF : ADEF = baſ. ABCD : ADE, & componendo pyr. ABCDEF : ADEF = baſ. ABCDE : ADE. Eadem ratione pyr. GHIKLM : GKLM = baſ. GHIKL : GKL. Sed pyr. ADEF : GKLM $=^{\gamma}$ baſ. ADE : GKL. Ergo ex aequo pyr. ABCDEF : GKLM = baſ. ABCDE : GKL. Atqui eſt inuertendo pyr. GKLM : GHIKLM = baſ. GKL : GHIKL. Quare ex aequo pyr. ABCDEF : GHIKLM = baſ. ABCDE : GHIKL. Q.E.D.

PROP. VII. THEOR.

Omne priſma ABCDEF, *triangularem habens baſin* A B C, *diuiditur in tres pyramides aequales inter ſe, quae triangulares baſes habent.*



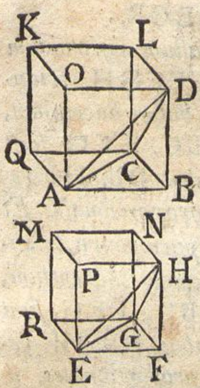
Iungantur enim AF, CE, CF: & orientur tres pyramides, triangulares bases habentes, ABFC, EAFC, CDEF. Iam quia ABFE est Pgr. eiusque
ε. 34. 1. diameter AF: erit △ABF [ε] = △EAF. Ergo pyr.
ζ. 5. 12. ABFC = [ζ] pyr. EAFC. Sed pyr. EAFC eadem est quae pyr. AECF; atque pyramides AECF, CDEF, aequales [ε] bases ACE, CDE & eundem verticem F habentes, aequales [ζ] sunt. Ergo pyr. ABFC = pyr. EAFC = pyr. CDEF. Q. E. D.

Cor. Et quia pyr. ABFC eadem est cum pyr. ABCF: manifestum est, pyramidem ABCF, quae cum prismate ABCDEF eandem habet triangularem basin ABC & eandem altitudinem,
η. 2. ax. 1. tertiam partem esse prismatis. Ergo [η] omnis pyramis tertia pars est prismatis, basin habentis eandem, & altitudinem aequalem: quoniam, si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, diuiditur in prismata, quae triangulares habent bases.

PROP. VIII. THEOR.

Similes pyramides ABCD, EFGH, *quae triangulares bases* ABC, EFG *habent, sunt in triplicata ratione homologorum laterum* AB, EF.

Compleantur solida Ppda ABKL, EFMN.
ϑ. 9. def. 11. Et quia pyr. ABCD ∾ pyr. EFGH: erit [ϑ] ang. ABD = EFH, & ang. ABC = EFG, & ang.

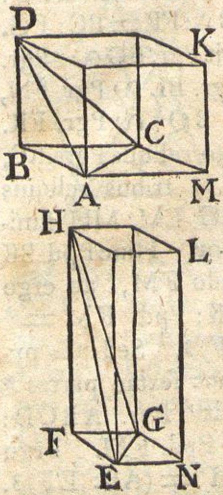


ang. DBC = HFG, & DB :
HF = BA : FE = BC : FG.
Ergo erit Pgr. BO ∾ ι Pgr. ι. 1. def. 6.
FP, & Pgr. BL ∾ Pgr. FN,
& Pgr. BQ ∾ Pgr. FR.
Tria ergo reliqua Pgra. KC,
AK, KD tribus reliquis
Pgris MG, EM, MH simi-
lia κ erunt. Hinc Ppd. BK κ. sch. 24.
∾ θ Ppdo FM, ac ergo 11.
Ppd. BK : Ppd. FM = λ λ. 33. 11.
$(AB : EF)^3$. Sed quia py-
ramides ABCD, EFGH sunt sextae partes μ μ. cor. 7. 12.
Ppdorum BK, FM: erit ν Pyr. ABCD: & sch. 28.
Pyr. EFGH = Ppd. BK : Ppd. FM. Ergo 11.
Pyr. ABCD : Pyr. EFGH = $(AB : EF)^3$. ν. 15. 5.
Q. E. D.

Coroll. Ex hoc perspicuum est, similes pyramides, quae polygonas habent bases, inter se esse in triplicata ratione homologorum laterum. Ipsis enim diuisis in pyramides, triangulares bases habentes; quoniam & similia polygona basium in triangula numero aequalia & homologa totis ξ diuiduntur: erit ο vt vna pyramis in altera pyramide triangularem basin habens ad vnam pyramidem in altera triangularem basin habentem, ita tota illa pyramis polygonam basin habens ad totam hanc. Sed pyramides istae triangularium basium sunt in triplicata ratione laterum homologorum: ergo & pyramides polygonarum basium.

ξ. 20. 6.
ο. 6. 12. & 11. 5. & 16. 5.

PROP. IX. THEOR.



Aequalium pyramidum ABCD, EFGH, *triangulares bases habentium, bases* ABC, EFG *sunt altitudinibus* DB, HF *reciproce proportionales. Et quarum pyramidum, triangulares bases habentium, bases* ABC, EFG *sunt altitudinibus* DB, HF *reciproce proportionales, illae inter se aequales sunt.*

Hyp. 1. Compleantur enim solida parallelepipeda BK, FL pyramidibus aeque alta. Et quia Ppd. BK = 6 pyr. ABCD = 6 pyr. EFGH = Ppd. FL: erit
π. 34. 11. vt HF: DB =π BM: FN =ρ ABC: EFG.
ρ. 34. 1. Q. E. D.

Hyp. 2. Quia vt HF: DB = ABC: EFG =ρ BM: FN: erit Ppd. BK =π Ppdo FL, ergo Pyr. ABCD =σ Pyr. EFGH.
σ. 6. ax. 1. Q. E. D.

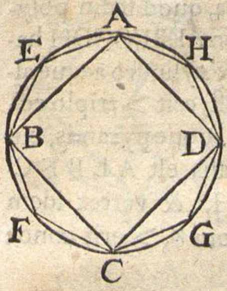
* *Schol.* 1. Idem de pyramidibus polygonarum basium valet (per cor. 7. 12. & sch. 34. 11): quia in pyramides triangularium basium diuidi possunt.

* 2. Quae de pyramidibus demonstrata sunt in prop. 6. 8. 9, ea & quibuscunque prismatis conueniunt, quippe quae tripla sunt pyramidum, easdem bases & altitudines habentium.

* 3. Hinc autem per se patet ex sch. 40. 11. dimensio quorumuis prismatum & pyramidum.

PROP.

PROP. X. THEOR.



Omnis conus tertia pars est cylindri, qui eandem basin ABCD *habet, & altitudinem aequalem.*

1. Si negas: ſit cylindrus > triplo coni. Deſcribatur in circulo quadratum ABCD, ſuper quo intelligatur priſma aeque altum cylindro. Et quia hoc priſma dimidium eſt priſmatis aeque alti τ, ſuper quadrato circa circulum circumſcripto erecti; dimidium autem huius priſmatis > dimidio cylindro: erit & illud priſma > dimidio cylindro. Biſecentur peripheriae in punctis E, F, G, H, quae connectantur rectis, atque a Δis AEB, BFC, CGD, DHA intelligantur erecta priſmata cylindro aeque alta. Et quoniam vnumquodque horum priſmatum dimidium eſt υ Ppdi aeque alti erecti ſuper Pgro. rectangulo trianguli duplo; hoc autem Ppdum > reſpectiuo ſegmento cylindri: patet, vnumquodque horum priſmatum > eſſe dimidio reſpectiui ſegmenti cylindri. Igitur reliquas circumferentias biſecantes, et ſuper ſingulis, quae orientur, triangulis priſmata erigentes, & hoc ſemper facientes, relinquemus tandem φ ſegmenta cylindri, quae ſimul ſumta minora erunt exceſſu cylindri ſupra triplum coni. Sint reliqua haec ſegmenta, quae ſuper ſegmentis circuli AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA

τ. 32. 11.

υ. ſch. 28. 11.

φ. 1. 10.

HA consistunt. Igitur prisma, quod basin polygonam AEBFCGDH habet, & cylindro aeque altum est, erit > triplo coni; ideoque pyramis, cuius basis est AEBFCGDH, & vertex idem

χ. cor. 7. 12. qui coni χ, > erit cono; pars toto. Q. E. A.

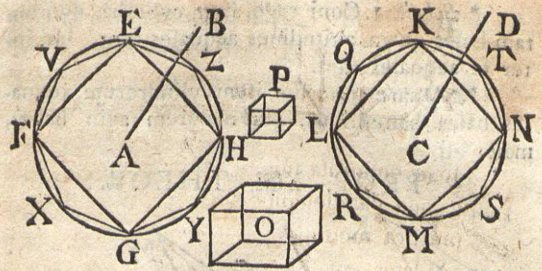
2. Sit cylindrus < triplo coni: erit conus > $\frac{1}{3}$ cylindri. Sed quia iisdem, quibus modo

ψ. 6. 12. vsi sumus, argumentis ψ, euincitur, pyramidem cono aeque altam, & cuius basis est quadratum ABCD > esse dimidio coni, & vnamquamque pyramidum cono aeque altarum super triangulis AEB, BFC &c. > esse dimidio respectiui segmenti coni: iterum patet, circumferentias semper bisecando, & super ortis sic triangulis pyramides semper erigendo, relictum iri segmenta coni minora excessu coni supra $\frac{1}{3}$ cylindri. Sint haec segmenta, quae sunt super segmentis circuli AE, EB, BF &c. Quare quum reliqua pyramis, cuius basis est polyg. AEBFCGDH, & vertex idem qui coni > sit $\frac{1}{3}$ cylindri: erit prisma cono vel cylindro aeque altum, & basin polyg. AEBFCGDH habens maius χ quam cylindrus; pars quam totum. Q. E. A.

PROP. XI. THEOR.

Coni & cylindri, qui eandem habent altitudinem AB, CD, *inter se sunt vt bases* EFGH, KLMN.

1. Sit



1. Sit vt circ. EFGH ad circ. KLMN ita conus FB ad aliud ſolidum O, quod ſit < cono LD; & ſit LD — O = P. Suppoſita praeparatione & argumentatione praecedentis propoſitionis, erunt ſegmenta coni, quae in ipſis QL, LR, RM &c. < P. Ergo pyr. KQLRMSNTD > O. Fiat in circ. EFGH ſimile polygonum EVFXGYHZ. Iam quia

pyr. EVFXGYHZB : pyr. KQLRMSNTD =[ω] ω. 6. 12.
polyg. EVFXGYHZ : pol. KQLRMSNT =[α] α. ſch. 2. 12.
circ. EFGH : circ. KLMN =[β] conus FB : O; β. hyp.
atque pyr. EVFXGYHZB <[γ] cono FB : erit γ. 9. ax. 1.
& pyr. KQLRMSNTD <[δ] ſolido O; quod δ. 14. 5.
repugnat oſtenſis. Non ergo eſt vt baſis A ad baſin C ita conus A ad ſolidum cono C minus.

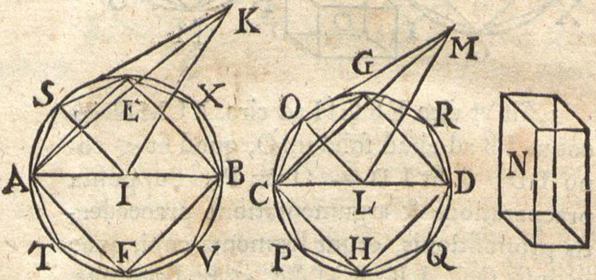
2. Si ponas O > cono LD: erit vt O ad conum FB, ita conus LD ad ſolidum [δ] minus cono FB, & ergo vt circ. KLMN ad circ. EFGH, ita conus LD ad ſolidum minus cono FB. Q. F. N [ε]. Itaque coni aeque alti, & ε. part. 1.
proinde cylindri [ζ] aeque alti, ſunt inter ſe vt ζ. 10. 12.
baſes. Q. E. D.

* *Schol.*

* *Schol.* 1. Coni ergo, item cylindri, quorum tam bases quam altitudines aequales sunt, ipsi inter se aequales sunt.

*2. Quare conorum, item cylindrorum, aequales bases habentium, qui maiorem axin habet, maior est.

PROP. XII. THEOR.



Similes coni & cylindri inter se sunt in triplicata ratione diametrorum basium AB, CD.

Sint bases circuli AEBF, CGDH, & axes IK LM; & sit conus AEBFK ad solidum quoddam N in triplicata ratione ipsius AB ad CD.

1. Pone N < cono CGDHM. Factis iisdem, quae in praecedentibus, eodem modo ostendemus, esse aliquam pyramidem GOCPHQDRM in cono CDM, quae maior sit quam N. Fiat in circ. I simile polygonum ASEXBVFT, quod sit basis pyramidis, verticem cum cono ABK communem habentis. Sint in his duabus pyramidibus triangula CMO, AKS quaedam ex iis, quae pyramides continent, &

ϡ. 24. def. 11. iunctae sint LO, IS. Iam quia conus ABK ∾ cono CDM, est ϡ AB : CD = IK : LM, ac ergo

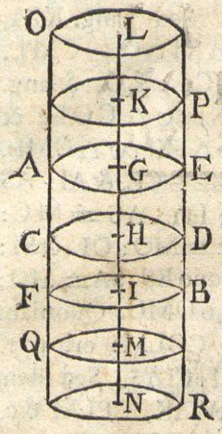
go AI : IK = CL : LM. Sed [ϑ] ang. KIA, ϑ. 11. def.
MLC recti sunt: ergo △ AKI ∾ [ι] △ CML. 11.
Similiter, quia AI : IS = CL : LO, & ang. ι. 6. 6.
AIS [κ] = CLO, erit △ ASI ∾ △ COL; & κ. 2.sch.33.
iterum similiter patet, esse △ SKI ∾ △ OML. 6.
Hinc quia [λ] KA : AI = MC : CL, & AI : AS λ. 1. def. 6.
= CL : CO : erit ex aequo KA : AS = MC :
CO. Similiter quia KS : SI = MO : OL, & SI :
SA = OL : OC : erit ex aequo KS : SA = MO :
OC. Ergo △ ASK ∾ [μ] △o OMC. Quoniam μ. sch. 5. 6.
igitur pyr. ASIK ∾ [ν] pyr. COLM: erit pyr. ν. 9. def. 11.
ASIK : pyr. COLM = [ξ] $(AI : CL)^3$. Sed idem ξ. 8. 12.
de reliquis pyramidibus ATIK, CPLM &c.
ostendemus. Ergo [o] pyr. ASEXBVFT : pyr. o. 12. 5.
GOCPHQDRM = $(AI : CL)^3$ = [π] (AB : π. 1. sch.
CD)^3 = [ρ] con. AEBFK : N. Quare pyr. GO- 22. 5.
CPHQDRM < [σ] solido N; contra mo- ρ. hyp.
do dicta. σ. 14. 5.

2. *Si* ponas N > cono CGDHM : quia N :
AEBFK = [ρ] $(CD : AB)^3$, & [σ] N ad AEBFK
vti conus CGDHM ad solidum cono AEBFK
minus : erit conus CGDHM ad solidum quod-
dam cono AEBFK minus in triplicata ratione
ipsius CD ad AD. Q. F. N. [τ] Ergo tam co- τ. part. 1.
ni, quam [υ] cylindri, sunt in triplicata ratione υ. 10. 12.
diametrorum basium. Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

Si cylindrus AB *plano* CD *secetur, oppositis planis* AE, FB *parallelo: erit vt cylindrus* AD *ad cylindrum* DF *ita axis* GH *ad axem* HI.

Pro-



Producatur vtrinque axis GI, & fiant ipſi GH aequales quotcunque GK, KL, & ipſi HI aequales quotuis IM, MN. Per puncta L, K, M, N ducantur plana ipſis AE, CD parallela, in quibus fiant circa centra L, K, M, N circuli ipſis AE, FB aequales; & inter hos circulos intelligantur cylindri OP, PA, BQ, QR conſtituti. Quia cylindri OP, PA,

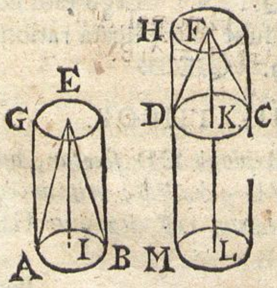
φ. 1. ſch. 11. 12. AD inter ſe φ aequales ſunt; quotuplex eſt axis LH ipſius GH, totuplex eſt cyl. OD ipſius AD. Similiter, quotuplex eſt axis HN ipſius HI, totuplex eſt cyl. CR cylindri DF. Praeterea ſi axis LH >=< HN: erit χ & cyl. OD >=< cyl. CR. Ergo cyl. AD: cyl. DF = ψ ax. GH: ax. HI. Q. E. D.

χ. 2. ſch. 11. 12.

ψ. 4. def. 5.

PROP. XIV. THEOR.

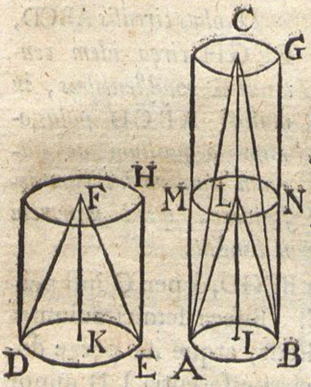
Aequalibus baſibus AB, CD *inſiſtentes coni* ABE, CDF, *aut cylindri* BG, CH *inter ſe ſunt vt altitudines* EI, FK.



Producatur axis FK, vt fiat KL = EI, & circa axem KL in baſi

basi CD sit cyl. CM, qui erit =ω cyl. ω. 1. sch. 11.
BG. Ergo cyl. BG : cyl CH = cyl. CM : 12.
cyl. CH =α KL : FK = EI : FK. Qua- α. 13. 12.
re & conus ABE : con. CDF β= EI : FK. β. 15. 5.
Q. E. D.

PROP. XV. THEOR.



Aequalium conorum ABC, DEF *aut cylindrorum* AG, DH *bases* AB, DE *sunt altitudinibus* CI, FK *reciproce proportionales. Item quorum conorum aut cylindrorum bases* AB, DE *altitudinibus* CI, FK *reciproce proportionales sunt, illi inter se sunt aequales.*

Cas. 1. Si altitudines aequales sunt: patet, in vtraque hypothesi etiam bases aequales esse; & constat ergo propositio.

Cas. 2. Sit CI > FK. Fiat LI = FK, & per L secetur cylindrus AG plano MN basibus parallelo.

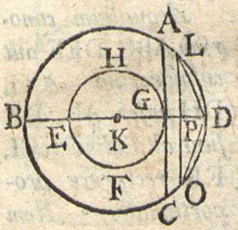
Hyp. 1. Et quia cyl. AG = DH: erit cyl.
AN : cyl. AG = cyl. AN : cyl. DH =γ bas. γ. 11. 12.
AB : DE. Sed cyl. AN : cyl. AG =δ LI : δ. 13. 12. &
CI = FK : CI. Ergo AB : DE = FK : CI. 18. 5.
Q. E. D.

Hyp. 2. Sit bas. AB : bas. DE = alt. FK : alt. CI. Est autem bas. AB : bas. DE = cyl.

AN : cyl. DH, & FK : CI = LI : CI = cyl.
s. 9. 5. AN : cyl. AG. Ergo cyl. DH = [s] cyl. AG.
Q.E.D.

Similiter autem & in conis.

PROP. XVI. PROBL.



Duobus circulis ABCD, EFGH *circa idem centrum* K *consistentibus*, *in maiori* ABCD *polygonum aequalium ac parium numero laterum describere, quod minorem circulum* EFGH *non tangat.*

Duc diametrum BEGD, & per G ipsi per-
ζ. 30. 3. pendicularem AGC. Biseca semicirculum [ζ]
BAD, ac eius semissem, atque ita perge do-
η. 1. 10. nec relinquatur [η] circumferentia LD minor
ipsa AD. Ab L in BD duc perpendicularem
θ. 3. 3. & 4. 1. LPO. Iunge LD, DO, quae [θ] aequales erunt.
ι. cor. 16. 3. Iam quia AC circulum EFGH tangit, LO vero ipsi AC parallela est extra hunc circulum: LO eum non tanget; multoque minus rectae LD, DO eundem tangent. Si ergo ipsi LD aequales deinceps in circulo ABC aptauerimus
κ. 1. 4. [κ]: fiet polygonum aequalium & parium laterum (quia circumf. LD est pars aliquota semicirculi), circulum EFGH non tangens. Q.E.F.

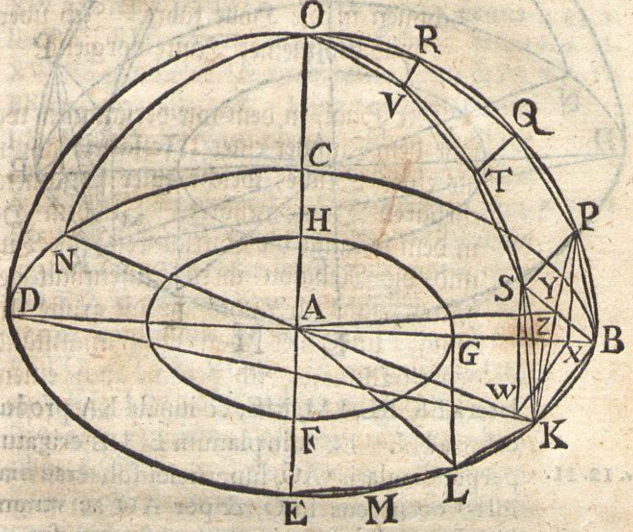
* *Coroll.*

Ergo recta KG < KP.

PROP.

PROP. XVII. PROBL.

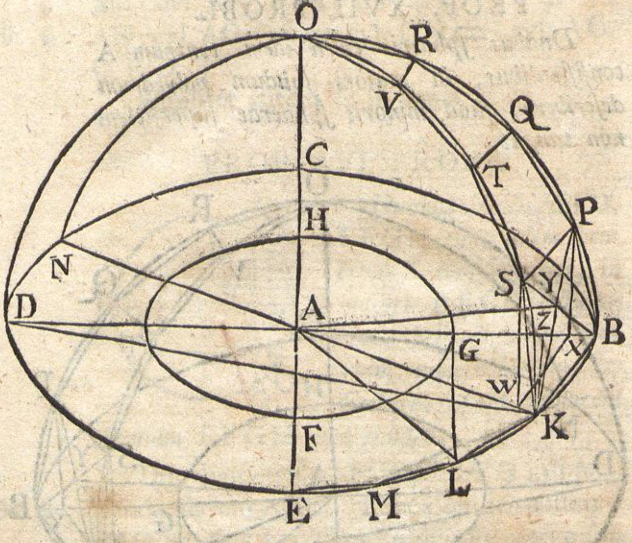
Duabus sphaeris circa idem centrum A consistentibus, in maiori solidum polyedrum describere, quod minoris sphaerae superficiem non tangat.



Secentur sphaerae plano aliquo per centrum. Quia [λ] semicirculi sphaeram generantis planum productum in superficie sphaerae circulum efficit maximum, siue qui diametrum sphaerae habet: sectiones erunt circuli maximi. Sint illi BCDE, FGHF, & eorum diametri ad rectos angulos ducantur BD, CE. In maiori circulo BCDE polygonum aequalium & parium laterum [μ] describatur non tangens minorem FGH. Sint in quadrante BE ea latera

λ. 14. def. 11. & seq. & 15. 3.

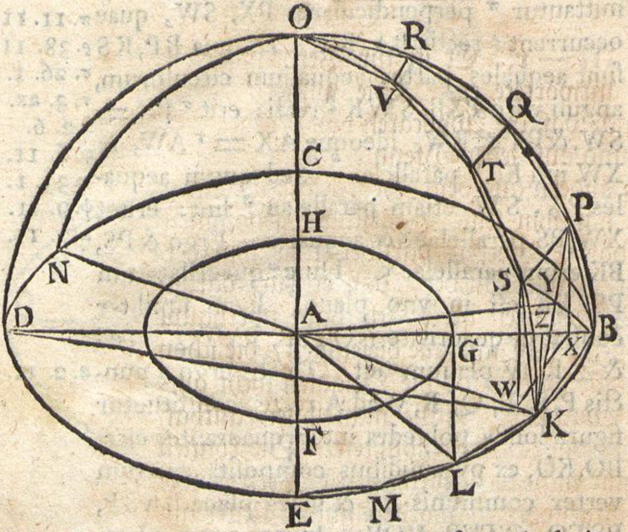
μ. 16. 12.



latera BK, KL, LM, ME, & iuncta KA producatur ad N. Ex A in planum BCDE erigatur
ν. 12. 11. perpendicularis ν AO, superficiei sphaerae maioris occurrens in O, & per AO ac vtramque BD, KN ducantur plana, quae in superficie sphaerae efficient maximos circulos, quorum semisses sint DOB, NOK. Quia AO
ξ. 3. def. 11. ipsis BD, KN ad rectos ξ est: erunt OB, OK
ο. 1. def. 3. quadrantes circulorum, & aequales ο, quia circuli aequales diametros BD, KN habent. Quot ergo latera polygoni sunt in quadrante BE, tot aptari possunt illis aequalia in quadrante BO, quae sint BP, PQ, QR, RO, & in quadrante KO, quae sint KS, ST, TV, VO. Iungantur SP, TQ, VR. Ex P, S in planum BCDE demit-

mittantur [π] perpendiculares PX, SW, quae π. 11. 11.
occurrent [ρ] rectis BA, KA. Et quia BP, KS ρ. 38. 11.
sunt aequales partes aequalium circulorum, σ. 26. 1.
anguli vero PXB, SWK [ρ] recti: erit [σ] PX = τ. 3. ax. 1.
SW, & BX = KW, ideoque AX = [τ] AW, & υ. 2. 6. φ. 6. 11.
XW ipsi KB [υ] parallela. Sed quum aequa- χ. 33. 1.
les PX, SW etiam parallelae [φ] sint: erunt ψ. 9. 11.
XW, PS parallelae [χ] & aequales. Ergo & PS, ω. 7. 11.
BK erunt parallelae [ψ]. Hinc [ω] quadrilaterum PS, KB est in vno plano. Idem similiter constat de quadrilateris QTSP, RVTQ. Sed & △ ROV planum [α] est. Ductis ergo a pun- α. 2. 11.
ctis P, S, T, Q, R, V ad A rectis, constituetur figura solida polyedra inter quadrantes circ. BO, KO, ex pyramidibus composita, quarum vertex communis A, & bases plana BKSP, PSTQ, QTVR, VOR. In vnoquoque laterum KL, LM, ME eadem quae in KB construantur, & etiam in reliquis tribus quadrantibus, & in reliquo hemisphaerio. Sic fiet solidum polyedrum maiori sphaerae inscriptum, compositum ex pyramidibus, quarum vertex communis A. Dico, huius solidi superficiem non tangere superficiem minoris sphaerae.

Ducatur enim in planum PSKB ex A perpendicularis AY, & KY, BY iungantur. Et quoniam ob ang. AYB, AYK rectos [ρ], BYq +
AYq = [β] ABq = AKq = KYq + AYq: β. 47. 1.
erit BY = KY. Similiter patet, esse SY = PY = BY. Ergo PSKB est quadrilaterum in
circulo, [γ] centro Y interuallo YB, descripto. γ. 15. def. 1.
Et quia BK > [δ] XW, ideoque > PS; BK δ 2. sch. 4. 6. & 14. 5.



vero $=$ KS $=$ PB: erit circumferentia huius
ε. 28. 3. circuli, quam recta BK subtendit, quadrante [ε]
ζ. 33. 6. maior, hinc ang. KYB recto [ζ] maior, & KBq [η]
η. 12. 2. $>$ 2 BYq. Ducatur a K ad BD perpendicularis KZ, & iungatur DK. Quoniam AB $<$ AB $+$ 2 AZ: erit DB $<$ 2 DZ. Hinc quia
θ. 1. 6. DB: 2 DZ $=$ [θ] DB $\times$ BZ: 2 DZ $\times$ BZ $=$ [ι]
ι. cor. 8. 6. BKq: 2 KZq: erit BKq $<$ 2 KZq, & ergo KZq $>$ BYq. Sed KZq $+$ AZq $=$ AKq $=$ BYq $+$ AYq. Ergo AZ $<$ AY, & a
κ. cor. 16. 12. potiori [κ] AG $<$ AY. Ergo polyedri superficies non tangit minoris sphaerae superficiem. Q. E. F.

Aliter.

Et breuius ostendemus, esse AG $<$ AY, excitato ex G in AB perpendiculo GL, & iuncta AL.

AL. Nam bisecta circ. BE, & huius semisse, & sic porro, relinquetur tandem circumferentia minor ea, quam recta ipsi GL aequalis in circulo BCE subtendit. Sit illa BK. Ergo recta BK < GL. Sed vt antea patet esse BK > BY. Ergo GL > BY. Sed GLq + AGq = ALq = ABq = BYq + AYq. Quare GA < AY. Q. E. D.

* *Corollar.*

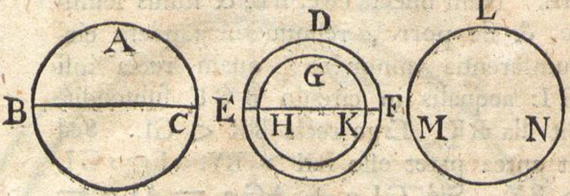
Si in quauis alia sphaera describatur solidum polyedrum, praedicto polyedro in sphaera BCDEO *simile: habebunt haec duo solida polyedra triplicatam rationem eius quam diametri sphaerarum habent.* Diuisis enim solidis in pyramides numero aequales & eiusdem ordinis: erunt hae pyramides similes. Ergo pyr. BPSKA erit ad pyramidem eiusdem ordinis in altera sphaera in triplicata ratione λ eius λ. cor. 8. 12.
quam latus homologum ad homologum habet, id est, quam habet semidiameter sphaerae A ad semidiametrum alterius sphaerae. Idem de quibusuis duabus pyramidibus in vtraque sphaera eiusdem ordinis intelligendum est. Sed μ vt vna pyramis in μ. 12. 5.
sphaera A ad vnam in altera, ita solidum polyedrum in sphaera A ad solidum polyedrum in altera sphaera. Ergo solida polyedra sunt in triplicata ratione semidiametrorum, vel diametrorum. Q. E. D.

PROP. XVIII. THEOR.

Sphaerae ABC, DEF *inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum* BC, EF.

1. Si enim non: sit sph. ABC ad sphaeram GHK ipsa DEF minorem in triplicata ratione BC ad EF. In sph. DEF describatur ν solidum ν. 17. 12.

 polye-



polyedrum, quod non tangat minorem GHK, circa commune cum illa centrum constitutam, & in sph. ABC huic polyedro simile describatur, quod erit ξ ad polyedrum in sph. DEF in triplicata ratione BC ad FE, ideoque in eadem ratione, in qua sph. ABC ad sph. GHK. Igitur sph. GHK >ο polyedro in sphaera DEF descripto, pars toto. Q. E. A.

ξ. cor. 17. 12.

ο. 14. 5.

2. Si ponas, sph. ABC ad sph. LMN ipsa DEF maiorem esse in triplicata ratione BC ad EF: erit sph. LMN : sph. ABC = (EF : BC)3. Sed sph. LMN ad sph. ABC vt sph. DEF ad sphaeram ο ipsa ABC minorem. Ergo sph. DEF erit ad sphaeram ipsa ABC minorem in triplicata ratione diametri EF ad diametrum BC. Q. F. N π.

π. part. I.

* *Corollar.*

Hinc vt sphaera ad sphaeram, ita est polyedrum solidum in illa ad polyedrum in hac simile & similiter descriptum.