Einleitung.

Die alten Geometer bedienten sich zur Auflösung der Dreyecke der Sehnen statt der jetzt üblichen Sinus. Sie theilten den Halbmesser des Kreises wie den Bogen von 60 Grad, dessen Sehne er ist, in 60 gleiche Theile, jeden dieser Theile aufs Neue in 60 und nach diesem Gesetze weiter, und drückten in solchen Theilen die Sehnen der Kreisbogen aus. Sie hatten also eine Sexagesimaltheilung zugleich für Bogen und Halbmesser. Im ersten Buche des Almagests des Ptolemäus steht eine Tafel der Sehnen von halben zu halben Graden nebst den 30sten Theilen ihrer Unterschiede *). Wenn hier die Sehne von 10° durch 10 27 32 ausgedrückt ist, so heiſst dies, daſs sie

$$=\frac{10}{60}+\frac{27}{60.60}+\frac{32}{60.60.60}=10.60^{-1}+27.60^{-2}+32.60^{-3},$$

oder nach der gewöhnlichen Bezeichnung der Sexagesimalbrüche, $=\overset{-1}{10}+\overset{-2}{27}+\overset{-3}{32}=0,174314$ des Halbmessers sey, welches mit dem doppelten Sinus von 5° bis zur sechsten Decimalstelle übereinstimmt.

Die Araber bemerkten, daſs die trigonometrischen Rechnungen einfacher würden, wenn man statt der Sehnen die Sinus oder halben Sehnen gebrauche, indem sich vermittelst der letztern aus den Winkeln eines Dreyecks geradezu das Verhältniſs der gegenüberliegenden Seiten ergiebt, die erstern hingegen allemal eine Verdoppelung der Winkel nothwendig machen. Sie führten also die Sinus ein **), behielten aber die Sexagesimaleintheilung des Halbmessers bey.

---

*) Eine umständliche Beschreibung dieser Tafel findet sich in Hrn. Hofr. Kästners geometrischen Abhandlungen I. Sammlung, 60. Abhandl.

**) In Kästners Geschichte der Mathematik Th. I. S. 521 wird aus einer Stelle des Arabers Albategnius, der ums

Der grofse deutsche, im funfzehnten Jahrhundert lebende, Mathematiker Johann **Müller** oder **Regiomontan**, der das Unbequeme dieser Eintheilung fühlte, berechnete einen Canon der Sinus in Theilen, deren er dem Halbmesser 6000000 beylegte. In der Folge fand er, dafs der Gebrauch dieser Hülfslinien bey Auflösung der Dreyecke noch einfacher werde, wenn man zum Halbmesser eine dekadische Zahl annehme, und so bearbeitete er einen neuen Canon für den Halbmesser 10000000. Beide Tafeln enthalten die Sinus für jede Minute des Quadranten, und stehen in seinem wichtigen Werke von den Dreyecken *), wodurch er den Grund zu unserer heutigen sowol ebenen als sphärischen Trigonometrie gelegt hat. Auch verdanken wir diesem um die Dreyeckmefskunst sehr verdienten Manne den Gebrauch der Tangenten, für welche er gleichfalls eine Tafel berechnete, die er ihres grofsen Nutzens wegen tabula foecunda nannte.

Im sechzehnten Jahrhundert fügte Georg Joachim **Rheticus** noch die Secanten hinzu, und berechnete mit einem ungemeinen Aufwande von Mühe und Zeit einen Canon der Sinus, Tangenten und Secanten für jede 10te Secunde des Quadranten in Theilen, deren er dem Halbmesser 1000 Billionen gab, oder bis auf 15 Decimalstellen, wenn der Halbmesser als Einheit angenommen wird. Diese grofse Arbeit wurde nach seinem Tode von seinem Schüler Valentin **Otho** vollendet, der sie mit seiner und seines Lehrers Abhandlung von den Dreyecken unter dem Titel Opus palatinum de triangulis, herausgab (Neustadt in der Pfalz 1596, fol.). Hier sind indessen nur 10 Stellen abgedruckt; alle 15 hingegen von Rheticus berechnete Stellen der Sinus finden sich in des **Pitiscus** Thesaurus Mathematicus (Francof. 1613, fol.), dem vollständigsten Canon der Sinus, welchen wir haben.

Um die Zeit der Erscheinung des letztgedachten Werks erfand Neper die Logarithmen. Der Urheber und erste

---

Jahr 880 unserer Zeitrechnung de motu stellarum schrieb, wahrscheinlich gemacht, dafs sich dieser Astronom zuerst der Sinus statt der Sehnen bedient habe.

*) Jo. Regiomontani de triangulis libri V. editi per Dan. Santbech, Basileae 15.., fol.

Berechner der gemeinen Logarithmen, Heinrich Briggs, dachte darauf, diese wichtige Erfindung für die Trigonometrie brauchbar zu machen, und damit zugleich eine bequemere Kreiseintheilung als die bisherige zu verbinden. Er berechnete zu dem Ende einen Canon der natürlichen Sinus, Tangenten und Secanten und der Logarithmen der Sinus und Tangenten für alle Grade und Hunderttheile von Graden, und begleitete ihn mit einer Abhandlung über die Construction desselben. Er wollte auch noch von dem Gebrauche seiner Tafeln in der sphärischen Trigonometrie handeln, allein der Tod hinderte ihn daran. Heinrich Gellibrand, sein Freund, übernahm nun die Ausarbeitung dieser Abhandlung und gab das Ganze mit Adrian Vlacqs Beyhülfe unter dem Titel Trigonometria britannica 1633 zu Gouda heraus. Hier findet man die natürlichen Sinus auf 15, die künstlichen auf 14, die natürlichen und künstlichen Tangenten aber, so wie die Secanten, auf 10 Stellen. Unterdessen hatte Vlacq vermittelst des Opus palatinum einen Canon der Logarithmen der trigonometrischen Linien auf 10 Decimalstellen für jede 10te Secunde des Quadranten berechnet, und ihn unter dem Titel Trigonometria artificialis in demselben Jahre zu Gouda herausgegeben, in welchem die Trigonometria britannica erschienen war. Da diese Tafeln vollständiger waren als die briggischen, so vernachlässigte man die letztern und hielt sich an die erstern, zumahl da die bey den Vlacqschen Tafeln zum Grunde liegende Kreiseintheilung die Auctorität des Alterthums für sich hatte. Hätte indessen Vlacq, wenn er doch etwas Vollständigeres als Briggs liefern wollte, die Logarithmen der trigonometrischen Linien für jedes Tausendtel des Grades berechnet, so ist fast nicht zu zweifeln, daſs die Sexagesimaleintheilung des Grades, wenigstens in der Trigonometrie und Astronomie, durch die ungleich bequemere Decimaleintheilung eben so verdrängt worden seyn würde, wie die sechzigtheilige Zerfällung des Halbmessers durch die zehntheilige.

Erst in unsern Tagen ist die Decimaleintheilung des Kreises wieder in Anregung gekommen, und man ist in dieser Hinsicht noch einen Schritt weiter gegangen, als

Briggs. Da dieser nehmlich blofs an die Stelle der Sexagesimaleintheilung des Grades die Decimaleintheilung gesetzt, die uralte Nonagesimaleintheilung des Quadranten hingegen beybehalten hatte, so hat man vorgeschlagen, auch die Eintheilung des Kreises in Grade abzuschaffen, und statt derselben eine Decimaleintheilung des Quadranten einzuführen, so dafs der rechte Winkel als Einheit angenommen wird, die spitzen Winkel folglich als ächte, die stumpfen als unächte Decimalbrüche erscheinen.

Bey der seit kurzem in Frankreich vorgenommenen Maafsreform und Einführung des Decimalsystems zur Eintheilung aller Maafse, Gewichte und Münzen, ist denn auch die gedachte Decimaleintheilung des Quadranten beliebt worden. Schon hat man dort angefangen, sie auf astronomischen Instrumenten anzubringen. So sind z. B. die ganzen Kreise, welche Méchain und Delambre bey ihren trigonometrischen Messungen zur Bestimmung des mittlern Erdgrades gebraucht haben, und die astronomische Uhr, vermittelst deren die Pendellänge von Paris aufs Neue durch Borda und Cassini untersucht worden ist, dem Decimalsystem gemäfs eingetheilt. Auch bedienen sich bereits verschiedene französische Mathematiker dieses Systems in ihren Schriften, und es ist wahrscheinlich, dafs es einst nach Erscheinung der grofsen Sammlung in diesem System berechneter trigonometrischer, astronomischer und hydrographischer Tafeln, welche gegenwärtig auf Kosten der französischen Nation gedruckt werden, allgemein in Frankreich angenommen werden wird. Jeder nicht französische Mathematiker wird alsdann genöthigt seyn, sich mit der neuen Kreiseintheilung vertraut zu machen, sey es auch nur, um die Resultate französischer Messungen und Rechnungen benutzen zu können.

Deutschen Mathematikern gebührt indessen der Ruhm, zwar nicht, so viel uns wenigstens bekannt ist, die Decimaleintheilung des Quadranten in Vorschlag gebracht, aber doch an die Berechnung neuer Tafeln, wodurch ihr allein Eingang verschafft werden kann, Hand angelegt zu haben.

Der verstorbene Oberbaurath Schulze, Mitglied der Preufsischen Akademie der Wissenschaften, sagt S. 270 des zweyten Heftes seines Taschenbuchs *), dafs er aus den Gellibrandschen (Briggischen) Tafeln andere vermittelst des Einschaltens habe berechnen lassen, welche für jeden tausendsten Theil eines Grades die Hülfslinien der Dreyeckmefskunst nebst ihren Logarithmen bis auf die 7te Stelle eines zehntheiligen Bruchs enthalten, und sey im Begriff gewesen, diese Arbeit dem Druck zu übergeben, als ihm Hr. Lagrange, damaliger Director der mathematischen Klasse der Akademie, den Gedanken geäufsert hätte, dafs dergleichen Tafeln noch einfacher im Gebrauch seyn würden, wenn man auch die Eintheilung des Kreises in Grade abschaffe und eine Decimaleintheilung des Quadranten an ihre Stelle setze **). Da ihm nun hiedurch die Sache ihre gröfste Geschmeidigkeit erlangt zu haben scheine, so habe er gern seine völlig fertigen Tafeln wieder zurückgenommen und wünsche nichts mehr, als Lagrange's Gedanken ausgeführt zu sehen. Wir werden, setzt Schulze hinzu, den Alten ähnlicher werden, wenn wir, so wie sie, Kreisbogen und Halbmesser auf gleiche Art zerfällen, nur dafs wir die Sexagesimaleintheilung gegen die unserer Art zu rechnen weit angemessenere Decimaleintheilung vertauschen. In der Vorrede des gedachten Werks berichtet er noch, dafs ihm der Graf von Schafgotsch zu Prag bereits eine beträchtliche Anzahl nach dem neuen System berechneter Sinus zugeschickt habe. Was aus denselben geworden ist, wissen wir nicht.

Schulze selbst begnügt sich damit, Vorschläge zu thun, wie die Berechnung trigonometrischer Tafeln nach dem Decimalsystem am bequemsten eingeleitet werden könne. Er fängt damit an, eine neue Bezeichnung der

*) Taschenbuch für diejenigen, so gründliche Anwendungen der Mefskunst zu machen sich vorsetzen, Berlin 1782, 83. 2 Bände. 8.

**) Dieser berühmte Mathematiker wäre also als Urheber der Decimaleintheilung des Quadranten anzusehen. Dies stimmt sehr gut mit einer vom Hrn. Obristwachtmeister von Zach im 3ten Bande seiner schätzbaren allgemeinen geographischen Ephemeriden S. 50 gegebenen Nachricht überein.

Kreisbogen festzusetzen, die wir aber durchaus nicht billigen können. Will man einmal von der Gradeintheilung der Alten abgehen, so muſs unsers Erachtens zur Verhütung aller Sprachverwirrung auch die bisherige Terminologie gänzlich abgeschafft werden. Sie kann es auch füglich, da die Wörter Zehntel, Hundertel, Tausendtel u. s. w. des Quadranten oder rechten Winkels leicht verständlich und um nichts unbequemer sind, als die bis jetzt üblichen Benennungen der Bogen oder Winkeltheile. Eben so wenig können, wenn die Verwirrung nicht vollkommen werden soll, die bey der Sexagesimaleintheilung üblichen Zeichen beybehalten werden. Soll der Quadrant, als das Maaſs des rechten Winkels, nach dem Decimalsystem zerfällt, bey der Bestimmung aller übrigen Winkel als Einheit dienen, warum wollte man nicht alle Kreisbogen und Winkel als Decimalbrüche des Quadranten oder rechten Winkels bezeichnen und aussprechen? Der Deutlichkeit wegen kann man ein Q (Quadrant) oder R, in der längst üblichen Bedeutung dieses Buchstabens, hinter den Decimalbruch schreiben, der den Bogen oder Winkel ausdrückt, z. B. in folgenden Reductionssätzen:

$$1^\circ = 0{,}111111\, Q = 0{,}111111\, R$$
$$1' = 0{,}000185\, Q = 0{,}000185\, R$$
$$1'' = 0{,}000003\, Q = 0{,}000003\, R$$

Dagegen würde in dem für sich verständlichen Ausdrucke $\sin 0{,}0025 = 0{,}0039270$ ein Q oder R hinter dem Bruche $0{,}0025$ überflüssig seyn. Wir werden uns also der Benennungen neue Grade, Decimalgrade, Centesimalgrade, Centesimalminuten, die wir von französischen Mathematikern gebraucht finden, so wie auch der Uebertragung der bisherigen Bezeichnungen auf die neue Kreiseintheilung, gänzlich enthalten.

Die von Schulze vorgeschlagene Methode zur Berechnung trigonometrischer Tafeln nach dem Decimalsystem ist nun folgende:

Die Formeln *)

*) Wir sehen uns genöthigt, in Ansehung der trigonometrischen Formeln, die wir in Folgendem gebrauchen werden, diejenigen unserer Leser, die noch nicht gehörig in der

$$\sin(0{,}5 - A) = (\cos A - \sin A)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$\cos(0{,}5 - A) = (\cos A + \sin A)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

dienen dazu, aus den Sinus und Cosinus der Bogen unter 0,25 die der Bogen über 0,25 herzuleiten. Es kommt also zuförderst darauf an, dieSinus und Cosinus unter 0,25 zu suchen. Dazu sind die von Euler in seiner Introductio in Analysin infinitorum Tom. I. S. 99 und 100 aus den Reihen

$$\sin A = A - \frac{A^3}{2.3} + \frac{A^5}{2.3.4.5} - \frac{A^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots$$
$$\cos A = 1 - \frac{A^2}{2} + \frac{A^4}{2.3.4} - \frac{A^6}{2.3.4.5.6} + \ldots$$

abgeleiteten Formeln zur Bestimmung von $\sin \frac{m}{n}.Q$ oder $\sin \frac{m}{n}.\frac{\pi}{2}$ und $\cos \frac{m}{n}.Q$ oder $\cos \frac{m}{n}.\frac{\pi}{2}$ zu empfehlen, nehmlich:

$$\sin \frac{m}{n}.Q = \frac{m}{n}.\,1{,}57079632\ldots$$
$$- \frac{m^3}{n^3}.\,0{,}64596409\ldots$$
$$+ \frac{m^5}{n^5}.\,0{,}07969262\ldots$$
$$- \frac{m^7}{n^7}.\,0{,}00468174\ldots$$
$$+$$

analytischen Trigonometrie geübt seyn sollten, auf des Hrn. Generals von Tempelhoff schätzbare Anfangsgründe der Analysis endlicher Gröſsen, oder auf Hrn. Prof. Burja's selbstlernenden Geometer, oder auf Hrn. Prof. Klügels analytische Trigonometrie, oder auf Hrn. Pasquichs vortrefflichen Unterricht in der mathematischen Analysis, oder endlich auf Cagnoli traité de trigonométrie rectiligne et sphérique (Paris 1786, 4) zu verweisen. Beide letztere Werke enthalten die vollständigste Sammlung trigonometrischer Formeln, die wir kennen, so wie das letzte wegen des darin herschenden lichtvollen Vortrags einem angehenden Mathematiker nicht genug empfohlen werden kann. Es bleibt übrigens in Ansehung dieses Werks bey dem in der Ankündigung unserer Tafeln gegebenen Versprechen.

$$\cos \frac{m}{n}. Q = \quad 1{,}00000000 \ldots$$

$$- \frac{m^2}{n^2}. 1{,}23370055 \ldots$$

$$+ \frac{m^4}{n^4}. 0{,}25366950 \ldots$$

$$- \frac{m^6}{n^6}. 0{,}02086348 \ldots$$

Diese Formeln sind brauchbar, wenn n, wie im Decimalsystem, eine dekadische Zahl ist. Soll z. B. sin 0,00736 gefunden werden, so ist $\frac{m}{n} = \frac{736}{100000}$, und die in den Formeln durch $\frac{m}{n}$, $\frac{m^2}{n^2}$, $\frac{m^3}{n^3}$, $\frac{m^4}{n^4}$ u. s. w. angedeuteten Divisionen lassen sich durch eine bloſse Verrückung des Decimalzeichens verrichten. Wenn die Sinus und Cosinus bis zur 10ten Stelle berechnet werden, um 7 richtig zu erhalten, so gebraucht man im ersten Viertel des Quadranten von der Sinusreihe nur die ersten 5, und von der Cosinusreihe nur die ersten 6 Glieder, so daſs die höchste Potenz des Bruchs $\frac{m}{n}$, welche vorkommt, die zehnte ist. Vermittelst der Formel

$$\cot 2\ A = \frac{\cot A - \operatorname{tang} A}{2}$$

ergeben sich aus den Tangenten und Cotangenten unter 0,25 leicht die Cotangenten über 0,25. Um nun die Tangenten in der ersten Hälfte und die Cotangenten im ersten Viertel des Quadranten zu berechnen, sind die von Euler am angeführten Orte S. 102 gegebenen Formeln für die Tangenten und Cotangenten zu gebrauchen, nehmlich

$$\tan\frac{m}{n}.Q = \frac{2mn}{n^2 - m^2}.\ 0{,}63661977\ldots$$
$$+\ \frac{m}{n}.\ 0{,}29755678\ldots$$
$$+\ \frac{m^3}{n^3}.\ 0{,}01868865\ldots$$
$$+\ \frac{m^5}{n^5}.\ 0{,}00184247\ldots$$
$$+$$

$$\cot\frac{m}{n}.Q = \frac{n}{m}.\ 0{,}63661977\ldots$$
$$-\ \frac{4mn}{4n^2 - m^2}.\ 0{,}31830988\ldots$$
$$-\ \frac{m}{n}.\ 0{,}20528888\ldots$$
$$-\ \frac{m^3}{n^3}.\ 0{,}00655107\ldots$$
$$-$$

Da bey den Tangenten $\frac{m}{n}$ nie gröſser als $\frac{1}{2}$, und bey den Cotangenten nie gröſser als $\frac{1}{4}$ ist, so reichen von der Tangentenformel 7, von der Cotangentenformel 6 Glieder hin, wenn nur bis zur 10ten Decimalstelle gerechnet wird. Was endlich die Logarithmen betrifft, so ergeben sie sich bis zur 7ten Stelle aus den natürlichen trigonometrischen Linien, und unabhängig von diesen bis zur 10ten vermittelst der von Euler S. 157 und 158 des ersten Theils seiner Einleitung entwickelten Formeln, nehmlich:

$$\log \text{tab. } \sin\frac{m}{n}.\ Q =$$
$$\log m + \log(2n - m) + \log(2n + m) - 3\log n.$$
$$+\ 9{,}59405988\ldots.$$
$$-\ \frac{m^2}{n^2}.\ 0{,}07002282\ldots.$$
$$-\ \frac{m^4}{n^4}.\ 0{,}00111726\ldots.$$
$$-\ \frac{m^6}{n^6}.\ 0{,}00003922\ldots.$$
$$-$$

$$\log \text{tab. } \cos. \frac{m}{n}. Q =$$
$$\log (n - m) + \log (n + m) - 2 \log n.$$
$$+ \quad 10{,}00000000 \ldots$$
$$- \frac{m^2}{n^2}. \quad 0{,}10149485 \ldots$$
$$- \frac{m^4}{n^4}. \quad 0{,}00318729 \ldots$$
$$- \frac{m^6}{n^6}. \quad 0{,}00020948 \ldots$$
$$-$$

Die Logarithmen der Zahlen m, $2n-m$, $2n+m$, $n-m$, $n+m$ müssen aus den gröſsern Vlacqschen Logarithmentafeln genommen werden, wobey man freylich die Rechnung höchstens bis auf Zehntausendtheile des Quadranten fortführen kann, weil sich sonst die Logarithmen der Zahlen $2n+m$, $2n-m$ und $n+m$ in gedachten Tafeln nicht finden. Bedient man sich durchgehends der Eulerschen Formeln, so beruht die ganze Berechnung der trigonometrischen Tafeln nach dem Decimalsystem hauptsächlich darauf, die Potenzen der Zahl m zu suchen. Sollen solche Tafeln von einem Zehntausendtel des Quadranten zum andern fortschreiten, so ist $n = 10000$, und da $\frac{m}{n}$ nie gröſser als $\frac{1}{2}$ ist, so kann m nicht gröſser als 5000 seyn. Es müssen also die 10 bis 12 ersten Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis 5000 berechnet werden. Hat man diese zur Hand, und sucht alsdann noch die Multipla der beständigen Coefficienten, womit die Potenzen des Bruchs $\frac{m}{n}$ in den Eulerschen Formeln multiplicirt werden, so reducirt sich die ganze Rechnung auf ein bloſses Abschreiben und Addiren.

Dies ist der Weg, den Schulze *) dem Berechner trigonometrischer Decimaltafeln vorzeichnet. Ob er bequem und zugleich sicher zum Ziel führe, darüber werden

*) Taschenbuch, zweytes Heft, §. 124 bis 127.

wir uns weiter unten erklären. Hier bemerken wir nur, daſs er wirklich von einem deutschen Mathematiker betreten worden ist, und zwar mit einer zu unsern Zeiten gewiſs seltenen Anstrengung und Beharrlichkeit. Wir meinen den Hrn. Professor Schmidt in Schwerin, vormaligen Lehrer der Mathematik an dem hiesigen Friedrich-Willhelms Gymnasium. Dieser geschickte und thätige Mann unternahm seit dem Jahre 1785 die Berechnung der 12 ersten Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis 5000. Er brachte diese mühsame Arbeit, unterstützt von seinen geübtern Rechenschülern, in 4 Jahren zu Stande, und fing nun an, nach den Eulerschen Formeln einen trigonometrischen Canon für jedes Zehntausendtel des Quadranten zu berechnen. Schon hatte er einen erheblichen, in Ansehung des Ganzen freylich immer noch unbeträchtlichen, Theil seiner Arbeit vollendet, als er 1791 den Ruf als Rector an die Domschule zu Schwerin erhielt und sich seiner veränderten Verhältnisse wegen genöthigt sah, ein Unternehmen aufzugeben, dem er mit wahrer Leidenschaft in einem Zeitraum von 6 bis 7 Jahren fast alle seine Kräfte gewidmet hatte. Auſser Stande, irgend etwas weiter für die Vollendung seiner Arbeit zu thun, schickte er sie im Jahre 1794 an die hiesige Akademie der Wissenschaften, mit dem Wunsche, sie von ihr beendigt und zum Druck befördert zu sehen. Das eingesandte Manuscript enthielt, auſser der Potenzentafel, welche 1016 Seiten in 4. einnimmt, noch im Brouillon die Sinus vom Anfange des Quadranten hinein bis auf 0,2050, die Cosinus bis 0,1000, die Tangenten bis 0,0450 und die Cotangenten bis 0,0100, in allem 3600 Resultate, auf 14 Stellen berechnet und durch Differenzreihen geprüft; eben dieselben Resultate bis auf 10 Stellen, so weit sie zum Abdruck bestimmt waren, ins Reine gebracht; und endlich noch im Brouillon und ungeprüft, die Tangenten von 0,0450 bis 0,1300 und die Cosinus von 0,2300 bis 0,2500. Mit der Berechnung der Logarithmen war noch kein Anfang gemacht worden. Die mathematische Klasse der Akademie nahm die Schmidtsche Arbeit mit vielem Beyfall auf, und besonders interessirte sich Hr. Professor Bode, von ihrer Nützlichkeit überzeugt, sehr lebhaft für ihre

Fortsetzung *); allein diese unterblieb aus uns unbekannten Gründen, und Hr. Professor Schmidt nahm sein Manuscript zurück. Da es ihm zufällig an einer bequemen Gelegenheit fehlte, es nach Schwerin zu schaffen, so gab er es uns, seinen Freunden, zur einstweiligen Verwahrung, ein Umstand, ohne welchen gegenwärtige Tafeln wohl schwerlich entstanden seyn würden, ob sie gleich der Schmidtschen Arbeit nichts verdanken.

Wir lasen gerade damahls (im Frühjahre 1797) gemeinschaftlich Cagnoli's Trigonometrie, und fanden darin verschiedene Formeln und Methoden, durch welche uns die Berechnung trigonometrischer Tafeln ungemein erleichtert zu werden schien. Beym Studium dieses Werks drängte sich uns denn sehr lebhaft der Gedanke auf, dafs es schön seyn würde, wenn das zuerst von einem Deutschen angefangene Werk der Berechnung neuer Tafeln nach dem Decimalsystem, auch von Deutschen beendigt werde. Von der Bequemlichkeit der Decimaleintheilung des Quadranten beym Rechnen längst überzeugt, fafsten wir daher in einer Art von Enthusiasmus den Entschlufs, nicht allein die Schmidtsche Arbeit in gleicher Vollständigkeit fortzusetzen, sondern auch, um die Tafeln noch brauchbarer zu machen, die trigonometrischen Linien und ihre Logarithmen in den drey ersten und letzten Hunderttheilen des Quadranten für jedes Hunderttausendtel zu berechnen.

Es fiel uns indessen bald ein, dafs dergleichen weitläuftige Tafeln für den bey weitem gröfsten Theil der Anwendungen zu vollständig und zugleich zu kostbar seyn würden, um leicht in Umlauf gebracht werden zu können. Wir gaben also unsern Vorsatz, 10 Decimalstellen zu liefern, auf, und schränkten uns auf die Berechnung von Handtafeln mit 7 Stellen ein, zumahl da wir hörten, dafs man sehr vollständige Decimaltafeln von den französischen Mathematikern zu erwarten habe. Bey dieser Verengerung unsers Plans schien uns nun unsere Arbeit, die

*) S. seinen Aufsatz: Etwas über die Decimaleintheilung des Quadranten im astronomischen Jahrbuche für 1798, S. 212.

wir damahls (dies gestehen wir gern) noch nicht in ihrem ganzen Umfange übersahen, mit so wenigen Schwierigkeiten verknüpft, daſs wir uns vornahmen, die Schmidtschen Rechnungen gar nicht zu benutzen, um für die Richtigkeit jedes einzelnen Resultats bürgen zu können.

Die Arbeit sollte also ganz von forn angefangen werden. Hier eröffneten sich uns nun hauptsächlich drey Wege, die wir einschlagen konnten. Der erste, auf den ein jeder sogleich verfallen wird, ist, die Tafeln vermittelst des Einschaltens aus dem Opus Palatinum und aus Vlacqs Trigonometria artificialis herzuleiten. Allein dies Verfahren ist, wenn ein gewisser Grad von Genauigkeit dabey beobachtet werden soll, so leicht nicht, als man auf den ersten Blick glauben möchte, weil man nicht durchgehends mit einer einfachen Interpolation ausreicht. Ueberdies giebt es nur schwankende Endziffern; wir wünschten aber durchaus 7 genaue Stellen zu geben, und nahmen uns hierin Taylor's Gewissenhaftigkeit zum Muster *). Daher kamen wir von dieser Methode, die einen Augenblick unsere Aufmerksamkeit auf sich gezogen hatte, sehr bald zurück, zumahl da uns niemand die durchgängige Richtigkeit jener Tafeln verbürgte **).

*) ... taking (nehmlich Taylor) particular care to make the last figure come to the nearest unit over or under, a circumstance that will be found very conducive to exactneſs in such cases where an unit in the last place is of consequence, and where several logarithms are added together.

Maskelyne in der Vorrede zu den Taylorschen Tafeln.

**) Nach Schulze's Versicherung (Einleitung zu seinen Tafeln) sind von den Cotangenten des Op. Palat. im Anfange des Quadranten nur die 5 bis 6 ersten Stellen richtig. Und wirklich ist nach unsern Rechnungen cot 0,0050 = Cot. 0° 27′ = 127,3213364689, nach dem Op. Pal. hingegen = 127,3213362801. Wir haben es für unnöthig gehalten, unsere Resultate mit diesen jetzt nicht mehr gebrauchten Tafeln in den Vereinigungspunkten beider Systeme, d. h. bey jeder 27sten Minute des alten Systems, zu vergleichen. Dagegen haben wir in Vlacqs Trigonometria artificialis nach der von Hrn. Major Vega besorgten Ausgabe (Thesaurus Logarithmorum completus) die Logarithmen nachgeschlagen, die im neuen System vorkommen, und diese Vergleichung, deren Resultat man am Schlusse unse-

Der zweyte Weg war der durch die Eulerschen Formeln, und diesen fanden wir durch die Schmidtsche Potenzentafel schon ganz gebahnt. Allein dessenungeachtet trauten wir uns weder Kräfte noch Geduld zu, um ihn bis ans Ziel zu verfolgen. Verlangt man einen einzelnen Sinus nach dem Decimalsystem *) auf mehr Stellen als ihn unsere Tafeln geben, welcher Fall öfters bey besondere Genauigkeit erfordernden Rechnungen vorkommen kann, so erreicht man seine Absicht durch den Gebrauch der Eulerschen Formeln vielleicht am leichtesten. Aber man suche nur Einen Sinus nach diesen Formeln, besonders gegen die Mitte des Quadranten hin, wo sie langsamer convergiren, um sich zu überzeugen, welche mühsame Arbeit es sey, 15400 Sinus (so viel enthalten unsere Tafeln) auf solche Art zu berechnen, zumahl da man mehr als 10 Stellen in Rechnung bringen muſs, um 7 richtige Ziffern zu erhalten. Es ist nehmlich unvermeidlich, daſs die letzte Ziffer des Resultats um einige Einheiten schwanke. Ist dies nun die 10te, so wird man bey allen den Resultaten, in welchen nach der 7ten Stelle 499 oder 500, 498 oder 501, 497 oder 502 u. s. w. erscheint, zweifelhaft seyn, ob bey Weglassung der 3 letzten Ziffern die 7te um eine Einheit vermehrt werden müsse, oder nicht. Hat man z. B. 0,4738657499 gefunden, so müſste, wenn

---

rer Tafeln finden wird, hat denn gezeigt, daſs man sich auf die Endziffern der Vlacqschen Logarithmen der trigonometrischen Linien nicht verlassen kann. Wir würden diese Bemerkung, die gar nicht zum Nachtheil der sonst sehr correcten Vegaschen Ausgabe gereichen kann und soll, nicht gemacht haben, wenn wir nicht dem Leser hätten zeigen wollen, wie weit wir uns auf unsere Rechnungen verlassen können, und wenn uns nicht Hr. Vega in der Vorrede selbst dazu aufgemuntert hätte, wo er eine Menge Vlacqscher Logarithmen anführt, deren Endziffern er um eine oder ein Paar Einheiten geändert hat.

*) Für das Sexagesimalsystem sind die Eulerschen Formeln aus leicht zu begreifenden Gründen sehr unbequem zu gebrauchen. Hat man daher einen Sinus auf mehr Stellen zu berechnen, als man ihn in den bisherigen Tafeln findet, so ist dazu das von Cagnoli (traité de trigonométrie Ch. V.) vorgeschlagene Verfahren am meisten zu empfehlen.

die Zahl richtig wäre, die 7te Stelle unvermehrt bleiben. Wäre sie aber nur um Eine Einheit in der 10ten Stelle zu klein, so würde nach den in der Decimalrechnung angenommenen Regeln die 7te Stelle des abgekürzten Werths vermehrt werden müssen. Man wird sagen, es sey in diesem Falle einerley, ob man die 7te Stelle vermehre oder nicht. Allerdings, bey den meisten Anwendungen, die man von einem solchen Resultate machen kann; allein dem gewissenhaften Berechner trigonometrischer Tafeln darf es nicht gleichgültig seyn, ob er eine einmahl festgesetzte Norm beobachtet, oder nicht. Geht man also nicht weiter, als bis auf 10 Stellen, so wird man eine Menge zweydeutiger Resultate aufs Neue und sorgfältiger, d. h. auf mehr Decimalen, berechnen müssen. Ein verdriefsliches Geschäft! Besser ist es, wenn man gleich einige Stellen mehr in Rechnung zieht *); aber wie beschwerlich wird dann der Gebrauch der Eulerschen Sinusformeln!

Die Tangentenformeln mufs Schulze gar nicht aufmerksam angesehen haben, wenn er sie im Ernst als brauchbar empfehlen will. In dem zweyten Gliede der Formel für die Tangenten kommt der Factor $\frac{2mn}{n^2 - m^2}$ vor. Soll also z. B. die Tangente von 0,1427 gefunden werden, so hat man als vorläufige Arbeit die beschwerliche Division $\frac{2 \,.\, 1427 \,.\, 10000}{(10000 + 1427)(10000 - 1427)} = \frac{28540000}{97963671}$. Die Formel für die Cotangenten erfordert gar zwey solche Divisionen. Es ist daher überall ohne Vergleich bequemer, sich der einfachen Formeln $\tang A = \frac{\sin A}{\cos A}$, $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$, zu bedienen. Aber welch eine Aufgabe für zwey Rechner, 15400 Divisionen zu machen, um eben so viel Tangenten zu erhalten, und zwar mit einer Genauigkeit, dafs durchgängig die Endziffern, selbst von den Cotangenten

*) Fälle wie Cos 0,3465 = 0,855499850000003 gehören zu den äusserst seltenen. Hier hat die 15te Stelle, wie man sieht, Einflufs auf die 7te, indem 4 Einheiten in der 15ten Stelle weniger keine Vermehrung in der 7ten Stelle zulassen, wenn die letzten 8 Ziffern wegbleiben.

kleiner Bogen richtig werden! Was endlich die Eulerschen Logarithmenformeln betrifft, vermittelst welcher man die Briggischen Logarithmen der trigonometrischen Linien findet, so konnten wir sie gar nicht gebrauchen. Wir wollten mehr als 10 Stellen in Rechnung bringen; sollten wir uns nun der Mühe unterziehn, jedesmahl erst die in diesen Formeln vorkommenden Logarithmen der Zahlen m, $2n+m$, $2n-m$, $n+m$, $n-m$, auf mehr Stellen zu berechnen, als sie sich in den Vlacqschen Tafeln finden *)?

Glücklicherweise gab es noch einen dritten Weg, den wir betreten konnten, und der zugleich alle Sicherheit mit der erwünschtesten Bequemlichkeit vereinigte.

Wenn man mehrere in gleichen und nicht allzu grofsen Zwischenräumen fortschreitende trigonometrische Linien von einander abzieht, so wird man finden, dafs die Unterschiede eben so, wie die Linien selbst, übereinstimmige Anfangsziffern haben. Eben dasselbe gilt von den Unterschieden der Unterschiede oder den zweyten Unterschieden, den dritten u. s. w. Man betrachte nur folgendes Beyspiel:

Bogen.	Sinus.	Erste Untersch.	Zweyte.	Dritte.
0,2000	0,3090 1699 4374 95			
		14938 7795 28		
0,2001	0,3091 6638 2170 23		762838	
		14938 0166 90		368
0,2002	0,3093 1576 2337 13		763206	
		14937 2534 84		368
0,2003	0,3094 6513 4871 97		763574	
		14936 4899 10		
0,2004	0,3096 1449 9771 07			

Jede folgende Differenzcolumne enthält so viel Ziffern weniger, als sich in der vorhergehenden übereinstimmige

*) Wir hätten erst mit Beyhülfe der Wolframschen Logarithmentafel die natürlichen Logarithmen der trigonometrischen Linien nach den Eulerschen Formeln, die man in den Schulzeschen Tafeln Th. I. S. 260 abgedruckt findet, berechnen und solche alsdann durch Multiplication mit dem Modul des Briggischen Systems in gemeine verwandeln können. Dies wäre aber ein sehr mühsames Verfahren gewesen. Auch würden wir in der Wolframschen Tafel, die nur bis zur Zahl 10009 reicht, bey weitem nicht alle die Logarithmen gefunden haben, die wir gebraucht hätten.

Ziffern finden, daher die Unterschiede immer kleiner werden und zuletzt verschwinden müssen; oder die angeführten Sinus bilden eine arithmetische Reihe vom dritten Range, deren dritte Unterschiede 368 sind. Setzte man die Rechnung weiter fort, so würden vierte, fünfte u. s. w. Unterschiede zum Vorschein kommen. Da nun jede folgende Differenzreihe aus der vorhergehenden entspringt, so wird man wieder jede vorangehende aus der nachfolgenden herleiten können. So ergeben sich in unserm Beyspiel die Glieder der zweyten Differenzreihe, wenn man zum ersten 762838 nach einander die Glieder der dritten Reihe addirt. Eben so entstehen aus den zweyten Unterschieden die ersten, wenn man sie nach einander von dem ersten Gliede der ersten Differenzreihe subtrahirt. Wenn also von einer Anzahl in gleichen Intervallen fortschreitender trigonometrischer Linien und den zugehörigen Differenzreihen die ersten Glieder gegeben sind, so kann man durch bloſse Addition und Subtraction aus den letzten in Rechnung gebrachten Unterschieden die übrigen Unterschiede und die Linien selbst herleiten. Da aber die Glieder der letzten Differenzreihe keine beständige Gröſsen sind, sondern allmählig wachsen oder abnehmen, so muſs man, um das Gesetz, nach welchem ihre Aenderung erfolgt, kennen zu lernen, in einiger Entfernung wieder mehrere Linien berechnen und ihre Unterschiede suchen, wo sich denn ergeben wird, um wie viel Einheiten sich inzwischen die letzte Differenz geändert hat. So geht in obigem Beyspiel die dritte Differenz 368 zwey Hunderttheile des Quadranten weiter in 364 über, und man hat die 4 Einheiten, um welche sie kleiner geworden ist, gehörig auf die Zwischenresultate zu vertheilen. Von dieser Vertheilung hängt die Richtigkeit der ganzen Rechnung ab. Denn fehlte man gleich anfangs in der letzten oder $n$ten Differenzreihe um eine Einheit, so würde in der vorletzten oder $(n-1)$ ten jedes Glied um eine Einheit falsch werden. In der $(n-2)$ ten ferner würde der Fehler nach den natürlichen Zahlen, in der $(n-3)$ ten nach den dreyeckigen Zahlen, in der $(n-4)$ ten nach den Pyramidalzahlen, in der $(n-5)$ ten nach dem Gesetz einer arithmetischen Reihe vom vierten Range u. s. w. wachsen, wie man aus folgender Tafel ersieht:

$n-1$	$n-2$	$n-3$	$n-4$	$n-5$	$n-6$	$n-7$	$n-8$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	6	10	15	21	28	36
1	4	10	20	35	56	84	120
1	5	15	35	70	126	210	330
1	6	21	56	126	252	462	792
1	7	28	84	210	462	924	1716
1	8	36	120	330	792	1716	3432
1	9	45	165	495	1287	3003	6435
1	10	55	220	715	2002	5005	11440
1	11	66	286	1001	3003	8008	19448
1	12	78	364	1365	4368	12376	31824
1	13	91	455	1820	6188	18564	50388
1	14	105	560	2380	8568	27132	77520
1	15	120	680	3060	11628	38760	116280
1	16	136	816	3876	15504	54264	170544
1	17	153	969	4845	20349	74613	245157
1	18	171	1140	5985	26334	100947	346104
1	19	190	1330	7315	33649	134596	480700
1	20	210	1540	8855	42504	177100	657800

Es erhellt hieraus, wie sehr ein kleiner gleich anfangs begangener Fehler durch mehrere Differenzreihen anwächst, und wie vorsichtig man also bey Bestimmung der letzten Differenzen zu Werke gehen müsse. Da man indessen, wenn man auch Fehler von ganzen Einheiten vermeidet, nie Fehler von Theilen einer Einheit verhüten kann, indem die Glieder der letzten Differenzreihe abgekürzte Werthe sind, auf welche die weggelassenen Ziffern mehr oder weniger Einfluſs haben, so schleichen sich allemahl Fehler ein, die sehr erheblich werden können, wenn man die Rechnung weit fortsetzt. Man muſs daher die Lücken, welche man durch die Differenzen ausfüllen will, nicht allzu groſs annehmen. Es giebt zwar eine Methode, durch gehörig angebrachte Correcturen das Fortschreiten der Fehler zu hemmen, worüber man Callet's Einleitung zur neuen Ausgabe seiner Tables portatives nachlesen kann; allein sie ist mühsam und zeitraubend, und man geht, wie uns die Erfahrung gelehrt hat, allemahl sicherer, wenn man einige Decimalstellen mehr in Rechnung bringt, als man richtig zu behalten wünscht. Man kann übrigens, welches ein wesentlicher Vorzug dieses Verfahrens ist, immer genau wissen, wie viel Stellen von den sämmtlichen durch die Differenzreihen gefundenen Resultaten richtig sind, wenn man das Endresultat prüft.

Dies ist mit wenigen Worten die Methode, nach der wir gerechnet haben. Sie kann füglich die Interpolationsmethode heifsen, indem es darauf ankommt, zwischen zwey in einiger Entfernung von einander gegebenen trigonometrischen Linien eine Anzahl anderer vermittelst der Unterschiede einzuschalten. Wir verdanken sie dem schon einigemahl gedachten Werke von Cagnoli, das uns indessen wenig mehr als die rohe Idee an die Hand gegeben hat.

Nach manchen Versuchen in verschiedenen Gegenden des Quadranten und bey allen Arten von Linien, fanden wir, dafs wir 20 bis 22 Decimalstellen in Rechnung bringen müfsten, wenn wir die Gränzen der Intervalle, die vermittelst der Differenzen ausgefüllt werden sollten, von zwey zu zwey Hunderttheilen des Quadranten ausstecken und durchgängig 13 bis 14 richtige Stellen behalten wollten. Dies setzte aber voraus, dafs wir diejenigen Linien, die zur Bestimmung der Differenzen dienten, und die wir Gränzlinien nennen wollen, bis auf wenigstens 25 Stellen, und die natürlichen Sinus, aus welchen die Tangenten und künstlichen Sinus hergeleitet werden sollten, gar bis auf 28 Stellen berechnen mufsten.

Es fragte sich nun, wie diese weitläuftige Rechnung am bequemsten einzuleiten sey? Natürlich verfielen wir zuerst wieder auf die Eulerschen Sinusformeln. Allein wir fanden, nachdem wir uns einige Zeit damit geplagt hatten, dafs es keine Kleinigkeit sey, einige hundert Sinus nach diesen Formeln auf 28 Stellen zu berechnen, zumahl da die Schmidtsche Potenzentafel dazu bey weitem nicht vollständig genug war. Wir warfen also die Formeln und alles, was wir bereits darnach gerechnet hatten, bey Seite, und fingen unsere Arbeit nach einer andern Methode, die wir hier in der Kürze beschreiben wollen, ganz von forn an. Von diesem Zeitpunkt an haben uns unsere Tafeln mit der Besorgung des Manuscripts und des Drucks nur wenige Wochen über anderthalb Jahre gekostet.

Wir suchten mit Beyhülfe der Eulerschen Formeln den Sinus und Cosinus von 0,1000 *), welche Rechnung zugleich den Sinus und Cosinus von 0,0100 und 0,0001 finden liefs. Diese wenigen Linien und noch ein Paar aus den 3 ersten Hunderttheilen des Quadranten sind die einzigen, bey welchen wir die gedachten Formeln gebraucht haben und mit Vortheil gebrauchen konnten. Zufolge der Formeln

$$\sin 2\,A = 2 \sin A . \cos A$$
$$\cos 2\,A = 1 - 2 \sin A^2$$

leiteten wir alsdann aus Sinus und Cosinus von 0,0100 den Sinus und Cosinus von 0,0200; hieraus den Sinus und Cosinus von 0,0400, und hieraus endlich den Sinus und Cosinus von 0,0800 her. Nach eben den Formeln gaben ferner Sinus und Cosinus von 0,1000 den Sinus und Cosinus von 0,2000, und diese den Sinus und Cosinus von 0,4000. Nach den Formeln

$$\sin (A \pm B) = \sin A.\ \cos B \pm \cos A.\ \sin B$$
$$\cos (A \pm B) = \cos A.\ \cos B \mp \sin A.\ \sin B$$

entstanden aus Sinus und Cosinus von 0,4000 und 0,1000 die Sinus und Cosinus von 0,3000 und 0,5000. Weiter gaben Sinus und Cosinus von 0,0800 und 0,0200 die Sinus und Cosinus von 0,0600 und 0,1000, wobey wir Gelegenheit hatten, die bisherige Rechnung durch Vergleichung mit den aus den Eulerschen Formeln für Sinus und Cosinus von 0,1000 gefundenen Werthen zu prüfen. Dann ergaben sich aus der Combination des Sinus und Cosinus von 0,2000 mit den Sinus und Cosinus von 0,0200; 0,0400; 0,0600 und 0,0800 die Sinus und Cosinus von 0,1800 und 0,2200, von 0,1600 und 0,2400, von 0,1400 und 0,2600, von 0,1200 und 0,2800, wobey Sinus und Cosinus von 0,2000 beständige Factoren waren, deren Multipla zur Er-

---

*) Zur Erleichterung der Uebersicht wollen wir in der Folge alle Bogen, auch wenn sie sich kürzer ausdrücken lassen, mit 4 oder 5 Decimalen, wie in unsern Tafeln, angeben.

leichterung der Multiplication gesucht wurden, welcher einfache Kunstgriff bey weitläuftigen Multiplicationen sehr zu empfehlen ist. Eine ähnliche Combination von Sinus und Cosinus von 0,4000 mit den Sinus und Cosinus von 0,0200; 0,0400; 0,0600 und 0,0800 gab endlich die Sinus und Cosinus von 0,3800 und 0,4200, von 0,3600 und 0,4400, von 0,3400 und 0,4600, von 0,3200 und 0,4800, wobey wieder Sinus und Cosinus von 0,4000 beständige Factoren waren.

An diese 50 bis auf 30 Decimalstellen berechnete Sinus, welche als das Skelet unserer ganzen Rechnung anzusehen sind, wurden nun eben so viele Reihen von Sinus geknüpft, um daraus die zur oben beschriebenen Interpolation nöthigen Differenzen herzuleiten. Wie wir dabey verfahren sind, wird ein Beyspiel zeigen.

Sinus und Cosinus von 0,4200 verbunden mit Sinus und Cosinus von 0,0001 gaben Sinus und Cosinus von 0,4199 und 0,4201, und so waren bereits drey in gleichen und hinreichend kleinen Zwischenräumen auf einander folgende Sinus und Cosinus gefunden. Um deren mehrere zu erhalten, kamen uns die Formeln

$$\sin nA = \sin(n-2)A + 2\sin A \,.\, \cos(n-1)A$$
$$\text{und } \cos nA = \cos(n-2)A - 2\sin A \,.\, \sin(n-1)A$$

vortrefflich zu Statten, welche sich aus den bekannten Formeln

$$\sin A - \sin B = 2\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\cos\tfrac{1}{2}(A+B)$$
$$\text{und } \cos B - \cos A = 2\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}(A+B)$$

leicht herleiten lassen, wenn man statt der allgemeinen Ausdrücke A und B die eben so allgemeinen n A und $(n-2)$A setzt. Wird nun $A = 0{,}0001$ und $nA = 0{,}4202$, folglich $(n-1)A = 0{,}4201$ und $(n-2)A = 0{,}4200$ gesetzt, so sieht man, wie sich vermittelst dieser Formeln Sinus und Cosinus von 0,4202 aus den Sinus und Cosinus von 0,4201 und 0,4200; ferner Sinus und Cosinus von 0,4203 aus den Sinus und Cosinus von 0,4202 und 0,4201 u. s. w. herleiten lassen. Jeder Sinus und Cosinus entsteht durch eine einzige Multiplication, wobey man noch den wichtigen Vortheil hat, dafs 2 sin A oder

2 sin 0,0001 ein beständiger Factor ist, dessen Vielfache nur ein für allemahl gesucht werden dürfen. So gingen wir denn bis 0,4207 fort, und hatten folglich 9 auf einander folgende Sinus und Cosinus, welche 3 sechste Differenzen gaben; und da sich die übereinstimmigen Ziffern dieser Differenzen bis zur 26sten Decimalstelle hin erstreckten, so konnten wir uns überzeugt halten, daſs von den 28 in Rechnung gebrachten Stellen 27 richtig waren. Wir haben hier zwey benachbarte Sinus- und Cosinusreihen mit den zugehörigen Differenzen zur Probe abdrucken lassen. Mit eben der Vollständigkeit, mit der diese berechnet sind, sind alle übrigen berechnet.

Bogen.	Sinus.	I.	II.
0,4199	0,612 78292 8832 9453 9689 0107 1012	1241 24820 0310 9647 4278 9553	1512 28753 5438 5155 0210
0,4200	0,612 90705 3652 9764 9336 4386 0565	1241 09697 1557 4208 9123 9343	1512 59376 3841 2023 9014
0,4201	0,613 03116 3350 1322 3545 3509 9908	1240 94571 2181 0367 7100 0329	1512 89995 4922 1341 8314
0,4202	0,613 15525 7921 3503 3913 0610 0237	1240 79442 2185 5445 5758 2015	1513 20610 8673 7559 1923
0,4203	0,613 27933 7363 5688 9358 6368 2252	1240 64310 1574 6771 8199 0092	1513 51222 5088 5135 5717
0,4204	0,613 40340 1673 7263 6130 4567 2344	1240 49175 0352 1683 3063 4375	1513 81830 4158 8539 7744
0,4205	0,613 52745 0848 7615 7813 7630 6719	1240 34036 8521 7524 4523 6631	1514 12434 5877 2249 8144
0,4206	0,613 65148 4885 6137 5338 2154 3350	1240 18895 6087 1647 2273 8487	
0,4207	0,613 77550 3781 2224 6985 4428 1837		
0,4399	0,637 30294 9948 1342 7859 3855 1748	1210 39800 5554 3158 2857 6369	1572 78065 0412 0009 5032
0,4400	0,637 42398 9748 6897 1017 6712 8117	1210 24072 7489 2746 2848 1337	1573 07926 5341 6470 9125
0,4401	0,637 54501 3821 4386 3763 9560 9454	1210 08341 9562 7404 6377 2212	1573 37784 1457 1182 1083
0,4402	0,637 66602 2163 3949 1168 5938 1666	1209 92608 1778 5947 5195 1129	1573 67637 8751 0472 3869
0,4403	0,637 78701 4771 5727 7116 1133 2795	1209 76871 4140 7196 4722 7260	1573 97487 7216 0680 6232
0,4404	0,637 90799 1642 9868 4312 5856 0055	1209 61131 6652 9980 4042 1028	1574 27333 6844 8155 2741
0,4405	0,638 02895 2774 6521 4292 9898 1083	1209 45388 9319 3135 5886 8287	1574 57175 7629 9254 3769
0,4406	0,638 14989 8163 5840 7428 5784 9370	1209 29643 2143 5505 6632 4518	
0,4407	0,638 27082 7806 7984 2934 2417 3888		

III.	IV.	V.	VI.
3062 28402 6868 8804	3732 17550 9504	7554 96187	92063
3061 91080 9317 9300	3732 93100 5691	7554 04124	92172
3061 53751 6217 3609	3733 68640 9815	7553 11952	92092
3061 16414 7576 3794	3734 44172 1767	7552 19860	
3060 79070 3404 2027	3735 19694 1627		
3060 41718 3710 0400			
2986 14929 6461 4093	3881 41750 2135	7367 07037	95786
2985 76115 4711 1958	3882 15420 9172	7366 11251	95820
2985 37293 9290 2786	3882 89082 0423	7365 15431	95804
2984 98465 0208 2363	3883 62733 5854	7364 19627	
2984 59628 7474 6509	3884 36375 5481		
2984 20785 1099 1028			

Bogen.	Cosinus.	I.	II.
0,4199	0,790 25127 7842 0022 1245 3463 9587	962 65466 3118 4729 5090 0582	
0,4200	0,790 15501 2375 6903 6515 8373 9005	962 84962 6052 7642 2269 0948	1949 62934 2912 7179 0366
0,4201	0,790 05872 7413 0850 8873 6104 8057	963 04456 5229 6932 7613 6425	1949 39176 9290 5344 5477
0,4202	0,789 96242 2956 5621 1940 8491 1632	963 23948 0644 4501 7985 0484	1949 15414 7569 0371 4059
0,4203	0,789 86609 9008 4976 7439 0506 1148	963 43437 2292 2255 8875 4709	1948 91647 7754 0890 4225
0,4204	0,789 76975 5571 2684 5183 1630 6439	963 62924 0168 2107 4419 7434	1948 67875 9851 5544 2725
0,4205	0,789 67339 2647 2516 3075 7210 9005	963 82408 4267 5974 7407 2412	1948 44099 3867 2987 4978
0,4206	0,789 57701 0238 8248 7100 9803 6593	964 01890 4585 5781 9293 7445	1948 20317 9807 1886 5033
0,4207	0,789 48060 8348 3663 1319 0509 9148		
0,4399	0,770 61335 9595 7222 0130 3321 4859	1001 16819 9329 7050 0311 8495	
0,4400	0,770 51324 2775 7892 3080 3009 6364	1001 35831 5851 6140 3075 9761	1901 16521 9090 2764 1266
0,4401	0,770 41310 6944 2040 6939 9933 6603	1001 54840 7665 9970 0621 2539	1900 91814 3829 7545 2778
0,4402	0,770 31295 2103 4374 6969 9312 4064	1001 73847 4768 1636 0196 6877	1900 67102 1665 9575 4338
0,4403	0,770 21277 8255 9606 5333 9115 7187	1001 92851 7153 4241 0026 2282	1900 42385 2604 9829 5405
0,4404	0,770 11258 5404 2453 1092 9089 4905	1002 11853 4817 0893 9320 3520	1900 17663 6652 9294 1238
0,4405	0,770 01237 3550 7636 0198 9769 1385	1002 30852 7754 4709 8287 6214	1899 92937 3815 8967 2694
0,4406	0,769 91214 2697 9881 5489 1481 5171	1002 49849 5960 8809 8146 2638	1899 68206 4099 9858 6424
0,4407	0,769 81189 2848 3920 6679 3335 2533		

III.	IV.	V.	VI.
2375 73622 1834 4889	4809 93138 6529	586 308113	118637
2376 21721 4973 1418	4809 34507 8416	586 426750	118669
2376 69814 9480 9834	4808 75865 1666	586 545419	118630
2377 17902 5346 1500	4808 17210 6247	586 664049	
2377 65984 2556 7747	4807 58544 2198		
2378 14060 1100 9945			
2470 75260 5218 8478	4690 32750 9962	609 749469	115790
2471 22163 7969 8440	4689 71776 0493	609 865259	115598
2471 69060 9745 8933	4689 10789 5234	609 980857	115794
2472 15952 0535 4167	4688 49791 4377	610 096651	
2472 62837 0326 8544	4687 88781 7726		
2473 09715 9108 6270			

Was nun die Interpolationsrechnung selbst betrifft, so sind bey den Sinus und Cosinus durchgängig 20 Decimalstellen in Rechnung gebracht worden, welche 14 bis 15 richtige Stellen gegeben haben. Die letzte Differenz, von welcher wir hier ausgingen, war die vierte; zu ihrer gehörigen Bestimmung wurde indeſſen noch die fünfte gebraucht. Zwischen den Gränzen 0,4207 und 0,4399 liegen 191 Sinus, 192 erste, 193 zweyte, 194 dritte, 195 vierte und 196 fünfte Differenzen. In der Reihe der Sinus von 0,4200 ist die letzte Zahl von der fünften Differenzcolumne 7552, wenn die fünf letzten Ziffern auſser Acht gelassen werden, und in der Reihe der Sinus von 0,4400 die erste Zahl von eben dieser Columne 7367. Die fünfte Differenz nimmt also zwischen den gedachten Gränzen um 185 Einheiten ab, welche auf 196 Mittelglieder vertheilt werden müssen. Da die Anfangsziffer der fünften Differenz (7) in der 20sten, also in der letzten in Rechnung gezogenen, Stelle steht, so ist ein Fehler in der vierten Ziffer von keiner Bedeutung, und man kann annehmen, daſs sich die bis auf 4 Ziffern abgekürzte Differenz mit jedem Gliede um eine Einheit ändere. Die letzte Zahl in der vierten Differenzcolumne der ersten Reihe iſt 37351969, wenn wieder die fünf Endziffern weggelassen werden, und da mit den wachsenden Bogen die vierten Differenzen zunehmen, die fünften abnehmen, so iſt die folgende vierte Differenz 37351969 + 7551 = 37359520. Die weitere Rechnung steht so:

$$\begin{array}{r}
37359520 \\
7550 \\
\hline
37367070 \\
7549 \\
\hline
37374619 \\
7548 \\
\hline
37382167 \\
7547 \\
\hline
37389714
\end{array} \quad \text{u. s. w.}$$

So könnte man nun die ganze Lücke in der vierten Differenz bis 0,4400 hin ausfüllen. Allein es ist sicherer in der Mitte bey 0,4300 stehen zu bleiben, und denselben

Gang von 0,4399 rückwärts zu gehen, da denn beym Zusammentreffen der Resultate auf halbem Wege nicht mehr als die zwey oder drey letzten Ziffern verschieden ausfallen müssen. Diese werden indessen nicht gebraucht, indem die fünfte Ziffer der vierten Differenz von der Linken gegen die Rechte gezählt, bereits in der 20sten Stelle steht. Vielleicht ist es unserm Leser nicht unangenehm, hier den Anfang der Interpolationsrechnung zu sehen, wodurch die Sinus von 0,4207 bis 0,4399 gefunden worden sind.

306041718	1514124345877	12401889560871647	0,6137755	0378122246985	= sin 0,4207
37360	306004358	1514430350235	1240	0375130521412	
004358	4430350235	0375130521412	0,6138995	0753252768397	
37367	305966991	1514736317226	1239	8860394204186	
305966991	4736317226	12398860394204186	0,6140234	9613646972583	
37375	305929616	1515042246842	1239	7345351957344	
929616	5042246842	7345351957344	1474	6958998929927	= sin 0,4210
37382	305892234	1515348139076	1239	5830003818268	
892234	5348139076	5830003818268	2714	2789002748195	
37390	305854844	1515653993920	1239	4314349824348	
854844	5653993920	4314349824348	3953	7103352572543	
37397	305817447	1515959811367	1239	2798390012981	
817447	5959811367	2798390012981	5192	9901742585524	
37405	305780042	1516265591409	1239	1282124421572	
780042	6265591409	1282124421572	6432	1183867007096	
37412	305742630	1516571334039	1238	9765553087533	
742630	6571334039	12389765553087533	7671	0949420094629	
37420	305705210	1516877039249	1238	8248676048284	
705210	6877039249	8248676048284	0,6148909	9198096142913	
37427	305667783	1517182707032	1238	6731493341252	
667783	7182707032	6731493341252	0,6150148	5929589484165	
37435	305630348	1517488337380	1238	5214005003872	
630348	7488337380	5214005003872	1387	1143594488037	
37443	305592905	1517793930285	1238	3696211073587	
592905	7793930285	3696211073587	2625	4839805561624	
37450	305555455	1518099485740	1238	2178111587847	
305555455	1518099485740	12382178111587847	0,6153863	7017917149471	= sin 0,4220

So wurde die Rechnung bis zur Mitte der auszufüllenden Lücke, nehmlich bis 0,4300, von 0,4207 aufwärts und von 0,4399 abwärts fortgeführt, um dem sich unvermeidlich einschleichenden Fehler nicht zu viel Spielraum zu geben. Beym Zusammentreffen der Resultate auf halbem Wege stimmten bey den Sinus und Cofinus, wie schon bemerkt worden ist, immer 14, öfters 15 Ziffern. So haben wir sin 0,4300 aufwärts rechnend = 0,6252426563357058 und abwärts = 0,6252426563357044 gefunden. Da die Abweichung beider Resultate nur eine Einheit in der 15ten Stelle beträgt, so müssen die sämmtlichen eingeschalteten Sinus bis zur 15ten Stelle hin richtig seyn. Eben so sind die beiden auf eine völlig ähnliche Art gefundenen Cosinus von 0,4300:

0,7804304073383293

0,7804304073383305

wo die Abweichung wieder nur eine Einheit in der 15ten Stelle ausmacht.

Auf gleiche Art sind wir durch den ganzen Quadranten verfahren, mit Ausnahme der drey ersten Hunderttheile. Hier konnten wir die Interpolation viel weiter treiben, weil die einzuschaltenden Werthe 10 mahl näher lagen, und daher eine Differenz weniger in Rechnung zu bringen war. Wir steckten die Gränzen von einem Hunderttel zum andern aus, und schalteten 1000 Werthe ein, 500 aufwärts, 500 abwärts, und behielten in der Mitte 13 übereinstimmige Ziffern. Alle diese Rechnungen wurden von uns gemeinschaftlich und doppelt geführt, welches sie ungemein erleichterte, und da sie an sich wenig Aufmerksamkeit erforderten, so haben wir manchen Tag 300 Resultate gefunden. Man verzeihe uns die kleine Eitelkeit, wenn wir bemerken, dafs Prony's funfzehn Rechner täglich nur 600 Resultate geliefert haben. (Astronomisches Jahrbuch von 1798, S. 215.)

In Ansehung der Gränztangenten und Cotangenten kannten wir kein bequemeres Verfahren, als sie durch Division aus den Sinus und Cosinus herzuleiten. 28 Stellen im Sinus und Cosinus gaben durch den ganzen Quadranten, mit Ausnahme der 3 ersten und letzten Hunderttheile, 27 Stellen für den Quotienten, wovon aber die beiden letzten unzuverlässig waren. Daſs wir uns der abgekürzten Division bedienten, mit der gewiſs jeder unserer Leser bekannt ist, verdient kaum einer Erwähnung; vielleicht eher, daſs wir jedesmahl zur Erleichterung der Division die Vielfache des Divisors suchten. Wir setzen hier wieder zur Probe ein Paar Tangenten- und Cotangentenreihen her.

Bogen.	Tangenten.	I.	II.
0,4199	0,775 42795 0596 0650 8790 2369 755	2515 60453 5480 1587 7180 765	613 09 4590 9281 8312 291
0,4200	0,775 67951 1049 6131 0377 9550 520	2516 21763 0071 0869 5493 056	613 44 2966 0109 1422 356
0,4201	0,775 93113 2812 6202 1247 5043 576	2516 83107 3037 0978 6915 412	613 79 1571 5381 9114 873
0,4202	0,776 18281 5919 9239 2226 1958 988	2517 44486 4608 6360 6030 285	614 14 0407 7119 6391 472
0,4203	0,776 43456 0406 3847 8586 7989 273	2518 05900 5016 3480 2421 757	614 48 9474 7643 9024 663
0,4204	0,776 68636 6306 8864 2067 0411 030	2518 67349 4491 0824 1446 420	614 83 8772 8078 3582 972
0,4205	0,776 93823 3656 3355 2891 1857 450	2519 28833 3263 8903 5029 392	615 18 8302 1348 7456 166
0,4206	0,777 19016 2489 6619 1793 6886 842	2519 90352 1566 0251 2485 558	
0,4207	0,777 44215 2841 8185 2044 9372 400		
0,4399	0,827 00739 8732 9716 2828 7741 106	2645 47239 5040 0574 6614 651	687 63 4798 5901 5642 331
0,4400	0,827 27194 5972 4756 3403 4355 757	2646 16002 9838 6476 2256 982	688 03 3571 3939 4237 376
0,4401	0,827 53656 1975 4594 9879 6612 739	2646 84806 3410 0415 6494 358	688 43 2619 5200 4138 114
0,4402	0,827 80124 6781 8005 0295 3107 097	2647 53649 6029 5616 0632 472	688 83 1943 2174 4545 910
0,4403	0,828 06600 0431 4034 5911 3739 569	2648 22532 7972 7790 5178 382	689 23 1542 7354 1233 224
0,4404	0,828 33082 2964 2007 3701 8917 951	2648 91455 9515 5144 6411 606	689 63 1418 3234 6576 893
0,4405	0,828 59571 4420 1522 8846 5329 557	2649 60419 0933 8379 2988 499	690 03 1570 2313 9591 519
0,4406	0,828 86067 4839 2456 7225 8318 056	2650 29422 2504 0693 2580 018	
0,4407	0,829 12570 4261 4960 7919 0898 074		

III.	IV.	V.	VI.	VII.
348 375 0827 3110 065	230 4445 4582 452	201 95001 630	207 70880	25136
348 605 5272 7692 517	230 6464 9584 082	202 15772 510	207 96016	25225
348 836 1737 7276 599	230 8486 5356 592	202 36568 526	208 21241	
349 067 0224 2633 191	231 0510 1925 118	202 57389 767		
349 298 0734 4558 309	231 2535 9314 885			
349 529 3270 3873 194				
398 772 8037 8595 045	275 3223 1305 693	248 99201 365	265 71095	33282
399 048 1260 9900 738	275 5713 0507 058	249 25772 460	266 04377	33388
399 323 6974 0407 796	275 8205 6279 518	249 52376 837	266 37765	
399 599 5179 6687 314	276 0700 8656 355	249 79014 602		
399 875 5880 5343 669	276 3198 7670 957			
400 151 9079 3014 626				

Bogen.	Cotangenten.	I.	II.
0,4199	1,289 61046 5074 5542 8292 9213 294	418 23 3289 4876 1251 0665 732	169 355 0750 6675 3343 867
0,4200	1,289 19223 1785 0666 7041 8547 562	418 06 3934 4125 4575 7321 865	169 231 6124 4042 9191 476
0,4201	1,288 77416 7850 6541 2466 1225 697	417 89 4702 8001 0532 8130 389	169 108 2664 4455 9979 416
0,4202	1,288 35627 3147 8540 1933 3095 308	417 72 5594 5336 6076 8150 973	168 985 0369 4021 3648 125
0,4203	1,287 93854 7553 3203 5856 4944 335	417 55 6609 4967 2055 4502 848	168 861 9237 8865 6282 377
0,4204	1,287 52099 0943 8236 3801 0441 487	417 38 7747 5729 3189 8220 471	168 738 9268 5135 1781 500
0,4205	1,287 10360 3196 2507 0611 2221 016	417 21 9008 6460 8054 6438 971	168 616 0459 8996 1530 155
0,4206	1,286 68638 4187 6046 2556 5782 045	417 05 0392 6000 9058 4908 816	
0,4207	1,286 26933 3795 0045 3498 0873 229		
0,4399	1,209 17902 4918 1133 4584 2629 795	386 67 4508 5042 1468 8621 878	146 813 0519 5307 3022 271
0,4400	1,208 79235 0409 6091 3115 4007 917	386 52 7695 4522 6161 5599 607	146 710 3910 6545 9472 424
0,4401	1,208 40582 2714 1568 6953 8408 310	386 38 0985 0611 9615 6127 183	146 607 8225 6920 2257 511
0,4402	1,208 01944 1729 0956 7338 2281 127	386 23 4377 2386 2695 3869 672	146 505 3463 5917 9381 422
0,4403	1,207 63320 7351 8570 4642 8411 455	386 08 7871 8922 6777 4488 250	146 402 9623 3041 1936 056
0,4404	1,207 24711 9479 9647 7865 3923 205	385 94 1468 9299 3736 2552 194	146 300 6703 7806 3873 978
0,4405	1,206 86117 8011 0348 4129 1371 011	385 79 5168 2595 5929 8678 216	146 198 4703 9744 1781 426
0,4406	1,206 47538 2842 7752 8199 2692 795	385 64 8969 7891 6185 6896 790	
0,4407	1,206 08973 3872 9861 2013 5796 005		

III.	IV.	V.	VI.	VII.
123 4626 2632 4152 391	116 63045 4940 331	138 93 2059 562	198 144336	329 782
123 3459 9586 9212 060	116 49152 2880 769	138 73 3915 226	197 814554	329 221
123 2295 0434 6331 291	116 35278 8965 543	138 53 6100 672	197 485333	
123 1131 5155 7365 748	116 21425 2864 871	138 33 8615 339		
122 9969 3730 4500 877	116 07591 4249 532			
122 8808 6139 0251 345				
102 6608 8761 3549 847	92 39135 6334 934	105 12 1996 110	143 088009	227 343
102 5684 9625 7214 913	92 28623 4338 824	104 97 8908 101	142 860666	226 993
102 4762 1002 2876 089	92 18125 5430 723	104 83 6047 435	142 633673	
102 3840 2876 7445 366	92 07641 9383 288	104 69 3413 762		
102 2919 5234 8062 078	91 97172 5969 526			
102 1999 8062 2092 552				

Bey der Interpolation der Tangenten verfuhren wir durchgängig eben so, wie bey den Sinus, nur daſs zwischen 0,2500 und 0,5000 des Quadranten eine Differenz mehr in Rechnung gezogen werden muſste, daher wir denn hier auch gemeiniglich eine richtige Decimalstelle weniger erhielten, als bey den Sinus. So sind die beiden Werthe, die wir für die Tangente von 0,4300 gefunden haben:

0,80115107055881O5
0,80115107055881 44.

Die Cotangenten erforderten aber eine eigene Behandlung. Wenn die trigonometrischen Linien in Zwischenräumen von Zehntausendtheilen fortschreiten, so haben die Differenzen der Sinus fast durchgängig 4, und die der Tangenten bis zu 0,6 des Quadranten 3 beständige Anfangsziffern. Allein über diese Gränze hinaus kommen Differenzen mit nicht mehr als 2 übereinstimmigen Ziffern zum Vorschein, daher denn, wie man leicht begreift, einerley Differenzen in früheren Stellen nach dem Komma ihren Anfang nehmen. So fängt in der obigen Tangentenreihe von 0,4200 die sechste Differenz in der 20sten, in der der Cotangenten von 0,4200 oder der Tangenten von 0,5800 in der 19ten, und in der der Cotangenten von 0,2800 oder der Tangenten von 0,7200 bereits in der 18ten Stelle an. Ie eher aber eine Differenz nach dem Komma anfängt, je mehr Differenzen werden bey der Interpolation in Rechnung gebracht werden müssen. Wir fanden nun, daſs wir bey den Cotangenten in der Gegend von 0,2800 des Quadranten schon 7 Differenzen und tiefer hinab deren noch mehrere gebrauchten, welches die Rechnung, wenn sie durch 2 Hunderttheile fortgesetzt werden sollte, nothwendig beschwerlich und zugleich unsicher machen muſste. Um dieser Unbequemlichkeit auszuweichen, verfuhren wir folgendermaſsen: wir knüpften noch eine Reihe von Sinus und Cosinus an den Bogen 0,2700, leiteten daraus die entsprechenden Cotangenten her, und suchten nun durch Interpolation die Cotangenten abwärts von 0,2700 bis 0,2650 und aufwärts von 0,2700 bis 0,2750. Von 0,2800 fuhren wir dann fort, wie bey den Sinus und Tangenten, indem wir abwärts bis 0,2750 und aufwärts bis 0,2900 rechneten. So entstanden die Cotangenten von 0,2650 bis 0,5000. Zu mehrerer Sicherheit brachten wir hierbey durchgängig 22 Decimalstellen in Rechnung, welche uns 13 bis 14 richtige Stellen gaben. So sind die beiden Werthe von Cotangente 0,4300, wie sie sich durch die Interpolation ergeben haben:

$$1,24820403635304\,95$$
$$1,24820403635307\,08.$$

Was aber die Cotangenten unter 0,2650 bis zu 0,0300 hinab betrifft, so fanden wir diese leicht vermittelst der Cotangenten über 0,2650 und der Tangenten unter 0,2650 nach der Formel

$$\cot A = 2 \cot 2A + \operatorname{tang} A,$$

deren Zusammenhang mit der bekanntern Formel

$$\operatorname{tang}(A + B) = \frac{\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B}{1 - \operatorname{tang} A \,.\, \operatorname{tang} B}$$

zu zeigen, vielleicht nicht unzweckmäfsig ist.

Man schreibe in der letzten Formel A statt B, so verwandelt sie sich in

$$\operatorname{tang} 2A = \frac{2 \operatorname{tang} A}{1 - \operatorname{tang} A^2}.$$

Dividirt man nun beide Glieder des Bruchs $\frac{2 \operatorname{tang} A}{1 - \operatorname{tang} A^2}$ durch tang A, so entsteht

$$\operatorname{tang} 2A = \frac{2}{\cot A - \operatorname{tang} A}$$

$$\text{also } \frac{1}{\operatorname{tang} 2A} = \cot 2A = \frac{\cot A - \operatorname{tang} A}{2}$$

$$\text{und } \cot A = 2 \cot 2A + \operatorname{tang} A.$$

Auch von dieser Rechnung wollen wir hier eine Probe geben.

	cot 0,4800 =	1,0648918	40324792
2	cot 0,4800 =	2,1297836	80649584
	tang 0,2400 =	0,3959280	08797721
	cot 0,2400 =	2,5257116	89447305
2	cot 0,2400 =	5,0514233	78894610
	tang 0,1200 =	0,1907602	02218567
	cot 0,1200 =	5,2421835	81113177
2	cot 0,1200 =	10,4843671	62226354
	tang 0,0600 =	0,0945278	31179282
	cot 0,0600 =	10,5788949	93405636
2	cot 0,0600 =	21,1577899	86811272
	tang 0,0300 =	0,0471588	02877480
	cot 0,0300 =	21,2049487	89688752

Sehr viel machten uns die Cotangenten in den drey ersten Hunderttheilen des Quadranten zu schaffen, und fast hätten uns die Schwierigkeiten, die wir dabey antrafen, von unserer ganzen Arbeit abgeschreckt. Dafs man gleich im Anfange des Quadranten mit der Interpolationsmethode bey den Cotangenten nichts anfangen könne, fällt in die Augen, weil weder die Linien selbst noch ihre Differenzen beständige Anfangsziffern haben. Glücklicherweise kam uns hier die eben erwähnte Formel cot A = 2 cot 2 A + tang A zu statten, welche uns aus den Tangenten unter 0,01500 und den Cotangenten über 0,01500 die Cotangenten unter 0,01500 finden liefs. Es war also nur nöthig, die zwischen den Gränzen 0,01500 und 0,03000 eingeschlossenen Cotangenten durch Interpolation zu suchen. Wir knüpften zu dem Ende Sinus- und Cosinusreihen an die Bogen 0,01500; 0,01750; 0,02250; 0,02500 und 0,02750, und leiteten daraus, und aus den schon früher gefundenen Reihen für 0,02000 und 0,03000 eben so viele Cotangentenreihen durch Division her. Eine beschwerliche Rechnung, weil bis zur 26 sten Decimalstelle hin 10 Differenzen zum Vorschein kamen, also wenigstens 11 auf einander folgende Cotangenten zu berechnen waren, wenn wir zwey neunte Differenzen erhalten wollten. Wir fanden aber, dafs bey der Menge in Rechnung zu bringender Differenzen die Intervalle zwischen diesen Reihen noch zu grofs waren. Daher knüpften wir neue Reihen an die Bogen 0,01580; 0,01670; 0,01830; 0,01920; 0,02130; 0,02370; 0,02630 und 0,02880. So lagen nun die Gränzcotangenten einander nahe genug, um mit Sicherheit interpoliren zu können. Wir brachten 22 Stellen in Rechnung, wobey 7 Differenzen gebraucht wurden, und hatten das Vergnügen, durchgängig 13 bis 14 richtige Stellen zu erhalten. Die Rechnung war, besonders der Vorbereitungen wegen, mühsam, aber doch lange nicht so sehr, als wenn wir jede einzelne Cotangente durch Division aus Sinus und Cosinus hätten herleiten wollen. Zur Berechnung der letztern 8 Reihen bedienten wir uns einer Formel, die der Eulerschen Cotangentenformel ganz ähnlich ist, nur daſs sie eine Division weniger nöthig macht, und daher bequemer zu gebrauchen ist, ob sie gleich langsamer convergirt. Wir leiteten sie aus der Reihe *)

$$\cot A = \frac{1}{A} - \frac{A}{3} - \frac{A^3}{3^2 \cdot 5} - \frac{2A^5}{3^3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{A^7}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} - \frac{2A^9}{3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} - \ldots$$

her, indem wir $\frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{m}{n} \cdot 1{,}5707963267794\ldots$ statt A setzten.

Aus den Cotangenten über 0,01500 und den Tangenten unter 0,01500 ergaben sich nun die erstern 1500 Cotangenten unserer Tafeln. Da aber, um z. B. zur Cotangente von 0,00005 zu gelangen, der Bogen 0,02560, von welchem hier ausgegangen werden muſs, 9 mahl hintereinander zu halbiren ist, und ein kleiner Fehler in den Endziffern der gebrauchten Tangenten und Cotangenten wegen der Multiplicationen mit 2 (S. obiges Beyspiel) durch so viele von einander abhängende Resultate sehr beträchtlich werden kann, so fanden wir es rathsam, die 50 ersten Cotangenten nach der von uns entwickelten Formel zu berechnen. Um sie bis auf 15 richtige Stellen zu

*) Diese Reihe entsteht, wenn man von den oben S. XIII angeführten Reihen die letztere durch die erstere dividirt. Das Gesetz ihrer Fortschreitung ist sehr zusammengesetzt. Will man sie, ohne die Division weiter zu treiben, fortsetzen, so findet man dazu in Cagnoli traité de trig. Chap. V. Anleitung.

finden, bedarf es bloſs der drey ersten Glieder dieser Formel:

$$\mathrm{Cot}\frac{m}{n}Q = \frac{n}{m}.0{,}63661977236758134307\,5\ldots$$

$$-\frac{m}{n}.0{,}523598775598\ldots\ldots$$

$$-\frac{m^3}{n^3}.0{,}0861285463 34\ldots\ldots$$

die wir hieher setzen, wenn etwa jemand untersuchen wollte, ob die ersten Cotangenten unserer Tafeln ein ähnlicher Vorwurf treffe, wie die erstern Cotangenten im Opus Palatinum. Die Prüfung würde leicht anzustellen seyn.

Was die Berechnung der Gränzlogarithmen der Sinus und Cosinus betrifft, so wollen wir die dazu gebrauchte Methode hier ausführlich und mit Beyspielen erläutern, weil sie überall mit Vortheil gebraucht werden kann, wo der Logarithme einer aus vielen Ziffern bestehenden Zahl zu suchen ist. Wir haben sie in keinem uns bekannten Buche, welches von Logarithmen handelt, gefunden. Bekanntlich ist

$$\log(1+x) = M(\quad x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots.)$$
$$\log(1-x) = M(-x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \ldots.)$$

folglich

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2M(\quad x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots.)$$

und $\log\dfrac{1-x}{1+x} = 2M(-x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 - \ldots.)$

wo die Gröſse M, welche der Reihe ihren Werth giebt, willkührlich angenommen werden kann, und der Modul des jedesmahligen Systems heiſst *).

Wenn eine Zahl n um irgend eine Gröſse zunimmt, die wir mit Δn bezeichnen wollen, so entsteht die Frage,

*) Wir müssen den Anfänger in Ansehung dieser Formeln auf Eulers Introductio in Analysin infinitorum Tom. I. c. 7. (Daraus Pasquichs Vortrag „Unterricht in der mathematischen Analysis", Th. 1. S. 420 ff.) oder auf Cagnoli traité de Trigonométrie Ch. VII verweisen.

um wie viel der zugehörige Logarithme wachse, oder welches, wenn $\log(n+\Delta n) = \log n + \Delta \log n$ gesetzt wird, der Werth von $\Delta \log n$ oder der Zunahme des Logarithmen von n sey? Aus der Gleichung $\log(n+\Delta n) = \log n + \Delta \log n$ folgt $\Delta \log n = \log(n+\Delta n) - \log n = \log \frac{n+\Delta n}{n}$.

Man setze $\frac{n+\Delta n}{n} = \frac{1+x}{1-x}$, so erhält man für x den Werth $\frac{\Delta n}{2n+\Delta n}$, und wenn dieser in der Reihe, welche den Logarithmen von $\frac{1+x}{1-x}$ ausdrückt, für x gesetzt wird, so entsteht:

$$\log \frac{n+\Delta n}{n} = \log(n+\Delta n) - \log n = \Delta \log n =$$

$$2M\left(\frac{\Delta n}{2n+\Delta n} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\Delta n}{2n+\Delta n}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{\Delta n}{2n+\Delta n}\right)^5 + \right)$$

Ist von einer Abnahme der Zahl und des ihr angehörigen Logarithmen die Rede, so hat man die Gleichung $\log(n-\Delta n) = \log n - \Delta \log n$, folglich

$$-\Delta \log n = \log(n-\Delta n) - \log n = \log \frac{n-\Delta n}{n}.$$

Vergleicht man $\frac{n-\Delta n}{n}$ mit $\frac{1-x}{1+x}$, und setzt man den dadurch erhaltenen Werth von $x = \frac{\Delta n}{2n-\Delta n}$ in die Reihe, welche den Logarithmen von $\frac{1-x}{1+x}$ ausdrückt, so entsteht $\log \frac{n-\Delta n}{n} = \log(n-\Delta n) - \log n = -\Delta \log n$

$$= -2M\left(\frac{\Delta n}{2n-\Delta n} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\Delta n}{2n-\Delta n}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{\Delta n}{2n-\Delta n}\right)^5 + \ldots\right)$$

Diese beiden Differenzformeln giebt **Cagnoli**, aus dem wir sie entlehnt haben, für neu aus. Sie finden sich aber auch in Pasquichs Unterricht in der mathematischen Analysis

(Th. I. S. 428); indessen weder Cagnoli noch Pasquich haben sie auf die vortheilhafte Art anzuwenden gelehrt, wie sie von uns gebraucht worden sind. Ein Beyspiel soll die Sache sogleich erläutern. Es werde der Briggische Logarithme des Cosinus von 0,4400 oder von der Zahl 0,77051324277578923080300964 bis auf 26 Stellen verlangt. Man suche die erstern 5 oder wo möglich noch mehr bedeutende Ziffern der gegebenen Zahl in Factoren zu zerlegen, unter welchen jedoch keiner grösser als 1100 seyn darf. Läßt sich aber weder 77051, noch 770513, noch 7705132 u. s. w. in Factoren zerfällen, so verändere man die letzten Ziffern dieser Zahlen um eine oder ein Paar Einheiten, und versuche, ob eine Zerfällung in Factoren möglich ist. Hat man eine Factorentafel *) zur Hand, so wird man nach einigem Probiren, worin man sich bald eine Fertigkeit erwirbt, ohne viel Weitläuftigkeit eine zusammengesetzte Zahl finden, deren fünf, sechs u. s. w. Ziffern mit eben so vielen Anfangsziffern der vorgelegten Zahl nahe oder ganz übereinkommen. Eine solche Zahl ist in gegenwärtigem Falle $0{,}7705131 = \frac{17 \,.\, 21 \,.\, 113 \,.\, 191}{10000000}$.
In den bekannten Shervinschen Tafeln, wovon wir die dritte Ausgabe vom Jahr 1741 vor Augen haben, befindet sich eine bis auf 61 Decimalstellen von Sharp berechnete höchst schätzbare Tafel der gemeinen Logarithmen aller natürlichen Zahlen von 1 bis 1100 und von 999980 bis 1000021, die wir, da sie in Deutschland noch nicht gedruckt und zu der von uns gebrauchten Methode, die gemeinen Logarithmen der trigonometrischen Linien zu berechnen, unentbehrlich ist, als Anhang zu unsern Tafeln haben abdrucken lassen, jedoch mit Weglassung der letz-

*) Die vollständigsten Factorentafeln, welche wir bis jetzt haben, sind die Felkelschen „Tafel aller einfachen Factoren der durch 2, 3 und 5 nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 336000, Wien 1776 fol.“ In Ermangelung dieses schätzbaren Werks, dessen Fortsetzung sehr zu wünschen wäre, kann man sich der im zweyten Bande von Hrn. Vega's logarithmisch-trigonometrischen Tafeln befindlichen minder vollständigen Factorentafel bedienen.

ten 25 Ziffern und mit Ergänzung der Logarithmen der Factorenzahlen über 100, welche in Sharp's Tafel fehlen *). Vermittelst dieser Tafel nun hat man den gemeinen Logarithmen der zusammengesetzten Zahl 0,7705131, die wir n nennen wollen, auf so viel Stellen, als log cos 0,4400 erhalten soll.

Der Cosinus ist gröſser als n, folglich ist $\Delta n = 0{,}0000001427757892308030064$, und es kommt darauf an, vermittelst der erstern obigen Differenzformel $\Delta \log n$ zu bestimmen, d. h. was zum Logarithmen von n addirt werden muſs, um $\log (n + \Delta n)$ oder den Logarithmen des gegebenen Cosinus zu erhalten. Zu dem Ende suche man zuförderst den Quotienten $\frac{\Delta n}{2n + \Delta n}$, welcher in gegenwärtigem Falle $0{,}0000000926498043982990455$ seyn wird. Hierauf erhebe man diesen Quotienten zum Cubus, weil nach der Formel $\frac{1}{3}\left(\frac{\Delta n}{2n + \Delta n}\right)^3$ zu $\frac{\Delta n}{2n + \Delta n}$ hinzukommen muſs. Da der Quotient von der 8ten negativen Ordnung ist, also sein Cubus von der 24 sten negativen Ordnung seyn wird, und da der Quotient selbst nur 25 Stellen hat, so wird man höchstens seine 4 ersten bedeutenden Ziffern zum Cubus erheben dürfen. Der Cubus ist, so weit er gebraucht wird, 7953, und wenn man den dritten Theil davon, oder 2651, zu dem Quotienten addirt, so entsteht $0{,}0000000926498043982993106$, als der Werth von $\frac{\Delta n}{2n + \Delta n} + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta n}{2n + \Delta n}\right)^3$, welcher der Kürze halber P heiſsen mag. Die fünfte Potenz des Quotienten wird nicht mehr gebraucht, da sie erst in der 40 sten negativen Stelle ihren Anfang nehmen würde. Schon der Cubus würde nicht mehr in Betracht gekom-

*) Wir finden diese Tafel auch in Callet's Tables portatives abgedruckt, wo in der 34 sten Stelle des Logarithmen von 14 eine 2 statt einer 9, in der 17ten Stelle des Logarithmen von 965 eine 6 statt einer 8, in der 17ten Stelle des Logarithmen von 1022 eine 2 statt einer 0, und in der 10ten Stelle des Logarithmen von 1082 eine 7 statt einer 8 zu lesen ist.

men seyn, wenn der Quotient, statt von der 8ten negativen Ordnung zu seyn, von der 10ten gewesen wäre. P muſs nun mit dem doppelten Modul des Briggischen Systems $= 0,8685889638065036553022257....$ dessen Vielfache man S. 310 unserer Tafeln findet, multiplicirt werden. Das Product ist $\Delta \log n$, in unserm Falle $0,000000080474597599194043077$, welches also zu $\log n$ addirt $\log (n + \Delta n)$ oder log cos 0,4400 geben wird. Während der Rechnung kann die trigonometrische Linie, deren Logarithme gesucht wird, als eine ganze Zahl betrachtet werden, weil sich aus ihrer ersten bedeutenden Ziffer am Ende die Kennziffer des Logarithmen von selbst ergiebt. Daſs die Kennziffern der Logarithmen trigonometrischer Linien so angenommen werden, als wenn diese für den Halbmesser 10000 Millionen berechnet wären, setzen wir als bekannt voraus. Mehrerer Deutlichkeit wegen mag hier die Berechnung von log cos 0,4400 ausführlich stehen.

$\cos 0{,}4400 = n + \Delta n = 0{,}77051324277578923080300964$

$n = 7705131 = 17 \cdot 21 \cdot 113 \cdot 191$

$\Delta n = 14277578923080300964$

$2n = 15410262$

Der Divisor $= 2n + \Delta n = 15410263427757892308030096 4$

Der Dividendus $= \Delta n = 14277578923080300964$

```
14277578923080300964
13869237084982103077
  408341838098197887
  308205268555157846
  100136569543040041
   92461580566547354
    7674988976492687
    6164105371103157
    1510883605389530
    1386923708498210
     123959896891320
     123282107422063
        677789469257
        616410537110
         61378932147
         46230790283
         15148141864
         13869237085
 1393941  1278904779
 1386924  1232821074
    7017    46083705
    6164    30820527
     853    15263178
     771    13869237
      82     1393941
```

Vielfache des Divisors.

```
   15410263427757892308
2) 30820526855515784616
3) 46230790283273676924
4) 61641053711031569232
5) 77051317138789461540
6) 92461580566547353848
7) 107871843994305246156
8) 123282107422063138464
9) 138692370849821030772
```

```
                  — 8
0,0000000926498043982990455        9265
                     2651          9265
0,0000000926498043982993106 = P   83385
      78173006742585 32898         1853
      17371779276130 0731           556
       5211533782839 0219            46
       3474355855226 015          85840
        781730067425 853           9265
        694871171045 20           77256
         34743558552 3             1717
         26057668914                515
          7817300674                 43
           694871171          3) 79531
            17371779             26510
             7817301
              781730
               26058
                 869
                  52
```

$\Delta \log n = 0{,}0000000804745975991940 4307$

$\log 17 = 2304489213782739285401 6989$

$\log 21 = 3222192947339192680072 4416$

$\log 113 = 0530784434834197227952 2703$

$\log 191 = 2810333672477275376350 4360$

$\log(n + \Delta n) = 9{,}8867801073179380561717 2775 = \log \cos 0{,}4400$

Für den natürlichen Logarithmen ist die Rechnung bis auf 2 Modificationen dieselbe: 1) muſs hier P bloſs mit 2 multiplicirt werden, weil der Modul des natürlichen Systems 1 ist: 2) muſs man die Kennziffern der natürlichen Logarithmen der Zahlen 17, 21, 113 und 191, welche man aus der Wolframschen Tafel zu nehmen hat, während der Rechnung nicht vernachlässigen, welches bey der Berechnung des gemeinen Logarithmen geschehen kann, und am Ende von ihrer Summe den Logarithmen der Zahl 10000000 abziehn, weil n eigentlich den Werth $\frac{17 . 21 . 113 . 191}{10000000}$ hat. Mit diesen Veränderungen steht der letzte Theil der Rechnung so:

$$\begin{array}{rrl}
 & \mathrm{P} = & 0{,}0000000926498043982993106 \\
\Delta \log n = 2 & \mathrm{P} = & 0{,}0000001852996087965986212 \\
 & \log 17 = & 2{,}8332133440562160802495346 \\
 & \log 21 = & 3{,}0445224377234229965005980 \\
 & \log 113 = & 4{,}7273878187123405685821315 \\
 & \log 191 = & 5{,}2522734280466298728499500 \\
\hline
 & & 15{,}8573972138382183147808353 \\
\log 10000000 & = & 16{,}1180956509583197881259402 \\
\hline
\text{log. nat. cos. } 0{,}44 & = & -0{,}2606984371201014733451049
\end{array}$$

In dem hier gewählten Beyspiele ist n kleiner als die Zahl, deren Logarithme gesucht wird. Wir müssen nun auch noch den Fall durch ein Exempel erläutern, wo n gröſser ausfällt. Es werde der gemeine Logarithme des Sinus von $0{,}4203 =$ $\log 0{,}6132793373635688935863682$3 gesucht. Hier giebt das Product $11 . 25 . 29 . 769 . 1000003 = 6132793398325$ einen vortheilhaften Werth für n. Da aber dieser Werth gröſser als der gegebene Sinus ist, so muſs die zweyte obige Differenzformel, nehmlich

$$-\Delta \log n = -2\mathrm{M}\left(\frac{\Delta n}{2n - \Delta n} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\Delta n}{2n - \Delta n}\right)^3 + \ldots\right)$$

gebraucht, und die Rechnung folgendermaſsen eingeleitet werden:

$$n = 6132793398325 = 11 \cdot 25 \cdot 29 \cdot 769 \cdot 1000003$$
$$n - \Delta n = 6132793373635688935863682 3 = \sin 0{,}4203$$
$$\Delta n = 24689311064136317 7$$
$$2n = 12265586796650$$
$$2n - \Delta n = 12265586771960688935863682 3$$
$$\frac{\Delta n}{2n - \Delta n} = 0{,}000000002012892780684283 6$$

Da dieser Quotient von der 9ten negativen Ordnung ist, so kommt sein Cubus nicht mehr in Betracht. Das Product des doppelten Moduls des Briggischen Systems in den gefundenen Quotienten oder $- \Delta \log n$ ist 0,0000000017483764546281537 4, und diese Zahl von der Summe der Logarithmen von 11, 25, 29, 769 und 1000003 abgezogen, giebt 9,7876583326637647111272673 1 als den verlangten Logarithmen.

Nach dieser Methode ergiebt sich der Logarithme einer Zahl allemahl auf so viel Stellen, als sie Ziffern hat. Sie kann also überall gebraucht werden, wo die Logarithmen vielziffriger Zahlen zu suchen vorkommen, sie mögen ganze Zahlen oder Decimalbrüche seyn. Wie man in jedem vorkommenden Falle die Rechnung einzuleiten habe, wird nach den gegebenen Beyspielen keiner weitern Erläuterung bedürfen. Das Schwierigste bey dem ganzen Verfahren ist die Aufsuchung eines bequemen Werths für n. Denn je mehr Ziffern von der vorgelegten Zahl mit n übereinstimmen, je wenigere Glieder werden von der Differenzreihe gebraucht und je leichter ist die Multiplication mit dem doppelten Modul des Systems. Allgemeine Regeln werden sich dafür schwerlich geben lassen; indessen wird man bey einer aufmerksamen Uebung leicht verschiedene kleine Kunstgriffe entdecken, wodurch man sich das Geschäft sehr erleichtern kann. Wir sind nur im Anfange unserer logarithmischen Rechnungen zuweilen in den Fall gekommen, das dritte Glied der Differenzreihe, oder die fünfte Potenz des Quotienten zu gebrauchen; weiter hin wuſsten wir allemahl ohne viel Umstände ein n zu entdecken, welches einen Quotienten von der 7ten oder 8ten negativen Ordnung gab. Nicht selten waren wir so glücklich, ihn von der 9ten oder 10ten Ordnung zu erhalten. Wir können besonders den Gebrauch der Zahlen 999980 bis 1000021 in der Sharpschen Tafel als hierbey ungemein vortheilhaft empfehlen.

Da $\text{tang}\, A = \dfrac{\sin A \cdot r}{\cos A}$ und $\cot A = \dfrac{r^2}{\text{tang}\, A}$, so ist $\log \text{tang}\, A = \log \sin A + \log r - \log \cos A = \log \sin A + 10 - \log \cos A$, und $\log \cot A = \log r^2 - \log \text{tang}\, A = 20 - \log \text{tang}\, A$. Es kommt also hauptsächlich nur darauf an, die Logarithmen der Sinus und Cosinus zu suchen, und hierbey sind wir auf eine ganz ähnliche Weise wie bey den natürlichen Linien zu Werke gegangen. Wir verwandelten auf die beschriebene Art die natürlichen Gränzsinus und Cosinus in künstliche, und füllten die zwischen ihnen befindlichen Lücken durch ihre Differenzen aus. Vielleicht ist es unserm Leser angenehm, hier auch ein Paar Reihen künstlicher Gränzsinus und Cosinus mit ihren Differenzen zu finden. Die beyden letzten Decimalstellen sind unzuverlässig.

Bogen.	Logarithmen der Sinus.	I.	II.
0,4199	9,7873 0665 8032 9671 0153 2711 48	879 61434 5573 5286 0657 34	
0,4200	9,7873 9461 9467 5244 5439 3368 82	879 32908 9541 2824 1491 51	285 25 6032 2461 9165 83
0,4201	9,7874 8255 2376 4785 8263 4860 33	879 04394 8998 9471 2908 76	285 14 0542 3352 8582 75
0,4202	9,7875 7045 6771 3784 7734 7769 09	878 75892 3862 3377 9498 22	285 02 5136 6093 3410 54
0,4203	9,7876 5833 2663 7647 1112 7267 31	878 47401 4047 3489 7500 82	284 90 9814 9888 1997 40
0,4204	9,7877 4618 0065 1694 4602 4768 13	878 18921 9469 9546 5338 66	284 79 4577 3943 2162 16
0,4205	9,7878 3399 8987 1164 4149 0106 79	877 90454 0046 2081 4156 07	284 67 9423 7465 1182 59
0,4206	9,7879 2178 9441 1210 6230 4262 86	877 61997 5692 2419 8377 34	284 56 4353 9661 5778 73
0,4207	9,7880 0955 1438 6902 8650 2640 20		
0,4399	9,8043 4592 8746 9795 2552 1472 27	824 75573 3841 7980 0868 27	
0,4400	9,8044 2840 4320 3637 0532 2340 54	824 49199 9146 6826 5384 49	263 73 4695 1153 5483 78
0,4401	9,8045 1085 3520 2783 7358 7725 03	824 22836 4570 6732 8184 17	263 63 4576 0093 7200 32
0,4402	9,8045 9327 6356 7354 4091 5909 20	823 96483 0043 7673 6903 58	263 53 4526 9059 1280 59
0,4403	9,8046 7567 2839 7398 1765 2812 78	823 70139 5496 0253 8422 35	263 43 4547 7419 8481 23
0,4404	9,8047 5804 2979 2894 2019 1235 13	823 43806 0857 5707 1693 11	263 33 4638 4546 6729 24
0,4405	9,8048 4038 6785 3751 7726 2928 24	823 17482 6058 5896 0594 48	263 23 4798 9811 1098 63
0,4406	9,8049 2270 4267 9810 3622 3522 72	822 91169 1029 3310 6771 16	263 13 5029 2585 3823 32
0,4407	9,8050 0499 5437 0839 6933 0293 88		

III.	IV.	V.	VI.
1154 89 9109 0583 08	841 849 5410 87	795 1651 80	94 7063
1154 05 7259 5172 21	841 054 3759 07	794 2181 17	94 5894
1153 21 6205 1413 14	840 260 1577 90	793 2722 23	94 4227
1152 37 5944 9835 24	839 466 8855 67	792 3279 96	
1151 53 6478 0979 57	838 674 5575 71		
1150 69 7803 5403 86			
1001 19 1059 8283 46	700 025 2363 73	629 9243 36	71 7036
1000 49 1034 5919 73	699 395 3120 37	629 2073 00	71 4701
999 79 1639 2799 36	698 766 1047 37	628 4925 99	71 5591
999 09 2873 1751 99	698 137 6121 38	627 7766 08	
998 39 4735 5630 61	697 509 8355 30		
997 69 7225 7275 31			

Bogen.	Logarithmen der Cosinus.
0,4199	9,8977 6520 6769 4871 4278 7515 30
0,4200	9,8977 1229 9411 2621 5693 4836 65
0,4201	9,8976 5937 4889 7894 2052 6076 66
0,4202	9,8976 0643 3200 8852 8659 2716 90
0,4203	9,8975 5347 4340 3637 3080 6694 92
0,4204	9,8975 0049 8304 0363 4990 7650 77
0,4205	9,8974 4750 5087 7123 6012 8793 91
0,4206	9,8973 9449 4687 1985 9562 1391 02
0,4399	9,8868 3653 3808 0613 8308 2060 87
0,4400	9,8867 8010 7317 9380 5617 1727 75
0,4401	9,8867 2366 2778 3695 7156 3417 76
0,4402	9,8866 6720 0184 6636 0592 6742 00
0,4403	9,8866 1071 9532 1251 1461 1424 74
0,4404	9,8865 5422 0816 0563 2976 8238 07
0,4405	9,8864 9770 4031 7567 5846 8237 24
0,4406	9,8864 4116 9174 5231 8082 0292 23

I.
529 07358 2249 8585 2678 65
529 24521 4727 3640 8759 99
529 41688 9041 3393 3359 76
529 58860 5215 5578 6021 98
529 76036 3273 8089 9044 15
529 93216 3239 8977 8856 86
530 10400 5137 6450 7402 89
564 26490 1233 2691 0333 12
564 44539 5684 8460 8309 99
564 62593 7059 6563 6675 76
564 80652 5384 9131 5317 26
564 98716 0687 8484 3186 67
565 16784 2995 7130 0000 83
565 34857 2335 7764 7945 01

II.
1716 32477 5055 6081 34
1716 74313 9752 4599 77
1717 16174 2185 2662 22
1717 58058 2511 3022 17
1717 99966 0887 9812 71
1718 41897 7472 8546 03
1804 94451 5769 7976 87
1805 41374 8102 8365 77
1805 88325 2567 8641 50
1806 35302 9352 7869 41
1806 82307 8645 6814 16
1807 29340 0634 7944 18

III.
418 36 4696 8518 43
418 60 2432 8062 45
418 84 0326 0359 95
419 07 8376 6790 54
419 31 6584 8733 32
469 23 2333 0388 90
469 50 4465 0275 73
469 77 6784 9227 91
470 04 9292 8944 75
470 32 1989 1130 02

IV.
237 735 9544 02
237 893 2297 50
238 050 6430 59
238 208 1942 78
272 131 9886 83
272 319 8952 18
272 507 9716 84
272 696 2185 27

V.
157 2753 48
157 4133 09
157 5512 19
187 9065 35
188 0764 66
188 2468 43

VI.
137961
137910
169931
170377

Wir fingen unsere Interpolationsrechnung mit den 3 ersten Hunderttheilen des Quadranten an, und sie hatte in Ansehung der Logarithmen der Cosinus so wenig hier wie in den übrigen 47 Hunderttheilen Schwierigkeiten. Wir steckten die Gränzen, wie bey den natürlichen Sinus, Cosinus und Tangenten von einem Hunderttheile zum andern aus, und füllten die Lücken von 1000 Resultaten durch Interpolation an, wobey wir 20 Decimalstellen in Rechnung brachten, und in der Mitte 13 richtige Stellen erhielten. Bey den Logarithmen der Sinus verfuhren wir auf eine ganz ähnliche Art, wie bey den Cotangenten. Denn da diese Logarithmen im Anfange des Quadranten eben so wenig, wie die Cotangenten, übereinstimmige Anfangsziffern haben, so fand hier keine Anwendung der Interpolationsmethode statt. Erst gegen die Mitte des zweyten Hunderttheils konnte sie mit hinlänglicher Sicherheit in Ausübung gebracht werden. Wir knüpften also Reihen von Logarithmen an die Bogen 0,01500; 0,01750; 0,02000; 0,02250; 0,02500; 0,02750 und 0,03000, brachten 20 Stellen und 6 Differenzen in Rechnung, und behielten beym Zusammentreffen der Resultate auf halbem Wege 13 übereinstimmende Stellen. Die ersten 1500 Logarithmen der Sinus unserer Tafeln zu finden, bedienten wir uns der bekannten und bequemen Formel:

$$\sin A = \frac{\sin 2\,A}{2 \cos A},$$

welche $\log \sin A = \log \sin 2\,A - \log \cos A - \log 2$ giebt, folglich aus den Logarithmen der Cosinus unter 0,01500 und den Logarithmen der Sinus über 0,01500 die Logarithmen der Sinus unter 0,01500 finden läſst.

So weit waren wir mit den Logarithmen gekommen, als uns die neue Ausgabe der tables portatives von Callet in die Hände fiel, in der wir bereits die Logarithmen der Sinus, Cosinus und Tangenten für jedes Zehntausendtel des Quadranten bis auf 7 Stellen berechnet antrafen. Wir freuten uns über diesen Fund, weil wir hofften, daſs er uns die Mühe der weitern Rechnung ersparen werde. Allein bey einer Vergleichung der Calletschen Resultate in den ersten 3 Hunderttheilen mit jedem zehnten der unsrigen, machten wir bald die eben so unerwartete als unangenehme Entdeckung, daſs wir uns auf die Endziffern der Calletschen Logarithmen nicht verlassen könnten, und daſs wir etwas Unvollkommenes liefern würden, wenn wir eine Arbeit, der der Charakter der Flüchtigkeit so deutlich aufgeprägt war, ungeprüft benutzten. Wir haben also unsere Rechnung, ohne den Callet zu gebrauchen, bis ans Ende fortgeführt, und haben so das Vergnügen, gegenwärtige Tafeln ganz die unsrigen nennen zu können *).

Für die Logarithmen der Cosinus in den 47 Hunderttheilen von 0,0300 bis 0,5000 haben wir die Gränzen von zwey zu zwey Hunderttheilen ausgesteckt, und bey der Interpolation von 20 in Rechnung gebrachten Stellen 14 bis 15 richtig behalten. So sind die beiden gefundenen Logarithmen des Cosinus von 0,4300:

9,89233418214995552
9,89233418214993348.

Von den Logarithmen der Sinus haben wir nur die 2650 letztern in unsern Tafeln durch Interpolation gesucht, wobey wir gleichfalls Intervalle von 2 Hunderttheilen annahmen, 20 Stellen in Rechnung zogen und 14 zu-

*) Die Vergleichung der Calletschen Logarithmen mit unsern Rechnungen hat die reiche Ausbeute von fehlerhaften Endziffern geliefert, die man am Ende unserer Tafeln finden wird. Callet erklärt sich nicht über die Methode, nach der er gerechnet hat; vermuthlich aber hat er seine Logarithmen durch Einschaltung aus Vlacqs Trigonometria artificialis hergeleitet. Auch giebt er für jedes Tausendtel des Quadranten die natürlichen Sinus auf 15 und die künstlichen auf 14 Stellen. Jene haben wir sehr genau gerechnet gefunden; von diesen schwanken aber meistens die beyden letzten Ziffern. Wir haben noch sonst hin und wieder Gelegenheit gehabt, Calletsche Zahlen zu prüfen, und verschiedene mehr oder minder bedeutende Fehler gefunden. Zu den erheblichern gehört es, daſs in der 8ten Stelle des Werths f S. 117 der Einleitung eine 2 statt einer 3 steht. Dieser Fehler läuft durch alle Vielfache von f durch. Da wir nicht wissen, welche unter den von uns gefundenen Fehlern schon aus der édition stéréotype ausgemerzt sind, so wollen wir deren keine weiter anführen.

verlässige Ziffern erhielten. Für log sin 0,4300 fanden sich die beiden Werthe:

9,79604859951 22923
9,79604859951 23025,

wo die Abweichung eine Einheit in der 14ten Stelle beträgt. Die Logarithmen der Sinus von 0,0300 bis 0,2650 haben wir aus den Logarithmen der zwischen diesen Gränzen befindlichen Cosinus und den Logarithmen der Sinus über 0,2650 zufolge der angeführten Formel:
log sin A = log sin 2 A — log cos A — log 2 hergeleitet. Auch von dieser Rechnung wird hier ein Beyspiel nicht am unrechten Orte stehen.

log sin 0,3200	=	9,6828250 35493586
log cos 0,1600	=	9,9861369 14542768
		9,6966881 20950818
log 2	=	0,3010299 95663981
log sin 0,1600	=	9,3956581 25286837
log cos 0,0800	=	9,9965618 85126208
		9,3990962 40160629
log 2	=	0,3010299 95663981
log sin 0,0800	=	9,0980662 44496648
log cos 0,0400	=	9,9991421 72403071
		9,0989240 72093577
log 2	=	0,3010299 95663981
log sin 0,0400	=	8,7978940 76429596

Die Logarithmen der Tangenten sind durchgehends aus 14 Decimalstellen der entsprechenden Sinus und Cosinus hergeleitet worden. Es hätte zum Behuf gegenwärtiger Tafeln solcher Vollständigkeit nicht bedurft; allein es war nun einmahl unser Wunsch, unsere Rechnung so durchzuführen, daſs wir im Stande wären, einen trigonometrischen Canon auf 10 Decimalstellen abdrucken zu lassen, und diese Absicht haben wir denn auch vollkommen erreicht.

Dies ist der Weg, den wir bey Bearbeitung unserer Tafeln gegangen sind. Wir haben ihn mit einiger Ausführlichkeit beschrieben, theils weil wir dadurch Zutrauen zu unsern Rechnungen zu erwecken wünschten, theils weil wir uns schmeichelten, dafs manche Ideen und Ansichten, die wir dabey verfolgt haben, vielleicht einst bey ähnlichen Unternehmungen von Nutzen seyn könnten.

In Ansehung der Einrichtung unserer Tafeln können wir uns kurz fassen, weil wir uns dabey die bekannten Schulzeschen Tafeln zum Muster genommen haben.

Wenn man das Buch aufschlägt, findet man zur Linken die natürlichen trigonometrischen Linien, und zur Rechten ihre Logarithmen oder die sogenannten künstlichen Linien. Iene sind für den Halbmesser 1 berechnet, so dafs die Sinus durchgehends und die Tangenten unter 0,5 des Quadranten als ächte, die Tangenten über 0,5 als unächte Decimalbrüche erscheinen. Bey diesen hingegen liegt, wie in allen bisherigen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, der Halbmesser 10000 Millionen zum Grunde. Wenn log sin 0,0400 = 8,7978941 angegeben ist, so ist dies eigentlich der Logarithme der Zahl 627905195, welche den Sinus von 0,0400 für den Halbmesser 10000 Millionen ausdrücken würde. Man hat hierbey die Bequemlichkeit, mit positiven Logarithmen zu rechnen, darf aber nun nicht, wie beym Gebrauch der natürlichen Linien, den Halbmesser vernachlässigen, so oft er in den trigonometrischen Formeln als Multiplicator oder Divisor vorkommt. Die beiden äussersten verticalen Columnen auf jeder Seite, Arc. (Arcus oder Bogen) überschrieben, geben die Bogen an, deren trigonometrische Linien in den übrigen Columnen stehen. Diese Bogen werden durch Decimalbrüche ausgedrückt, bey welchen der Quadrant als Einheit zum Grunde liegt. Das Complement eines Bogens oder Winkels ergiebt sich, wenn man seine arithmetische Ergänzung zu 1, und sein Supplement, wenn man seine arithmetische Ergänzung zu 2 sucht. So ergänzen sich 0,4736 und 0,5264 zu einem, und 1,3495 und 0,6505 zu zwey Quadranten oder rechten Winkeln. Ieder Bogen unter 0,5000 mufs in der Bogencolumne zur Linken, und jeder Bogen über 0,5000 in der zur Rechten aufgesucht werden. Die gegenüberstehenden Zahlen beider Columnen ergänzen sich allemahl zur Einheit. Mit den Bogen zur Linken gehören die obern Columnentitel Sinus, Cosinus u. s. w., und mit denen zur Rechten die untern zusammen. Zur Erleichterung des Aufsuchens sind die 3 ersten Decimalstellen des Bogens, mit welchem die Columne zur Linken anfängt, und die zur Rechten aufhört, oben und unten auf jeder Seite angegeben worden.

Die ersten 121 Seiten der Tafeln enthalten die trigonometrischen Linien für die drey ersten und letzten Hunderttheile des Quadranten. Die Bogen laufen hier in Zwischenräumen von Hunderttausendtheilen fort, und erscheinen also mit 5 Decimalen. In dem von Seite 122 folgenden Reste des Quadranten sind die Linien für jedes Zehntausendtel desselben angegeben, daher die Bogen blofs durch 4 Stellen ausgedrückt sind. Iede Seite fafst 50 trigonometrische Werthe jeder Art.

Die natürlichen und künstlichen Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten stehen mit ihren Unterschieden neben einander. Die Logarithmen der Tangenten und Cotangenten haben eine gemeinschaftliche Differenz, da die letzten die arithmetischen Ergänzungen der erstern sind.

Wir liefern weder die Secanten noch die Sinus versus. Da $\sec A = \frac{r^2}{\cos A}$ und $\operatorname{cosec} A = \frac{r^2}{\sin A}$, folglich $\log \sec A = 2 \log r - \log \cos A$ und $\log \operatorname{cosec} A = 2 \log r - \log \sin A$, so erhellt, wie man die natürlichen und künstlichen Secanten und Cosecanten in den seltenen Fällen, wo man ihrer benöthigt seyn sollte, aus unsern Tafeln herleiten könne. Kommt in einer trigonometrischen Formel eine Secante als Factor vor, so kann man dafür den Cosinus als Divisor setzen und umgekehrt. Ein Gleiches gilt von den Cosecanten und den Sinus.

Was die Sinus und Cosinus versus betrifft, so weifs man, dafs $\sin v\, A = 1 - \cos A$ und $\cos v\, A = 1 - \sin A$ ist. Verlangt man aber ihre Logarithmen, so würde man sich dazu der Formel

$$\sin v\, A = 2 \sin \tfrac{1}{2} A^2$$

bedienen müssen, deren Entstehung und Gebrauch wir hier erläutern wollen. Es ist

$$\cos 2A = 1 - 2 \sin A^2,$$

oder, wenn man statt der allgemeinen Ausdrücke 2 A und A die eben so allgemeinen Ausdrücke A und $\frac{1}{2}$ A setzt,

$$\cos A = 1 - 2 \sin \tfrac{1}{2} A^2,$$

folglich

$$1 - \cos A = \sin v A = 2 \sin \tfrac{1}{2} A^2,$$ oder

wenn bey Entwickelung dieser Formel der Halbmesser nicht vernachlässigt worden wäre,

$$\sin v A = \frac{2 \sin \frac{1}{2} A^2}{r},$$

also $\log \sin v A = 2 \log \sin \frac{1}{2} A + \log 2 - \log r$, wo $\log 2 - \log r = 0{,}3010300 - 10 = -9{,}6989700$ eine beständige Gröſse ist. Um demnach den Logarithmen des Sinus versus eines Bogens zu finden, zieht man 9,6989700 von dem doppelten Logarithmen des Sinus des halben Bogens ab. Z. B. welches ist log sin v 0,0992?

log sin 0,0496	=	8,8911621
2 log sin 0,0496	=	17,7823242
log 2 — log r	= —	9,6989700
log sin v 0,0992	=	8,0833542

Will man umgekehrt den zu einem gegebenen Logarithmen eines Sinus versus gehörigen Bogen finden, so addire man zu diesem Logarithmen 9,6989700 und dividire die Summe durch 2; der Quotient giebt den Logarithmen des Sinus des halben Bogens, den man alsdann in den Tafeln nachzuschlagen hat. Verlangte man den Logarithmen des Cosinus versus eines Bogens, so könnte man den Logarithmen des Sinus versus seiner Ergänzung zum Quadranten suchen, oder sich der Formel

$$\log \cos v A = 2 \log \sin (0{,}5 - \tfrac{1}{2} A) + \log 2 - \log r$$
$$= 2 \log \sin (0{,}5 - \tfrac{1}{2} A) - 9{,}6989700$$

bedienen, welche aus der vorigen entsteht, wenn man

$$A = Q - A = 1 - A \text{ setzt.}$$

Da 0,0001 Q den Werth von etwa 32 Secunden hat, so erhellt, daſs die Ansetzung der trigonometrischen Linien in unsern Tafeln schon um fast die Hälfte genauer als in den meisten Handtafeln für das alte System seyn würde, wenn wir sie auch durchgehends nur für die Zehntausendtheile des Quadranten berechnet hätten. So aber liefern wir sie für die 3 ersten und letzten Hunderttheile, wo das Einschalten am schwierigsten ist, von einem Hunderttausendtel zum andern, oder von etwa 3 zu 3 Secunden. Wir hoffen also, daſs man das Bedürfniſs bequemerer Handtafeln, als die gegenwärtigen, eben nicht empfinden werde, zumahl da wir leichte Mittel angeben wollen, ihren Gebrauch nöthigenfalls beträchtlich zu erweitern.

In den Tafeln, in welchen die trigonometrischen Linien nur auf 7 Decimalstellen ausgedrückt sind, ist eine kleine Zunahme eines Bogens der Zunahme seines Sinus oder der Abnahme seines Cosinus, durch den ganzen Quadranten proportional. Hierauf gründet sich das bekannte Verfahren, zwischen zwey aneinander gränzende Sinus oder Cosinus in den Tafeln eine Anzahl anderer einzuschalten. Ein erheblicher Vortheil der Decimaleintheilung des Quadranten besteht unter andern darin, daſs dieses Einschalten wegen der Leichtigkeit, mit der sich die dazu erforderlichen Proportionaltheile der Unterschiede finden lassen, ungemein bequem von Statten geht. Es komme darauf an, vermittelst gegenwärtiger Tafeln die Sinus und Cosinus wenigstens für jeden Millionentheil des Quadranten anzugeben. Beyspiele werden die Sache ohne viel Weitläuftigkeit am besten erläutern. Welches ist sin 0,024618?

$$\begin{array}{lcr} \sin 0{,}02461 & = & 0{,}0386477 \\ 15{,}7 \times 8 & = & 126 \\ \hline \sin 0{,}024618 & = & 0{,}0386603 \end{array}$$

Welches ist sin 0,161495?

$$\begin{array}{lcr} \sin 0{,}1614 & = & 0{,}2508193 \\ 152{,}1 \times 9 & = & 1369 \\ 15{,}21 \times 5 & = & 76 \\ \hline \sin 0{,}161495 & = & 0{,}2509638 \end{array}$$

Welches ist $\cos 0{,}712993 = \sin 0{,}287007$?

$$\begin{array}{lcr} \sin 0{,}2870 & = & 0{,}4357024 \\ 14{,}14 \times 7 & & 99 \\ \hline \sin 0{,}287007 & = & 0{,}4357123 = \cos 0{,}712993. \end{array}$$

Soll umgekehrt der zu einem gegebenen Sinus oder Cosinus gehörige Bogen bis auf 6 Stellen gefunden werden, so zeigen folgende Beyspiele, wie man dabey zu verfahren habe.

Zu welchem Bogen gehört 0,0386617 als Sinus?

$$\begin{array}{rcr} \text{Die gegebene Zahl} & = & 0{,}0386617 \\ \sin 0{,}02461 & = & 0{,}0386477 \\ \hline \text{Unterschied} & = & 140 \end{array}$$

$$\frac{140}{157} = 0{,}9$$

Folglich $0{,}0386617 = \sin 0{,}024619$.

Zu welchem Bogen gehört 0,4821973 als Sinus?

$$\begin{array}{rcr} \text{Die gegebene Zahl} & = & 0{,}4821973 \\ \sin 0{,}3203 & = & 0{,}4821666 \\ \hline \text{Unterschied} & = & 307 \end{array}$$

$$\frac{307}{1376} = 0{,}22$$

Folglich $0{,}4821973 = \sin 0{,}320322$.

Zu welchem Bogen gehört 0,4357123 als Cosinus?

$$\begin{array}{rcr} \text{Die gegebene Zahl} & = & 0{,}4357123 \\ \sin 0{,}2870 & = & 0{,}4357024 \\ \hline \text{Unterschied} & = & 99 \end{array}$$

$$\frac{99}{1414} = 0{,}07$$

Folglich $0{,}4357123 = \sin 0{,}287007 = \cos 0{,}712993$.

Einer Erläuterung dieser Rechnungen wird keiner unserer Leser bedürfen, da nicht leicht jemand von den Decimaltafeln Gebrauch machen wird, der nicht schon mit den Tafeln für das alte System umzugehen weiſs.

Auch die Tangenten nehmen durch den gröſsten Theil des Quadranten gleichförmig genug zu, um sich derselben eben so, wie bey den Sinus, zum Einschalten der Proportionaltheile bedienen zu können. Wir setzen hier wieder einige Beyspiele her.

Welches ist tang 0,426857?

$$\begin{aligned}\text{tang } 0{,}4268 &= 0{,}7929313\\ 255{,}9 \times 5 &= \phantom{0{,}792}1280\\ 25{,}59 \times 7 &= \phantom{0{,}7929}179\\ \hline \text{tang } 0{,}426857 &= 0{,}7930772\end{aligned}$$

Welches ist cot 0,985736 = tang 0,014264?

$$\begin{aligned}\text{tang } 0{,}01426 &= 0{,}0224033\\ 15{,}7 \times 4 &= \phantom{0{,}02240}63\\ \hline \text{tang } 0{,}014264 &= 0{,}0224096 = \text{cot } 0{,}985736\end{aligned}$$

Zu welchem Bogen gehört 0,7930772 als Tangente?

$$\begin{aligned}\text{Die gegebene Zahl} &= 0{,}7930772\\ \text{tang } 0{,}4268 &= 0{,}7929313\\ \hline \text{Unterschied} &= \phantom{0{,}792}1459\end{aligned}$$

$$\frac{1459}{2559} = 0{,}57$$

Folglich 0,7930772 = tang 0,426857.

Zu welchem Bogen gehört 0,1064539 als Cotangente?

$$\begin{aligned}\text{Die gegebene Zahl} &= 0{,}1064539\\ \text{tang } 0{,}0675 &= 0{,}1064279\\ \hline \text{Unterschied} &= \phantom{0{,}1064}260\end{aligned}$$

$$\frac{260}{1588} = 0{,}16$$

Folglich 0,1064539 = tang 0,067516 = cot 0,932484.

Nur auf die Tangenten über 0,85 Q oder auf die Cotangenten unter 0,15 Q ist dies Verfahren nicht anwendbar, wenn man sich nicht zu erheblichen Fehlern verleiten lassen will. Denn die Unterschiede schreiten hier zu ungleich fort, als daſs man noch kleine Veränderungen der Bogen den Veränderungen ihrer Tangenten proportional setzen könnte. Um nun auch in diesem Fall die zu einem jeden auf 5 oder 6 Stellen ausgedrückten Bogen gehörige Tangente oder Cotangente bis auf 7 Decimalen mit Genauigkeit zu finden, schlagen wir die Formel

$$\Delta \text{ tang B} = \frac{\sin \Delta \text{B}}{\cos \text{B}. \cos (\text{B} + \Delta \text{B})}$$

vor, die wir aus Cagnoli's oft erwähntem Werke entlehnt haben und auf den gegenwärtigen Fall anwenden wollen.
nder Formel:

$$\text{tang } A - \text{tang } B = \frac{\sin (A - B)}{\cos A . \cos B}$$

sey die Differenz tang A — tang B, oder was zu tang B hinzukommen mufs, damit tang A daraus entstehe, $= \Delta$ tang B, und eben so die Differenz der zustimmenden Bogen $= \Delta B$, so dafs tang A $=$ tang B $+ \Delta$ tang B und $A = B + \Delta B$. Setzt man diese Werthe für tang A und A in die letztere Formel, so erhält sie obige zu unserm Zweck brauchbare Form.

Soll nun tang 0,939665 gefunden werden, so nehme man B $=$ 0,9396 an, also

$$\Delta B = 0{,}000065$$
$$\text{und } B + \Delta B = 0{,}939665.$$

Man hat folglich

$$\Delta \text{tang } 0{,}9396 = \frac{\sin 0{,}000065}{\cos 0{,}9396 . \cos 0{,}939665} = \frac{\sin 0{,}000065}{\sin 0{,}0604 . \sin 0{,}060335}$$

$$\begin{array}{rr}
\sin 0{,}0604 & = 0{,}0947338 \\
\sin 0{,}060335 & = 0{,}0946322 \\
\hline
 & 8526042 \\
 & 378935 \\
 & 56840 \\
 & 2842 \\
 & 189 \\
 & 19 \\
\hline
\sin 0{,}0604 \times \sin 0{,}060335 & = 0{,}008964867
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l}
\sin 0{,}000065 = & 0{,}0001021018 & 0{,}0113891 = \Delta \text{ tang } 0{,}9396 \\
 & 896487 & \\
\hline
 & 124531 & \\
 & 89649 & \\
\hline
 & 34882 & \\
 & 26895 & \\
\hline
 & 7987 & \\
 & 7172 & \\
\hline
 & 815 & \\
 & 807 & \\
\hline
 & 8 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{tang } 0{,}9396 & = & 10{,}5084181 \\ \Delta \text{ tang } 0{,}9396 & = & 0{,}0113891 \\ \hline \text{tang } 0{,}939665 & = & 10{,}5198072. \end{array}$$

Die Proportionsregel würde 10,5198138 gegeben haben.

Wird die Cotangente eines kleinen Bogens verlangt, so suche man die Tangente seiner Ergänzung zum Quadranten. Z. B. welches ist cot 0,027368 = tang 0,972632?

$$\begin{array}{rcl} \text{Hier ist} \quad B & = & 0{,}97263 \\ \Delta B & = & 0{,}000002 \\ B + \Delta B & = & 0{,}972632 \end{array}$$

$$\text{Also } \Delta \text{ tang } 0{,}97263 = \frac{\sin 0{,}000002}{\sin 0{,}02737 . \sin 0{,}027368} = 0{,}0017008.$$

$$\begin{array}{rcl} \text{tang } 0{,}97263 & = & 23{,}2454325 \\ \Delta \text{ tang } 0{,}97263 & = & 0{,}0017008 \\ \hline \text{tang } 0{,}972632 & = & 23{,}2471333 = \cot 0{,}027368. \end{array}$$

Bey dieser Einschaltung werden die Sinus der ersten hundert Millionentheile des Quadranten bis zur 10ten Decimalstelle gebraucht. Sie lassen sich zwar in jedem vorkommenden Falle leicht aus der Tafel für die Längen der Kreisbogen herleiten, (S. die Tafel G im Anhange) indem die Sinus so kleiner Bogen mit den Bogen selbst bis auf 10 und mehr Stellen von gleichem Werth sind; indessen haben wir sie mehrerer Bequemlichkeit halber im Anhange zu unsern Tafeln unter dem Buchstaben A besonders abdrucken lassen.

Wenn man in der Formel

$$\Delta \text{ tang } B = \frac{\sin \Delta B}{\cos B . \cos (B + \Delta B)}$$

den Ausdruck cos $(B + \Delta B)$ entwickelt, und alsdann tang ΔB statt $\frac{\sin \Delta B}{\cos \Delta B}$, $\frac{1 + \cos 2B}{2}$ statt $\cos B^2$ und $\frac{\sin 2B}{2}$ statt sin B cos B setzt, so entsteht die Formel:

$$\text{tang } \Delta B = \frac{\Delta \text{ tang } B \; (1 + \cos 2B)}{2 \quad + \Delta \text{ tang } B . \sin 2B},$$

welche man gebrauchen kann, um in einer Gegend des Quadranten, wo die Unterschiede sehr ungleich ausfallen, den zu einer Tangente gehörigen Bogen bis auf die 6te Decimalstelle genau zu finden. Als Beyspiel diene die oben gefundene Tangente 10,5198072, zu der wir wieder den Bogen suchen wollen.

$$\begin{array}{rl} \text{Die gegebene Tangente} & = 10{,}5198072 \\ \text{tang } 0{,}9396 & = 10{,}5084181 \\ \hline \text{Unterschied oder } \Delta \text{ tang } B & = 0{,}0113891 \end{array}$$

$$B = 0{,}9396$$

$$2B = 1{,}8792$$

$$\sin 2B = \sin 1{,}8792 = \sin 0{,}1208 = 0{,}1886155$$

$$\cos 2B = \cos 1{,}8792 = -\cos 0{,}1208 = -0{,}9820510$$

$$1 + \cos 2B = 1 - 0{,}9820510 = 0{,}0179490$$

$$\begin{array}{rr} \Delta \text{ tang } B = & 0{,}0113891 \\ \hline & 179490 \\ & 17949 \\ & 5385 \\ & 1436 \\ & 162 \\ & 2 \\ \hline \Delta \text{ tang } B\,(1+\cos 2B) = & 0{,}000204424 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \sin 2B = & 0{,}1886155 \\ \Delta \text{ tang } B = & 0{,}0113891 \\ \hline & 1886 \\ & 189 \\ & 57 \\ & 15 \\ & 2 \\ \hline \Delta \text{ tang } B \,.\, \sin 2B = & 0{,}002149 \\ 2 + \Delta \text{ tang } B \,.\, \sin 2B = & 2{,}002149 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l} \Delta \text{ tang } B\,(1+\cos 2B) = & 0{,}000204424 & 0{,}000102102 = \text{tang } \Delta B \\ & 200215 & \\ \hline & 4209 & \\ & 4004 & \\ \hline & 205 & \\ & 200 & \\ \hline & 5 & \end{array}$$

Nach Tafel A im Anhange ist 0,000102102 = tang 0,000065,

$$\begin{array}{rl} \text{also } \Delta B & = 0{,}000065 \\ B & = 0{,}9396 \\ \hline B + \Delta B & = 0{,}939665 \text{ der gesuchte Bogen.} \end{array}$$

Diese Rechnung ist etwas weitläuftig. Kürzer findet man dasselbe Resultat auf folgende Art:

Die Formel:

$$\Delta \text{ tang } B = \frac{\sin \Delta B}{\cos B \,.\, \cos\,(B + \Delta B)}$$

giebt $\sin \Delta B = \Delta \text{ tang } B \,.\, \cos B \,.\, \cos\,(B + \Delta B)$. Wird nun ΔB höchstens bis auf 6 Stellen verlangt, so ist es erlaubt $\cos B$ statt $\cos\,(B + \Delta B)$ zu setzen, woraus denn die zu unserm Zweck bequemere, aber nicht ganz richtige, Formel

$$\sin \Delta B = \Delta \text{ tang } B \,.\, \cos B^2$$

entsteht. Im vorigen Beyspiel ist

$$\begin{array}{rr}
\cos B = & 0{,}0947338 \\
 & 0{,}0947338 \\
\hline
 & 852604 \\
 & 37894 \\
 & 6631 \\
 & 284 \\
 & 28 \\
 & 8 \\
\hline
\cos B^2 = & 0{,}00897449 \\
\Delta \text{ tang } B = & 0{,}0113891 \\
\hline
 & 89745 \\
 & 8974 \\
 & 2692 \\
 & 718 \\
 & 81 \\
 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

$\Delta \text{ tang } B \,.\, \cos B^2 = 0{,}000102211 = \sin \Delta B = \sin 0{,}0000065$, ganz wie vorhin. Man hüte sich aber vor einer ähnlichen Substitution in der Formel

$$\Delta \text{ tang } B = \frac{\sin \Delta B}{\cos B.\ \cos\,(B + \Delta B)},$$

weil man sonst vermittelst derselben kein richtigeres Resultat als durch die Proportionsregel erhalten würde.

Bey den künstlichen Linien findet in Ansehung des Einschaltens eben dasselbe Verfahren, wie bey den natürlichen, statt, nur mit Ausnahme der Sinus und Tangenten sehr kleiner Bogen. Wir werden hernach zeigen, daſs man beym Gebrauch gegenwärtiger Tafeln schon im Anfange des zweyten Hunderttels des Quadranten mit einer einfachen Interpolation ausreiche. Es kommt also nur darauf an, eine leichte Einschaltungsmethode für das erste Hunderttel anzugeben, wo die Unterschiede ganz besonders ungleich fortschreiten. Man wird sogleich darauf verfallen, hier die Logarithmen aus den natürlichen Sinus und Tangenten mit Beyhülfe der Logarithmentafeln der Zahlen herzuleiten. Allein dies Verfahren würde, wenn die Sinus und Tangenten nur 5 bis 6 bedeutende Ziffern haben (und dies ist im ersten Hunderttel des Quadranten der Fall), nicht mehr als eben so viel richtige Stellen für die Logarithmen geben. Will man jedoch diesen Weg, der immer nicht der bequemste ist, betreten, so liefern wir dazu die natürlichen Sinus und Tangenten für die ersten hundert Zehntausendtheile des Quadranten bis auf 10 Decimalstellen berechnet. Siehe die Tafel B im Anhange. Ein Beyspiel wird ihren Gebrauch erläutern. Es werde log tang 0,000836 verlangt.

$$\begin{array}{lcr} \text{tang } 0{,}0008 & = & 0{,}0012566377 \\ 157079{,}9 \times 3 & & 471240 \\ 15707{,}99 \times 6 & & 94248 \\ \hline \text{tang } 0{,}000836 & = & 0{,}0013131865 \end{array}$$

Zu der Zahl 13131865 suche man nun den Logarithmen vermittelst der gewöhnlichen Logarithmentafeln.

$$\begin{array}{llcr} \log & 13131 & = & 4{,}1182978 \\ & 331 \times 0{,}8 & = & 265 \\ & 331 \times 0{,}06 & = & 20 \\ & 331 \times 0{,}005 & = & 2 \\ \hline \log & 13131865 & = & 7{,}1183265 = \log \text{tang } 0{,}000836. \end{array}$$

Kürzer wird man folgendes Verfahren finden.

Kleine Veränderungen der Bogen sind, wie schon bemerkt worden, in den Tafeln, welche die trigonometrischen Linien nur bis auf 7 Stellen angeben, den Veränderungen ihrer Sinus und Tangenten proportional, wenn man in Rücksicht auf die letztern die Bogen über 0,85 Q ausnimmt.

Es ist also

$$0,00083 : 0,000836 = \text{tang } 0,00083 : \text{tang } 0,000836$$
oder $83 : 83,6 = \text{tang } 0,00083 : \text{tang } 0,000836$,
und $\log \text{tang } 0,000836 = \log \text{tang } 0,00083 + \log 83,6 - \log 83$.

$$\begin{array}{rl}
\log \text{tang } 0,00083 & = 7,1151982 \\
\log 83,6 & = \underline{1,9222063} \\
& 9,0374045 \\
\log 83 & = \underline{1,9190781} \\
\log \text{tang } 0,00083,6 & = 7,1183264.
\end{array}$$

Man wird aus diesem Exempel leicht eine Regel für alle ähnliche Fälle herleiten können.

Da wir nun die Logarithmen der Sinus und Tangenten kleiner Bogen, welche nicht in unsern Tafeln vorkommen, mit Genauigkeit zu finden im Stande sind, so wird sich leicht zeigen lassen, daſs man sich schon vom zweyten Hunderttel des Quadranten an der Unterschiede auf die gewöhnliche Art zum Einschalten bedienen könne. Wir wollen zu dem Ende log sin 0,010767 suchen, und zwar zuerst durch die schärfere Rechnung.

$$\begin{array}{rl}
\log \sin 0,01076 & = 8,2279115 \\
\log 1076,7 & = \underline{3,0320947} \\
& = 11,2600062 \\
\log 1076 & = \underline{3,0318123} \\
\log \sin 0,010767 & = 8,2281939
\end{array}$$

Durch die Proportionsregel entsteht:

$$\begin{array}{rl}
\log \sin 0,01076 & = 8,2279115 \\
403,4 \times 7 & = \underline{2824} \\
\log \sin 0,01076 & = 8,2281939
\end{array}$$

Beide Methoden geben also völlig einerley Resultat. Wenn aber auch eine Verschiedenheit von einigen Einheiten in der letzten Stelle statt fände, so würde sie doch in den meisten Fällen nicht in Betracht kommen.

Soll der zu einem Logarithmen eines Sinus oder einer Tangente gehörige Bogen bis auf 6 Decimalstellen gefunden werden, so kann man dazu durchgehends, selbst im ersten Hunderttel des Quadranten, die in den Tafeln angegebenen Unterschiede auf die oben bey den natürlichen

Linien beschriebene Weise gebrauchen. Nur die Logarithmen der Cosinus in den ersten 9 Hunderttheilen des Quadranten lassen die ihnen zugehörige Bogen nicht bis auf 6 zuverlässige Stellen finden. Denn da hier die Unterschiede kleiner als 100 ausfallen, so werden 100 eingeschaltete Bogen nicht 100 von einander verschiedene Cosinus geben, woraus folgt, daſs man den Bogen, welcher zu einem nicht in den Tafeln befindlichen Logarithmen eines Cosinus gehört, nicht bis auf eine Einheit in seiner sechsten Stelle genau bestimmen könne. Man muſs daher beym Gebrauch von Handtafeln die Cosinus kleiner Bogen in den trigonometrischen Formeln so viel möglich zu vermeiden suchen, wenn es auf scharfe Resultate ankommt.

So viel von der Einrichtung und dem Gebrauch gegenwärtiger Decimaltafeln. Es ist nun noch übrig, etwas von dem Anhange zu sagen, welcher verschiedene mit der Decimaleintheilung des Quadranten in Verbindung stehende kleinere Tafeln enthält. Von den beiden ersten, welche mit A und B bezeichnet und zum Behuf des Einschaltens berechnet sind, ist bereits die Rede gewesen.

Die Tafel C dient zu einer vollständigen Verwandlung der bisher üblichen Theile des Kreises in Decimaltheile des Quadranten. Sie zerfällt in vier kleinere Tafeln, wovon die erste die Decimalwerthe der Grade, die zweyte die der Minuten, die dritte die der Secunden, und die vierte die der Tertien angiebt. Kleinere Sexagesimaltheile kommen sehr selten, allenfalls noch in ältern mathematischen Schriften vor. Verlangt man indessen ihre Decimalwerthe, so kann man sie leicht durch Division mit 60 aus den Werthen der Tertien herleiten. So ist

$$1^{IV} = \frac{1^{III}}{60} = 0{,}0000\ \ 0000\ \ 0857\ \ 34$$

$$1^{V} = \frac{1^{IV}}{60} = 0{,}0000\ \ 0000\ \ 0014\ \ 29$$

$$1^{VI} = \frac{1^{V}}{60} = 0{,}0000\ \ 0000\ \ 0000\ \ 24$$

$$2^{IV} = \frac{2^{III}}{60} \quad \text{u. s. w.}$$

In Tafel I und II können die 3 letzten und in Tafel III die 9 letzten Ziffern nach Willkühr wiederhohlt werden, daher auch die Endziffern nirgends berichtigt sind. Diesen Vortheil gewährt Tafel IV nicht. Denn in den Decimalwerthen der Tertien giebt es Perioden von 27 Decimalen, und es war eben so unbequem als unnöthig, die Tafel bis zum Schlusse einer solchen Periode zu erweitern. Es sind daher nur 14 Stellen, von welchen die letztere gehörigen Orts berichtigt ist, abgedruckt worden. Indessen mag hier doch eine vollständige Periode stehn.

$1''' = 0,00000\ 00514\ 40329\ 21810\ 69958\ 84773\ 6625$

Es sind dies 34 Decimalen. Mit der 35sten tritt wieder die 8te ein. Man pflegt jetzt gewöhnlich die Tertien und die noch kleinern Bogentheile durch Decimaltheile von Secunden auszudrücken. Kommen nun dergleichen Decimaltheile vor, so wird man ihre Werthe leicht durch eine Versetzung des Kommas aus den Werthen der 9 ersten Secunden herleiten können. Ein Gleiches gilt von den Decimaltheilen, welche sich neben den Graden und Minuten befinden. Zur weitern Erläuterung des Gesagten mögen folgende Beyspiele dienen.

Wie viel betragen 57° 17′ 16″ 26‴ in Decimaltheilen des Quadranten?

57°	=	0,6333	3333	3333	33
17′	=	31	4814	8148	15
16″	=		4938	2716	05
26‴	=		133	7448	56
57° 17′ 16″ 26‴	=	0,6365	3220	1646	09 Q.

Wie viel betragen 102° 15′ 18″ 55,35‴?

90°	=	1,0000	0000	0000
12	=	1333	3333	3333
15′	=	27	7777	7778
18″	=		5555	5556
55‴	=		282	9218
0,3	=		1	5432
0,05	=			2572
102° 15′ 18″ 55,35‴	=	1,1361	6951	3889 Q.

Wie viel betragen 89° 59′ 59,9999″?

89°	=	0,9888	8888	8888	8889
59′	=	109	2592	5925	9259
59″	=	1	8209	8765	4321
0,9	=		277	7777	7778
0,09	=		27	7777	7778
0,009	=		2	7777	7778
0,0009	=			2777	7778
89° 59′ 59,9999″	=	0,9999	9999	9691	3581 Q.

Wie viel betragen 163° 15,73′?

90°	=	1,0000	0000
73	=	0,8111	1111
15′	=	27	7778
0,7	=	1	2963
0,03	=		556
163° 15,73′	=	1,8140	2408 Q.

Die folgende mit D bezeichnete Tafel ist zum Behuf der Verwandlung der Decimaltheile des Quadranten in die bisher übliche Kreistheile berechnet worden. Sie besteht aus drey

Abtheilungen, wovon die erste die Sexagesimalwerthe aller Hunderttheile, die zweyte die der ersten hundert Zehntausendtheile und die dritte die der ersten hundert Millionentheile des Quadranten enthält. In der letzten Abtheilung kommen nur noch Secunden mit anhängenden Decimalen vor. Man wird also daraus durch eine bloſse Verschiebung des Kommas zur Linken die Sexagesimalwerthe der Hundertmillionentheile, der Zehntausendmillionentheile u. s. w. des Quadranten leicht ableiten können. Bey der Reduction theile man nun den Decimalbruch, der den Bogen ausdrückt, vom Komma an in Klassen zu 2 Ziffern, wo man im Fall einer ungeraden Anzahl Decimalen die fehlende Stelle mit einer Null auszufüllen hat, und bestimme den Werth jeder Klasse für sich aus den drey Abtheilungen der Tafel D. Einige Beyspiele werden dies deutlich machen.

Wie viel betragen 0,153796 Q in Graden und Gradtheilen?

0,15	=	13°	30′	0″
37	=		19	58,8
96	=			31,104
0,153796 Q	=	13°	50′	29,904″

Wie viel sind 1,00735 Q?

1,00	=	90°	0′	0″
73	=		39	25,2
50	=			16,2
1,00735 Q	=	90°	39′	41,4″

Wie viel sind endlich 0,000607347689 Q?

0,0006	=	3′	14,4
07	=		2,268
34	=		11016
76	=		24624
89	=		28836
0,000607347689 Q	=	3′	16,780651236″.

Die Tafeln E und F sind dazu bestimmt, die üblichen Theile des Tages in Decimaltheile desselben und umgekehrt zu verwandeln. Da ihre Einrichtung mit der der beiden vorigen Tafeln vieles gemein hat, so wird sie keiner weitläuftigen Erklärung bedürfen. Die Tafel E besteht aus 4 kleinern Tafeln, von welchen man, wie der Augenschein lehrt, die drey ersten durch Wiederhohlung der 3 letzten Ziffern beliebig erweitern kann, daher auch die Endziffern nirgends vermehrt worden sind. Dies ist aber in der vierten geschehen, welche, so abgekürzt, wie sie da steht, keiner solchen Erweiterung fähig ist. Die Tafel F enthält 6 kleinere Tafeln zur Verwandlung der 6 ersten Stellen eines Decimalbruchs des Tages in Stunden und deren Theile. Wir wollen nun den Gebrauch beider Tafeln an einigen Beyspielen zeigen.

Wie viel betragen 21 St. 4′ 17″ 34,5‴ in Decimaltheilen des Tages?

21 St.	=	0,8750	0000	0000
4′	=	27	7777	7778
17″	=	1	9675	9259
34‴	=		655	8642
0,5	=		9	6451
21 St. 4′ 17″ 34,5‴	=	0,8770	8119	2130 T (Tag).

Wie viel betragen 13 St. 14′ 36,47″ in Decimaltheilen des Tages?

13 St.	=	0,5416	6666	6666	6666	6667
14′	=	97	2222	2222	2222	2222
36″	=	4	1666	6666	6666	6667
0,4	=		462	9629	6296	2963
0,07	=		81	0185	1851	8519
13 St. 14′ 36,47″	=	0,5518	1099	5370	3703	7038 T.

Wie viel ist 0,73158 T in Stunden und Stundentheilen?

0,7	=	16 St.	48′	0″
3	=		43	12
1	=		1	26,4
5	=			43,2
8	=			6,912
0,73158 T	=	17 St.	33′	28,512″

Wie viel ist 0,390680479 T in Stunden und Stundentheilen?

0,3	=	7 St.	12′	0″
9	=	2	9	36
06	=			51,84
8	=			6,912
04	=			3456
7	=			6048
9	=			7776
0,390680479 T	=	9 St.	22′	34,7933856″

Wir haben diese Zeittafeln berechnet, nicht etwa, weil wir erwarteten oder wünschten, die Decimaleintheilung des Tages im gemeinen Leben angenommen zu sehen, sondern weil uns der Gebrauch der Decimaleintheilung des Quadranten in der Astronomie nothwendig die Decimaleintheilung des Tages vorauszusetzen scheint.

Es versteht sich, daſs zur Verhütung aller Sprachverwirrung auch bey der neuen Zeiteintheilung die alte Terminologie gänzlich wegfallen müsse.

Wenn die astronomische Uhr Decimaltheile des Tages angiebt*), so ist die Verwandlung der Theile des Aequators in Zeit der ersten Bewegung und umgekehrt, ungemein bequem. Ein Zehntel eines Sterntages correspondirt mit 4 Zehnteln vom Quadranten des Aequators. Zur weitern Vergleichung der Zeit- und Bogentheile dient folgende Tafel.

*) Ein Hunderttausendtel des Tages = 0,864 Secunden wird die Dauer eines Pendelschlags abgeben. Da die Länge des Secundenpendels unter dem Aequator 36 Zoll 7,1 Linien und zu Paris 36 Zoll 8,57 Linien Par. Maaſs beträgt, und die Pendellängen den Quadratzahlen der Schwingungszeiten proportional sind, so wird sich leicht die Länge des Pendels bestimmen lassen, welches unter dem Aequator und zu Paris Hunderttausendtel eines Tages schwingt. Dort muſs es 27 Zoll 3,79 Linien und hier 27 Zoll 4,88 Linien lang seyn.

Sternzeit.	Bogen.	Sternzeit.	Bogen.	Sternzeit.	Bogen.	Sternzeit.	Bogen.
0,025 T	0,1 Q	0,275 T	1,1 Q	0,525 T	2,1 Q	0,775 T	3,1 Q
0,050	0,2	0,300	1,2	0,550	2,2	0,800	3,2
0,075	0,3	0,325	1,3	0,575	2,3	0,825	3,3
0,100	0,4	0,350	1,4	0,600	2,4	0,850	3,4
0,125	0,5	0,375	1,5	0,625	2,5	0,875	3,5
0,150	0,6	0,400	1,6	0,650	2,6	0,900	3,6
0,175	0,7	0,425	1,7	0,675	2,7	0,925	3,7
0,200	0,8	0,450	1,8	0,700	2,8	0,950	3,8
0,225	0,9	0,475	1,9	0,725	2,9	0,975	3,9
0,250	1,0	0,500	2,0	0,750	3,0	1,000	4,0

In einem mittlern Sonnentage culminiren 360° 59′ 8,325″ oder 4,0109516 Quadranten des Aequators. Hieraus ergiebt sich folgende Vergleichungstafel.

Mittlere Sonnenzeit.	Bogen.	Mittlere Sonnenzeit.	Bogen.
0,1 T	0,401095 Q	0,6 T	2,406571 Q
0,2	0,802190	0,7	2,807666
0,3	1,203285	0,8	3,208761
0,4	1,604381	0,9	3,609856
0,5	2,005476	1,0	4,010952

Die Tafel G endlich giebt die Längen der Kreisbogen in Theilen des Halbmessers für jedes Zehntel des Quadranten bis auf 44 Decimalstellen. Aus den Werthen der Bogen für die Zehntel des Quadranten werden die Werthe für jeden andern Decimaltheil leicht durch eine blofse Versetzung des Kommas hergeleitet, wie folgendes Beyspiel zeigt.

Wie lang ist 0,0680748 Q?

0,06	=	0,0942	4777	9607	6938
8	=	125	6637	0614	3592
07	=	1	0995	5742	8756
4	=		628	3185	3072
8	=		125	6637	0614
0,0680748 Q	=	0,1069	3164	5787	2972

Man sieht, dafs die Ziffer, welche in der Tafel die erste Stelle nach dem Komma einnimmt, jedesmahl in die Stelle zu stehen kommen müsse, in welcher sich der Decimaltheil des Bogens befindet, dessen Werth gesucht wird. Der Bogen, dessen Länge dem Halbmesser gleich ist, beträgt 0,6366 1977 2367 5813 4307 5535... Q.

Nachdem wir nun unsern Leser mit der Geschichte, der Einrichtung und dem Gebrauche unserer Tafeln bekannt gemacht haben, könnte es vielleicht nöthig scheinen, noch ihres Nutzens zu gedenken. Allein die Vortheile, welche die Decimaleintheilung des Quadranten dem Rechner gewährt, sind zu einleuchtend, als dafs sie einer umständlichen Auseinandersetzung bedürften. Auch sind unsere gröfsten Astronomen längst darüber einverstanden. Mit Recht, sagt Herr Professor Bode in dem oben erwähnten Aufsatz, mit Recht haben große Mathematiker die Einführung der Decimaleintheilung des Quadranten als sehr vortheilhaft beym Calcul empfohlen. „Die Sinustafeln nach der Decimaleintheilung des Quadranten werden uns in den Stand setzen, inskünftige eine einfachere Methode, als die bisher gewöhnliche, bey astronomischen Rechnungen zu gebrauchen. Die neuern Fortschritte in der Astronomie haben diese Rechnungen ohnehin schon so weitläuftig gemacht, daſs die Astronomen jedes Mittel, sie ohne Nachtheil abzukürzen, ergreifen werden". Worte des Hrn. Obristwachtmeister von Zach*). Es fragt sich nur, ob nicht die Einführung der neuen Kreiseintheilung zu manchen Verwirrungen Veranlassung geben, und daher eher schädlich als vortheilhaft seyn werde. Wir denken nicht. Man hüte sich nur, die alte Terminologie auf die neue Eintheilung überzutragen, es sey denn, daſs man die Sexagesimaleintheilung mit einemmahl ganz abschaffen wollte, welches aber nicht geschehen kann und selbst nicht wünschenswürdig wäre, wenn anders Vor- und Nachwelt mit einander im Einverständniſs bleiben sollen. Die Decimaleintheilung des Quadranten kann ja auch als Hülfsmittel beym Rechnen ganz füglich neben der Sexagesimaleintheilung bestehen. Der practische Geometer bedient sich längst, gleichfalls der Bequemlichkeit im Rechnen halber, der Decimaleintheilung der Längen-Flächen- und Körpermaaſse statt der im gemeinen Leben üblichen Duodecimaleintheilung derselben, ohne daſs daraus die geringste Verwirrung entstände.

Da also nunmehr trigonometrische Tafeln für das Decimalsystem vorhanden sind, und wir durch den Fleiſs des geschickten Astronomen, Hrn. Wurm, nächstens eine Sammlung astronomischer, in gleichem System gearbeiteter, Tafeln zu erwarten haben, so dürfen wir hoffen, daſs die Decimaleintheilung des Quadranten bald Liebhaber unter den deutschen Mathematikern, besonders unter den Astronomen, finden werde.

*) S. seine Geschichte der Astronomie vom Jahr 1797 im gothaschen Taschenbuch für 1799.

Berlin, gedruckt bey Christian Müller.