Die Berechnung der ebenen gradlinichten Figuren.

Einleitung.

§. 1.

Einer Figur Haupttheile sind, die dessen Umfang ausmachende Seiten und die von diesen begränzte Umfangswinkel; hingegen rechnet man zu der Figur Nebentheile, die von eines Umfangswinkels Scheitelpunkte aus gezogene Diagonallinien, nebst den Winkeln welche diese Linien sowohl unter sich als mit der Figur Seiten einschließen.

§. 2.

Die Berechnung einer Figur kann auf zweyerley Art geschehen: man kann dabey entweder blos auf ihre Haupttheile Rücksicht nehmen, oder zugleich auch auf ihre Nebentheile.

§. 3.

Diese lezte Art erstreckt sich wegen der vielfachen Verbindung der Nebentheile sowohl unter sich als mit den Hauptttheilen sehr weit, und giebt für eine Figur von mäßiger Anzahl Seiten eine Menge Auflösungen, daß, wer sie alle aufstellen wolte, ein nicht wenig ekelhaftes als weitläuftiges Geschäfte unternähme. Von der ersten Art aber wird weiter unten erhellen, daß die Auflösung einer jeden Figur auf so viele Gleichungen gebracht werden kann, als selbige Seiten hat, und diese Gleichungen aus zween eben so eleganten als viel umfassenden Lehrsätzen leicht hergeleitet werden können, auch das ganze Verfahren zu nicht schwerern und verwikkeltern analytischen Operationen führt, als bey Berechnung eines Dreyeckes vorkommen.

Lehrsätze.

§. 4.

So viel Seiten eine Figur hat, so viel hat sie auch Umfangswinkel; (Karstens Anfgr. der Math. §. 29. der Geometrie).

§. 5.

Jede geradlinichte Figur hat wenigstens drey auswärtsgehende Umfangswinkel; (a. Geom. 149 §).

§. 6.

Eine solche Figur von n Seiten hat also höchstens n — 3 einwärtsgehende Umfangswinkel, (4, 5).

§. 7.

Bey einer Figur (*) die lauter auswärtsgehende Umfangsmittel hat, beträgt die Summe dieser Winkel Nebenwinkel vier rechte, oder = 4 R.

So machen (Fig. 1) der Winkel ABC, BCD, CDE, rc. Nebenwinkel bBC, cCD, dDE, rc. vier rechte.

Beweis.

Jeder solcher Nebenwinkel (bBC rc.) macht mit seinem zugehörigen (ABC rc.) = 2 R, (a. Geom. 22 §).

Hat nun die Figur n Seiten: so sind n × 2 R. Winkel vorhanden, (4).

Es ist aber die Summe S der auswärtsgehenden Umfangswinkel = (n — 2) 2 R, [a. Geom. 148 §].

Heißt also der Nebenwinkel (bBC, cCD, rc.) ihre Summe σ: so hat man

$$S + \sigma = n.\ 2R:$$

(*) In dieser ganzen Abhandlung wird unter: Figur, eine ebne gradlinichte verstanden.

Folglich

$$\begin{aligned}\sigma &= n.\ 2R - S,\\ &= n.\ 2R - (n-2)\ 2R,\\ &= [n-(n-2)]\ 2R,\\ &= (n - n + 2)\ 2R\\ &= 4R.\end{aligned}$$

§. 8.

Wenn eine Figur auswärtsgehende und einwärtsgehende Umfangswinkel hat, man nennte jener Winkel Nebenwinkel Summe $= \sigma$, die Summe der einwärtsgehenden Umfangswinkel aber Ueberschüße über 2 R, $= ſ$:

So hat man $\sigma - ſ = 4R$.

In der 2ten Figur ist also: (uab + mcd + edn + feo + rgp. + ihr + tka) — (cbl + qfg + kiſ) = 4 R.

Der Beweis hievon findet sich in Karstens Anfangsgründen der Mathematik im 147ten §. der Geometrie.

§. 9.

Heissen der einwärtsgehenden Umfangswinkel Ueberschüße über zween rechte Winkel, m, n, o, p, q, ꝛc, daß also m + n + p + q + ... = ſ: So beträgt (4R — m) + (4R — n) + (4R — p) + (4R — q) + ... höchstens $= (n - 3)\ 4R - ſ$, [6]: Folglich, da $\sigma - ſ = 4R$, (8), hat man höchstens $\sigma + = [(n-3)4R - ſ] = (n-3)\ 4R + 4R = (n-2)\ 4R$.

§. 10.

Bey auswärtsgehenden Umfangswinkeln heisse deren Nebenwinkel, äussere Winkel; aber bey einwärtsgehenden mögen diesen Nahmen die führen die man erhält, wenn man jedes einwärtsgehenden Umfangswinkels Ueberschusses über 2R von 4R abzieht.

So sind uab, mcn, rc. der auswärtslaufenden Winkeln kab, bcn rc. ihre äusseren; und 4R — lbc, 4R — qfg, rc. die der einwärtsgehenden Winkeln abc, gfe, rc.

§. 11.

Die Summe der äussern Winkel (10) einer Figur ist einem gewissen Vielfachen des rechten Winkels gleich, welches nicht weniger als 4R und nicht mehr als (n — 2) 4R betragen kann.

So ist die Summe dieser Winkel bey einem Sechsecke, entweder = 4R, oder = 2. 4R, oder = 3. 4R, oder = 4. 4R = (6 — 2). 4R

Beweis.

Die Sache erhellet vollkommen aus 7, 9, und 10.

§. 12.

In einem Vierecke ABCDA, (Fig. 6.) wo zwo Seiten AB und CD einander in E schneiden, sey die Seite AD nach G, die Seite AB nach K, die BC nach F, und die CD nach I verlängert; überdis heisse man KAG $= \alpha$, und GDI $= \delta$; Sezt man nun $4R - FCD = \gamma$ und $4R - CBK = \beta$:

So ist

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2 \times 4R.$$

Beweis.

Aus A ziehe man AR mit CD, und AS mit BC, parallel:

So ist

$$\left.\begin{matrix} GAB = \alpha, \\ GAR = \delta, \end{matrix}\right\} \text{(Geom.)}$$

$$\left.\begin{matrix} SAR = FCD \\ SAK = FBK \end{matrix}\right\} \text{(Geom.):}$$

Also

$$\beta = BAD + DAS, \text{ und}$$
$$\gamma = SAG + 2R. + DAR:$$

Folglich

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = GAB + BAD + DAS + SAG + 2R. + DAR + GAR;$$

Aber

$$GAB + BAD + DAS + SAG = 4R = 2R + DAR + GAR;$$

Woraus der Saz erhellet.

§. 13.

Wenn q eine ganze Zahl bedeutet: so ist aus der Trigonometrie bekannt, daß

1)

$$\text{I)}\quad \sin(q \times 4R) = 0,$$
$$\text{Cosin}(q \times 4R) = 1;$$

$$\text{II)}\ \sin(q.\,4R - (\alpha + \beta + \gamma \ldots + \lambda)) =$$
$$- \sin(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \lambda),$$
$$\text{Cosin}(q.\,4R. - (\alpha + \beta + \gamma \ldots + \lambda) =$$
$$\text{Cosin}(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \lambda).$$

§. 14.

Auch weiß man aus der Trigonometrie: daß, wenn man eines Winkels Cosinus positiv sezt, den Cosinus seines Nebenwinkels, zwar eben so groß, aber negativ nehmen müße.

Zwo zur Auflösung jeder gradlinichten Figur dienenden Formeln.

§. 15.

Wenn in einem gradlinichten Dreyecke (ABC, Fig. 3.) die äussern Winkel α, β, γ, und die ihnen zugehörigen Seiten a, b, c, sind:

So hat man

$$\text{I);}\quad a \sin\alpha + b \sin(\alpha + \beta) = 0,$$

$$\text{II);}\quad a\,\text{Cosin}\,\alpha + b\,\text{Cosin}(\alpha + \beta) = - c.$$

Beweis.

Man fälle aus des Dreyecks ABC Spitze n, auf

auf die nach a′ und c′ vorlängerte AC des Perpendikels BD: so ist

$$1)\ BD = AB \sin BAC$$
$$= AB \sin BAa',\ (\text{Trig.}),$$
$$= a \sin \alpha;$$
$$2)\ BD = BC \sin BCA$$
$$= BC \sin BCc'$$
$$= b \sin \gamma$$
$$= b \sin(4R - (\alpha + \beta)),\ [7, 11],$$
$$= - b \sin(\alpha + \beta)\ [13];$$

aber

$$BD - BD = 0:$$

Also ist es auch

$$a \sin \alpha - (- b \sin(\alpha + \beta)),\ [= a \sin \alpha + b \sin(\alpha + \beta);$$

Mithin I) bewiesen.

Ferner hat man

$$AD = AB \operatorname{Cosin} BAC$$
$$= - a \operatorname{Cosin} \alpha\ (14;)$$
$$DC = BC \operatorname{Cosin} BCD$$
$$= - BC \operatorname{Cosin} BCc'$$
$$= - b \operatorname{Cosin} \gamma,\ (14)$$
$$= - b \operatorname{Cosin}(4R - (\alpha + \beta))[7],$$
$$= - b \operatorname{Cosin}(\alpha + \beta),\ (13).$$

Nun ist

$$AD + DC = AC = c:$$

also

also

$$c = -a\,\mathrm{Cosin}\,\alpha + (-b\,\mathrm{Cosin}(\alpha+\beta)),$$
$$= -(a\cdot\mathrm{Cosin}\,\alpha + b\,\mathrm{Cosin}\,(\alpha+\beta)):$$

Folglich

$$-c = a\,\mathrm{Cosin}\,\alpha + b\,\mathrm{Cosin}\,(\alpha+\beta);$$

und daher II) bewiesen.

§. 16.

Da $\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin 4R = 0$, und $\mathrm{Cosin}(\alpha+\beta+\gamma) = \mathrm{Cosin}\, 4R = 1$, (7; 13): So hat man

$$a\sin\alpha + b\sin(\alpha+\beta) + c\sin(\alpha+\beta+\gamma) = 0,$$
$$a\,\mathrm{Cosin}\,\alpha + b\,\mathrm{Cosin}\,(\alpha+\beta) + c\,\mathrm{Cosin}(\alpha+\beta+\gamma) = 0.$$

§. 17.

Sind eines Viereckes (ABCDA, Fig. 4) äussere Winkel α, β, γ, δ, und die diesen zugehörigen Seiten a, b, c, d:

So ist

I) $a\sin\alpha + b\sin(\alpha+\beta) + c\sin(\alpha+\beta+\gamma) + d\sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 0,$

II) $a\,\mathrm{Cosin}\,\alpha + b\,\mathrm{Cosin}\,(\alpha+\beta) + c\,\mathrm{Cosin}(\alpha+\beta+\gamma) + d\,\mathrm{Cosin}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 0.$

Beweis.

Für den Fall wenn das Viereck lauter auswärtsgehende Umfangswinkel hat.

Man verlängere AD nach K und G; fälle darauf aus C und B Perpendikel CE, BL, desgleichen eines BF aus B auf CE, und verlängere solches nach M:

So wird

$$BE = BL, \text{(Geom.)};$$

aber

$$BL = BA \sin. \alpha:$$

folglich

$$BF = a \sin. \alpha, \text{(weil } BA = a).$$

Auch ist

$$\begin{aligned} CF &= BC \sin. CBF \\ &= b \sin. CBM, \\ &= b \sin. (\beta + HBM). \end{aligned}$$

Nun ist, wegen den Parallelen MI, GE

$$HBM = \alpha:$$

folglich

$$CI = b \sin. (\beta + \alpha).$$

Ferner hat man

$$\begin{aligned} CE &= CD \sin. CDE \\ &= CD \sin. \delta \\ &= c \sin. (4R - (\alpha + \beta + \gamma), [7], \\ &= - c \sin. (\alpha + \beta + \gamma), [13]; \end{aligned}$$

aber

Aber

$$CF + FE - CE = 0;$$

Also

$$a \sin. \alpha + b \sin(\alpha + \beta) + c (\sin \alpha + \beta + \gamma) = 0:$$

folglich auch, wegen $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4R$,

$$a \sin \alpha + b \sin(\alpha + \beta) + c \sin(\alpha + \beta + \gamma) + d \sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0, \ (12):$$

Also I) bewiesen.

Um auch II) darzuthun, hat man

$$\begin{aligned} LA &= BA \text{ Cosin. } BAG, \\ &= a \text{ Cosin } \alpha; \\ LE &= BF \\ &= BC \text{ Cosin } CBF \\ &= - b \text{ Cosin } (\beta + \alpha), \ [14]; \\ ED &= CD \text{ Cosin } CDE \\ &= - c \text{ Cosin } \delta \\ &= - c \text{ Cosin}(4R - (\alpha + \beta + \gamma), [7] \\ &= - c \text{ Cosin}(\alpha + \beta + \gamma), [13]; \\ AD &= d \text{Cosin.}(\alpha + \beta + \gamma + \delta), [7, 13]; \end{aligned}$$

Aber

$$AD + LA - LE - ED = 0,$$

woraus sich II) ergiebt.

Für den Fall wenn das Viereck (ABCA, Fig. 5) einen einwärtsgehenden Winkel (BCD) hat; (und mehrere kann es wegen 6 nicht haben.)

Auf die nach H, und K verlängerte Seite AD

AD = d', seyen von C und B, Perpendikel CF, BE, gezogen, desgleichen eines CG aus C auf BE und nach M verlängert:

So ist

$$\begin{aligned}
BC &= BA \sin. BAD \\
&= a \sin. \alpha; \\
BG &= BC \sin. BCG \\
&= b \sin (BNC + NBC) \\
&= b \sin.((2R - BNM) + (2R - CBI)) \\
&= b \sin (2R - \alpha + 2R - \beta) \\
&= b \sin (4R - (\alpha + \beta) \\
&= - b \sin (\alpha + \beta). [13]; \\
CF &= GE, (\text{Geom.}) \\
&= DC \sin. CDA, (\text{Trig.}) \\
&= c \sin. \delta \\
&= c \sin (2.4R - (\alpha + \beta + \gamma), [11] \\
&= - c \sin. (\alpha + \beta + \gamma), [13]
\end{aligned}$$

Nun ist

$$BE - BG - GE = o:$$

Also

$$a \sin \alpha + b \sin (\alpha + \beta) + c \sin (\alpha + \beta + \gamma) = o;$$

wozu

$$E \sin (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = d \sin. 2.4R. = o$$

addirt, I) giebt.

Für den Beweis der II Formel hat man

$$\begin{aligned}
AE &= AB \text{Cosin.} BAD, (\text{Trig.}) \\
&= - a \text{Cosin} \alpha, (13);
\end{aligned}$$

CG

$$
\begin{aligned}
CG &= FE, \text{ (Geom.)}, \\
&= BC \text{ Cosin } BCG \\
&= b \text{ Cosin } (BNC + NBC) \\
&= b \text{ Cosin } (2R - \alpha + 2R - \beta) \\
&= b \text{ Cosin } (4R - (\alpha + \beta)) \\
&= b\text{Cosin } (\alpha + \beta) \; [13]; \\
FD &= CD \text{ Cosin. } CDF \\
&= - c \text{ Cosin. } \delta \\
&= - c \text{ Cosin. } (2.\,4R - (\alpha + \beta + \gamma)) \\
&= - c \text{ Cosin. } (\alpha + \beta + \gamma); \\
AD &= d \\
&= d\text{Cosin}(\alpha + \beta + \gamma + \delta), \; (11, 13);
\end{aligned}
$$

Aber

$$AD + FE - AE - FD = 0,$$

woraus man II) erhält.

Für den Fall, wenn des Vierecks ABCDA, (Fig. 6.) zwo Seiten AB, CD, einander, in E, schneiden.

Da fälle man aus B und C auf die nach G und H verlängerte Seite AD Perpendikel BL, CN, desgleichen eine Normallinie aus C auf BL und eine BM aus B auf das nach M verlängerte Loth MN; und verlängere BM nach Q, so wie AB nach K:

dadurch wird

$$
\begin{aligned}
BL &= AB \text{ sin. } BAD \\
&= a \text{ sin. } \alpha, \text{ (Trig.)};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
BP &= CM, \text{ (Geom.)}\\
&= CB \sin MBC\\
&= b \sin. (4R - (KBM + KBQ + \\
&\quad QBC)\\
&= b \sin(4R - (\alpha + \beta \text{ [Geom. u. 12]}\\
&= - b \sin. (\alpha + \beta);\\
PL &= CN\\
&= CD \sin. CDA\\
&= c \sin \delta\\
&= c \sin (2.\, 4R - (\alpha + \beta + \gamma)), =\\
&\quad [12]\\
&= - c \sin. (\alpha + \beta + \gamma) \text{ [13]};
\end{aligned}
$$

Aber

$$BL - BP - PL = 0,$$

und

$$\sin. (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0, \text{ (12, 13)}$$

woraus sich I) herleitet.

II) zu beweisen hat man

$$
\begin{aligned}
AL &= AB \operatorname{Cosin}, BAD\\
&= - a \operatorname{Cosin}. \alpha;\\
BM &= NL\\
&= CB \operatorname{Cosin}. MBC\\
&= b \operatorname{Cosin} (4R - (\alpha + \beta))\\
&= b \operatorname{Cosin}. (\alpha + \beta);\\
ND &= CD \operatorname{Cosin}. CDN\\
&= - c \operatorname{Cosin}. \delta, \text{ [14]}\\
&= - c \operatorname{Cosin}. (\alpha + \beta + \gamma), \text{ [12]};\\
AD &= d \operatorname{Cosin}. (\alpha + \beta + \gamma + \delta), =\\
&\quad \text{[12, 13]};
\end{aligned}
$$

Nun

Nun ist

$$\begin{aligned} AD - AL &= - DL \\ NL - ND &= + DL \end{aligned}$$

folglich

$$AD + NL - AL - ND = 0,$$

wodurch II) bewiesen.

§. 18.

Für jede gradlinichte Figur, deren äussere Winkel α, β, γ, δ, ε .... ν und die zwischen selbigen liegende Seiten a, b, c, d, e... ...... n seyn mögen, ist

I) $a \sin\alpha + b \sin(\alpha+\beta) + c \sin(\alpha+\beta+\gamma) + d \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \ldots\ldots + n \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta \ldots + \nu) = 0,$

II) $a \operatorname{Cosin}\alpha + b \operatorname{Cosin}(\alpha+\beta) + c \operatorname{Cosin}(\alpha+\beta+\gamma) + d \operatorname{Cosin}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \ldots\ldots + n \operatorname{Cosin}(\alpha+\beta+\gamma+\delta \ldots + \nu) = 0$

§. 19.

Beweis.

Wenn man annimmt, diese beyden Sätze gelten für eine Figur von n Seiten, und denn darthut daß selbige für eine von n + 1 Seiten wahr sind: so ist der Sache völlig Gnüge geschehen.

In dieser Rücksicht sey ABCDEFGHA (Fig. 7.) eine Figur von $n + 1$ Seiten.

Man ziehe zwischen den Endpunkten F, H, zwoer Seiten FG, HG, die einen auswärtsgehenden Umfangswinkel FGH einschließen die Diagonale FH: So hat ABCDEFHA, n Seiten.

Nun sey AH nach M, FG nach L, EF nach K und HF nach I verlängert.

Auch nenne man, der Figur ABCDEFHA äussere Winkel

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \ldots\ldots \lambda,\ \mu = KFH,\ \nu = FHM,$$

und die zugehörigen Seiten

$$a,\ b,\ c,\ d \ldots\ l,\ m = HF,\ n = AH;$$

ferner der Figur ABCDEFGHA äussere Winkel

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \ldots\ldots \lambda,\ \mu' = KFG,\ \pi = LGH,\ \nu' = GAM,$$

die Seiten aber

$$a, b, c, d, \ldots\ldots l,\ m' = FG,\ p = GH,\ n = AH,$$

überdem sey der Winkel

$$IFG = \varphi:$$

So ist

$$\begin{aligned} 2R - \varphi &= GFH \\ &= KFH - KFG \\ &= \mu - \mu': \end{aligned}$$

daher

daher

$$\mu' = 2R + \mu + \varphi:$$

Folglich

$\text{Cosin.}\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu') = \text{Cosin}\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu + \varphi + 2R) = \text{Cosin}\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu) + (2R + \varphi)$

$= \text{Cosin}\,(2R + \varphi)\,\text{Cosin}\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu) - \sin\,(2R + \varphi)\,\sin\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu,)$ (Trig.)

$= -\,\text{Cosin}\,\varphi\,\text{Cosin}\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu) + \sin\varphi\,\sin\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu);$

$\sin\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu') = \sin\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu + \varphi + 2R)$

$= \sin\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu) + (\varphi + 2R)$

$= \sin\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu)\,\text{Cosin}\,(\varphi + 2R) + \text{Cosin}\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu)\,\sin\,(\varphi + 2R)$

$= -\,\text{Cosin}\,\varphi\,\sin\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu) - \sin\varphi\,\text{Cosin}\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu);$

$\text{Cosin}\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu' + \pi) = \text{Cosin}\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu + \varphi + 2R + \pi)$

$= \text{Cosin}\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu) + (\varphi + 2R + \pi)$

$= -\,\text{Cosin}\,(\varphi + \pi)\,\text{Cosin}\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu) + \sin\,(\varphi + \pi)\,\sin\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu);$

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu' + \pi) = \sin(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu + 2R + \varphi + \pi)$$
$$= \sin(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu) + (2R + \varphi + \pi)$$
$$= -\,\mathrm{Cosin}\,(\varphi + \pi)\,\sin(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu) - \sin(\varphi + \pi)\,\mathrm{Cosin}\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu):$$

Also

I') $m'\,\mathrm{Cosin}\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu') = -\,m'\,\mathrm{Cosin}\,\varphi\,\mathrm{Cosin}\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu) + m'\sin\varphi\sin(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu);$

II') $p\,\mathrm{Cosin}\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu' + \pi) = -\,p\,\mathrm{Cos}\,(\varphi + \pi)\,\mathrm{Cos}\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu) + p\sin(\varphi + \pi)\sin(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu);$

III') $m'\sin(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu') = -\,m'\,\mathrm{Cosin}\,\varphi\sin(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots\ldots + \mu) - m'\sin\varphi\,\mathrm{Cos}\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu);$

IV') $p\sin(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu' + \pi) = -\,p\,\mathrm{Cos}\,(\varphi + \pi)\sin(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu) - p\sin(\varphi + \pi)\,\mathrm{Cosin}\,(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu).$

Nun

Nun addire man I') und II'), dann III') und IV'): so findet sich

$$m' \operatorname{Cosin}(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu') + p \operatorname{Cos}(\alpha + \beta + \gamma + \mu' + \pi)$$
$$=$$
$$-\operatorname{Cos}(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu) \times (m' \operatorname{Cosin} \varphi + p \operatorname{Cosin}[\varphi + \pi]) + \sin(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu) \times (m' \sin \varphi + p \sin [\varphi + \pi]);$$

und

$$m' \sin(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu') + p \sin(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu' + \pi)$$
$$=$$
$$-\sin(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu) \times (m' \operatorname{Cosin} \varphi + p \operatorname{Cosin}[\varphi + \pi]) - \operatorname{Cosin}(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu) \times (m' \sin \varphi + p \sin [\varphi + \pi]):$$

Aber

$$\left.\begin{array}{l} m' \operatorname{Cosin} \varphi + p \operatorname{Cosin}(\varphi + \pi) = \\ \quad = -m \\ \text{und} \\ m' \sin \varphi + p \sin (\varphi + \pi) = \\ \quad = 0 \end{array}\right\} (15):$$

Mithin

$$m' \operatorname{Cosin}(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu') + p \operatorname{Cos}(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu' + \pi)$$

 =

$$= m \operatorname{Cosin} (\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu),$$

und

$$m' \sin (\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu') + p \sin (\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu' + \pi)$$
$$=$$
$$m \sin (\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu)$$

Sezt man nun für die n seitige Figur ABCDEFHA

$$a \sin \alpha + b \sin (\alpha + \beta) + c \sin (\alpha + \beta + \gamma) \ldots\ldots\ldots + m \sin (\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu) = o,$$

$$a \operatorname{Cosin} \alpha + b \operatorname{Cos} (\alpha + \beta) + c \operatorname{Cos} (\alpha + \beta + \gamma) \ldots\ldots\ldots + m \operatorname{Cos} (\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu) + n = o:$$

So ergiebt sich für die (n + 1) seitige ABCDEFGHA

I) $a \sin \alpha + b \sin (\alpha + \beta) + c \sin \alpha + \beta + \gamma) \ldots\ldots + m' \sin (\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu') + p \sin (\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu' + \pi) = o,$

II) $a \operatorname{Cos} \alpha + b \operatorname{Cos} (\alpha + \beta) + c \operatorname{Cos} (\alpha + \beta + \gamma) \ldots\ldots + m' \sin (\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu') + p \sin (\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu' + \pi) + n = o;$

und

und weil vermöge 11 und 13

$$Q);\ n \sin(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu' + \pi + \nu) = 0$$

$$P);\ n \operatorname{Cosin}(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \mu' + \pi + \nu) = n:$$

so kann man Q) zu I) addiren und P) statt n in II) setzen.

Hieraus erhellet nun deutlich, daß die Gleichungen I), II) gelten für eine Figur von $n + 1$ Seiten, wenn sie wahr sind für eine von n Seiten.

Sie sind aber für das Dreyeck AHI und Viereck wahr, (16, 17):

Also auch für das $(4 + 1)$ Eck $= 5$ Eck:

Folglich auch für das $(5 + 1)$ Eck $= 6$ Eck;

Und so überhaupt für jede ebne gradlinichte Figur.

Fernere Lehnsätze.

§. 20.

Aus der Trigonometrie weiß man daß

$\sin(\beta+\alpha) + \sin(\beta-\alpha) = 2 \sin\beta \times \mathrm{Cosin}\,\alpha$

$\mathrm{Cosin}(\beta+\alpha) + \mathrm{Cosin}(\beta-\alpha) = 2\,\mathrm{Cosin}\,\beta\,\mathrm{Cosin}\,\alpha$:

daher

$\sin(\beta+\alpha) = 2\sin\beta\,\mathrm{Cosin}\,\alpha - \sin(\beta-\alpha)$

$\mathrm{Cosin}(\beta+\alpha) = 2\,\mathrm{Cosin}\,\beta\,\mathrm{Cosin}\,\alpha - \mathrm{Cosin}(\beta-\alpha)$

§. 21.

Hieraus, wenn man nach und nach für β setzt: $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha \ldots\ldots (n-2)\alpha$, folgt

$$
\begin{array}{llcl}
\text{I;} & \sin\alpha & = & \sin\alpha \\
 & \sin 2\alpha & = & 2\,\mathrm{Cosin}\,\alpha\,\sin\alpha \\
 & \sin 3\alpha & = & 2\,\mathrm{Cosin}\,\alpha\,\sin 2\alpha - \sin\alpha \\
 & \sin 4\alpha & = & 2\,\mathrm{Cosin}\,\alpha\,\sin 3\alpha - \sin 2\alpha \\
 & \sin 5\alpha & = & 2\,\mathrm{Cosin}\,\alpha\,\sin 4\alpha - \sin 3\alpha \\
 & \vdots & & \vdots \qquad\qquad \vdots \\
 & \sin(n-1)\alpha & = & 2\,\mathrm{Cosin}\,\alpha\,\sin(n-2)\alpha - \sin(n-3)\alpha
\end{array}
$$

II;

II; $\text{Cosin}\,\alpha = \text{Cosin}\,\alpha$

$\text{Cos}\,2\alpha = 2\,\text{Cos}\,\alpha\,\text{Cosin}\,\alpha$

$\text{Cos}\,3\alpha = 2\,\text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,2\alpha - \text{Cosin}\,\alpha$

$\text{Cos}\,4\alpha = 2\,\text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,3\alpha - \text{Cos}\,2\alpha$

$\text{Cos}\,5\alpha = 2\,\text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,4\alpha - \text{Cos}\,3\alpha$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$\text{Cosin}\,(n-1)\,\alpha = 2\,\text{Cosin}\,\alpha\,\text{Cosin}\,(n-2)\,\alpha - \text{Cosin}\,(n-3)\,\alpha$

§. 22.

Die Summe S von $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha \ldots + \sin(n-1)\alpha$

$$\text{ist} = \frac{\sin\frac{1}{2}n\alpha\,\sin\frac{1}{2}(n-1)\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

Beweis.

Man addire I. in vorigen §: So hat man

$$S = \sin\alpha + 2\,\text{Cosin}\,\alpha\,(S - \sin[n-1]\,\alpha) - (S - [\sin(n-1)\alpha + \sin(n-2)\alpha])$$

$= \sin\alpha + S\, 2 \operatorname{Cosin}\alpha - 2 \operatorname{Cosin}\alpha \sin(n - 1)\alpha - S + \sin(n-1)\alpha + \sin(n-2)\alpha:$

Also

$$2S - 2S \operatorname{Cosin}\alpha = \sin\alpha - 2\operatorname{Cosin}\alpha \sin(n-1)\alpha + \sin(n-1)\alpha + \sin(n-2)\alpha = 2S(1 - \operatorname{Cosin}\alpha);$$

Aber nach vorigen §s I. fält in die Augen, daß

$$\sin n\alpha = 2 \operatorname{Cosin}\alpha \sin(n-1)\alpha - \sin(n-2)\alpha:$$

Folglich

$$\sin n\alpha + \sin(n-2)\alpha = 2 \operatorname{Cosin}\alpha \sin(n-1)\alpha;$$

Daher

$$-\sin n\alpha - \sin(n-2)\alpha = -2 \operatorname{Cos}\alpha \sin(n-1)\alpha:$$

Also hat man

$$2S(1-\operatorname{Cosin}\alpha) = \sin\alpha - \sin n\alpha - \sin(n-2)\alpha + \sin(n-1)\alpha + \sin(n-2)\alpha$$

$$= \sin\alpha - \sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$$

$$= \sin\alpha - (\sin n\alpha - \sin(n-1)\alpha)$$

Nun

Nun ist aus der Trigonometri bekannt, daß

$$\sin n\alpha - \sin(n-1)\alpha = 2\,\mathrm{Cosin}\,\tfrac{1}{2}\,[n\alpha + (n-1)\alpha] \times \sin\tfrac{1}{2}[n\alpha - (n-1)\alpha]:$$

Folglich

$$\sin n\alpha - \sin(n-1)\alpha = 2\,\mathrm{Cosin}\,(n-\tfrac{1}{2})\alpha \sin\tfrac{1}{2}\alpha:$$

Dieses giebt

$$2S(1-\mathrm{Cosin}\,\alpha) = \sin\alpha - 2\,\mathrm{Cosin}\,(n-\tfrac{1}{2})\alpha \sin\tfrac{1}{2}\alpha;$$

Und weil

$$\sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\mathrm{Cosin}\,\tfrac{1}{2}\alpha, \text{ (Trig.)}:$$

so erhält man

$$2S(1-\mathrm{Cosin}\,\alpha) = 2\,\mathrm{Cosin}\,\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\alpha - 2\,\mathrm{Cosin}\,(n-\tfrac{1}{2})\alpha \sin\tfrac{1}{2}\alpha:$$

Dividirt man folglich mit

$$2(1-\mathrm{Cosin}\,\alpha) = 4(\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2, \text{ [Trig.]}$$

so wird

$$S = \frac{\mathrm{Cosin}\,\tfrac{1}{2}\alpha - \mathrm{Cosin}\,(n-\tfrac{1}{2})\alpha}{2\sin\tfrac{1}{2}\alpha};$$

Da aber

$$\mathrm{Cosin}\,\tfrac{1}{2}\alpha - \mathrm{Cosin}\,(n-\tfrac{1}{2})\alpha =$$

2 sin

$2 \sin \frac{1}{2} (\frac{1}{2}\alpha + n\alpha - \frac{1}{2}\alpha) \sin \frac{1}{2} ((n - \frac{1}{2})\alpha - \frac{1}{2}\alpha),=$
[Trig.]

$= 2 \sin \frac{1}{2} n\alpha \sin \frac{1}{2} ([(n-1) + \frac{1}{2}]\alpha - \frac{1}{2}\alpha)$

$= 2 \sin \frac{1}{2} n\alpha \sin \frac{1}{2} (n-1)\alpha$:

so erhält man S wie im Satze angegeben.

§. 23.

Auf ähnliche Art läßt sich auch finden: daß die Summe von: $\text{Cosin}\, \alpha + \text{Cosin}\, 2\alpha + \text{Cosin}\, 3\alpha \ldots\ldots + \text{Cosin}\, (n-1)\alpha$, = ist,

$$\frac{\sin \frac{1}{2} n\alpha \ \text{Cosin}\, \frac{1}{2}(n-1)\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha}.$$

Anwendung des 18ten §s, auf die ordentlichen Vielecke.

§. 24.

Für das ordentliche Vieleck ist

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta \ldots\ldots = \nu,$$

und

$$a = b = c = d \ldots\ldots = n:$$

Also hat man

I; $a(\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha \ldots\ldots + \sin(n-1)\alpha) = 0,$

II; $a(\mathrm{Cosin}\,\alpha + \mathrm{Cos}\,2\alpha + \mathrm{Cosin}\,3\alpha + \mathrm{Cosin}\,4\alpha \ldots\ldots + \mathrm{Cos}(n-1)\alpha) = 0,$

Aber die Summe der Sinusse bey I, ist

$$= \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n-1)\alpha}{2}}{\sin\frac{1}{2}\alpha} \quad (22)$$

und die der Cosinusse bey II,

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}n\alpha\ \mathrm{Cosin}\frac{1}{2}(n-1)\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}, \quad (23):$$

Folg-

Folglich

III; $a \sin \frac{1}{2} n \alpha \sin \frac{1}{2} (n - 1) \alpha : \sin \frac{1}{2} \alpha = 0$

IIII; $a \sin \frac{1}{2} n\alpha \operatorname{Cosin} \frac{1}{2} (n - 1) \alpha : \sin \frac{1}{2} \alpha = 0$

§. 25.

Weil $n\alpha = 4R$, (7): also $\frac{1}{2} n\alpha = 2R$ folglich $\sin \frac{1}{2} n \alpha = \sin 2R = 0$:

So hat man

$\sin \frac{1}{2} n\alpha \sin \frac{1}{2} (n - 1) \alpha : \sin \frac{1}{2} \alpha = 0$

$\sin \frac{1}{2} n \alpha \operatorname{Cosin} \frac{1}{2} (n - 1) \alpha : \sin \frac{1}{2} \alpha = 0$,

Demohnerachtet aber des ersten Ausdruckes Verhältnis gegen dem leztern

$= - \operatorname{Tang} \frac{1}{2} \alpha : 1$

Denn

$$\frac{\sin \frac{1}{2} n \alpha \sin \frac{1}{2} (n-1) \alpha}{\sin \frac{1}{2} \alpha} : \frac{\sin \frac{1}{2} n \alpha \operatorname{Cos} \frac{1}{2} (n-1) \alpha}{\sin \frac{1}{2} \alpha}$$

=

$$= \sin \tfrac{1}{2}(n-1)\alpha : \mathrm{Cosin}\, \tfrac{1}{2}(n-1)\alpha$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(n-1)\alpha}{\mathrm{Cos}\, \frac{1}{2}(n-1)\alpha} : 1$$

$$= \mathrm{tang}\, \tfrac{1}{2}(n-1)\alpha : 1$$

Nun ist

$$\mathrm{tang}\, \tfrac{1}{2}(n-1)\alpha = \mathrm{tang}\,(\tfrac{1}{2} n\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha)$$
$$= \mathrm{tang}\,(2R - \tfrac{1}{2}\alpha)$$
$$= -\mathrm{tang}\, \tfrac{1}{2}\alpha, \text{ (Trig.)}.$$

Aus den beiden Lehrsätzen (18) können noch zwey andere, etwas allgemeinere hergeleitet werden.

§. 26.

Wenn durch der Figur ABCDEFGHIA eines Umfangswinkels Scheitelpunkt A (Fig. 8.), nach Gefallen eine grade Linie OAP gezogen wird, und man sezt den Winkel BAO, den diese Linie mit der Figur Seite AB macht $= \varphi$, und die äusseren Winkel, α, β, γ, δ ..... ν, die dazu gehörigen Seiten aber, a, b, c, d....., n;

So hat man

I; $a \sin \varphi + b \sin (\varphi + \beta) + c \sin (\varphi + \beta + \gamma) + d \sin (\varphi + \beta + \gamma + \delta) \ldots \ldots \ldots + n \sin (\varphi + \beta + \gamma \ldots + \nu) = 0;$

II; $a \operatorname{Cosin} \varphi + b \operatorname{Cosin} (\varphi + \beta) + c \operatorname{Cos} (\varphi + \beta + \gamma) + d \operatorname{Cosin} (\varphi + \beta + \gamma + \delta) \ldots \ldots + n \operatorname{Cosin} (\varphi + \beta + \gamma \ldots + \nu) = 0.$

Beweis.

Man kann diese Sätze auf die nämliche Art, wie die im 18 beweisen. Indessen läßt sich die Sache aus den schon im 19. bewiesenen Sätzen kürzlich folgendermasen darthun.

Die nach Gefallen gezogene Linie OAP kann entweder auf die Figur gehen, oder nicht, wie O'AP'

Im erstern Falle hat man, wenn AI nach N verlängert wird, den Winkel,

$$BAN = BAO - NAO;$$

im zweiten,

$$BAN = BAO' + NAO'.$$

Heißt

Heißt nun in beiden Fällen NAO, NAO′, $= \psi$: so ist

$$\alpha = \varphi \mp \psi:$$

folglich

$$\varphi = \alpha \pm \psi;$$

Und da auf die Verschiedenheit der Zeichen hier nichts ankommt: so ist es erlaubt

$$\varphi \text{ nur } = \alpha + \psi$$
$$= \text{BAN} + \text{BAO}$$

zu setzen: denn da man die OAP nach Gefallen ziehen kann, so kann man sie allemal so legen, daß selbige durch die Figur streicht.

Sezt man nur in die Gleichungen I; II; allerwegen $\alpha + \psi$ für φ, und erinnert sich der Ausdrücke des Sinus und Cosinus der Summe zweener Winkel: so hat man für I;

$$a \sin \varphi = a \sin \alpha \operatorname{Cosin} \psi + a \operatorname{Cosin} \alpha \sin \psi$$
$$+ b \sin (\varphi + \beta) = + b \sin (\alpha + \beta) \operatorname{Cosin} \psi + b \operatorname{Cosin} (\alpha + \beta) \sin \psi$$
$$+ c \sin (\varphi + \beta + \gamma) = + c \sin (\alpha + \beta + \gamma) \operatorname{Cosin} \psi + c \operatorname{Cosin} (\alpha + \beta + \gamma) \sin \psi$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$+ n \sin(\varphi + \beta + \gamma \ldots + \nu) = + n \sin(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \nu) \times \operatorname{Cosin}$$

$\times \text{Cosin}\,\psi + n\,\text{Cosin}\,(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \nu)\,\sin\psi$:

Also

$$a \sin\varphi + b \sin(\varphi+\beta) + c \sin(\varphi+\beta+\gamma) \ldots + n \sin(\varphi+\beta+\gamma \ldots + \nu)$$
$$=$$
$$\text{Cosin}\,\psi\,(a \sin\alpha + \beta) \sin(\alpha+\beta) + c \sin(\alpha+\beta+\gamma) \ldots + n \sin(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \nu) + \sin\psi\,(a\,\text{Cosin}\,\alpha + \beta)\,\text{Cosin}\,(\alpha+\beta) + c\,\text{Cosin}\,(\alpha+\beta+\gamma) \ldots + n \sin(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \nu)$$
$$= 0.$$

Auf gleiche Art erhellet, daß

$$a\,\text{Cosin}\,\varphi + b\,\text{Cosin}\,(\varphi+\beta) + c\,\text{Cosin}\,(\varphi+\beta+\gamma) \ldots + n\,\text{Cosin}\,(\varphi+\beta+\gamma \ldots + \nu)$$
$$=$$
$$\text{Cosin}\,\psi\,(a\,\text{Cosin}\,\alpha + b\,\text{Cosin}\,(\alpha+\beta) + c\,\text{Cosin}\,(a+\beta+\gamma) \ldots + n\,\text{Cosin}\,(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \nu)$$
$$- \sin\psi\,(a \sin\alpha + b \sin(\alpha+\beta) + c \sin(\alpha+\beta+\gamma) \ldots + n \sin(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \nu)$$
$$= 0$$

§. 27.

Wenn $\phi = 0$: So bekommt man

$$b \sin\beta + c \sin(\beta+\gamma) + d \sin(\beta+\gamma+\delta) \ldots\ldots + n \sin(\beta+\gamma+\delta \ldots + \nu) = 0;$$

$$b \operatorname{Cosin}\beta + c \operatorname{Cosin}(\beta+\gamma) + d \operatorname{Cosin}(\beta+\gamma + \delta) \ldots\ldots + n \operatorname{Cosin}(\beta+\gamma+\delta \ldots + \nu) = 0;$$

welche Gleichungen, aus den in 18 unmittelbar hergeleitet werden können, wenn man nur statt der Buchstaben a, b, c, d, ꝛc. die b, c, d, e, ꝛc. und statt der α, β, γ, δ, ꝛc. die β, γ, δ, ε, ꝛc. braucht.

Einige Beispiele der beiden Sätze im 18. §, daraus Gleichungen zur Berechnung der Figuren herzuleiten.

§. 28.

Oben (3) ist erwähnt worden, daß aus den beiden Sätzen (18), leicht alle, zur Berechnung jeder gradlinichten Figur dienenden Gleichungen gefunden werden können. Damit nur das Verfahren desto deutlicher in die Augen falle, so wollen wir es auf einige Beyspiele erläutern.

A) Für das Dreyeck.

§. 29.

Im Dreyecke ABC, (Fig. 3), seyen die äussere Winkel

$$a'AB = \alpha,$$
$$b'BC = \beta,$$
$$c'CB = \gamma,$$

und die dazu gehörigen Seiten

$$AB = a,$$
$$BC = b,$$
$$CA = c:$$

So hat man

$$\left.\begin{array}{l} a \sin\alpha + b \sin(\alpha+\beta) = o, \\ a \operatorname{Cos}\alpha + b \operatorname{Cos}(\alpha+\beta) + c = o, \end{array}\right\}, (15)$$

und aus dieser letztern Gleichung findet sich

$$c = - a \operatorname{Cosin}\alpha - b \operatorname{Cosin}(\alpha+\beta).$$

Macht man nun von dieser und der erstern Gleichung das Quadrat: so erhält man

$$a^2 \operatorname{Cosin}\alpha^2 + b^2 \operatorname{Cosin}(\alpha+\beta)^2$$
$$+ 2\, ab \operatorname{Cosin}\alpha \operatorname{Cosin}(\alpha+\beta) = cc;$$

und

und

$$a^2 \sin\alpha^2 + b^2 \sin(\alpha+\beta)^2$$
$$+ 2ab \sin(\alpha+\beta) = 0:$$

Daher

$$cc =$$
$$a^2 \mathrm{Cosin}\,\alpha^2 + 2ab\,\mathrm{Cosin}\,\alpha\,\mathrm{Cosin}(\alpha+\beta)$$
$$+ b^2 \mathrm{Cosin}(\alpha+\beta)^2$$
$$+ a^2 \sin\alpha^2 + 2ab \sin\alpha \sin(\alpha+\beta) + b^2 \sin(\alpha+\beta)^2$$
$$=$$
$$a^2 (\mathrm{Cosin}\,\alpha^2 + \sin\alpha^2) + b^2 (\mathrm{Cosin}[\alpha+\beta]^2 + \sin[\alpha+\beta]^2) + 2ab(\mathrm{Cosin}\,\alpha\,\mathrm{Cosin}(\alpha+\beta) + \sin\alpha\sin(\alpha+\beta)^2)$$
$$=$$
$$a^2 + b^2 + 2ab\,\mathrm{Cosin}\,\beta;$$

weil die Summe des Sinus und Cosinus Quadrats $= 1$, und $\mathrm{Cosin}\,\alpha\,\mathrm{Cosin}(\alpha+\beta) + \sin\alpha \sin(\alpha+\beta) = \mathrm{Cosin}\,\beta$; welches letztere man sich leicht aus dem Ausdrucke für den Sinus und Cosinus der Summe zweener Winkel darthun kann.

Die erste zur Berechnung des gradlinichten Dreyeckes dienende Gleichung ist also:

$$\mathrm{I};\ cc = aa + bb + 2ab\,\mathrm{Cosin}\,\beta$$

Die anderen beyden aber sind:

$$\text{II; } a \sin\alpha + b \sin(\alpha+\beta) = 0;$$

$$\text{III; } a \sin\alpha - b \sin\gamma = 0.$$

Die zwote wird durch den Lehrsatz (15) selbst ausgedruckt, die dritte hingegen daraus hergeleitet, indem man für $\sin(\alpha+\beta)$ sezt $-\sin\gamma$, weil $\gamma = 4R - (\alpha+\beta)$.

§. 30.

Es erhellet indessen leicht, daß diese drey Gleichungen hinlänglich sind, alle bey Berechnung gradlinichter Dreyecke vorkommende Fragen zu beantworten.

Wenn nemlich aus den gegebenen Dreyecksseiten a, b, c, gesucht werden soll, einer der Winkel; oder aus zwo gegebenen Seiten a, b, mit dem eingeschlossenen Winkel, die dritte Seite; oder aus zwo Seiten wovon die eine dem gegebenen Winkel gegenübersteht und die andere an ihm anliegt, die dritte, ebenfalls an dem gegebenen Winkel, anliegende Seite: So kann dies mit Hülfe der erstern Gleichung (29) geschehen. Soll hingegen aus zwoen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, einer der beiden übrigen Winkel gefunden werden; oder aus zwoen Seiten und dem der einen entgegenstehenden Winkel, der eingeschlossene:

sene: So läßt sich dis mittelst der zweiten Gleichung bewerkstelligen. Will man endlich aus zwoen Seiten und dem der einen derselben gegenüberliegenden Winkel, den andern der andern Seite entgegenstehenden Winkel finden: so dient dazu die dritte Gleichung, mittelst welcher man die Frage auch beantworten kann: Aus zween Winkeln und einer Seite, eine der übrigen Seiten zu finden.

B) Für das Viereck.

§. 31.

Die äussern Winkel seyen α, β, γ, δ, und die dazugehörigen Seiten a, b, c, d:

So hat man (17)

$$(P;\ a \sin\alpha + b \sin(\alpha+\beta) + c \sin(\alpha+\beta+\gamma) = 0,$$

$$(Q;\ a \operatorname{Cos}\alpha + b \operatorname{Cosin}(\alpha+\beta) + c \operatorname{Cosin}(\alpha+\beta+\gamma) + d = 0.$$

Aus dieser letztern Gleichung ergiebt sich

$$d = - a \operatorname{Cosin}\alpha - b \operatorname{Cosin}(\alpha+\beta) - c \operatorname{Cosin}(\alpha+\beta+\gamma)$$

folglich

$$(M; d^2 = a^2 \mathrm{Cosin}\, \alpha^2 + b^2 \mathrm{Cosin}\, (\alpha + \beta)^2 + c^2 \mathrm{Cosin}\, (\alpha + \beta + \gamma)^2 + d^2 \mathrm{Cosin}\, (\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2 + 2ab \mathrm{Cosin}\, \alpha \mathrm{Cosin}\, (\alpha + \beta) + 2ac \mathrm{Cosin}\, a \mathrm{Cosin}\, (\alpha + \beta + \gamma) + 2bc \mathrm{Cosin}\, (\alpha + \beta) \mathrm{Cosin}\, (\alpha + \beta + \gamma).$$

Nun quadrire man die erste Gleichung (P, und addire, was herauskommt, zu dem Quadrate bey (M: so wird man erhalten

$$dd = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\,(\mathrm{Cosin}\, \alpha\, \mathrm{Co}\, (\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin (\alpha + \beta)) + 2ac\,(\mathrm{Cosin}\, \alpha\, \mathrm{Cosin}\, (\alpha + \beta + \gamma) + \sin \alpha \sin (\alpha + \beta + \gamma)) + 2bc\,(\mathrm{Cosin}\, (\alpha + \beta)\, \mathrm{Cosin}\, (\alpha + \beta + \gamma) + \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha + \beta + \gamma))$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\, \mathrm{Cosin}\, \beta + 2ac\, \mathrm{Cos}(\beta + \gamma) + 2bc\, \mathrm{Cosin}\, \gamma;$$

Daß also die erste zu suchende Gleichung seyn wird

$$I;\ dd = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\, \mathrm{Cosin}\, \beta + 2ac\, \mathrm{Cosin}\, (\beta + \gamma) + 2bc\, \mathrm{Cosin}\, \gamma.$$

Fer

Ferner: Die Gleichung (Q, giebt

$$d + c \, \mathrm{Cosin}\,(\alpha + \beta + \gamma) = - a \, \mathrm{Cosin}\,\alpha - b \, \mathrm{Cosin}\,(\alpha + \beta);$$

oder wegen 11,

$$d + c \, \mathrm{Cosin}\,\delta = - a \, \mathrm{Cosin}\,\alpha - b \, \mathrm{Cosin}\,(\alpha + \beta);$$

Das Quadrat davon ist

$$(R; \quad d^2 + 2dc \, \mathrm{Cosin}\,\delta + c^2 \, \mathrm{Cosin}\,\delta^2 = a^2 \, \mathrm{Cos}\,\alpha^2 + b^2 \, \mathrm{Cos}(\alpha + \beta)^2 + 2ab \, \mathrm{Cos}\,\alpha \, \mathrm{Cosin}\,(\alpha + \beta).$$

Die Gleichung (P, schaft

$$a \sin \alpha + b \sin (\alpha + \beta) = - c \sin (\alpha + \beta + \gamma) = c \sin \delta, \; (11, 13),$$

und das Quadrat davon

$$(S; \quad c^2 \sin \delta^2 = a^2 \sin \alpha^2 + b^2 \sin (\alpha + \beta)^2 + 2ab \sin \alpha \sin (\alpha + \beta).$$

Adirt man (R und (S: so erhält man

$$\mathrm{II}; \quad dd + 2dc \, \mathrm{Cosin}\,\delta + cc = aa + 2ab \, \mathrm{Cosin}\,\beta + bb,$$

als die zwote zur Berechnung des Winkels dienende Gleichung.

Die dritte ist die bey (P, selbst: also

$$\text{III}; \; a \sin \alpha + b \sin(\alpha + \beta) + c \sin. (\alpha + \beta + \gamma) = 0,$$

woraus man, endlich wegen 11 und 13 die vierte erhält, also

$$\text{IV}; \; (a \sin \alpha + b \sin(\alpha + \beta) - c \sin \delta = 0$$

§. 32.

Die Art, wie mittelst dieser 4 Gleichungen alle bey der Berechnung des Viereckes vorkommenden Fragen, beantwortet werden müssen, weitläuftiger zu zeigen, kann jezt noch nicht geschehen, weil noch nicht gewiesen worden ist, wie viel solche aufzulösende Fragen; und welche, vorkommen; von diesen wird weiter unten, und von jenen im 2ten Theile dieses Werks gehandelt.

C) Für das Fünfeck.

§. 33.

Da hat man

$$(\text{P}); \; a \sin \alpha + b \sin(\alpha + \beta) + c \sin(\alpha + \beta + \gamma) + d \sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0,$$

$$a \operatorname{Cosin} \alpha + b \operatorname{Cosin}(\alpha + \beta) + c \operatorname{Cosin}(\alpha + \beta + \gamma) + d \operatorname{Cosin}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) + e = 0.$$

Aus letzterer Gleichung ergiebt sich

$$(Q);\ -e = a\,\mathrm{Cosin}\,\alpha + b\,\mathrm{Cosin}\,(\alpha+\beta) + c\,\mathrm{Cosin}(\alpha+\beta+\gamma) + d\,\mathrm{Cosin}\,(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

oder, vermöge 11 und 13,

$$(S);\ -e - d\,\mathrm{Cosin}\,\varepsilon = a\,\mathrm{Cosin}\,\alpha + b\,\mathrm{Cosin}\,(\alpha+\beta) + c\,\mathrm{Cosin}(\alpha+\beta+\gamma);$$

aus (P) aber, mittelst 11 und 13, die Gleichung:

$$(T);\ d\,\sin\varepsilon = a\sin\alpha + b\sin(\alpha+\beta) + c\sin(\alpha+\beta+\gamma).$$

Quadrirt man nun die Gleichungen, (Q), (S), wie auch die (P), (T), und addirt die Quadrate aus (Q), (P), und die aus (S), (T):

So erhält man

$$\mathrm{I};\ ee = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab\,\mathrm{Cosin}\,\beta + 2ac\,\mathrm{Cosin}\,(\beta+\gamma) + 2ad\,\mathrm{Cosin}\,(\beta + \gamma + \delta) + 2bc\,\mathrm{Cos}\,\gamma + 2bd\,\mathrm{Cos}\,(\gamma+\delta) + 2cd\,\mathrm{Cosin}\,\delta,$$

$$\mathrm{II};\ e^2 + d^2 + 2ed\,\mathrm{Cosin}\,\varepsilon = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\,\mathrm{Cosin}\,\beta + 2ac\,\mathrm{Cosin}\,(\beta+\gamma) + 2bc\,\mathrm{Cosin}\,\gamma$$

die

die erste und zweyte Gleichung für die Berechnung des Fünfecks.

Die übrigen sind

III; $a \sin \alpha + b \sin(\alpha+\beta) + c \sin(\alpha+\beta+\gamma) + d \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 0$

IV; $a \sin \alpha + b \sin(\alpha+\beta) + c \sin(\alpha+\beta+\gamma) - d \sin \varepsilon = 0$,

V; $a \sin \alpha + b \sin(\alpha+\beta) - c \sin(\delta+\varepsilon) - d \sin \varepsilon = 0$.

Die dritte Gleichung ist (P) selbst, die vierte und fünfte wird daraus vermittelst 11 und 13 hergeleitet, indem

$\alpha+\beta+\gamma+\delta$ entweder $= 360^\circ - \varepsilon$,
oder $= 2.360^\circ - \varepsilon$,
oder $= 3.360^\circ - \varepsilon$;

und

$\alpha+\beta+\gamma$ entweder $= 360^\circ - \delta - \varepsilon$,
oder $= 2.360^\circ - \delta - \varepsilon$,
oder $= 3.360^\circ - \delta - \varepsilon$:

also

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = -\sin \varepsilon,$$
$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = -\sin(\delta+\varepsilon).$$

D) Für das Sechseck.

§. 34.

Ist

(P); $a \sin\alpha + b \sin(\alpha+\beta) + c \sin(\alpha+\beta+\gamma) + d \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + e \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) = 0$,

(Q); $a \operatorname{Cosin}\alpha + b \operatorname{Cosin}(\alpha+\beta) + c \operatorname{Cos}(\alpha+\beta+\gamma) + d \operatorname{Cosin}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + e \operatorname{Cosin}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) = -f$

Aus (P) hat man

(S); $a \sin\alpha + b \sin(\alpha+\beta) + c \sin(\alpha+\beta+\gamma) + d \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = e \sin\zeta$, (11, 13),

(T); $a \sin\alpha + b \sin(\alpha+\beta) + c \sin(\alpha+\beta+\gamma) = d \sin(\varepsilon+\zeta) + e \sin\zeta$, (a. §.)

aus (Q) aber

(W); $a \operatorname{Cosin}\alpha + b \operatorname{Cosin}(\alpha+\beta) + c \operatorname{Cos}(\alpha+\beta+\gamma) + d \operatorname{Cosin}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = -e \operatorname{Cosin}\zeta - f$, (a. §.)

(Y); $a \operatorname{Cosin}\alpha + b \operatorname{Cosin}(\alpha+\beta) + c \operatorname{Cosin}(\alpha+\beta+\gamma) = -d \operatorname{Cosin}(\varepsilon+\zeta) - e \operatorname{Cos}\zeta - f$, (a. §.).

Addirt

Addirt man nun der Gleichungen (P), (Q), sowohl als der (S), (W), und (T), (Y), Quadrate, und macht die gehörigen Reduktionen: So erhält man

$$\text{I; } ff = aa + bb + cc + dd + ee + 2ab\,\text{Cosin}\,\beta + 2ac\,\text{Cosin}\,(\beta+\gamma) + 2ad\,\text{Cosin}\,(\beta+\gamma+\delta) + 2ae\,\text{Cos}\,(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) + 2bc\,\text{Cosin}\,\gamma + 2bd\,\text{Cosin}\,(\gamma+\delta) + 2be\,\text{Cos}\,(\gamma+\delta+\varepsilon) + 2cd\,\text{Cos}\,\delta + 2ce\,\text{Cos}\,(\delta+\varepsilon) + 2de\,\text{Cosin}\,\varepsilon$$

$$\text{II; } ff + ee + 2ef\,\text{Cosin}\,\zeta = aa + bb + cc + dd + 2ab\,\text{Cosin}\,\beta + 2ac\,\text{Cosin}\,(\beta+\gamma) + 2ad\,\text{Cosin}\,(\beta+\gamma+\delta) + 2bc\,\text{Cosin}\,\gamma + 2bd\,\text{Cosin}\,(\gamma+\delta) + 2cd\,\text{Cosin}\,\delta$$

$$\text{III; } \left.\begin{array}{l} f^2 + e^2 + d^2 \\ + 2ef\,\text{Cos}\,\zeta + 2fd\,\text{Cos}\,(\zeta+\varepsilon) + 2ed\,\text{Cosin}\,\varepsilon \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 \\ + 2ab\,\text{Cos}\,\beta + 2ac\,\text{Cos}\,(\beta+\gamma) + 2bc\,\text{Cosin}\,\gamma; \end{array}\right.$$

Zu denen noch folgende drey gehören:

$$\text{IV; } a\sin\alpha + b\sin(\alpha+\beta) + c\sin(\alpha+\beta+\gamma) + d\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + e\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) = 0,$$

$$\text{V;}\ a \sin\alpha + b\sin(\alpha+\beta) + c\sin(\alpha+\beta+\gamma) + d\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) - e\sin\zeta = 0,$$

$$\text{VI;}\ a \sin\alpha + b\sin(\alpha+\beta) + c\sin(\alpha+\beta+\gamma) - d\sin(\varepsilon+\zeta) - e\sin\zeta = 0;$$

Aus welchen sechs Gleichungen alle Aufgaben die bey Berechnung des Sechsecks vorkommen, aufgelöst werden können.

§. 35.

Diese Beyspiele zeigen deutlich, wie für jede Figur die zu ihrer Berechnung dienenden Gleichungen zu finden sind; Und aus dem blosen Anschauen der nur angeführten Beispiele kann man leicht auf die diesen Gleichungen für jede Figur zukommende Gestalt, schlüssen.

So lassen sich

Für das Siebeneck

dessen äussere Winkel, α, β, γ, δ ..... η und die zugehörigen Seiten a, b, c, d... g seyn mögen leicht aus den vorhergehenden (34 ꝛc.) folgende sieben Gleichungen folgern:

$$\text{I;}\ g^2 = a^2 + b^2 + c^2 \ldots\ldots + f^2 + 2ab\,\text{Cosin}\,\beta + 2ac\,\text{Cosin}\,(\beta+\gamma) + 2ad\,\text{Cos}(\beta+\gamma+\delta) \ldots\ldots + 2af\,\text{Cos}(\beta+\gamma) \ldots . + \zeta)$$

+

$$+ 2bc\,\text{Cosin}\,\gamma + 2bd\,\text{Cosin}\,(\gamma+\delta) + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2bf\,\text{Cosin}(\gamma+\delta\ldots+\zeta)$$

$$+ 2cd\,\text{Cosin}\,\delta + 2ce\,\text{Cos}(\delta+\varepsilon) + 2cf\,\text{Cos}(\delta+\varepsilon+\zeta) + 2de\,\text{Cosin}\,\varepsilon + 2df\,\text{Cosin}(\varepsilon+\zeta) + 2ef\,\text{Cosin}\,\zeta;$$

$$\text{II};\ \left.\begin{matrix} g^2+f^2 \\ +2gf\,\text{Cos}\,\eta \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{array}{l} a^2+b^2\ldots+e^2 \\ +2ab\,\text{Cosin}\,\beta+2ac\,\text{Cos}(\beta+\gamma)\ldots\ldots\ldots+2ae\,\text{Cos}(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) \\ +2bc\,\text{Cos}\,\gamma+2bd\,\text{Cos}(\gamma+\delta)+2be\,\text{Cosin}(\gamma+\delta+\varepsilon) \\ +2cd\,\text{Cos}\,\delta+2ce\,\text{Cos}(\delta+\varepsilon)+2de\,\text{Cos}\,\varepsilon; \end{array}\right.$$

$$\text{III};\ \left.\begin{array}{l} g^2+f^2+e^2 \\ +2gf\,\text{Cosin}\,\eta \\ +2ge\,\text{Cos}(\eta+\zeta) \\ +2ef\,\text{Cos}\,\zeta \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} a^2+b^2+c^2+d^2 \\ +2ab\,\text{Cos}\,\beta+2ac\,\text{Cos}(\beta+\gamma)+2ad\,\text{Cos}(\beta+\gamma+\delta) \\ +2bc\,\text{Cos}\,\gamma+2bd\,\text{Cosin}(\gamma+\delta) \\ +2cd\,\text{Cosin}\,\delta: \end{array}\right.$$

$$\text{IV};\ a\sin\alpha+b\sin(\alpha+\beta)\ldots\ldots+f\sin(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\zeta)=0;$$

$$\text{V};\ a\sin\alpha+b\sin(\alpha+\beta)\ldots+e\sin(\alpha+\beta\ldots+\varepsilon)-f\sin\eta=0;$$

VI.

VI; $a \sin \alpha + b \sin(\alpha + \beta) \ldots + d \sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta) - e \sin(\eta + \zeta) - f \sin \eta = 0;$

VII; $a \sin \alpha + b \sin(\alpha + \beta) + c \sin(\alpha + \beta + \gamma) - d \sin(\eta + \zeta + \varepsilon) - e \sin(\eta + \zeta) - f \sin \eta = 0.$

Auf ähnliche Art kann man für Figuren von noch mehrern Seiten verfahren; und ausser der Weitläuftigkeit und Mühe der Buchstaben Bezeichnung bey diesen Gleichungen, hat dieses Verfahren ganz und gar keine Schwierigkeit.

Anmerkung.

§. 36.

Die bisherigen Gleichungen (31 ... 35) lassen sich in zwo Klassen bringen.

Die eine Klasse, machen die Gleichungen aus, in denen alle Seiten der Figur vorkommen, und vom 2ten Grade sind; indem sie dieser Seiten Quadrate enthalten, z. B. vorigen §s I, II, III. Zur zwoten Klasse gehören die Gleichungen bey denen eine Seite fehlt, und sind erster Dimension, z. E. a. §. IV, V, VI, VII: weswegen man dieser Auflösung für leichter hält, als jener in der ersten Klassen, insoferne nämlich eine Seite zu finden verlangt wird.

Ist die Anzahl n der Seiten grade, $= 2m$: so haben beyde Klassen gleich viel Gleichungen, nämlich jede $= m$; ist aber der Seiten Anzahl n ungrade $= 2m + 1$, so hat die zwote Klasse eine Gleichung mehr als die erste, nämlich jene $m + 1$, Gleichungen, diese m. So hat für des Siebeneck, die erste Klasse 3 die zwote vier Gleichungen; für das Sechseck aber haben beyde Klassen drey Gleichungen.

§. 37.

Die Gleichungen, wie (Q), (W), (Y), [§. 34], in welchen Cosin α, Cosin $(\alpha + \beta)$ rc. sind zur Berechnung der Figuren nicht geschickt, da in ihnen alle Seiten und Winkel der Figur vorkommen, und deshalben, wenn aus diesen Gleichungen eine Seite, oder ein Winkel gefunden werden sollte, mehrere Grösen als nothwendig bekannt vorausgesezt werden würden, welche alle zur vollkommenen Bestimmung einer Figur nicht erfoderlich sind.

Indem aber gleichgenannte Gleichungen mit den, wo die Sinusse sich befinden, z. E. [(P), (S), (T), §. 34,], verbunden werden: so kann man daraus jene Gleichungen des 2ten Grades herleiten, die alle Seiten der Figur enthalten, aber nur so viel Winkel als die Figur Seiten hat weniger zwey; da hingegen die Gleichungen der Sinusse allein die Gleichungen der zwoten Klasse (36) geben, welchen eine Seite und ein Winkel mangelt, (31 . . . 35).

Fin-

Findung der bey Berechnung der Figuren vorkommenden Fälle.

§. 38.

Aus der elementar Geometrie ist bekannt, daß eine Figur vollkommen bestimmt ist, wenn alle ihre Haupttheile weniger drey, bekannt sind.

§. 39.

Daher müßen bey einer Figur von n Seiten, 2n — 3 Haupttheile gegeben seyn, (1, 4).

§. 40.

Doch ist hievon, wie man leicht sieht, der Fall ausgenommen, wo alle äussere Winkel der Figur gegeben sind, da allemahl einer aus den übrigen bestimmt werden kann (11).

§. 41.

Wenn also alle äussere Winkel bekannt sind, und nur n — 3 Seiten: so ist dadurch die Figur noch nicht vollkommen bestimmt, sondern man muß dazu noch eine von den übrigen drey Seiten haben, daß folglich in jedem Falle, wenigstens n—2 Seiten bekannt seyn müssen, (11, 39).

§. 42.

Soll nur ein Winkel, oder eine Seite gesucht werden: so muß solches mit Hülfe der Gleichung geschehen, in der 2n – 2 Haupttheile vorkommen, entweder alle Seiten der Figur, oder wenigstens n — 1 Seiten, (37, 1, 4).

Denn wären auch alle Winkel bekannt: so muß doch die Gleichung n — 1 Seite enthalten, eben, weil n — 2 Seiten gegeben seyn müssen (41); und diese Art der Auflösungen nach den aus allen Winkeln und n — 2 Seiten eine gesucht wird, ist von den übrigen wohl zu unterscheiden.

§. 43.

Da in jeder zur Auflösung einer Figur dienenden Gleichung, entweder alle Seiten vorkommen, oder alle weniger eine (36): so hat man zwo Klassen der Auflösungen.

Die erste enthält die Fragen, welche aufzulösen eine Gleichung dient, in der sich alle n Seiten der Figur und n — 2 Winkel befinden, (37, 42).

Zu der zwoten Klasse gehören die Auflösungen, für welche man eine Gleichung haben muß, in der eine Seite und ein Winkel mangelt, oder in welcher n — 1 Seiten und eben so viel Winkel vorkommen; woferne nämlich die Frage von der Bestimmung eines Winkels ist, (37, 42).

Zu diesen beiden Klassen kann noch die dritte gethan werden, wo man eine Seite zu suchen verlangt, welches mit Hülfe einer eben solchen Gleichung als die zwote Klasse der Auflösungen erfodert, bewerkstelliget wird; und es ist offenbar, daß hiezu alle Winkel der Figur bekannt seyn müssen, wiewohl nur n — 1 Winkel gegeben seyn dür=

dürfen, weil man den 4ten, wie bekannt, leicht finden kan; dies ist auch die Ursache, weswegen man diese Klasse der Auflösungen von den vorigen beyden billig zu unterscheiden hat.

§. 44.

I) Die zu einer jeden Klasse gehörende Fragen lassen sich wieder in verschiedene Ordnungen eintheilen, insoferne man auf die Lage der fehlenden Hauptttheile unter sich, sieht.

II) So erhält man für die erste Klasse, (43), die eine Ordnung, wenn die zwey in der Gleichung ausgeschlossenen Winkel sich am nächsten liegen; die andere Ordnung aber, wenn zwischen den fehlenden Winkeln, einer oder zween, oder drey ꝛc. der übrigen sich befinden. Diese Eintheilung darf für eine Figur von n entweder $= 2m + 1$ oder $= 2m$ Seiten nicht weiter gehen, als bis zwischen den ausgelassenen Winkeln, $m - 1$ der übrigen Winkel oder m Seiten liegen: weil man sonst zween Winkel als fehlend in Betrachtung zöge, zwischen welchen eine solche Anzahl der übrigen Winkeln, oder Seiten, liegt, als zu einer schon da gewesenen Ordnung erforderlich ist. Z. E. für das Siebeneck (9 Fig.) können G und F; A, G und E, und G und D als fehlend angenommen werden, aber nicht G und C; weil sich zwischen diesen zween Winkeln A, B, drey Seiten GA, AB, BC befinden und so viel schon vorher zwischen G und D lagen.

III) Es gehören also für diese Klasse m sechs Ordnungen.

IIII) Für die zwote Klasse, geschieht der Auflösungen Eintheilung in Ordnungen, wenn man auf die fehlende Seite und den ausgelassenen Winkel Rücksicht nimmt: daher bekommt man die verschiedenen Ordnungen, nachdem der fehlende Winkel entweder an der ausgeschlossenen Seite anliegt, oder sich zwischen genanntem Winkel und erwähnter Seite, eine, oder zwo, oder drey rc. der übrigen Seiten befinden. Von den dieser Eintheilung zukommenden Gränzen gilt die Regel: Wenn die Anzahl der Figur Seiten ungrade, $= 2m + 1$, so wird die letzte Ordnung die, wo zwischen dem fehlenden Winkel und der weggelassenen Seite, m Seiten, oder so viel Winkel liegen. Ist aber die Anzahl der Figur Seiten grade, $= 2m$: so liegen in der letzten Ordnung zwischen der ausgeschlossenen Seite und dem fehlenden Winkel $m - 1$ Seiten, oder Winkel. Die Ursache ist völlig der vorigen (11) ähnlich.

V) Dieser Klasse kommen folglich $m + 1$ Ordnungen zu, wenn die Zahl der Seiten $2m + 1$, aber m Ordnungen, wenn sie 2m.

VI) Die Eintheilung in Ordnungen der dritten Klasse (43), hat keine Schwierigkeit: denn für sie kann man alle Winkel als bekannt ansetzen, daher hat man bey Auflösung der Fragen nur auf die Lage zu sehen, die die zu suchende Seite gegen die fehlende hat.

VII)

VII) Diese Classe hat daher m Ordnungen, wie die erste.

Anwendung des bisherigen (38....44) auf besondere Fälle.

§. 45.

Weil alle die Auflösung des Dreyecks betreffende Fragen schon gnug bekannt sind; so ist der Anfang mit dem Virecke zu machen.

§. 46.

Für dieses gehören zur ersten Klasse alle Fragen, die mittelst der Gleichungen in welcher alle Seiten a, b, c, d, und zween Winkel vorkommen, beantwortet werden können. Diese Klasse fält in zwo Ordnungen; in der ersten liegen die zween fehlenden Winkel einander am nächsten, in der zweyten aber einander gegenüber.

Zur ersten Ordnung, wo die Winkel α und δ fehlen, werden folgende Aufgaben gerechnet.

I; Aus den gegebenen Seiten a, b, c, d, und dem Winkel, β, zu finden den γ;

II; Aus den Seiten a, b, c und den Winkeln β, γ, die Seite d, welche zwischen den fehlenden Winkeln liegt zu berechnen;

III; Aus den Seiten a, c, d, und den Winkeln β, γ die Seite b, zu suchen, die sich zwischen den gegebenen Winkeln befindet;

 IV;

IV; Aus a, b, d, und β, γ, zu finden c, welche an einem der gegebenen Winkel und β, γ, anliegt. Hieher gehört auch aus b, c, d, zu berechnen a, die an einem der fehlenden Winkel liegt.

Diese 4 Aufgaben können mittelst der Gleichung I in 31 aufgelößt werden.

Zur zwoten Ordnung, wo die Winkel α und γ ausgeschlossen sind, lassen sich folgende zwo Aufgaben bringen:

V, Aus den gegebenen Seiten a, b, c, d, und dem Winkel β, den δ, zu finden; oder β wenn δ gegeben wäre;

VI; Aus a, b, c, und β, γ, die d zu berechnen.

Beyder Aufgaben Auflösungen giebt die Gleichung II in 31.

§. 47.

Die Fragen der zwoten Klasse (43) kann man ebenfalls in zwo Ordnungen bringen: in der einen liegt die fehlende Seite und der ausgeschlossene Winkel an einander, in der andern aber zwischen beyden, eine Seite.

Zur ersten Ordnung, wenn die fehlende Seite d und der Winkel δ ist, gehören drey Aufgaben;

VII; VIII; IX; Aus den gegebenen Seiten a, b, c, und zween der Winkel α, β, γ, wird der dritte Winkel, entweder γ, oder β, oder α, gesucht.

Die Auflösungen für diese Aufgaben, werden aus III in 31 hergeleitet.

Zur zwoten Ordnung, in so ferne d die fehlende Seite und γ der fehlende Winkel, sind folgende Aufgaben zu rechnen:

X: XI; XII; Man verlangt aus den Seiten a, b, c, und zween von den Winkeln α, β, δ, entweder δ oder β oder α.

Die Auflösungen dafür, ergeben sich aus der Gleichung IV in 31.

§. 48.

Auser diesen Aufgaben kommen noch zwo zur dritten Klasse:

XIII; Aus allen Winkeln α, β, γ, δ, und zween an eine der liegenden Seiten a, b, die Seite c zu suchen;

XIV; Man fodert die Seite b, indem alle Winkel und zwo einander gegenüberstehende Seiten a, c, bekannt sind.

Die Auflösungen hievon giebt III und IV in 31.

Fünfeck.

§. 49.

Hier gehören für die erste Classe die Aufgaben, wo zween Winkel nicht in Betrachtung kommen: daher entstehen zwo Ordnungen, nachdem entweder die fehlenden Winkel an einer und derselben Seite liegen, oder zwischen beyden sich zwo Seiten befinden.

Zur ersten Ordnung kommen folgende Aufgaben:

Wenn von des Fünfecks allen Seiten und dreyen Winkeln β, γ, δ, sieben Stücke bekannt sind, zu finden:

I;	die Seite	e,
II;		a,
III;		b,
IV;	den Winkel	γ,
V;		β.

Dieser Aufgaben Auflösungen lassen sich aus der Gleichung I in 32 herleiten.

Für die zwote Ordnung hat man folgende Aufgaben:

Von

Von allen Seiten und dreyen Winkeln β, γ, ε, sind sieben Stücke gegeben: Man verlangt

VI;	die Seite	b,
VII;		a,
VIII;		e,
IX;	den Winkel	β,
X;		ε,

Die Auflösungen hat man aus der Gleichung II in 32

§. 50.

Die Aufgaben der zwoten Klasse, fallen in drey Ordnungen: Für die erste liegt die fehlende Seite an dem fehlenden Winkel; für die zwote, zwischen beyden eine Seite, und für die dritte Ordnung sind zwischen dem ausgeschlossenen Winkel und der weggelassenen Seite, zwo Seiten.

Zur ersten Ordnung sind folgende Aufgaben zu zählen:

Wenn vier Seiten a, b, c, d, und von den Winkeln α, β, γ, δ, drey bekannt sind, zu finden

XI;	den Winkel	α,
XII;		β,
XIII;		γ,
XIV;		δ.

Welches alles nach III in 31 aufgelöst wird.

Zur

Zur zwoten Ordnung rechnen sich nachstehende Aufgaben:

Vier Seiten a, b, c, d, sind bekannt und drey von den Winkeln α, β, γ, ε: Man sucht

XV; den Winkel α,
XVI: β,
XVII; γ,
XVIII; ε

Die Auflösungen hiezu folgen aus der Gleichung IV in 31.

Zur dritten Ordnung gehören nur folgende zwo Aufgaben:

XIX. Aus allen Seiten, die e ausgenommen, und den Winkeln α, β, δ, den Winkel ε zu finden.

XX; Aus eben den Seiten, und den Winkeln α, β, ε, den δ zu finden.

Beyde Aufgaben werden nach der Gleichung V in 32 aufgelößt.

§. 51.

Die dritte Klasse hat zwo Aufgaben:

XXI; Aus allen Winkeln, und den Seiten a, b, c, die Seite d zu suchen;

XXII; Ebenfalls aus allen Winkeln, aber aus den Seiten a, b, d, die c zu finden;

Welche durch eine der drey lezten Gleichungen in 31 gelößt werden können.

§ 52.

Die Aufgaben der dritten Klasse nicht in Betrachtung gezogen, könnte man leicht denken, daß die der beiden ersten Klassen bis zu 40 anwüchsen, und weil beiden fünf Ordnungen zukämen, eine jede Auflösung acht Haupttheile des Fünfeckes enthielte; man würde sich aber sehr irren: denn unter diesen Haupttheilen giebt es viele, denen eine und dieselbe Auflösung Gnüge thut: so wird für der ersten Klasse erste Ordnung aus den Seiten a, b, c, d, e, und den Winkeln γ, δ, der β auf eben die Art bestimmt, als wie der δ aus eben diesen Seiten und den Winkeln β, γ; welches sowohl aus der Natur der Sache selbst, als auch aus der Gleichung I in 32 einleuchtend ist, indem für leztere die Ursachen, warum in ihr die Winkel β sowohl als δ sich findet, eben dieselben sind. So verhält sich es auch mit den Seiten a, d, oder b, c.

Sechseck.

§. 53.

Hier zerfallen die Aufgaben der ersten Klasse in drey Ordnungen, nachdem zwischen den zween fehlenden Winkeln entweder eine, oder zwo, oder drey Seiten, liegen.

Zur ersten Ordnung lassen sich folgende Aufgaben bringen:

Aus der Gleichung in der alle Seiten und die Winkel β, γ, δ, ε vorkommen, soll bestimmt werden.

I;	die Seite	f,
II;		a,
III;		b,
IV;		c,
V;	der Winkel	ε,
VI;		δ;

Dieses alles geschieht nach I in 33.

Zur zwoten Ordnung gehören die Aufgaben:

Aus der Gleichung die neben den Winkeln β, γ, δ, ζ, alle Seiten enthält, zu finden:

VII;	Die Seite	a,
VIII;		b.
IX;		f,
X;	den Winkel	ζ,
XI;		δ,
XII;		γ,

Wozu die Gleichung II in 33 dient.

Der dritten Ordnung Aufgaben sind:

Aus

Aus der Gleichung in der alle Seiten, und die Winkel β, γ, ζ, ε, zu finden:

XIII; die Seite b,
XIV; a,
XV; den Winkel β,

Zu welcher Absicht die Gleichung III in 33.

§. 54.

Der zwoten Klasse Aufgaben zertheilen sich ebenfalls in drey Ordnungen; denn entweder liegt der fehlende Winkel an der ausgelassenen Seite, oder zwischen beyden gleichgenannten Grösen befindet sich eine, oder zwo Seiten.

Für die erste Ordnung entstehen folgende Aufgaben:

Mittelst der Gleichung, wo alle Seiten, ausser f, und alle Winkel, ausgenommen ζ sind, zu suchen:

XVI; den Winkel α,
XVII; β,
XVIII; γ,
XIX; δ,
XX; ε.

Die Auflösung hievor, hängt von der Gleichung IV in 33 ab.

Die zwote Ordnung, hat nachstehende Aufgaben:

Aus der Gleichung in der alle Seiten vorhanden, ausser f, und alle Winkel, ausser ε, zu finden:

XXI;	den Winkel	α,
XXII;		β.
XXIII;		γ,
XXIV;		δ,
XXV;		ζ.

Die Auflösungen hiezu giebt die 5te Gleichung in 33.

Der dritten Ordnung Aufgaben sind:

Man soll aus der Gleichung in welcher die Seiten a, b, c, d, e, und die Winkel α, β, γ, ε, ζ, vorkommen, finden:

XXVI;	den Winkel	α,
XXVII;		β,
XXVIII;		γ,
XXIX;		ε,
XXX;		ζ,

Welches nach der 6ten Gleichung in 33 bewerkstelliget werden kann.

§. 55.

§. 55

Die dritte Klasse begreift nachstehende Aufgaben:

Ausser allen Winkeln sind gegeben:

XXXI; Die Seiten a, b, c, d, und man sucht die e;

XXXII; Die Seiten a, b, c, e, und man verlangt die d;

XXXIII; Die Seiten a, b, d, e und es ist zu finden die c;

Welche nach der 4ten, oder 5ten, und 6ten Gleichung in 33 aufgelößt werden können.

§. 56.

Wenn die Probleme der dritten Klasse (55) ausgenommen werden; so gehören zu den beyden ersten (53, 54), dreyßig $= 6.5 = 6.(6-1)$ Aufgaben.

Für das Fünfeck aber hatte man deren $20 = 5.4 = 5(5-1)$, [49, 50, 51];

Für das Viereck, $12 = 4.3 = 4(4-1)$, [46, 47, 48];

Und für das Dreyeck giebt es deren $6 = 3.2 = 3(3-1)$ [eb. Trig]:

Ist folglich der Figur Seiten Zahl $= n$, so hat man durch die Induktion, die Anzahl aller zu den beyden ersten Klassen gehörenden Aufgaben, $= n(n-1)$.

Daß dieses allgemein wahr sey, wird gezeigt.

§. 57.

Die gleichnamigen Hauptttheile einer Figur, welche gegen die fehlenden (37, 43, 44), einerley Lage haben, gehören zu einer und derselben Auflösung:

Denn ihnen kommt einerley Bedingung der Aufgabe zu.

Ein Beyspiel steht in 52.

Und aus Betrachtung der Gleichungen in 31 .... 35 erhellet die Sache auch sehr deutlich.

§. 58.

Es seyen einer Figur von ungraden Seitenzahl, z. E. des Eilfecks (Fig. 10.) äussere Winkel

A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L,

und die zugehörende Seiten

a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l,

Nun gehören zur ersten Klasse alle Auflösungen in deren Gleichungen zween Winkel fehlen (43); und einer von den äussern Winkeln der Figur kann offenbar als beständig fehlend angenommen werden; dieser mag L seyn: so hat man folgende fünf Ordnungen:

I; K, L;
II; I, L;
III; H, L;
IV; G, L;
V; F, L;

Mehrere finden für diese Klassen nicht statt, wie aus 44 begreiflich: denn E hat gegen L eben die Lage als F; und D gegen L ebenfals wie G; u. s. w.

Welche Winkel und Seiten nun einerley Lage gegen die fehlenden Winkel für jede Ordnung haben, ist aus nachstehender Darstellung zu ersehen, wo zu mehrerer Deutlichkeit diese Figur dient.

Ordnung	Fehlende Winkel	Welche Winkel und Seiten einerley Lage gegen die fehlenden haben	Bey welchen Wink. dieses nicht ist.
I.	K, L.	A, I; B, H; C, G; D, F.	E;
		l, i; a, h; b, g; c, f; d, e.	k.
II.	I, L.	A, H; B, G; C. F; D, E.	K;
		k, i; l, h; a, g; b, f; c, e.	d,
III.	H, L.	A, G; B, F; C, E; K, I.	D;
		k, h; l, g; a, f; b, e; c, d.	i.
IV.	G, L.	A, F; B, E; C, D; H, K.	I;
		k, g; i, h; l, f; a, e; b, d.	c.
V.	F, L.	A, C; B, D; K, G; I, H.	C;
		k, f; i, g; l, e; a, d; b, c.	h.

Hieraus sieht man, daß in jeder Ordnung vier Paar Winkel, fünf Paar Seiten und ein Winkel und eine Seite vorkommen, wo nach jedem gefragt werden kann, (57):

Also hat jede Ordnung 11 Aufgaben.

§. 59.

In der zwoten Klasse fehlt eine Seite und ein Winkel (43).

Es sey daher l die beständig fehlende Seite: so hat man 6 Ordnungen, nachdem ausser l, einer von folgenden 6 Winkeln fehlt:

I; L;	IV; H;
II; K;	V; G;
III; I;	VI; F.

Weiter kann man wegen 44 nicht gehen.

In dieser Klasse werden allemal Winkel gesucht. Aber in den ersten fünf Ordnungen haben, (wie aus Betrachtung der Figur deutlich ist) die übrigen 10 Winkel gegen dem fehlenden und die ausgelassene Seite l verschiedene Lagen: daher hat man für jede dieser Ordnung 10 Fragen.

In der sechsten Ordnung, wo F der l gegenüber liegt, haben gegen diese Grösen einerley Lage:

A, L; K, B; C, I; D, H; E, G;

also fünf Paar Winkel: folglich sind in dieser Ordnung auch so viele Aufgaben, (57).

§. 60.

Für eine Figur deren Seiten Zahl unvollkommen grade (impariter par *) z. E. das Zehneck, (Fig. 11), seyn die äussern Winkeln

A, B, C, D, E, F, G, H, I, K; und
a, b, c, d, e, f, g, h, i, k,

die zugehörenden Seiten; K aber der immer fehlende Winkel, so hat man für die erste Klasse folgende 5 Ordnungen, (44):

I; K, I;
II; K, H;
III; K, G;
IV; K, F;
V; K, E.

Nun haben gegen die fehlenden Winkel einerley Lage in der

I. Ordnung:

A, H; B, G; C, F; D, E;
k, h; a, g; b, f; c, e;

aber nicht d, und i;

II. Ordnung:

A, G; B, F: C, E;
i, h; k, g; a, f: b, e; c, d;

und D, I, nicht;

*) Bekanntlich ist einer solchen Zahl ihr allgemeiner Ausdruck: $4m + 2$.

III. Ordnung:

I, H; A, F; B, E; C, D;
i, g; k, f; a, e; b, d;

und h und c nicht;

IV. Ordnung:

I, G; A, E; B, D;
h, g; i, f; k, e; a, d; b, e;

aber nicht C, und H.

Für die

V. Ordnung, giebt es ausser ein Paar Seiten b, g, zwey doppelte Paar Winkel,

$$\mathrm{I};\left\{\begin{matrix} \mathrm{I}, & \mathrm{F}; \\ \mathrm{A}, & \mathrm{D}. \end{matrix}\right\} \quad \mathrm{II};\left\{\begin{matrix} \mathrm{H}, & \mathrm{G}; \\ \mathrm{B}, & \mathrm{C}. \end{matrix}\right\}$$

Und so viel Seiten

$$\mathrm{I}.\left\{\begin{matrix} h, & f; \\ a, & c; \end{matrix}\right\} \quad \mathrm{II},\left\{\begin{matrix} i, & e; \\ k, & d, \end{matrix}\right\}$$

die gegen die fehlenden Winkel K, E, einerley Lage beobachten.

Man kann daher in der fünften Ordnung nach $5 = \frac{10}{2}$ Dingen, und in jeder der vier ersten Ordnungen, nach 10 Dingen, fragen:

Folg=

Folglich hat jede dieser lezt genannten Ordnungen 10 Aufgaben, und die fünfte, fünfe.

§. 61.

Die zweyte Klasse hat auch fünf Ordnungen (44), wo die fehlenden Größen in der

I; k, K;
II; k, I;
III: k. H;
IV; k, G;
V; k, F;

sind.

In allen diesen Ordnungen haben die übrigen $9 = 10 - 1$ Winkel gegen die fehlenden Theile, verschiedene Lagen: daher kann in jeder Ordnung nach 9 Dingen gefragt werden.

§. 62.

Bey einer Figur deren Seitenzahl vollkommen grade (pariter par*) z. E. beym Zwölfecke (Fig. 12.) seyen die äussern Winkel

A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M,

und

a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m,

die Seiten.

*) Der allgemeine Ausdruck einer solchen Zahl ist bekanntlich 4m.

Die erste Klasse hat, wenn M, der beständig fehlende Winkel, folgende 6 Ordnungen (44):

I; M, L;
II; M, K;
III; M, I;
IV; M. H;
V; M, G;
VI; M, F.

Einerley Lage haben in der

I. Ordnung:

A, K; B, I; C, H; D, G; E, F;
m, k; a, i; b, h; c, g; d, f;

aber nicht l und e;

II. Ordnung:

A, I; B, H; C, G; D, F;
l. k; m, i; a, h; b, g, c, f; d, e;

und nicht L und E;

III. Ordnung:

L, K; A, H; B, G; C, F; D, E;
l, i; m, h; a, g; b, f; c, e;

und k, d, nicht;

IV. Ordnung:

L, I; A, G; B, F; C, E;
k, i; l, h; m, g; a, f; b, e; c, d;

aber nicht K, D;

V.

V. Ordnung:

K, I; L, H; A, F; B, E; C, D;
k, h; l, g; m, f; a, e; b, d;

und i, c, nicht;

VI. Ordnung;

$$\left.\begin{array}{l} L,\ G \\ A,\ E \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} K,\ H \\ B,\ D \end{array}\right\} \quad C,\ I;$$

$$\left.\begin{array}{l} i,\ h \\ b,\ c \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} k,\ g \\ a,\ d \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} l,\ f \\ m,\ e \end{array}\right\},$$

wo ausser dem einfachen Paare C, I; doppelte Paare, L, G; A, E; ꝛc. einerley Lage gegen die fehlenden Winkel M, F, haben.

Man kann also in jede der ersten fünf Ordnungen nach 12 Dingen, in der lezten hingegen nach $6 = \frac{12}{2}$ Dingen fragen, (57).

§. 63.

Zur 2ten Klasse, gehören ebenfalls 6 Ordnungen (44), nachdem ausser der Seite m fehlt der Winkel M, oder L, oder K, oder I, oder H, oder G.

In jeder dieser Ordnungen haben die übrigen Winkel, gegen die fehlenden Theile der Figur allemal verschiedene Lagen: daher kann man in jeder Ordnung nach $11 = 12 - 1$ Dingen fragen.

§. 64.

Stellt man bey jeder gradlinichten Figur ähnliche Betrachtungen, wie bisher (58 ... 63) geschehen, an, so wird man allemal finden:

Für eine Figur von

I) $2m + 1$ Seiten, hat die erste Klasse $m.(2m + 1)$ Aufgaben;

Die 2te Klasse, für jede der ersten m Ordnungen, 2m Aufgaben, und die lezte Ordnung m Fragen: also diese Klasse $2m^2 + m = m(2m + 1)$ Aufgaben;

II) $4m + 2$ Seiten: da gehören der ersten Klasse, weil sie $2m + 1$ Ordnungen hat, $2m(4m + 2) + 2m + 1 = (4m + 1) \times (2m + 1)$ Aufgaben;

Der 2ten Klasse aber, eben so viele Fragen: denn sie hat $2m + 1$ Ordnung und in jeder können $4m + 1$ Dinge verlangt werden. (60, 61).

III) 4m Seiten: hier hat die erste und zwote Classe 2m Ordnungen. Nun kann man in der ersten Classe, bey jeder der $2m - 1$ ersten Ordnungen, 4m, und in der lezten Ordnung 2m, Haupttheile verlangen: also hat man für genannte Classe $4m(2m - 1) + 2m = 2m(4m - 1)$ Aufgaben.

Eben so viel auch für die 2te Classe, (62, 63).

§. 65.

Also geben beyde Klassen Aufgaben:

1'); $m(2m+1)+m(2m+1)=2m(2m+1)$; für Nr. I;

2'); $(4m+1).2.(2m+1) = (4m+1) \times (4m+2)$; für Nr. II;

3'); $2.\ 2m(4m-1) = 4m(4m-1)$; für Nr. III.

§. 66.

Ist folglich ein und für allemal die Anzahl der Seiten $= n$; So ist in 1') vorigen §s.

$$2m+1 = n$$
$$2m = n-1,$$

in 2')

$$4m+2 = n$$
$$4m+1 = n-1, \text{ und}$$

in 3')

$$4m = n$$
$$4m-1 = n-1:$$

Mithin die Zahl aller Aufgaben, bey den ersten Klassen

$$= n(n-1).$$

Wie

Wie das bisherige (57 ... 65) auf jede Figur bequem anzuwenden, wird in dem Siebenecke gezeigt.

§. 67.

Da seyen A, B, C, D, E, F, G die äussern Winkel und a, b, c, d, e, f, g die zugehörenden Seiten.

Man schreibe diese Winkel nach der Ordnung hin und darunter die ihnen anliegende Seiten, auf folgende Art:

A, B, C, D, E, F, G
a, b, c, d, e, f, g

Die erste Klasse hat drey Ordnungen (44); Und wenn G der beständig fehlende Winkel: so können mit ihm ausgelassen werden, für die

1te Ordnung: F oder A
2te: E oder B. und
3te: D.

Es geschehe dies in der ersten Ordnung mit F: so hat man 7 Aufgaben (64), wo

A mit E
B mit D
g mit e
a mit d
b mit c

einerley Auflösung bedürfen (57), f und C aber verschiedene.

Daher

Daher sind dieser Ordnung zukommenden Aufgaben:

Mittelst der Gleichung in welcher alle Seiten und die Winkel A, B, C, D, E: zu finden.

I)	Die Seite	f,
II)		e, oder g,
III)		d, oder a,
IV)		c, oder b;
V)	den Winkel	C,
VI)		D, oder B
VII)		E, oder A.

In der zwoten Ordnung fehle G und E: so haben unter den 7 Aufgaben (64)

A	und	D
B		C
f		e
g		d
a		c

einerley Auflösung, aber F und b verschiedene, und die Aufgaben sind:

Aus der Gleichung wo alle Seiten und die Winkel A, B, C, D, F, vorhanden, zu suchen:

VIII)	die Seite	b,
IX)		e oder f
X)		d oder g
XI)		c oder a;
XII)	den Winkel	F,
XIII)		D oder A,
XIV)		B oder C.

In

In der dritten Ordnung ist G und D nicht vorhanden: Daher kommt unter den 7 Fragen (64) einerley Antwort zu,

F und E,
A und C,
f und d.
g und c,
a und b;

aber e und B verschiedene (57); deshalb sind für diese Ordnung folgende Aufgaben.

Die Gleichung, in der alle Seiten und die Winkel A, B, C, E, F, ist bekannt: man soll finden,

XV)	die Seite	e
XVI)		d oder f,
XVII)		c oder g,
XVIII)		b oder a,
XIX)	den Winkel	B
XX)		C oder A
XXI)		F oder E

Die zwote Classe hat 4 Ordnungen, (44), da nebst dem Winkel G fehlen können, für die

1ste Ordnung:	f oder g
2te:	e oder a
3te:	d oder b
4te:	•

In

In jeder der ersten drey Ordnungen hat man 6 Aufgaben, wo in jeglicher aus allen Seiten weniger der fehlenden und aus fünf von den Winkeln A, B, C, D, E, F, ein Winkel gesucht wird (64, 44). In der 4ten Ordnung haben einerley Auflösung (57)

A und F,
B und E,
C und D;

und es wird daher, aus den Seiten a, b, d, e. f, g, und fünf der Winkel A, B, C, D, E, F, gesucht

A oder F,
B oder E,
C oder D.

Anmerkung wegen Einrichtung der Gleichungen für jede Aufgabe.

§. 68.

Aus den Hauptlehrsätzen (17), Gleichungen herzuleiten, wodurch jede unbekannte Größe bequem gefunden werden kann, hat keine Schwierigkeit, und kann besser an Beyspielen, (wie schon in 31 . . . 34 geschehen), gezeigt, als unter gewisse Regeln gebracht werden.

Doch ist überhaupt zu merken:

1) Die Bestimmung der Figur Seiten, mittelst der ersten Klasse Aufgaben führt zu quadratischen, reinen oder unreinen Gleich-

Gleichungen; das ist, wenn die unbekannte Seite $= x$, so wird diese bestimmt durch eine Gleichung, entweder $x^2 = P$, wo P aus bekannten Seiten und Winkeln der Figur zusammengesezt ist, oder durch $x^2 + Px = Q$, wo P und Q wiederum bekannte aus gegebenen Hauptttheilen der Figur bestehende Größen sind.

2′) Der unbekannten Winkel Berechnung mittelst dieser Klasse Aufgaben wird bewerkstelliget durch Gleichungen, von dieser Gestalt: $\mathrm{Cos}\,\varphi = M$, oder dieser: $\mathrm{Cosin}\,\varphi = M \sin\varphi + S$; wo φ den unbekannten Winkel, M und S aber bekannte aus Seiten und Winkeln der Figur zusammen gesezte Größen bedeuten.

3′) Die Erforschung der Winkel vermöge der Aufgaben der zwoten Klasse, geschieht durch solche Gleichungen, wie

$$\mathrm{Tang}\,\varphi = M, \text{ oder:}$$
$$\sin\varphi = M, \text{ oder:}$$
$$\sin\varphi = M\,\mathrm{Cosin}\,\varphi + S$$

wo M, S, φ eben die Bedeutung wie vorhin haben.

So hat man für das Viereck aus der Gleichung III in 31

$$\text{A;)}\ \mathrm{tang}\,\alpha = -\frac{b\sin\beta + c\sin(\beta+\gamma)}{a + b\,\mathrm{Cos}\,\beta + c\,\mathrm{Cos}(\beta+\gamma)};$$

Aus

Aus der Gleichung IV daselbst

$$B;)\ \mathrm{sin}\,\delta = \frac{a\,\mathrm{sin}\,\alpha + b\,\mathrm{sin}\,(\alpha+\beta)}{c};$$

Und wieder aus der dritten Gleichung

$$C;)\ \mathrm{sin}\,\beta = -\frac{\mathrm{Cos}\,\beta(b\,\mathrm{sin}\,\alpha + c\,\mathrm{sin}(\alpha+\gamma)) - a\,\mathrm{sin}\,\alpha}{b\,\mathrm{Cosin}\,\alpha + c\,\mathrm{Cosin}\,(\alpha+\gamma)}$$

oder vielmehr

$$D;)\ \mathrm{sin}\,(\alpha+\beta) = -\frac{c\,\mathrm{Cos}\,(\alpha+\beta)\,\mathrm{sin}\,\gamma - a\,\mathrm{sin}\,\alpha}{b + c\,\mathrm{Cosin}\,\gamma}.$$

Bey A und B, sind die Ausdrücke rechter Hand des Gleichheitszeichen $= R$, bey C) aber, ist $\frac{b\,\mathrm{sin}\,\alpha + c\,\mathrm{sin}\,(\alpha+\gamma)}{b\,\mathrm{Cos}\,\alpha + c\,\mathrm{Cos}\,(\alpha+\gamma)} = R$, und $S = \frac{a\,\mathrm{sin}\,\alpha}{b\,\mathrm{Cos}\,\alpha + c\,\mathrm{Cos}\,(\alpha+\gamma)}$, und bey D) findet sich

$$R = \frac{c\,\mathrm{sin}\,\gamma}{b + c\,\mathrm{Cos}\,\gamma} \text{ und } S = \frac{a\,\mathrm{sin}\,\alpha}{b + c\,\mathrm{Cos}\,\gamma}.$$

§. 69.

I) Die Gleichung A) erhält man folgender gestalt:

die IV in 31 ist

E;) $a \sin\alpha + b \sin(\alpha + \beta) + c \sin(\alpha + \beta + \gamma) = 0$.

Daraus wird, (vermöge des Ausdruckes der Sinus der Summe zweener Winkel)

$$a \sin\alpha + b(\sin\alpha \operatorname{Cosin}\beta + \sin\beta \operatorname{Cosin}\alpha) + c(\sin\alpha \operatorname{Cos}(\beta+\gamma) + \sin(\beta+\gamma) \times \operatorname{Cosin}\alpha) = 0$$

$$= a \sin\alpha + b \sin\alpha \operatorname{Cos}\beta + c \sin\alpha \operatorname{Cos}(\beta+\gamma) + b \sin\beta \operatorname{Cosin}\alpha + c \sin(\beta+\gamma) \operatorname{Cosin}\alpha)$$

$$= \sin\alpha(a + b \operatorname{Cosin}\beta + c \operatorname{Cosin}(\beta+\gamma) + \operatorname{Cosin}\alpha(b \sin\beta + c \sin(\beta+\gamma));$$

folglich:

$$\sin\alpha(a + b \operatorname{Cosin}\beta + c \operatorname{Cosin}(\beta+\gamma)) = -\operatorname{Cos}\alpha(b \sin\beta + c \sin(\beta+\gamma)):$$

Mithin

$$\frac{\sin\alpha}{\operatorname{Cosin}\alpha} = -\frac{b \sin\beta + c \sin(\beta+\gamma)}{a + b \operatorname{Cos}\beta + c \operatorname{Cos}(\beta+\gamma)} = \operatorname{tang} x.$$

II) Wie die Gleichung B) erhalten wird begreift man, so bald man die 4te in 31 ansieht.

III) Die Gleichungen C) und D) erhält man auf ähnliche Art wie die A.

Näm-

Nämlich für C,) kann man die Gleichung E) so verändern, daß

$$
\begin{aligned}
o &= a \sin\alpha + b \sin(\alpha+\beta + c \sin((\alpha+\gamma)+\beta)\\
&= a \sin\alpha + b\,(\sin\alpha\, \mathrm{Cos}\,\beta + \sin\beta\, \mathrm{Cosin}\,\alpha)\\
&\quad + c\,(\sin(\alpha+\gamma)\, \mathrm{Cos}\,\beta + \mathrm{Cos}(\alpha+\gamma) \sin\beta)\\
&= a \sin\alpha + b \sin\beta\, \mathrm{Cosin}\,\alpha + c \sin\beta\, \mathrm{Cos}\,(\alpha\\
&\quad +\gamma) + b\, \mathrm{Cos}\,\beta \sin\alpha + c\, \mathrm{Cos}\,\beta \sin(\alpha+\gamma)\\
&= a \sin\alpha + \sin\beta\,(b\, \mathrm{Cos}\,\alpha + c\, \mathrm{Cos}(\alpha+\gamma))\\
&\quad + \mathrm{Cos}\,\beta\,(b \sin\alpha + c \sin(\alpha+\gamma))
\end{aligned}
$$

Woraus sich C) leicht herleiten läßt.

Für D) macht man aus E)

$$
\begin{aligned}
o &= a \sin\alpha + b \sin(\alpha+\beta) + c \sin([\alpha+\beta]+\gamma)\\
&= a \sin\alpha + b \sin(\alpha+\beta) + c \sin(\alpha+\beta)\, \mathrm{Cos}\,\gamma\\
&\quad + c\, \mathrm{Cosin}\,(\alpha+\beta) \sin\gamma\\
&= b \sin(\alpha+\beta) + c \sin(\alpha+\beta)\, \mathrm{Cos}\,\gamma + a \sin\alpha\\
&\quad + c\, \mathrm{Cosin}\,(\alpha+\beta) \sin\gamma\\
&= (b + c\, \mathrm{Cosin}\,\gamma) \sin(\alpha+\beta) + a \sin\alpha\\
&\quad + c\, \mathrm{Cosin}\,(\alpha+\beta) \sin\gamma\,;
\end{aligned}
$$

daher

$$
\begin{aligned}
(b + c\, \mathrm{Cosin}\,\gamma) \sin(\alpha+\beta) &= -\,(a \sin\alpha\\
&\quad + c\, \mathrm{Cosin}\,(\alpha+\beta) \sin\gamma)) = -\,c\, \mathrm{Cos}\\
&\quad (\alpha+\beta) \sin\gamma - a \sin\alpha.
\end{aligned}
$$

Anmerkung:

Die Berechnung einer Figur aus ihren Nebentheilen betreffend.

§. 70.

Ob gleich die Berechnung einer Figur aus ihren Nebentheilen viel weitläuftiger ist (3) als die bisher (17 ...., 69) erklärte aus ihren Haupttheilen: so läßt sich doch jene ebenfalls auf allgemeine Principien bringen.

Dieß geschieht, wenn man alle Fragen in Geschlechter, und diese wieder in Klassen und Ordnungen theilt.

So erhält man zwey Geschlechter von Aufgaben, wenn man nur auf eine einzige Diagonale und auf deren mit den Seiten machende Winkel, Rücksicht nimmt. Das erste Geschlecht begreift alle Fragen, wo diese Diagonale vorkommt, das zweyte aber die, welche genannte Linie nicht selbst sondern dessen mit den Seiten einschliessende Winkel enthält. Jenes Geschlecht läßt sich wieder in verschiedene Klassen theilen, nachdem mit der Diagonallinie, eine oder zwo oder drey oder wohl alle Seiten, in der Frage vorhanden sind; eine Seite aber muß nebst der Diagonale allemal vorkommen: weil aus den blosen Winkeln einer Figur, weder eine Seite noch Diagonale bestimmt werden kann.

Beym

Beym zweyten Geschlechte ergeben sich die Klassen aus der Anzahl der Figur Seiten die in in der Frage als Bedingungen liegen.

Man sieht daß schon diese Eintheilung, nicht wenig verwikkelt ist; weit intricater aber wird die, wo man auf zwo, drey, oder mehrere Diagonalen zugleich Rücksicht nimmt.

Einige andere Fragen welche bey Berechnung einer Figur vorkommen können.

§. 71.

Der bey Berechnung einer Figur vorkommenden Aufgaben Entwickelung gehört zu den Problemen der Combinationslehre, wie leicht aus dem Verfahren selbst begreiflich ist. Da nun bey dieser Berechnung noch einige andere Fragen aufstossen, deren Beantwortung von jener Lehre abhängen: so wird es nicht überflüßig seyn von einigen der vorzüglichsten etwas erwähnt zu haben.

§. 72.

Wie viel können bey einer Figur von 12 Seiten, Diagonalen gezogen werden:

Antwort:

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

Beweis.

Wenn man die Zahl der Seiten abzieht von der Anzahl aller Linien, welche durch jede zween Winkel der Figur gezogen werden können: so erhält man das Verlangte. Dieß ist offenbar.

Heissen nun die n Puncte der Figur A, B, C, D, E ꝛc: so kann man aus A nach den übrigen B, C, D ꝛc, n — 1 Linien ziehen; auf gleiche Weise aus B nach C, D, E, ꝛc. n — 2, und so aus C nach D, E, ꝛc. n — 3; u. s. w.

Hieraus sieht man, daß die Anzahl aller dieser Linien gleich ist der Summe einer arithmetischen Progreßion, deren erstes Glied = 1, leztes = n — 1, und die Anzahl der Glieder = n; Folglich ist diese Summe

$$= \frac{n}{2}(n-1);$$

Hievon n, die Zahl der Seiten, abgezogen, giebt

$$\frac{n}{2}(n-1) - n = \frac{nn - n - 2n}{2}$$

$$= \frac{nn - 3n}{2}$$

$$= \frac{n(n-3)}{2}.$$

§. 73.

A, B, C, D, E ꝛc. bedeuten die Scheitelpunkte einer Figur von n Seiten: man soll finden, wie viel Winkel um jeden Punkt, wenn von A aus nach den übrigen n — 1 Punkten B, C, D, E, ꝛc. Linien gezogen werden.

Auflösung.

Es sind so viele Winkel als

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

giebt.

Beweis.

Von A aus nach jedem Paare Punkte Linien gezogen, macht bey A einen Winkel:

Daher liegen um A so viele Winkel als so vielmal die übrigen n — 1 Buchstaben B, C, D, E ꝛc. nach 2 verbunden werden können.

Und dieß kann so vielmal geschehen, als in der Auflösung angegeben.

Daß um jeden Punkt gleich viel Winkel liegen, sieht man, da von jedem aus, nur nach n — 1 Punkten Linien gezogen werden können.

§. 74.

Da eine Figur von n Seiten auch so viel Scheitelpunkte der Umfangswinkel hat, und um jeden dieser Punkte gleich viele Winkel liegen:

So ist die Anzahl aller möglichen Winkel, welche die Seiten unter sich machen; als auch diese mit den Diagonalen, und leztere unter sich begränzen.

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$$

§. 75.

Diese Winkel mögen die der Figur zugehörigen Winkel heissen.

§. 76.

Die Zahl Y aller möglichen Winkel zu finden, welche in einer Figur von n Seiten alle mögliche Diagonalen (72), sowohl unter sich als mit den Seiten einschliessen.

Auflösung.

$$y = \frac{n^2(n-3)}{2}.$$

Beweis.

Offenbar erhält man y, wenn man von der Zahl der einer Figur zugehörigen Winkel (75) abzieht die Zahl der Umfangswinkel:

Also ist

$$y = \frac{n(n-1)(n-2)}{2} - n, \ [74; 4):$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)-2n}{2},$$

$$= \frac{n^3 - 3n^2 + 2n - 2n}{2},$$

$$= \frac{n^3 - 3n^2}{2},$$

$$= \frac{n^2(n-3)}{2}.$$

§. 76.

Bey einer Figur von n Seiten, können von einem der Umfangswinkel Scheitelpunkte A aus, nur n — 3 Diagonalen gezogen werden.

Beweis.

Denn die beiden Linien die man von A aus nachdem auf jeder Seite sich befindenden nächsten Punkte zieht, sind zween Seiten der Figur:

Daher giebt es nur n — 3 Punkte die A als der diagonalen Anfangspunkte gegenüber stehen, und nach welchen folglich Diagonalen gezogen werden können.

§. 77.

An jedem Endpunkte der Diagonalen (76) liegen zween Winkel:

Daher hat man 2 (n — 3) Winkel, die sich an den Endpunkten der Diagonalen befinden.

§. 78.

Die Zahl der Stücke, welche einer Figur von n Seiten, Nebentheile ausmachen, ist $= \frac{(n+6)\,(n-3)}{2}$

Be-

Beweis.

Dazu gehören, 2 (n — 3) Winkel, (77, 1), n — 3 Diagonalen, und die um A (76) liegende $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ Winkel weniger einer, nämlich den die beyden in A zusammenstossenden Seiten machen, (1).

Also ist die Anzahl der Stücke

$$= 2(n-3)+n-3+\frac{(n-2)(n-1)}{2}-1,$$

$$= \frac{6(n-3)+(n-2)(n-1)}{2}-1,$$

$$= \frac{6(n-3)+n^2-3n+2}{2}-1,$$

$$= \frac{6(n-3)+n(n-3)}{2}+\frac{2}{2}-1,$$

$$= \frac{6(n-3)+n(n-3)}{2},$$

$$= \frac{(n+6)(n-3)}{2}.$$

§. 79.

Es sind m Punkte gegeben:

Man soll die Anzahl der n seitigen Figuren finden, die man daraus machen kann; vorausgesezt daß $m > n$.

Auflösung:

$$\text{Sie ist} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n+1)}{2n}$$

Beweis.

Aus m Punkten können n Punkte so vielmal verschieden genommen werden als die Zahl

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n+1)}{n(n-1)\ldots\ldots 3.\,2.\,1}$$

anzeigt, wie aus der Combinationslehre bekannt ist: also hat man auch so viele Klassen von n seitigen Figuren. Gesezt, es wären aus einer dieser Klasse die n Punkte A, B, C, D ..... K, L; so muß bey Bestimmung der n seitigen Figur daraus, einer davon als der erste angenommen werden. Wäre dieser A: so ist deutlich daß A mit den übrigen auf diese Art: A, B, C, D .... K, L, oder diese A, L, K .... C, B vereinigt, einerley Figur giebt: wenn man daher die Zahl der Versetzun=

setzungen der n — 1 Buchstaben B, C, D ... K, L, halb nimmt: so erhält man die Anzahl der aus n Punkten möglichen n seitigen Figuren. Nun ist aber jene Zahl der Versetzungen $= (n-1) \times (n-2) \ldots\ldots 3.2.1$: also die Zahl der n seitigen Figuren in jeder Klasse

$$= \frac{(n-1)(n-2) \ldots\ldots 3.2.1}{2}:$$

Mithin die Zahl aller aus m Punkten zunehmenden n seitigen Figuren =

$$\frac{(n-1)(n-2) \ldots\ldots 3.2.1}{2} \times$$

$$\frac{m(m-1)(m-2) \ldots\ldots (m-n+1)}{n(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1}$$

$$= \frac{m}{2n}(m-1)(m-2) \ldots\ldots (m-n+1) = y.$$

§. 80.

Aus n Punkten kann man also

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)(n-3) \ldots 3.2.1 = y,$$

n seitige Figuren machen.

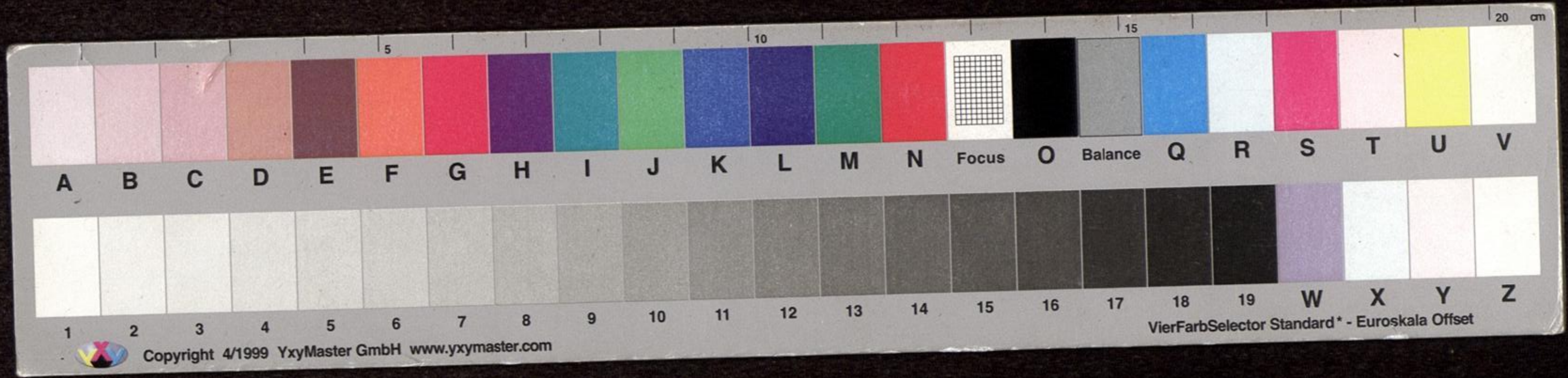
§. 81.

Beyspiel.

Für $n = 3$ hat man $y = 1$;
$= 4$ $y = 3$
$= 5$ $y = 12$.
u. s. w.

Für $m = 5$ und $n = 4$ ist $y = 15$
$m = 6$ $n = 4$ $y = 90$.
u. s. w.

Ende des ersten Theils.



5 10 15 20 cm
A B C D E F G H I J K L M N Focus O Balance Q R S T U V
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 W X Y Z
VierFarbSelector Standard* - Euroskala Offset
Copyright 4/1999 YxyMaster GmbH www.yxymaster.com