Die

Tetragonometrie.

Vierzehn Aufgaben, wo aus fünf gegebenen Stücken des Viereckes nur eines der übrigen gesucht wird.

Die vier Grundgleichungen.

§. 82.

In jedem gradlinichten Vierecke ABCDA (Fig. 4, 5, 6) heissen die Seiten

AB, BC, CD, DA,
a, b, c, d,

und die ihnen zugehörigen äussern Winkel (10)

A, B, C, D:

So hat man (31.)

I) $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \operatorname{Cos} B + 2ac \operatorname{Cos} (B + C) + 2bc \operatorname{Cos} C$;

II) $d^2 + c^2 + 2dc \operatorname{Cosin} D = a^2 + b^2 + 2ab \operatorname{Cosin} B$;

III)

III) $a \sin A + b \sin (A + B) + c \sin (A + B + C) = 0$;

IV) $a \sin A + b \sin (A + B) - c \sin D, = 0$.

§. 83.

Wie nun diese Gleichungen behandelt werden müssen, um daraus für jede bey Berechnung des Vierecks vorkommende Frage geschickte Antwort zu bekommen, soll in folgenden Aufgaben gezeiget werden.

Erste Aufgabe.

§. 84.

Aus den Seiten a, b, c und den Winkeln B, C, die Seite d zu finden.

I. Auflösung.

$$d = \frac{b + a \operatorname{Cosin} B + c \operatorname{Cosin} C}{\operatorname{Cos} F}$$

wo F ein Winkel dessen Tangente

$$= \frac{c \sin B - c \sin C}{b + a \operatorname{Cos} B + c \operatorname{Cos} C}$$

Be-

Beweis.

Nach der ersten Grundgleichung in 82 läßt sich diese Aufgabe auflösen.

Da aber $\sin B^2 + \mathrm{Cosin}\, B^2 = 1 = \sin C^2 + \mathrm{Cos}\, C^2$ und $\mathrm{Cos}\,(B + C) = \mathrm{Cos}\, B\, \mathrm{Cos} - \sin B \times \sin C$: so läßt sich genannte Gleichung auch so ausdrücken:

$$a^2 (\sin B^2 + \mathrm{Cos}\, B^2) + b^2 + c^2 (\sin C^2 + \mathrm{Cos}\, C^2) + 2ab\, \mathrm{Cos}\, B + 2ac\, \mathrm{Cos}\, B\, \mathrm{Cos}\, C + 2ac \sin B \sin C + 2bc\, \mathrm{Cos}\, C$$

$$=$$

$$a^2 \sin B^2 + a^2\, \mathrm{Cosin}\, B^2 + b^2 + c^2 \sin C^2 + c^2\, \mathrm{Cos}\, C^2 + 2ab\, \mathrm{Cosin}\, B + 2ac\, \mathrm{Cosin}\, B\, \mathrm{Cosin}\, C - 2ac \sin B \sin C + 2bc\, \mathrm{Cos}\, C$$

$$=$$

$$a^2 \sin B^2 + c^2 \sin C^2 - 2ac \sin B \sin C + b^2 + a^2\, \mathrm{Cos}\, B^2 + c^2\, \mathrm{Cosin}\, C^2 + 2ab\, \mathrm{Cos}\, B + 2ac\, \mathrm{Cos}\, B\, \mathrm{Cosin}\, C + 2bc\, \mathrm{Cosin}\, C$$

$$=$$

$$(a \sin B - c \sin C)^2 + (b + a\, \mathrm{Cos}\, B + c\, \mathrm{Cos}\, C)^2:$$

folglich ist

$$d^2 = (a \sin B - c \sin C)^2 + (b + a\, \mathrm{Cosin}\, B + c\, \mathrm{Cos}\, C)^2,$$

$$= m^2 + n^2,$$

wenn man $a \sin B - c \sin C = m$, und $b + a\, \mathrm{Cos}\, B + c\, \mathrm{Cos}\, C = n$ sezt.

Nun

Nun nehme man den Quotienten $\frac{m}{n}$ für eine Tangente an, deren zugehöriger Winkel $= F$: So ist

$$n \operatorname{tg} F = m,$$

folglich

$$n^2 \operatorname{tg} F^2 = m^2$$

$$= n^2 \frac{\sin F^2}{\operatorname{Cosin} F^2}:$$

also

$$d^2 = \frac{n^2 \sin F^2}{\operatorname{Cosin} F^2} + n^2$$

$$= \frac{n^2 \sin F^2 + n^2 \operatorname{Cosin} F^2}{\operatorname{Cosin} F^2}$$

$$= \frac{n^2 (\sin F^2 + \operatorname{Cosin} F^2)}{\operatorname{Cosin} F^2},$$

$$= \frac{n^2}{\operatorname{Cosin} F^2},$$

folglich

$$d = \frac{n}{\operatorname{Cos} F};$$

II Auflösung.

$$d = (e + f) \operatorname{Cosin} E,$$

wo

$$e = a + \frac{b \sin C}{\sin (B + C)},$$

$$f = c + \frac{b \sin B}{\sin (B + C)},$$

und E ein Winkel dessen Sinus Quadrat

$$= \frac{4\, ef \sin \tfrac{1}{2} (B + C)^2}{(e + f)^2}$$

Beweis.

Weil

$$1 = \frac{\sin C^2 - \sin C^2 + \sin B^2 - \sin B^2 + \sin (B + C)^2}{\sin (B + C)^2}$$

$$= \frac{\sin C^2 + \sin B^2 + 2 \sin C \sin B \operatorname{Cosin} (B + C)}{\sin (B + C)^2},$$

und

$$\operatorname{Cosin} B = \frac{\sin C - \sin C + \sin (B + C) \operatorname{Cos.} B}{\sin (B + C)}$$

$$= \frac{\sin C + \sin B \operatorname{Cosin}(B+C)}{\sin(B+C)},$$

auch

$$\operatorname{Cosin} C = \frac{\sin B - \sin B + \sin(B+C)\operatorname{Cos} C}{\sin(B+C)}$$

$$= \frac{\sin B + \sin C \operatorname{Cosin}(B+C)}{\sin(B+C)}.$$

So läßt sich die erste Grundgleichung (82) auch folgendermaasen ausdrücken:

$$d^2 = \begin{cases} \left(a + \dfrac{b \sin C}{\sin(B+C)}\right)^2 + \left(c + \dfrac{b \sin B}{\sin(B+C)}\right)^2 \\ + 2 \operatorname{Cos}(B+C)\left(a + \dfrac{b \sin C}{\sin(B+C)}\right) \times \\ \left(c + \dfrac{b \sin B}{\sin(B+C)}\right). \end{cases}$$

Sezt man nun

$$a + \frac{b \sin C}{\sin(B+C)} = e,$$

und

und

$$c + \frac{b \sin B}{\sin(B+C)} = f:$$

so hat man folglich

$$dd = ee + ff + 2ef \operatorname{Cos}(B+C):$$

dannenhero

$$d^2 = (e+f)^2 - 2ef(1 - \operatorname{Cos}[B+C]),$$

und, da

$$1 - \operatorname{Cos}(B+C) = 2 \sin \tfrac{1}{2}(B+C)^2,$$

$$\frac{(e+f)^2}{(e+f)^2} = 1,$$

folglich

$$d^2 = (e+f)^2 - \frac{(e+f)^2}{(e+f)^2} \cdot 2ef. \, 2 \sin \tfrac{1}{2}(B+C)^2$$

$$= (e+f)^2 \left(1 - \frac{4ef \sin \frac{1}{2}(B+C)^2}{(e+f)^2}\right).$$

Wenn man aber

$$\frac{4ef \sin \frac{1}{2}(B+C)^2}{(e+f)^2} = \sin E^2$$

nimmt: so wird

$$1 - \frac{4ef \sin \frac{1}{2}(B+C)^2}{(e+f)^2} = \operatorname{Cos} E^2;$$

und daher

$$d^2 = (e + f)^2 \text{ Cosin } E^2;$$

mithin

$$d = (e + f) \text{ Cosin } E.$$

§. 85.

Diese lezte Auflösung ist allemal brauchbar, da $\frac{4ef \sin \frac{1}{2}(B + C)^2}{(e + f)^2}$ immer positiv und kleiner als Eins: denn e und f müssen zugleich positiv oder negativ zum Vorschein kommen, daher $(e + f)^2 > 4ef$ und um so mehr $(e + f)^2 > 4ef \sin \frac{1}{2}(B + C)^2$.

Zwote Aufgabe.

§. 86.

Die Seiten a, b, d, und die Winkel B, C, sind gegeben:

man soll die Seite c finden.

Auflösung.

$$c = \pm \frac{\sqrt{(d + a \sin (B + C) + b \sin C) \times (d - a \sin(B + C) - b \sin C)}}{- b \text{ Cosin } C - a \text{ Cosin } (B + C)}$$

Be-

Beweis.

Da

$$b^2 = b^2 (\sin C^2 + \mathrm{Cosin}\, C^2),$$

$$a^2 = a^2 [\mathrm{Cos}(B+C)^2 + \sin (B+C)^2],$$

$$2ab\, \mathrm{Cosin}\, B = 2ab\, (\mathrm{Cosin}\, C^2 + \sin C^2)\, \mathrm{Cosin}\, B = + \mathrm{Cos} \quad \sin C \sin B - \mathrm{Cos}\, C \sin C \sin B = 2ab(\mathrm{Cos}\, C\, \mathrm{Cos}\, (B+C) + \sin C \sin (B+C)):$$

so hat man für die erste Grundgleichung (82)

$$dd = (c + b\, \mathrm{Cos}\, C + a\, \mathrm{Cos}\, (B+C))^2 + (a \sin (B+C) + b \sin C)^2:$$

also

$$d^2 - (a \sin (B+C) + b \sin C)^2 = (c + b\, \mathrm{Cos}\, C + a\, \mathrm{Cos}\, (B+C))^2,$$

folglich

$$c + b\, \mathrm{Cos}\, C + a\, \mathrm{Cos}\, (B+C) = \sqrt{(d^2 - (a \sin (B+C) + b \sin C)^2)} = \sqrt{(d + a \sin (B+C) + b \sin C)(d - a \sin (B+C) + b \sin C)},$$

woraus c, wie angegeben.

§. 87.

Daß c, ein positiver Werth sowohl als negativer zukomme, läßt sich aus der 13 Figur folgendermaasen ersehen.

Für das Viereck ABCD seyn die gegebenen Winkel bBC, cCD, die gegebenen Seiten AB, BC, AD, und die gesuchte CD: So wird bekanntlich die Seite CD bestimmt: wenn man durch C eine Linie CE zieht, welche mit BC den gegebenen Winkel cCE einschließt, und hierauf aus A mit dem Halbmesser AD einen Kreis beschreibet, welcher die CE in zween Punkten D und D′ schneidet: daher kann die gesuchte Seite CD oder CD′ seyn.

Daß aber auch die in der Auflösung für c gegebene Formel den Werth für CD sowohl als CD′ ausdrückt, erhellet auf folgende Art:

Aus A ziehe man auf CD das Perpendikel AE und aus B auf AE das Loth BG und auf CD das BH; So ist

$$\begin{aligned} CE &= CH + HE \\ &= CH + BG \\ &= AB \operatorname{Cos} ABG + BC \operatorname{Cosin} BCE \\ &= -a \operatorname{Cos}(B + C) - b \operatorname{Cos} C, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} AE &= AG + GE \\ &= AG + BH \\ &= AB \sin ABG + BC \sin BCE \\ &= a \sin(B + C) + b \sin C; \end{aligned}$$

nun ist

$$DE = \surd(AD^2 - AE_2)$$

also

also

$$DE = \pm \sqrt{(d^2 - (a \sin(B+C) + b \sin C)^2}$$,

(wo der eine Werth für DE und der andere für D'E): also

$$c = CE \pm DE,$$

das obere Zeichen giebt

$$c = CD',$$

und das untere

$$c = CD.$$

§. 88.

Für

$$DE = 0$$

ist

$$DE^2 = 0$$
$$= dd - (a \sin(B+C) + b \sin C)^2:$$

daher

$$d = a \sin(B+C) + b \sin C:$$

folglich giebt es in diesem Falle nur einen Werth für c, welcher

$$= -a \operatorname{Cosin}(B+C) - b \operatorname{Cosin} C, \ (86)$$

§. 89.

Wenn die Aufgabe (86) möglich seyn soll, muß $a \sin (B + C) + b \sin C =$ oder $< d$ seyn; welches beym Vierecke allemal, $d \sin D = b \sin C + a \sin (B + C)$, statt findet.

Dritte Aufgabe.

§. 90.

Aus den Seiten a, c, d, und den Winkeln B, C, die Seite b zu finden.

Auflösung.

$$b = \pm \sqrt{(d - a \sin B + c \sin C)(d + a \sin B - c \sin C)} - a \operatorname{Cosin} B - c \operatorname{Cosin} C.$$

Beweis.

$$a^2 = a^2 (\sin B^2 + \operatorname{Cosin} B^2),$$
$$c^2 = c^2 (\sin C^2 + \operatorname{Cosin} C^2),$$
$$2ac \operatorname{Cos} (B + C) = 2ac (\operatorname{Cos} B \operatorname{Cosin} C - \sin B \sin C);$$

folglich läßt sich die Gleichung I in 82 so ausdrücken, daß

$$dd = (b + a \operatorname{Cosin} B + c \operatorname{Cosin} C)^2 + (a \sin B - c \sin C)^2;$$

woraus b, wie angegeben, folgt.

§. 91.

§. 91.

Daß b sowohl positiv als negativ seyn kann, erklärt sich aus der 14 Figur so.

Durch den Punkt B in der BC ziehe man BA = a, BF = c, daß diese Linien mit BC die Winkel C′BA, CBF, gleich den gegebenen Winkeln B, C, machen; hierauf führe man durch F die ED parallel mit BC; beschreibe aus A mit AD = d einen Kreis, der EF in dem zum Viereke gehörenden Punkte D schneiden wird; Zieht man nun durch D mit BF parallel die DC: so erhellet, daß im Vierecke ABCD die äusseren Winkel C′BA = B, und GCD = C, die Seite AB = a, CD = BF = c, und AD = d. Nun schneidet der vorhin beschriebene Kreis die EF nicht nur in D, sondern auch in einem andern Punkte, D′, daß, wenn man durch diesen die D′C′ parallel mit BF zieht, man ein anderes Viereck ABC′D′ erhält, das eigentlich nicht zu unserer Aufgabe gehört, da in ihm die innere Winkel ABC′, BC′D′, gleich den gegebenen B, C sind; indessen ziehe man aus A auf EF das Loth AE: so ergiebt sich, wie man leicht sieht,

$$AE = c \sin C - a \sin B;$$

daher

$$ED = \sqrt{(d^2 - (c \sin C - a \sin B)^2)};$$

ferner ist

$$FE = a \,\mathrm{Cosin}\, B + c \,\mathrm{Cosin}\, C;$$

folglich

$$BC, = FD = (ED - EF);$$
$$= \sqrt{(d^2 - (c \sin C - a \sin B)^2)} - a \,\mathrm{Cosin}\, B - c \,\mathrm{Cosin}\, C.$$

Der andere Werth von b ist

$$= -\sqrt{(d^2 - (c \sin C - a \sin B)^2)} - a \,\mathrm{Cosin}\, B - c \,\mathrm{Cosin}\, C$$
$$= -D'F, = -BC'$$

und kann nicht gebraucht werden, weil BC′ nicht zu dem Vierecke, wovon die Frage ist, gehört.

§. 92.

Wenn übrigens die Auflösung (90) möglich seyn soll, so muß $d > c \sin C - a \sin B$ seyn.

Vierte Aufgabe.

§. 93.

Aus allen Seiten des Viereckes und dem Winkel B, den C zu berechnen.

Grund

Grund der Auflösung.

Da

$$\text{Cosin}\,(B+C) = \text{Cosin}\,B\,\text{Cosin}\,C - \sin B \sin C;$$

so ist (82, I)

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\,\text{Cosin}\,B$$
$$+ 2c\,\text{Cos}\,C\,(b + a\,\text{Cos}\,B) - 2ac \sin C \sin B.$$

Daraus den Winkel C bequem herzuleiten, setze man

$$\text{tang}\,F = \frac{a \sin B}{b + a\,\text{Cos}\,B};$$

daß also

$$b + a\,\text{Cosin}\,B = a \sin B\,\text{Cot}\,F;$$

hiedurch nun wird

$$dd = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\,\text{Cosin}\,B$$
$$+ 2ac\,\text{Cos}\,C \sin B\,\text{Cot}\,F - 2ac \sin B \sin C$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\,\text{Cos}\,B$$
$$+ 2ac \sin B\left(\text{Cos}\,C\,\frac{\text{Cosin}\,F}{\sin F} - \sin C\,\frac{\sin F}{\sin F}\right)$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\,\text{Cos}\,B$$
$$+ 2ac\,\frac{\sin B}{\sin F}\,(\text{Cos}\,C\,\text{Cos}\,F - \sin C \sin F)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \text{ Cosin } B +$$

$$+ 2ac \frac{\sin B \text{ Cosin } (C + F)}{\sin F};$$

Nun ist

$$b^2 + a^2 \text{Cos } B^2 + 2ab \text{ Cos} B = a^2 \sin B^2 \text{ Cot } F^2,$$

oder

$$a^2 \sin B^2 \text{ Cot } F^2 = b^2 + a^2 (1 - \sin B^2) + 2ab \text{ Cos} B, = b^2 + a^2 - a^2 \sin B^2 + 2ab \text{ Cosin } B:$$

folglich

$$a^2 \sin B^2 \text{ Cot } F^2 + a^2 \sin B^2 = a^2 + b^2 + 2ab \text{ Cosin} B;$$

aber

$$a^2 \sin B^2 \text{ Cot } F^2 + a^2 \sin B^2 = a^2 \sin B^2 (\text{Cot } F^2 + 1) = a^2 \sin B^2 \text{ Cos} F^2 = \frac{a^2 \sin B^2}{\sin F^2},$$

folglich

$$a^2 + b^2 + 2ab \text{ Cosin } B = \frac{a^2 \sin B^2}{\sin F^2}:$$

also

also

$$d^2 = c^2 + \frac{a^2 \sin B^2}{\sin F^2} + 2ac \frac{\sin B}{\sin F} \operatorname{Cos}(C+F)$$

$$= c^2 + \frac{a^2 \sin B^2}{\sin F^2} + 2ac \frac{\sin B}{\sin F}$$

$$- 2ac \frac{\sin B}{\sin F} (1 - \operatorname{Cosin}(C+F)$$

$$= \left(c + \frac{a \sin B}{\sin F} \right)^2 - 4ac \frac{\sin B}{\sin F} \sin \tfrac{1}{2}(C+F)^2 = (P$$

Auch ist

$$d^2 = c^2 + \frac{a^2 \sin B^2}{\sin F^2} - 2ac \frac{\sin B}{\sin F}$$

$$+ 2ac \frac{\sin B}{\sin F} (\operatorname{Cosin}(C+F) - 1)$$

$$= \left(c - \frac{a \sin B}{\sin F} \right)^2 + 4ac \frac{\sin B}{\sin F} \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(C+F)^2 = (Q$$

Aus

Aus P) findet sich

$$\sin\tfrac{1}{2}(C+F) = \sqrt{\left(\frac{\left(-dd+\left(c+\frac{a\sin B}{\sin F}\right)^2\sin F\right)}{4ac\sin B}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(-dd\sin F^2+(c\sin F+a\sin B)^2\right)}{4ac\sin B\sin F}};$$

$$\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(C+F) = \sqrt{\frac{\left(d^2-\left(c-\frac{a\sin B}{\sin F}\right)^2\sin F\right)}{4ac\sin B}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(d^2\sin F^2-(c\sin F-a\sin B)^2\right)}{4ac\sin B\sin F}};$$

also

$$\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(C+F) = \frac{\sqrt{\left(c+\frac{a\sin B}{\sin F}+d\right)\left(c+\frac{a\sin B}{\sin F}-d\right)}}{\sqrt{\left(d-c+\frac{a\sin B}{\sin F}\right)\left(d+c-\frac{a\sin B}{\sin F}\right)}}.$$

Nun sey AC die Diagonale des Vierecks ABCD (Fig. 15): so erhellet leicht das der Winkel BCA = F: dannenhero F + C = 180° — ACD: folglich $\frac{1}{2}$(F + C) = 90° — $\frac{1}{2}$ ACD. Mithin ist

$$\text{Tang } \tfrac{1}{2}(F + C) = \text{Cot } \tfrac{1}{2} ACD:$$

Daher hat man folgende

Auflösung.

Nachdem man F = BCA mittelst tang BCA $= \text{tang } F = \dfrac{a \sin B}{b + a \operatorname{Cosin} B}$ gesucht hat, berechne man den Winkel ACD aus

$$\text{tang} \tfrac{1}{2} ACD = \frac{\sqrt{(d - c + \frac{a \sin B}{\sin F})(d + c - \frac{a \sin B}{\sin F})}}{\sqrt{(c + \frac{a \sin B}{\sin F} + d)(c + \frac{a \sin B}{\sin F} - d)}}$$

da man denn

$$c = 180° — BCA — ACD$$

erhält.

§. 94.

Weil tang $\frac{1}{2}$ (C + F) sowohl positiv als negativ seyn kann: so ergeben sich für C zween Werthe, davon, wenn der eine durch C und der andere durch C', ausgedrückt wird,

$$C' = 360° - C - 2F:$$

denn

$$\begin{aligned} \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(C+F) &= -\text{tang}(180° - \tfrac{1}{2}(C+F)) \\ &= -\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(C'+F): \end{aligned}$$

daher

$$\begin{aligned} C' &= 360° - (C+F) \\ &= + C' + F \\ &= 360° - C - 2F. \end{aligned}$$

§. 95.

Die Ursache dieser Zweydeutigkeit (94) ist dadurch offenbar, daß man über die Diagonale AC ein dem Dreyecke ADC ähnliches Dreyeck AD'C verzeichnen kann, da man denn

$$D'Cc = 360° - DCc - 2BCA$$

hat, weil

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(DCc + D'Cc) &= ACc \\ &= 180° - BCA. \end{aligned}$$

Fünfte

Fünfte Aufgabe.

§. 96.

Die Seiten a, b, c, und die Winkel B, D, sind gegeben:

man verlangt die Seite d.

Auflösung.

$$d = \pm \surd\,(a+b+c\sin D)(a+b-c\sin D) \times \operatorname{cosin} E - c \operatorname{Cosin} D,$$

wo E ein Winkel dessen Sinus Quadrat

$$= \frac{4ab \sin \tfrac{1}{2} B^2}{(a+b+c\sin D)\,(a+b-c\sin D)}.$$

Beweis.

Die zweyte Grundgleichung (82) ist

$$dd + cc + 2cd \operatorname{Cos} D = aa + bb + 2ab \operatorname{Cos} B,$$

und da

$$d^2 + 2cd \operatorname{Cos} D + c^2 (\operatorname{Cosin} D^2 + \sin D^2) = a^2 + 2ab \operatorname{Cosin} B + b^2;$$

so

so ist folglich

$$d^2 + 2cd \operatorname{Cos} D + c^2 \operatorname{Cos} D^2 = a^2 + 2ab \operatorname{Cos} B + b^2 - C^2 \sin D^2.$$

Aber

$$a^2 + 2ab \operatorname{Cos} B + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab\,(1 - \operatorname{Cos} B) = (a+b)^2 - 4ab \sin \tfrac{1}{2} B^2,$$

folglich

$$(d + c \operatorname{Cosin} D)^2 = (a+b)^2 - c^2 \sin D^2 - 4ab \sin \tfrac{1}{2} B^2;$$

also

$$d + c \operatorname{Cos} D = \sqrt{(a+b+c \sin D)(a+b-c \sin D)} \times \sqrt{\left(1 - \frac{4ab \sin \frac{1}{2} B^2}{(a+b+c \sin D)(a+b-c \sin D)}\right)}.$$

Man setze nun

$$\frac{4ab \sin \frac{1}{2} B^2}{(a+b+c \sin D)(a+b-c \sin D)} = \sin E^2:$$

So findet sich d wie angegeben.

§. 97.

§. 97.

Der doppelte Werth für d erklärt sich so:

Ueber des Viereckes ABCD (Fig. 16.) Diagonale AC beschreibe man einen Kreisabschnitt der einen Winkel CDA $= 180^\circ - D$ enthält (Eukl. III. prop. 33): So wird in dem Umkreisse dieses Abschnitts der Punkt D des Vierecks liegen; und dieser Punkt wird gefunden, wenn man aus C mit dem Halbmesser CD $= c$ einen Kreis beschreibet, der alsdenn des Abschnittes Umkreis in D und D′ schneiden wird, daß also beide Punkte zum Vierecke gehören, und folglich für d zween Werthe, wovon der eine AD und der andere AD′. Zieht man nun CE auf AD senkrecht: so ist

$$ED = - c \operatorname{Cosin} D,$$

und

$$\begin{aligned} AE &= \sqrt{(AC^2 - CE^2)} \\ &= \pm \sqrt{(a^2 + 2ab \operatorname{Cos} B + b^2 - c^2 \sin D^2)}, \end{aligned}$$

deswegen, muß

$$d = ED \pm AE$$

seyn, wo das obere Zeichen AD, das untere aber AD′.

Sechste Aufgabe.

§. 98.

Aus allen Seiten und dem Winkel B, den Winkel D zu finden.

Auflösung.

Aus der zwoten Grundgleichung (82),

$$dd + 2cd \operatorname{Cos} D + c^2 = a^2 + 2ab \operatorname{Cos} B + b^2$$

findet sich

$$\operatorname{Cos} D = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2ab \operatorname{Cos} B}{2cd}.$$

§. 99.

Eine andere für die Berechnung mit Logarithmen bequemere Formel findet sich auf folgende Art.

Die zwote Grundgleichung (82) läßt sich begreiflich leicht in folgende verwandeln:

$$(\text{I};\ (d + c)^2 - 4cd \sin \tfrac{1}{2} D^2 = (a + b)^2 - 4ab \sin \tfrac{1}{2} B^2;$$

$$(\text{II};\ (d - c)^2 + 4cd \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} D^2 = (a - b)^2 + 4ab \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} B^2.$$

Aus

Aus (I wird

$$\frac{1}{4cd}([c+d+a+b][c+d-a-b] + 4ab \sin \tfrac{1}{2} B^2) = \sin \tfrac{1}{2} D^2;$$

Aus (II aber

$$\frac{1}{4cd}([a-b+d-c][a-b-d+c] + 4ab \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} B^2 = \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} D^2:$$

daher

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} D^2 = \frac{(d+c+a+b)(c+d-a-b)+4ab \sin \tfrac{1}{2} B^2}{(a-b+d-c)(a-b-d+c)+4ab \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} B^2}.$$

Die zwote Grundgleichung läßt sich auch in die verwandeln:

$$(\text{I}; \ (d+c)^2 - 4cd \sin \tfrac{1}{2} D^2 = (a-b)^2 + 4ab \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} B^2,$$

$$(\text{II}; \ (d-c)^2 + 4cd \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} d^2 = (a+b)^2 - 4ab \sin \tfrac{1}{2} B^2;$$

wovon (I giebt

$$\sin \tfrac{1}{2} D^2 = \frac{(d+c+a-b)(d+c-a+b)-4ab \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} B^2}{4cd}$$

und (II. $\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}D^2 =$

$$= \frac{(a+b+d-c)(a+b-d+c) - 4ab\,\sin\tfrac{1}{2}B^2}{4cd};$$

daher $\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}D^2 =$

$$= \frac{(d+c+a-b)(d+c-a+b) - 4ab\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}B^2}{(a+b+d-c)(a+b-d+c) - 4ab\,\sin\tfrac{1}{2}B^2}.$$

Sezt man nun

$$\mathrm{tang}\,\theta^2 = \frac{4ab\,\mathrm{Cosin}\,\tfrac{1}{2}B^2}{(d+c+a-b)(d+c-a+b)},$$

$$\mathrm{tang}\,\eta^2 = \frac{4ab\,\sin\tfrac{1}{2}B^2}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)};$$

folglich

$$(d+c+a-b)(d+c-a+b) = 4ab\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}B^2 : \mathrm{tang}\,\theta^2,$$

und

$$(a+b+c-d)(a+b+d-c) = 4ab\,\sin\tfrac{1}{2}B^2 : \mathrm{tg}\,\eta^2;$$

mithin

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} D^2 = \frac{\dfrac{4ab \operatorname{Cos} \frac{1}{2} B^2}{\operatorname{tang} \theta^2} - 4ab \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} B^2}{\dfrac{4ab \sin \frac{1}{2} B^2}{\operatorname{tang} \eta^2} - 4ab \sin \tfrac{1}{2} B^2},$$

$$= \frac{(4ab \operatorname{Cos} \frac{1}{2} B^2 - 4ab \operatorname{Cos} \frac{1}{2} B^2 \operatorname{tang} \theta^2) \operatorname{tang} \eta^2}{(4ab \sin \frac{1}{2} B^2 - 4ab \sin \frac{1}{2} B^2 \operatorname{tang} \eta^2) \operatorname{tang} \theta^2},$$

$$= \frac{4ab \operatorname{Cos} \frac{1}{2} B^2 (1 - \operatorname{tg} \theta^2) \operatorname{tang} \eta^2}{4ab \sin \frac{1}{2} B (1 - \operatorname{tg} \eta^2) \operatorname{tg} \theta^2},$$

$$= \operatorname{Cot} \tfrac{1}{2} B^2 \frac{\operatorname{tg} \eta^2 - \operatorname{tg} \theta^2 \operatorname{tg} \eta^2}{\operatorname{tg} \theta^2 - \operatorname{tg} \eta^2 \operatorname{tg} \theta^2},$$

$$= \operatorname{Cot} \tfrac{1}{2} B^2 \frac{\dfrac{\sin \eta^2}{\operatorname{Cos} \eta^2} - \dfrac{\sin \theta^2 \sin \eta^2}{\operatorname{Cos} \theta^2 \operatorname{Cos} \eta^2}}{\dfrac{\sin \theta^2}{\operatorname{Cos} \theta^2} - \dfrac{\sin \eta^2 \sin \theta^2}{\operatorname{Cos} \eta^2 \operatorname{Cos} \theta^2}},$$

 =

$$= \operatorname{Cot}\tfrac{1}{2}B^2 \frac{\dfrac{\operatorname{Cos}\theta^2 \sin\eta^2 - \sin\theta^2 \sin\eta^2}{\operatorname{Cos}\theta^2 \operatorname{Cos}\eta_2}}{\dfrac{\operatorname{Cos}\eta^2 \sin\theta^2 - \sin\eta^2 \sin\theta^2}{\operatorname{Cos}\eta^2 \operatorname{Cos}\theta^2}},$$

$$= \operatorname{Cot}\tfrac{1}{2}B^2 \frac{\operatorname{Cos}\theta^2 \sin\eta^2 - \sin\theta^2 \sin\eta^2}{\operatorname{Cos}\eta^2 \sin\theta^2 - \sin\eta^2 \sin\theta^2},$$

$$= \operatorname{Cot}\tfrac{1}{2}B^2 \frac{\sin\eta^2}{\sin\theta^2} \left(\frac{\operatorname{Cos}\theta^2 - \sin\theta^2}{\operatorname{Cos}\eta^2 - \sin\eta^2}\right),$$

$$= \operatorname{Cot}\tfrac{1}{2}B^2 \frac{\sin\eta^2}{\sin\theta^2} \cdot \frac{\operatorname{Cosin} 2\theta}{\operatorname{Cosin} 2\eta}:$$

Also

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}D = \operatorname{Cot}\tfrac{1}{2}B \frac{\sin\eta}{\sin\theta} \sqrt{\frac{\operatorname{Cosin} 2\theta}{\operatorname{Cosin} 2\eta}}.$$

§. 100.

Wegen des Wurzelzeichens bekommt $\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}D$ zween Werthe, also auch der Winkel D, davon, wenn der eine $= D$, der andere $= 360^\circ - D = D'$.

Denn

Denn wenn das Dreyeck ABC, (Fig. 15.) aus den Seiten AB, BC und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ABC verzeichnet wird: so kann man über dessen Grundlinie zwey Dreyecke ACD, ACD′ von den gegebenen Seiten verzeichnen, daß, wenn für das Dreyeck ACD der äussere Winkel bey D, = D, der bey D′ im Vierecke ABCD′. = 360° — D, (12, 10).

Siebente Aufgabe.

§. 101.

Aus den Seiten a, b, c, und den Winkeln B, C, zu finden den Winkel A.

Auflösung:

$$\text{tang } A = \frac{-b \sin B - c \sin (B+C)}{a + b \operatorname{Cof} B + c \operatorname{Cof} (B+C)}$$

Beweis.

Die dritte Grundgleichung (82) läßt sich leicht in diese verwandeln

$$\sin A (a + b \operatorname{Cosin} B + c \operatorname{Cosin} (B+C)) = -\operatorname{Cosin} A (b \sin B + c \sin (B+C)),$$

woraus tang A, wie angegeben.

§. 102.

Wenn man

$$\frac{b \sin B + c \sin (B+C)}{b \sin C + a \sin (B+C)} = \text{tang } F;$$

sezt: so erhält man

$$\text{tang } A = \frac{-\text{tang } F \sin (B+C)}{1 + \text{tang } F \operatorname{Cos} (B+C)};$$

woraus sich leicht

$$\text{tang } (\tfrac{1}{2}(B+C) + A) = -\text{tang } \tfrac{1}{2}(B+C) \times \text{tg } (45^\circ + F)$$

herleiten läßt.

§. 103.

Für A ist hier keine Zweydeutigkeit, wie schon die Formeln zeigen; aber es kann auch keine seyn, weil der Winkel aAB (Fig. 17) sich vollkommen aus den gegebenen bBC, cCD und den Seiten AB, BC, CD, bestimmen läßt.

Achte Aufgabe.

§. 104.

Nebst den Seiten a, b, c sind die Winkel A, C, gegeben:

Man verlangt den Winkel B

Auflösung und Beweis.

Die dritte Grundgleichung (82) verwandelt sich in die:

$$o = a \sin A + b \sin (A+B) + c \sin (A+B) \cdot \text{Cos}\, C + c \sin C\, \text{Cosin}\, (A+B).$$

Nun setze man

$$\frac{c \sin C}{b + c\, \text{Cosin}\, C} = \text{tang}\, E,$$

daß also

$$b + c\, \text{Cos}\, C = c \sin C\, \text{Cot}\, E$$
$$= c \sin C \frac{\text{Cos}\, E}{\sin E}:$$

so hat man

$$o = a \sin A + \sin (A+B) \times c \sin C \frac{\text{Cos}\, E}{\sin E}$$
$$+ c\, \text{Cosin}\, (A+B) \sin C \frac{\sin E}{\sin E}$$

$$= a \sin A + \frac{c \sin C}{\sin E} (\sin(A+B) \operatorname{Cos} E + \operatorname{Cos}(A+B) \sin E),$$

$$= a \sin A + \frac{c \sin C}{\sin E} \sin(A+B+E):$$

folglich

$$\sin (A+B+E) = -\frac{a \sin A \sin E}{c \sin C}.$$

Nun sey BD des Vierecks ABCD (Fig. 18.) Diagonale: so ist

$$\operatorname{tang} CBD = \frac{c \sin C}{b + c \operatorname{Cos} C}:$$

also

$$CBD = E:$$

daher

$$\begin{aligned} A + B + E &= bBD + 180^\circ - BAD \\ &= 180^\circ + BDA; \end{aligned}$$

welches auch nicht anders seyn kann: denn

$$\sin BDA : \sin BAD = BA : BD,$$
$$\sin DCc : \sin DBC = BD : CD,$$

folglich

$$\sin BDA \sin DCc ; \sin BAD \sin DBC = BA : CD;$$

also

also

$$\sin BDA = \frac{BA. \sin BAD \sin DBC}{CD. \sin DCc.}$$

$$= \frac{a \sin A \sin E}{c \sin C}$$

also

$$-\sin BDA = \sin(A+B+E).$$

Es ist aber $-\sin BDA$ nicht nur gleich $\sin(180^\circ + BDA)$, sondern auch $= \sin(360^\circ - BDA)$:

daher hat der gesuchte Winkel zwey Werthe.

Der eine davon heisse B, der andere B', und F der Winkel BDA, oder der, dessen Sinus

$$= \frac{a \sin A \sin E}{c \sin C} :$$

so ist

$$B = 180^\circ + F - A - E,$$
$$B' = 360^\circ - (F + A + E)$$

§. 105.

Dieser doppelte Werth läßt sich aus Betrachtung der Figur dergestalt begreiflich machen.

Nach-

Nachdem das Dreyeck BCD aus den gegebenen Seiten BC, CD und dem gegebenen Winkel BCD verzeichnet worden, findet man den Punkt A des Viereckes ABCD, wenn man über die Diagonale BD sezt einen Kreisabschnitt der einen Winkel $= 180° - A$ faßt (Eukl. III, prop. 33), hierauf aber aus B mit einem Halbmesser $= a$ einen Kreis beschreibet, welcher den verzeichneten Abschnitt in zween Punkten schneidet, von welchen man den einen oder den andern für A annehmen kann: daher muß auch auch der gesuchte Winkel B zween Werthe haben. Seyen nun beide Durchschnittspunkte A, A′, so ziehe man die Linien bBA, b′BA′, da denn, wenn

$$bBC = B$$

gesezt wird,

$$b'BC = B':$$

folglich

$$\begin{aligned} b'BC - bBC &= 180° - 2\,F \\ &= 180° - 2\,BDA: \\ &= ABA', \end{aligned}$$

weil

$$\begin{aligned} ABA' &= 180° - BAA' - BA'A \\ &= 180° - 2\,BA'A, \text{ (wegen } BA = BA'); \end{aligned}$$

aber

$$BA'A - BDA.$$

Neunte

Neunte Aufgabe.

§. 106.

Aus den Seiten a, b, c, und Winkeln A, B, den Winkel C zu finden.

Auflösung und Beweis.

I. Aus der dritten Grundgleichung hat man

$$\sin(A+B+C) = -\frac{a \sin A - b \sin(A+B)}{c}.$$

II. Diese Formel ist schon hinlänglich den Winkel C zu finden; indessen läßt sich auch folgendes brauchen.

Man setze

$$\frac{b}{a}\sin(A+B) = \operatorname{Cos} A \operatorname{tang} E:$$

so hat man

$$\sin(A+B+C) = -\frac{a}{c}(\sin A + \operatorname{Cos} A \operatorname{tang} E)$$

$$= -\frac{a \sin(A+E)}{c \operatorname{Cosin} E}.$$

III. Der Winkel C muß also zween Werthe haben: denn

$$A + B + C = 180^\circ + F:$$

hat einerley Sinus mit

$$A + B + C' = 360^\circ - F,$$

§. 107.

Aus Verzeichnung der 19ten Figur erhellet die Sache folgendermaaßen.

Durch der AB = a, Endpunkte A, B, ziehe man BC, AG, die daselbst mit AB die Winkel aAB = A, bBC = b, machen: auf BC, nähme man BC = c, und beschreibe aus C mit dem Halbmesser c einen Kreis: so kann der eine sowohl als der andere der beiden Durchschnittspunkte D, D', dieses Kreisses mit AG, für den Scheitelpunkt des vierten Umfangswinkels genommen werden: daher muß

$$DCc - D'Cc = 2F - 180^\circ$$

seyn; weil $D'Cc = 360^\circ - F$, und $DCc = 180^\circ + F$.

Nun ziehe man CE senkrecht auf AG: so wird

$$DCc - D'Cc, = DCD'$$
$$= 2DCE, \text{ (Geom.)}:$$

folglich

$$DCE = F - 90^\circ:$$

aber

$$F = (A+B+C) - 180^\circ$$
$$= aAB + bBC + cCD - 180^\circ$$

=

$$= aAB + bBC + cCD + CDE - CDE.$$
$$- 180^\circ$$
$$= 360^\circ - CDE - 180^\circ, (7),$$
$$= 180^\circ - CDE:$$

folglich

$$F = ADC:$$

also muß auch seyn

$$DCc - D'Cc = 2ADC - 180^\circ$$

Zehnte Aufgabe.

§. 108.

Mittelst den Seiten a, b, c und den Winkeln B, D, den Winkel A durch Rechnung zu bestimmen.

Auflösung.

$$\sin(A+E) = \frac{c \sin D \sin E}{b \sin B},$$

wo E ein Winkel dessen Tangente

$$= \frac{b \sin B}{a + \operatorname{Cosin} B}.$$

Heißt der Winkel F dessen Sinus

$$= \frac{c \sin D \sin E}{b \sin B}:$$

so kann

$$\sin(A+E) = \sin F,$$

oder

oder auch

$$= \sin(180^\circ - F)$$

seyn, (Trig).

Daher ist

$$A \text{ entweder } = F - E$$
$$\text{oder } = 180^\circ - F - E$$

Beweis.

Nach der vierten Grundgleichung hat man

$$a \sin A + b \sin(A+B) = c \sin D,$$

oder

$$a \sin A + b \sin A \operatorname{Cos} B + b \operatorname{Cos} A \sin B =$$
$$= c \sin D,$$

das ist

$$\sin A (a + b \operatorname{Cos} B) + b \operatorname{Cos} A \sin B = c \sin D.$$

Nun setze man

$$\operatorname{tang} E = \frac{b \sin B}{a + b \operatorname{Cos} B}:$$

so hat man

$$a + b \operatorname{Cos} B = b \sin B \operatorname{Cot} E,$$

daher

$$c \sin D = \sin A.\ b \sin B \operatorname{Cot} E + b \operatorname{Cos} A \sin B =$$
$$= b \sin B (\operatorname{Cos} A + \sin A \operatorname{Cot} E)$$
$$= \frac{b \sin B \sin(A+E)}{\sin E},$$

woraus sich die Formel in der Auflösung ergiebt.

Uebri=

Uebrigens ist begreiflich, daß

$$\text{tang } BAC = \frac{b \sin B}{c + b \operatorname{Cos} B}:$$

daher

$$BAC = E,$$

und

$$aAC = A + E.$$

Aber

$$\sin aAC : \sin ADC = CD : AC$$
$$\sin bBC : \sin BAC = AC : BC$$

folglich

$$\sin aAC = \frac{CD. \sin ADC \sin BAC}{BC \sin bBC}$$

$$= \frac{a \sin D \sin E}{b \sin B};$$

mithin

$$\sin(A + E) = \sin aAC:$$

nun ist

$$\sin aAC = \sin(180^\circ - aAC):$$

also

$$A \text{ entweder} = aAC - BAC,$$
$$\text{oder} = 180^\circ - aAC - BAC,$$

§. 109.

Durch die Verzeichnung der Figur lassen sich die doppelten Werthe für A folgendermaasen erklären.

Ueber AC setze man einen Kreisabschnitt der einen Winkel $= 180^\circ - D$ enthält, (Eukl III, prop. 33), und beschreibe aus C mit dem Halbmesser $= c$ einen Kreis, welcher dieses Abschnitts Umfang in zween Punkten D, D' schneiden wird: man ziehe aD, a'D': so hat man

$$aAB = A,$$

und

$$a'AB = A':$$

also

$$\begin{aligned} A - A' &= aAB - a'AB \\ &= DAD' \\ &= 2aAC - 180^\circ \\ &= aAC - CAD, \end{aligned}$$

und weil $CD' = CD$

$$\begin{aligned} CAD &= CD'D \\ &= CDD': \end{aligned}$$

folglich

folglich

$$aAC - CAD = aAC - CDD';$$

aber im Vierecke ACDD' ist

$$a'AC = CDD':$$

also

$$aAB - a'AB = aAC - a'AC,$$

welches für sich offenbar ist.

Eilfte Aufgabe.

§. 110.

Es sind die Seiten a, b, c und die Winkel A, D, gegeben:

man soll den Winkel B finden.

Auflösung und Beweis.

Aus der vierten Grundgleichung wird

$$\sin(A+B) = \frac{c}{b}\sin D - \frac{a}{b}\sin A.$$

Nun sey

$$\frac{c}{b}\sin D - \frac{a}{b}\sin A = \sin E:$$

so hat man

$$\sin(A+B) = \sin E$$
$$= \sin(180^\circ - E):$$

daher

$$A + B \text{ entweder } = E,$$
$$\text{oder } = 180^\circ - E:$$

deshalb

$$B = E - A,$$

oder

$$B' = 180^\circ - (E + A).$$

§. 111.

Die Ursache dieses doppelten Werthes für B veroffenbaret sich aus Berechnung der 20ten Figur auf folgende Art.

Es seyen AB, AE dergestalt gezogen, daß sie mit der, der Länge nachgegebenen, graden Linie AD Winkel aAB = A, EAD = D begränzen; hierauf mache man AB = b, und AE = c; ziehe durch den Punkt E die EC′C parallel mit AD, und beschreibe aus B mit dem Halbmesser = b einen Kreis, der diese Parallele in C und C′ schneide; nun ziehe man durch C und C′ die CD, CD′ der AE parallel: so erhellet, daß diese beiden Trapezia ABCD, ABC′D′ den Bedingungen der Aufgabe Gnüge leisten; auch daß

$$E, = (A + B) = 180^\circ + BCG.$$

Da also E, 180° übertrift, so setze man

$$A + B = 180° + F,$$

daß folglich

$$F = BCG,$$

und es muß seyn

$$A + B' = 360° - F:$$

dahero

$$B' = 360° - BCG - aAB;$$

aber auch

$$\begin{aligned} B' &= 360° - bBC' \\ &= 360° - (BCG + BAD) \\ &= 360° - (BCG + BAa); \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} B &= bBC, \\ &= BCG + BAD \\ &= 180° + BCG - aAB. \end{aligned}$$

Sezt man für

$$\begin{aligned} BCG &= F, \\ aAB &= A: \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} B &= 180° + F - A, \\ B' &= 360° - F - A. \end{aligned}$$

Zwölfte Aufgabe.

§. 112.

Aus den Seiten a, b, c und den Winkeln A, B, den Winkel D zu finden.

Auflösung und Beweis.

Die vierte Grundgleichung giebt.

$$\sin D = \frac{a}{c} \sin A + \frac{b}{c} \sin (A+B),$$

wo der Ausdruck rechter Hand des Gleichheitszeichen für sin D und sin (180° — D) gilt: daher kann der gesuchte Winkel spitzig oder stumpf seyn.

§. 113.

In der 19ten Figur lassen sich diese beiden Werthe so darstellen.

Man verzeichne das Dreyeck ABC wo AB = a, BC = b, und ABC = 180° — B, und ziehe die grade Linie aAD welche mit AB den Winkel aAB = A macht: so wird sich der Punkt D des Viereckes finden, wenn man aus C mit c einen Kreis beschreibet, der aAD schneidet. Sind nun die beiden Durchschnittspunkte D, D′: so ist für den gesuchten Winkel der eine Werth = CDG, der andere aber = CD′G; aber

$$\begin{aligned} CDG + CD'G &= CDG = + CDA \\ &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Drey-

Dreyzehnte Aufgabe.

§. 114.

Aus des Vierecks Winkeln und den Seiten a, b, die Seite c zu finden.

Auflösung.

Die vierte Grundgleichung giebt.

$$c = \frac{a \sin A + b \sin (A + B)}{\sin D}$$

Vierzehnte Aufgabe.

§. 115.

b aus A, B, D, a, c, zu finden.

Auflösung.

man hat

$$b = \frac{c \sin D - a \sin A}{\sin (A + B)} \quad (82, \text{IV}).$$

§. 116.

Daß für c und b keine Zweydeutigkeit statt findet, erhellet, da aus des Vierecks Winkeln und zwoen Seiten die übrigen sich nur auf eine und dieselbe Art bestimmen lassen.

Denn es sey erstlich AB, BC, (Fig. 15.) gegeben: so ist, nachdem die Diagonale AC gezogen, das Dreyeck ABC völlig bestimmt; und für den Triangel ACD ist die Diagonale nebst den Winkeln gegeben: daher für CD oder AD nur ein Werth seyn kann. Sind zweytens AB, CD vorgeschrieben; so sey die BH (Fig. 21.) durch B parallel und gleich der CD; man ziehe AH: so sind im Dreyecke ABH aus den gegebenen beiden Seiten AB, BH, und dem Winkel ABH, die Winkel BAH, BHA und die Seite AH bekannt: daher werden wegen den gegebenen Winkeln BAD, BHD, alle Winkel nebst der Seite AH im Dreyecke AHD gegeben, woraus HD = BC gefunden wird, daß sie nicht mehr als einen einzigen Werth haben kann.

Fünf Aufgaben, wo aus fünf gegebenen Stücken des Vierecks die übrigen drey gesucht werden.

Erste Aufgabe.

§. 117.

Es sind die Seiten a, b, c und die Winkel B, C, gegeben:

Man soll die Winkel A, D und Seite d finden.

Auflösung und Beweis.

Findung der Winkel A, D.

I'; Weil

$$A + D = 360^\circ - (B + C),$$

also, bekannt: so darf man nur A — D wissen, um denn aus $\frac{1}{2}(A + D)$ und $\frac{1}{2}(A - D)$ die Winkel selbst zu finden.

II'; Die vierte Grundgleichung giebt

$$a \sin A - c \sin D = - b \sin(A + B)$$

III'; Aber

$$A + B = 360^\circ - C - D:$$

dahero

$$A + B = \tfrac{1}{2}(A + B - C - D) + 180^\circ:$$

mithin

$$\sin(A + B) = - \sin\tfrac{1}{2}(A + B - C - D):$$

IV'; Also

$$a \sin A - c \sin D = b \sin\tfrac{1}{2}(A - D + B - C) =$$
$$= b\left(\sin\tfrac{1}{2}(A - D) \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B - C) + \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A - D) \sin\tfrac{1}{2}(B - C)\right).$$

V'; Nun ist

$$a \sin A - c \sin D =$$
$$a \sin A + \tfrac{1}{2} c \sin A - \tfrac{1}{2} c \sin A - c \sin D + \tfrac{1}{2} a \sin D - \tfrac{1}{2} a \sin D = \tfrac{1}{2}(a - c)(\sin A + \sin D) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}(a+c)(\sin A - \sin D) =$$
$$= (a-c)\sin\tfrac{1}{2}(A+D)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A-D)$$
$$+ (a+c)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+D)\sin\tfrac{1}{2}(A-D):$$

VI′; Folglich

$$(a-c)\sin\tfrac{1}{2}(A+D)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A-D)+(a+c)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+D)\sin\tfrac{1}{2}(A-D)$$
$$=$$
$$b\left(\sin\tfrac{1}{2}(A-D)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(B-C)+\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+D)\sin\tfrac{1}{2}(B-C)\right)$$

VII′; Da aber

$A+D+B+C$ entweder $= 360^\circ$
oder $= 2.\ 360^\circ$:

so erhellet, daß

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+D)=\sin\tfrac{1}{2}(B+C),$$
$$\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+D) = -\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(B+C):$$

VIII; Folglich hat man $\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}(A-D) =$

$$= \frac{(a-c)\sin\tfrac{1}{2}(B+C)-b\sin\tfrac{1}{2}(B-C)}{(a+b)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(B+C)+b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(B-C)}$$

IX′; Gäbe der Ausdruck rechter Hand des Gleichheitszeichen eine Tangente, dessen zugehöriger Winkel $= F$: so hat man den größern Winkel, oder

$$A = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(B+C) + F$$

den kleinern, oder

$$D = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(B+C) - F.$$

Fin=

Findung der Seite d.

Erste Art.

X'; Man hat

$$d^2 = (a \sin B - c \sin C)^2 + (b + a \operatorname{Cos} B + c \operatorname{Cos} C)^2,$$ [84, Bew.]

XI'; Es ist aber

$$a \sin A + b \sin (A+B) + c \sin (A+B+C) = 0,$$

woraus, wenn man für A sezt A + B — B, folgt

$$a \sin (A+B) \operatorname{Cos} B - a \operatorname{Cos} (A+B) \sin B + b \sin (A+B) + c \sin (A+B) \operatorname{Cosin} C + c \operatorname{Cos} (A+B) \sin C = 0;$$

daher

$$\operatorname{tang} (A+B) = \frac{a \sin B - c \sin C}{b + a \operatorname{Cos} B + c \operatorname{Cos} C}$$

$$= \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A - D + B - C),$$ [III'];

XII'. Folglich erhält man

$$d = \frac{a \sin B - c \sin C}{\sin \frac{1}{2}(A - D + B - C)}.$$

Zwote Art.

XIV′; Die erste Grundgleichung

$$d^2 = a^2 + c^2 + b^2 + 2ac\,\mathrm{Cos}\,(B+C) + 2ab\,\mathrm{Cos}\,B + 2bc\,\mathrm{Cos}\,C$$

läßt sich so verwandeln:

$$\begin{aligned}
d^2 = {} & a^2\,(\sin\tfrac{1}{2}(B+C)^2 + \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C)^2) \\
& + c^2\,(\sin\tfrac{1}{2}(B+C)^2 + \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(B+C)^2) \\
& + b^2\,(\sin\tfrac{1}{2}(B-C)^2 + \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(B-C)^2) \\
& + 2ac\,(\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(B+C)^2 - \sin\tfrac{1}{2}(B+C)^2) \\
& + 2ab\,(\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(B+C)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(B-C) \\
& - \sin\tfrac{1}{2}(B+C)\,\sin\tfrac{1}{2}(B-C)) \\
& + 2bc\,(\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(B+C)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(B-C) \\
& + \sin\tfrac{1}{2}(B+C)\,\sin\tfrac{1}{2}(B-C)) \\
= {} & (a-c)^2\sin\tfrac{1}{2}(B+C)^2 + b^2\sin\tfrac{1}{2}(B-C)^2 \\
& - 2b(a-c)\sin\tfrac{1}{2}(B+C)\sin\tfrac{1}{2}(B-C) \\
& + (a+c)^2\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(B+C)^2 + b^2\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(B-C)^2 \\
& + 2b(a+c)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(B+C)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(B-C) \\
= {} & [(a-c)\sin\tfrac{1}{2}(B+C) - b\sin\tfrac{1}{2}(B-C)]^2 \\
& + [(a+c)\sin\tfrac{1}{2}(B+C) + b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(B-C)]^2.
\end{aligned}$$

Da nun $\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}(A-D) =$

$$= \frac{(a-c)\sin\frac{1}{2}(B+C) - b\sin\frac{1}{2}(B-C)}{(a+c)\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(B+C) + b\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(B-C)}, \text{[VIII′]:}$$

so

so erhält man

$$d = \frac{(a-c)\sin\frac{1}{2}(B+C) - b\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(A-D)}.$$

§. 118.

Wenn man in der Gleichung für tang $\frac{1}{2}(A-D)$, [vor §s VIII′] sezt

$$b = 0,$$

in welchem Falle sich das Viereck in ein Dreyeck verwandelt: so wird

$$\tang \frac{1}{2}(A-D) = \frac{a-c}{a+c} \tang \frac{1}{2}(B+C)$$

$$= \frac{c-a}{a+c} \tang \frac{1}{2}(A+D), [117 I'];$$

welches eine schon lange bekannte Eigenschaft des gradlinichten Dreyeckes ist.

Eben so wird, wenn

$$B = 0,$$

für das Dreyeck

$$\tang \frac{1}{2}(A-D) = \frac{a+b-c}{a+b+c} \tang \frac{1}{2} C.$$

§. 119.

§. 119.

Nach 101 ist

$$(\mathrm{I};\ \tan A = -\frac{b \sin B + c \sin (B+C)}{a + b \cos B + c \cos (B+C)}$$

und, da sich die dritte Grundgleichung vermöge 11 in die

$$-c \sin D - b \sin (C+D) - a \sin (B+C+D) = 0$$

versetzen läßt: so läßt sich daraus leicht, (auf ähnliche Art wie bey tang A in 101),

$$(\mathrm{II};\ \tan D = -\frac{b \sin C + a \sin (B+C)}{c + b \cos C + a \cos (B+C)}$$

herleiten daß man folglich auch hiedurch [(I;(II;] dem ersten Theile der Aufgabe in 117 Gnüge leisten kann.

§. 120ª.

Aus diesen beiden Formeln ergeben sich die:

$$\sin (A - D) =$$

$$= \frac{(a^2 - c^2) \sin (B+C) - b^2 \sin (B - C) + 2ab \sin C - 2bc \sin B}{(a^2 + c^2) \cos (B+C) + b^2 \cos (B - C) + 2ac \cos (B+C) + 2bc \cos C},$$

tang

$$\mathrm{tang}\,(A - D) =$$

$$= \frac{(a^2 - c^2)\sin(B+C) - b^2\sin(B - C) + 2ab\sin C - 2bc\sin B}{(a^2 + c^2)\mathrm{Cos}(B+C) + b^2\mathrm{Cos}(B - C) + 2ac + 2ab\,\mathrm{Cos}\,C + 2bc\,\mathrm{Cos}\,B}.$$

§: 120ᵇ

Sezt man in die Formel für $\sin(A - D)$, $b = 0$, in welchem Falle aus dem Vierecke ein Dreyeck wird: so hat man

$$\sin(A - D) = \frac{(a^2 - c^2)\sin(B + C)}{a^2 + c^2 + 2ac\,\mathrm{Cos}(B+C)},$$

$$= \frac{(c^2 - a^2)\sin(A+D)}{d^2};$$

eine schöne Eigenschaft des Dreyeckes, die aber eben nicht gar sehr bekannt ist.

Lehrsätze.

§. 121.

I. Wenn

$$\left.\begin{array}{lll} A & \text{der} & \text{erste} \\ B & & \text{zweyte} \\ C & & \text{dritte} \\ D & & \text{vierte} \end{array}\right\} \text{äussere Winkel}$$

und

a die erste Seite
b zwote
c dritte
d vierte:

so besteht die vierte Grundgleichung

$$a \sin A + b \sin (A + B) - c \sin D = 0$$

aus dem Produkte der ersten Seite in dem Sinus des äussern Winkels plus dem Produkte der zwoten Seite in den Sinus der Summe des ersten und zwoten äussern Winkels minus dem Produkte der dritten Seite in den vierten äussern Winkel.

II. Hieraus ergiebt sich folgendes:

III. Wenn

C der erste äussere Winkel
B der zwote
A der dritte
D der vierte

und

b die erste Seite
a zwote
d dritte
c vierte:

so hat man

$$b \sin C + a \sin (B + C) - d \sin D.$$

IV. Ist aber

B der erste äussere Winkel.
A zweyte
D dritte
C vierte
a die erste Seite
d zwote
c dritte:

so ergiebt sich

$$a \sin B + d \sin(A+B) - c \sin C = 0$$

§. 122[a].

Wenn man ähnliche Betrachtungen bey der Gleichung

$$a \operatorname{Cos} A + b \operatorname{Cos}(A+B) + c \operatorname{Cos}(A+B+C) = + d = 0, \quad (17)$$

anstellt: so kann man sich leicht darthun, daß auch

$$b \operatorname{Cos} C + a \operatorname{Cos}(C+B) + d \operatorname{Cos}(C+B+D) = + c = 0$$

sey.

Zwote Aufgabe.

§. 122.[b]

Aus den Seiten a, b, d und den Winkeln B, C, die übrigen Winkel A, D, und die Seite c zu suchen.

Auflösung.

Findung der Winkel A, D.

Wenn man einen dieser beiden Winkel A, D, weiß, so weiß man auch den andern (11).

Es ist aber

$$\sin D = \frac{b \sin C + a \sin (C+B)}{d}, \ (121.\ \text{III}):$$

und D kann spitzig oder stumpf seyn; auch ist

$$A = 360° - (B + C + D),$$

oder

$$A = 2.\ 360° - (B + C + D).$$

Findung der Seite c.

$$c = \frac{a \sin A - b \sin (C+D)}{\sin D}$$ [114, und weil $\sin(A+B) = -\sin(C+D)$]

oder

$$c = -b \operatorname{Cos} C - a \operatorname{Cos} (C+B) - d \operatorname{Cos} (C+B+D),$$ [122]

da D zween Werthe haben kann: so findet dieß auch bey c statt.

Dritte

Dritte Aufgabe.

§. 122[c].

Aus den Seiten a,, c, D und den Winkeln B, C, die Winkel A, D, und die Seite b zu finden.

Auflösung und Beweis.

Findung der Winkel.

I. Art. Aus der vierten Grundgleichung ergiebt sich

$$a \sin B + d \sin (A+B) - c \sin C = 0, \ (121\ \text{IV}),$$

und daraus

$$\sin (A+B) = \frac{c}{d} \sin C - \frac{a}{d} \sin B$$

wodurch sich A, weil B gegeben, leicht finden läßt.

Bekanntlich kann A zween Werthe haben; weil $\sin (A + B)$ auch $= \sin 180° - (A + B)$.

Weiß man nun A: so findet sich D vermöge 11 §. und kann auch zween Werthe entsprechen.

II. Art. Da

$$B + A \text{ entweder} = 360° - C - D.$$
$$\text{oder} = 2 . 360° - C - D:$$

so ist

$$\sin(B+A) = -\sin\tfrac{1}{2}(A-D+B-C):$$

also hat man

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-D+B-C) = \frac{a}{d}\sin B = \frac{c}{d}\sin C, \text{(I)}$$

woraus sich, da B und C gegeben, die halbe Differenz der gesuchten Winkel berechnen läßt; die halbe Summe ist auch bekannt: folglich sind es auch die Winkel.

Findung der Seite b.

$$b = -\frac{a\sin A + c\sin(A+B+C)}{\sin(A+B)}, (115),$$

Vierte Aufgabe.

§. 122[d].

Aus allen Seiten, und einem Winkel, B, die übrigen zu finden.

Auflösung und Beweis.

Nach 93 suche man C: so können D und A nach 119. gefunden werden.

§. 123.

I) Herr Professor Lepell geht hier einen andern Weg. Nach ihm läßt sich diese Aufgabe folgendermasen lösen.

II)

II) Nach 98 oder 99 suche man D: so darf man nur der Winkel A, C halbe Differenz finden, weil ihre halbe Summe mittelst §. 11, und B, und D, berechnet werden kann.

Nun sey (Fig. 15.) der Winkel BCA, BAC Differenz = M, und der DCA, CAD ihre = N: so ist

$$\tfrac{1}{2}(A-C) = \tfrac{1}{2}(M+N):$$

also $\tang \tfrac{1}{2}(A-C) =$

$$= \frac{\tang \tfrac{1}{2}M + \tang \tfrac{1}{2}N}{1 - \tang \tfrac{1}{2}M \tang \tfrac{1}{2}N}$$

Aus der Trigonometrie (* und da $\tfrac{1}{2}B = \tfrac{1}{2}(BCA+BAC)$ und $\tfrac{1}{2}D = \tfrac{1}{2}(DCA+DAC)$, hat man

$$\tang \tfrac{1}{2} M = \tang \tfrac{1}{2} B \; \frac{a-b}{a+b},$$

und

$$\tang \tfrac{1}{2} N = \tang \tfrac{1}{2} D \; \frac{d-c}{d+c}:$$

daher $\tang \tfrac{1}{2}(A-C) =$

$$= [(a-b)(c+d) \sin \tfrac{1}{2} B \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} D + (d-c) \times (a+b) \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} D]$$

L 3 :[(a

* Kästners Tr. 15 S.
Karstens Anfangsgr. der Tr. 262 §.

$$: [(a+b)(c+d) \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} B \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} D - (a-b) \times (d-c) \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} D]$$

$$= \frac{(a-b)(c+d) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B + (d-c)(a+b) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} D}{(a+b)(d+c) - (a-b)(d-c) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} D}$$

III) Da $\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A - C + B - D) =$

$$= \frac{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-C) - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(D-B)}{1 + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-C) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(D-B)}:$$

so findet sich auch $\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A - C + B - D) =$

$$= \frac{ad \sin B - bc \sin D - ac \sin (D-B)}{ad \operatorname{Cos} B + bc \operatorname{Cos} D + ac \operatorname{Cos} (D-B) + bd},$$

und folglich, alsdann, weil B, D, bekannt, aus $\tfrac{1}{2}(A - C + B - D)$ die halbe Differenz von A, C.

§. 124

Weiß man C (93): so hat man (117. XIII')

$\sin \tfrac{1}{2}(A - D) =$

$$= \frac{(a-c) \sin \tfrac{1}{2}(B+C) - b \sin \tfrac{1}{2}(B-C)}{d},$$

§. 125.

Wenn der Winkel D gefunden (98, 99): so findet sich A sehr bequem folgendergestallt.

Daß

Daß die dritte Grundgleichung auch mit der

$$a \sin B + d \sin(A+B) + c \sin(A+B+D) = 0$$

einerley ist, erhellet aus ähnlichen Betrachtungen wie in 121.

Entwikkelt man diese, so hat man

$$a \sin B + \sin(B+A)(d + c \operatorname{Cos} D) + c \operatorname{Cosin}(B+A) \sin D = 0.$$

Sezt man nun

$$\frac{c \sin D}{d + c \operatorname{Cos} D} = \operatorname{tang} E:$$

also

$$d + c \operatorname{Cos} D = c \sin D \operatorname{tang} E:$$

so findet sich

$$\sin(B+A+E) = -\frac{a \sin B \sin C}{c \sin D};$$

woraus man A leicht berechnen kann.

Fünfte Aufgabe.

§. 126.

Aus a, b, c und B, D zu finden A, C und d.

Auflösung.

$$\sin(A+E) = \frac{c \sin D \sin E}{b \sin B},\ (108);$$

$$C \text{ ist entweder } = 360° - (A+B+D),$$
$$\text{oder } = 2 . 360° - (A+B+D), (11);$$

$$d = \frac{c \sin C - a \sin B}{\sin(A+B)},\ (117):$$

Aufstellung der Fragen bey welchen auf des Vierecks Nebentheile Rücksicht genommen wird; zur Erläuterung des 70sten Paragraphs.

§. 127.

Diese Herzählung beruhet auf folgende allgemeine Sätze:

I; Bey jeder eine gradlinichte Figur betreffende Frage, müssen wenigstens zwo zur Figur gehörige Linien vorkommen.

Denn die Grösse der Linien kann aus den blossen Winkeln nicht bestimmt werden.

II; In allen Aufgaben, die einer mittelst Diagonalen in Dreyecke zerlegten Figur angehen

hen, dürfen nicht mehr als drey zu einem und demselben dieser Dreyecke gehörende Theile sich befinden.

Denn kämen mehrere, z. B. viere, vor: so ist der vierte schon aus den übrigen bestimmt: daher würden, wenn dieser Theil ausgeschlossen, in der Frage nicht so viele Grössen gefunden als zu Bestimmung der gradlinichten Figur erfoderlich ist.

Gesezt im Vierecke ABCD (Fig. 15, 23.) wäre zwischen den Seiten AB, BC, CD, DA, der Diagonale AC und dem Winkel B eine Gleichung zu suchen; so kann dieses keinesweges bewerkstelliget werden: denn für das Dreyeck ABC ist der Winkel B aus den Seiten AB, BC, AC schon vollkommen bestimmt; aber keinesweges im Dreyecke ACD eine der beiden Seiten CD, DA, aus der Diagonale AC und der andern Seite.

§. 128.

I; Des Vierecks ABCD Seiten werden, wie vorher, durch die Buchstaben a, b, c, d und die Winkel durch die: A, B, C, D; die Diagonale AC aber durch e und die Winkel BCA, ACD durch γ, γ', ausgedruckt.

II; Wenn nun Fragen aufgestellt werden sollen, welche e und γ, γ' enthalten: so erhellet, daß sich selbige in zwey Geschlechter bringen lassen; wovon das erste die Fragen in sich faßt in denen die Diagonale e vorkommt, das andere aber die in welchem sich e nicht selbst sondern einer der beiden Winkel γ, und γ' findet.

III; Beym ersten Geschlechte ist zu merken, daß der Winkel A allezeit zugleich mit der Diagonale e in der Aufgabe vorhanden seyn müsse: denn, da in ihr sechs Stücke sich befinden, und die welche zu den Dreyecken ABC, ACD gehören nur drey seyn können (127. II), eines aber davon, die Diagonale, beiden Dreyecken gemein: so sieht man, daß ausser diesem Theile nur zween vorkommen können, welche zu einem jedem Dreyecke gehöre: daher ist es nothwendig, daß wenigstens der sechste Theil gefunden werde der keinem dieser Dreyecke einverleibt ist.

IV; Beym zweyten Geschlechte (II) scheint dieß (III) nicht statt zu finden; wiewohl kein Zweifel ist, daß zwischen a, b, c, d, γ, D eine Gleichung gefunden werden kann, und doch wird es eben nicht nothwendig seyn, daß der Winkel durch den die Diagonale geht in der Aufgabe vorkomme.

§. 129.

Der Grund der Abtheilung der Fragen in gewisse Klassen für das erste Geschlecht (128 II) ist, daß in der Aufgabe, ausser der Diagonale e entweder viere, oder drey, oder zwo, oder nur eine Viereckseite vorkomme.

§. 130.

Demnach nun, lassen sich folgende Klassen in Ordnungen darstellen:

Klasse.

Klasse.	Ordnung.	Vierecks Theile die bey der Frage vorkommen.
I;	1;	a, b, c d, e, A.
	1;	a, b, c, e, A, D
II;	2;	a, b, c, e, A, C.
	3;	a, b, c, e, A, γ'.
	4;	a, b, d, e, A, D.
	5;	a, b, d, e, A, γ'.
	1;	a, b, e, A, C, D.
	2;	a, b, e, A, D, γ.
III;	3;	a, c, e, A, B, C.
	4;	a, c, e, A, B, D.
	5;	a, c, e, A, B, γ'.
	6;	a, c, e, A, γ, D.
	7;	a, c, e, A, γ, C,
	8;	a, d, e, A, B, C.
	9;	a, d, e, A, B, D.
	10;	a, d, e, A, B. γ'.
	11;	a, d, e, A, γ, C.
	12;	b, c, e, A, B, D.
	13;	b, c, e, A, B, γ'.
	14;	b, c, e, A, C, γ'.
	1;	a, e, A, B, C, D.
IV;	2;	a, e, A, γ, C, D.
	3;	b, e, A, B, C, D.
	4;	b, e, A, γ, C, D.

§. 131.

§. 131.

Unter diesen Ordnungen (130) sind einige, welche eine so grosse Verwandschaft mit einander haben, daß man zweifelhaft ist, ob sie nicht zu einer und derselben Ordnung zu rechnen seyen.

Dergleichen sind der dritten Klasse dritte und vierte Ordnung: denn sezt man in die Gleichung für die dritte Ordnung, $360° — (A + B + D)$, oder $2. 360° — (A + B + D)$, [11], statt C; so bekommt man die Gleichung für die vierte Ordnung.

Eben so findet diese Verwandschaft bey der achten und neunten Ordnung statt.

Auch bey der vierten Klasse zwoten und vierten Ordnung mit dieser Klasse ersten und zwoten Ordnung.

§. 132.

Die Ordnungen im 130 sind von denen, welche der berühmte Lambert in der Anlage zur Tetragonometrie im zweyten Theile seiner Beiträge zur Mathematik aufgestellt hat, verschieden. Die Ursache davon ist, daß in der von ihm gemachten Auszählung, der dritten Klasse dritter Ordnung und der vierten Klasse zwote und vierter Ordnung ausgelassen worden sind; aber mit eben dem Rechte könnte auch der dritten Klasse vierter Ordnung ausgeschlossen werden, welche er doch beybehalten hat.

Wenn es also erlaubt ist, der dritten Klasse dritter und vierter Ordnung besonders zu betrachten: so ist kein Zweifel, daß nicht auch der dritten Klasse achte und neunte und der vierten Klasse erste und zwote oder dritte und vierte Ordnung für besondere zu halten seyn sollte.

Für diese Art von Aufgaben ist offenbar, daß die Winkel welche die Diagonale AC mit den Seiten AB, AD macht nicht können zugleich mit den Winkeln BCA, ACD in Betrachtung kommen. Denn wenn die Winkel DAC, BAC durch α, α' ausgedruckt werden: so kann nicht α mit γ oder γ' in eben der Frage vorkommen in der sich A und e befinden. Nicht mit γ', weil so im Dreyecke ACD schon drey Theile, e, α, γ', da seyn, hingegen für das zweyte Dreyeck nur zween Theile, e und $A - \alpha' = \alpha$, es müssen also noch zween Theile dieses Dreyecks vorhanden seyn, welches nicht geschehen kann; eben das wird, wegen $A - \alpha = \alpha'$, statt finden, wenn α mit γ gegeben.

§. 133.

Die Abtheilung der Fragen in Klassen und Ordnungen für das zweyte Geschlecht (128. II.) beruhet in Rücksicht der in der Aufgabe vorkommenden Seiten auf eben den Grund in 129.

§. 134.

Darnach ergeben sich folgende Klassen und Ordnungen:

Klasse

Klasse.	Ordnung	Viereckstheile die bey der Frage vorkommen.
	1 ;	a, b, c, d, A, γ.
I;	2 ;	a, b, c, d, γ, D.
	3 ;	a, b, c, d, γ, α.
	4 ;	a, b, c, d, γ, C.
	1 ;	b, b, c, A, B, γ'.
	2 ;	a, b, c, A, D, γ.
II;	3 ;	a, b, c, A, D, γ',
	4 ;	a, b, c, A, C, γ.
	5 ;	a, b, c, A, D, α.
	9 ;	a, b, c, A, C, α.
	7 ;	a, b, c, A, α, γ.
	8 ;	a, b, c, A, α, γ'.
	9 ;	a, b, c, C, B, α.
	10 ;	a, b, c, C. D, α.
	11 ;	a, b, c, C, D, α'.
	12 ;	a, b. c, C, D, γ.
	13 ;	a, b, c, C, α, γ.
	14 ;	a, b, c, B, D, α.
	15 ;	a, b, c, B, D, γ'.
	16 ;	a, b, c, B, α, γ'.
	17 ;	a, b, c, D, α, γ.
	18 ;	a, b, c, D, α', γ'.
	1 ;	a, b, A, B, D, γ'.
III;	2 ;	a, b, A, D, C, γ.
	3 ;	a, c, A, B, C, γ'.
	4 ;	a, c, A, B, C, α.

Klasse.

Klasse.	Ordnung.	Viereckstheile die bey der Frage vorkommen.
	5 ;	a, c, A, B, D, γ'.
	6 ;	a, c, A, B, D, γ.
III ;	7 ;	a, c, A, B, D, α.
	8 ;	a, c, A, B, α, γ'.
	9 ;	a, c, A, C, α, γ.
	10 ;	a, c, A, D, α, γ.
	11 ;	a, d, A, B, C, γ'.
	12 ;	a, d, A, B, C, α.
	13 ;	a, d, A, B, D, γ.
	14 ;	a, d, A, B, D. α.
	15 :	a, d, A, B, α, γ'.
	16 ;	a, d, A, C, α, γ.
	17 ;	a, d, B, C. D, γ'.
	18 ;	a, d, B, C. D, α,
	19 ;	a, d, B, C, α, γ.
	20 ;	a, d, B, D, α, γ.

§. 135.

Die Verschiedenheit zwischen diesen Fragen (134) und denen welche Lambert gegeben hat kommt daher, daß dieser berühmte Geometer alle die Aufgaben ausließ in welchen entweder der Winkel A mit einem von denen C, γ, γ', oder der Winkel C mit einem von A, α, α' nicht vorkommt.

Aber

Aber dieser sich vorgeschriebenen Regel ohnerachtet finden sich unter unsern Fragen zwo, welche beim Lambert nicht anzutreffen sind; nämlich: die erste und zwote der dritten Klasse.

Es ist aber ausser allen Zweifel, daß zwischen a, b, A, B, D, γ' und a, b, A, C, D, γ', eine Gleichung gefunden werden kann; wie sogleich aus Betrachtung der Figur klar ist: denn, gesezt, aus a, b, A, B, γ' wäre D zu suchen, so ist allerdings die Auflösung dieser Frage in unserer Gewalt, weil im Dreyecke ABC aus den gegebenen Seiten a, b, und dem Winkel B der α' gefunden werden kann, daher, indem für das Dreyeck ACD, zween Winkel γ' und $\alpha = A - \alpha'$ gegeben werden, erhält man den dritten $=$ D; auf ähnliche Art, wenn aus a, b, A, D, γ' der Winkel C zu suchen ist, findet sich aus den Datis D, γ' der Winkel α, daher $\alpha' = A - \alpha$, hierauf aber im Dreyecke ABC aus a, b, α' der Winkel γ, folglich auch $C = \gamma + \gamma'$.

§. 136.

Aus den bisherigen (127....135) erhellet, was für eine Mannichfaltigkeit von Fragen nur für den Fall entstehen, wo eine Diagonale des Vierecks und dessen Winkel mit den Seiten in Betrachtung gezogen wird. Aber noch grösser wird selbige, (wie man leicht vermuthen kann), wenn man auf beide Diagonalen und die Winkel derselben mit den Seiten Rücksicht nimmt.

Die

Die Aufzählung dieser Fragen aber hier beyzubringen ist um so weniger nothwendig, weil sie nicht nur ein ziemlich verwikkeltes Geschäft ist, sondern auch zur Aufklärung der Lehre von Berechnung gradlinichter Figuren wenig beyzutragen scheint.

Wer indessen dieses Geschäfte über sich nehmen wollte, müßte einen von dem bisherigen ganz verschiedenen Weg einschlagen.

Gesezt, in der vorgegebenen Figur ABCD (Fig. 23.) wären jede zween Punkte mit graden Linien dergestalt verbunden, daß man überhaupt sechs Winkel und zwölf Linien hätte: so müßte der, der für die Figur eine vollständige Auszählung der Fragen vornehmen wollte, seine ganze Sorgfalt darauf richten, daß er alle Fälle aufsuchte, wovon den achtzehn Theilen der vorgegebenen Figur sechs Theile auf verschiedene Weise unter sich verbunden werden könnten; dabey aber dieß beobachten, daß jede dieser Verbindungen wenigstens zwo Linien enthalte, überdieß drey dieser Theile und nicht mehrere zu einem und demselben Dreyecke gehören, auch (wie sich von selbst versteht), nur zween an einem und demselben Scheitelpunkte des Vierecks Umfangswinkel liegende Winkel vorkommen dürfen. Durch der Linien Unterschied ihrer Lage nach, wird aber keine vollkommene Auszählung der Fragen bewerkstelliget, weil in der vorgegebenen Figur drey Vierecke betrachtet werden können, davon das erste ABCD, das zweyte ACBD, und das dritte ACDB: daher muß man die Auszählung der Aufgaben so anstellen, daß sie eben auf das eine als das andere Viereck angewendet werden kann.

Die Abtheilung der Fragen in Klassen ist nach der Anzahl der die Frage enthaltende Linien zu bewerkstelligen: daher hat man fünf Klassen, nachdem in der Frage sechs, fünf, vier, drey, oder zwo Linien sich finden. Die Winkel welche nebst diesen Linien vorhanden seyn müssen, können am besten aus Betrachtung der weggelassenen Linien abgeleitet werden.

Bey den einzeln Klassen ist der Unterschied aus der Beziehung zu nehmen, welche die der Aufgabe einverleibten Linien gegen einander haben. So entsteht: für die dritte Klasse, (wo vier Linien vorkommen,) der Unterschied der Fragen daher, daß die fehlenden Linien entweder zusammenhängen oder abgesondert sind; für die vierte Klasse aber, (wo drey Linien in den Aufgaben vorhanden,) dadurch, daß diese Linien entweder ein Dreyeck ausmachen oder nicht; Für die fünfte Klasse endlich, (deren Aufgaben zwo Linien enthalten), entspringt der Fragen Unterschied aus gleicher Ursache wie in der dritten Klasse.

Wenn man alles dieses in Obacht nimmt: so wird man die Auszählung aller Fragen für das Viereck leichte bewerkstelligen können; welches hier zu thun nicht zu unserer Absicht gehört.

An=

Anmerkung.

§. 137.

Bey den Fragen, wo auf der Figur Haupttheile Rücksicht genommen wird, gelangt man nur zu Gleichungen vom zweyten Grade, zu keiner höhern; hingegen bey den Aufgaben, wo die Nebentheile in Betrachtung gezogen werden, kommt man auch auf biquadratische Gleichungen, d. i., man kommt auf Aufgaben welche vier verschiedene Auflösungen zulassen.

Ein Beyspiel wird die Sache deutlicher machen:

Gesezt aus den vier Linien AB, BC, CD, DA (Fig. 24 und 25.) und dem Winkel BAC, wäre die Linie BD zu finden: so muß man erstlich aus den Seiten AB, BC und dem Winkel BAC des Dreyeckes BCA die Seite AC suchen. Offenbar aber erhält man für AC zween Werthe, welche AC, AC′ sind, wenn der Winkel BAC spitzig und $BC < AB$. Nun verzeichne man über AC die Dreyecke ADC, AD′C, wo die Seiten AD, DC gegeben sind, und ziehe DB, D′B: so wird man folglich für DB zween Werthe haben. Auch beschreibe man über AC′ die Dreyecke AC′D″, AC′D‴, für welche $AD'' = AD'''$, $D''C' = D'''C'$ gegeben, und ziehe BD″, BD‴: so werden diese zwo Linien die beiden übrigen gesuchten Werthe darstellen.

Noch zwo brauchbare Aufgaben.

§. 138.

Die erste davon wird die Beziehung aller Viereckseiten gegen einander darstellen; die zwote aber in der praktischen Geometrie vom Nutzen seyn.

Erste Aufgabe.

§. 139.

Aus des Vierecks (Fig. 23.) Seiten AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, und der Diagonale AC = e, die BC = f zu suchen.

Auflösung und Beweis.

Es sey der Winkel

$$BCA = \gamma,$$
$$ACD = `\gamma,$$

und

$$BCD = C:$$

so ist

$$C = \gamma + `\gamma;$$

folglich

$$\mathrm{Cos}\,C = \mathrm{Cos}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,`\gamma - \sin\gamma\sin`\gamma:$$

also

$$\sin\gamma\sin`\gamma = \mathrm{Cos}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,`\gamma - \mathrm{Cos}\,C;$$

hievon

hievon das Quadrat genommen, giebt

$$\sin\gamma^2 \sin'\gamma^2 = \operatorname{Cos}\gamma^2 \operatorname{Cos}'\gamma^2 - 2\operatorname{Cos} C \times \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos}'\gamma + \operatorname{Cos} C^2;$$

es ist aber

$$\sin\gamma^2 \sin'\gamma^2 - \operatorname{Cos}\gamma^2 \operatorname{Cos}'\gamma^2 = 1 - \operatorname{Cosin}\gamma^2 - \operatorname{Cosin}'\gamma^2:$$

mithin

$$1 - \operatorname{Cos}\gamma^2 - \operatorname{Cos}'\gamma^2 = \operatorname{Cosin} C^2 - 2\operatorname{Cos} C \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos}'\gamma:$$

folglich

$$1 + 2\operatorname{Cos} C \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos}'\gamma = \operatorname{Cos} C^2 + \operatorname{Cos}\gamma^2 + \operatorname{Cos}'\gamma^2; \text{ (Q}$$

nun hat man

$$\operatorname{Cos} C = \frac{b_2 + c^2 - f_2}{2bc},$$

$$\operatorname{Cos}\gamma = \frac{b^2 + e^2 - a^2}{2be},$$

$$\operatorname{Cos}'\gamma = \frac{c_2 + e_2 - d_2}{2ce}:$$

diese Werthe in die Gleichung (Q gesezt, giebt

$$1+\frac{(b^2+c^2-f^2)(b^2+e^2-a^2)(c^2+e^2-d^2)}{4b^2\,c^2\,e^2}$$

$$=$$

$$\frac{(b^2+c^2-f^2)^2}{4b^2\,c^2}+\frac{(b^2+e^2-a^2)^2}{4b^2\,e^2}+\frac{(c^2+e^2-d^2)^2}{4c^2\,e^2},$$

wodurch, wenn man mit $4b^2\,c^2\,e^2$ multiplicirt, wird

$$4b^2\,c^2\,e^2+(b^2+c^2-f^2)\,(b^2+e^2-a^2)\times(c^2+e^2-d^2)$$

$$=$$

$$e^2\,(b^2+c^2-f^2)^2+c^2\,(b^2+e^2-a^2)^2+b^2\,(c^2+e^2-d^2)^2.$$

Ob wohl diese Gleichung eine biquadratische ist: so kann sie doch als eine quadratische behandelt werden, da in ihr nur der Linien a, b, c ꝛc. Quadrate vorkommen

Nun bedeuten a, b, c ꝛc. der Linien AB, BC, CD ꝛc. Quadrate selbst: so erhält man nach gehöriger Entwicklung obstehender Gleichung, die:

$$\left.\begin{array}{l} ac\,(b+e+d+f \\ \quad -a-c) \\ +\,ef\,(a+b+c+d \\ \quad -e-f) \\ +\,bd\,(a+c+e+f \\ \quad -b-d) \end{array}\right\} = abe+ecd+afd+bcf;$$

wobey zu merken, daß die Produkte ac, ef, bd, abgesonderte Linien enthalten, hingegen die Produkte abe, ecd, afd, bcf, begränzen die Linien jedes der Dreyecke ABC, ACD, ABD, BCD.

Aus dieser Gleichung wird ef^2

$$+\,[ad+bb-bd-ac-e(a+b+c+d-e)]\,f$$

$$+\,[abe+ecd-ac(b+e+d-a-c)-bd\times(a+c+e-b-d)] = 0$$

Man setze des zweyten Gliedes Coefficienten $= P$, und das dritte Glied $= Q$, daß also

$$ef^2 + Pf + Q = 0;$$

so ergiebt sich

$$f = \frac{-P \pm \sqrt{(P^2 - 4eQ)}}{2e}.$$

Bey

Bey einem auszumessenden Felde ABCD verfahren die Feldmesser gewöhnlich so:

Sie messen die Standlinie AD, und aus dem Stande A die Winkel BAD, CAD, imgleichen aus dem Stande D die Winkel BDA, CDA; woraus sie alsdenn der Gegenstände B, C Weite BC, und des Vierecks ABCD übrigen Winkel, suchen;

daher entsteht die

Zwote Aufgabe.

§. 141.

Im Vierecke ABCD ist gegeben.

die Seite AD $= d$,
der Winkel BAD $= A$,
CAD $= \alpha$,
CDA $= D$,
BAD $= \delta$:

man soll finden:

die Seite BC $= b$.
den Winkel ABC $= B$,
BCD $= C$.

Auf=

Auflösung und Beweis.

I. Aus dem Dreyecke BDC hat man

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2BC.\ CD.\ \mathrm{Cos}\ BDC; \text{(♀}$$

Es ist aber

$$BD : AD = \sin A : \sin(A+\delta),$$

also

$$BD = \frac{d \sin A}{\sin(A+\delta)};$$

$$CD : AD = \sin \alpha : \sin(\alpha + D),$$

mithin

$$CD = \frac{d \sin \alpha}{\sin(\alpha + D)};$$

auch ist

$$\mathrm{Cos}\ BDC = \mathrm{Cos}\ D\ \mathrm{Cos}\ \delta + \sin D \sin \delta.$$

Sezt man nun diese für BD, CD, und BDC gefundene Werthe in die Gleichung (♀: so erhält man

$$bb = dd \quad \frac{\sin A^2}{\sin(A+\delta)^2} + \frac{\sin \alpha^2}{\sin(\alpha+D)^2} =$$

$$- \frac{2 \sin A \sin \alpha}{\sin(A+\delta)\sin(\alpha+D)} (\operatorname{Cos} D \operatorname{Cos}\delta + \sin D \sin \delta)]$$

II. Eine bequemere Auflösung findet sich, indem man so verfährt, als wenn aus den drey Seiten AB, CD, AD und den Winkeln BAD, CAD, die Seite BC gesucht werden sollte.

Heissen nun AB, $= a$, CD $= c$;

so hat man

$$b^2 = a^2 + c^2 + d^2 - 2ad \operatorname{Cosin} A + 2ac \operatorname{Cos}(A+D) - 2cd \operatorname{Cosin} D,$$

$$= (a \sin A - c \sin D)^2 + (d - a \operatorname{Cosin} A - c \operatorname{Cos} D)^2;$$

daher, wenn

$$\frac{a \sin A - c \sin D}{d - a \operatorname{Cos} A - c \operatorname{Cos} D} = \operatorname{tang} F$$

gesezt wird,

$$b = \frac{a \sin A - c \sin D}{\sin F}$$

=

$$= \frac{d - a \operatorname{Cos} A - c \operatorname{Cos} D}{\operatorname{Cos} F}.$$

Nun ist

$$a = \frac{d \sin \delta}{\sin (A + \delta)},$$

$$c = \frac{d \sin \alpha}{\sin (\alpha + D)}$$

also

Tang F =

$$\frac{\sin A \sin \delta \sin (\alpha + D) - \sin \alpha \sin D \sin (A + \delta)}{\sin (A + \delta) \sin (\alpha + D) - \operatorname{Cos} A \sin \delta \sin (\alpha + D) - \operatorname{Cos} D \sin \alpha \sin (A + \delta)};$$

der Nenner hievon läßt sich, da

$$\sin (A + \delta) \sin (\alpha + D) = \tfrac{1}{2} \sin (\alpha + D) (\sin A \operatorname{Cos} \delta + \operatorname{Cos} A \sin \delta) + \tfrac{1}{2} \sin (A + \delta) (\sin D \operatorname{Cos} \alpha + \operatorname{Cos} D \sin \alpha)$$

so ausdrücken:

$$\tfrac{1}{2}\sin(\alpha+D)(\sin A \operatorname{Cos}\delta - \operatorname{Cos}A \sin\delta)$$
$$+\tfrac{1}{2}\sin(A+\delta)(\sin D \operatorname{Cos}\alpha - \operatorname{Cos}D \sin\alpha)$$
$$=$$
$$\tfrac{1}{2}\sin(\alpha+D)\sin(A-\delta)+\tfrac{1}{2}\sin(A+\delta)\sin(D-\alpha):$$

Folglich ergiebt sich

$$\operatorname{Tang} F = \frac{2\sin A \sin\delta \sin(\alpha+D) - \sin\alpha \sin D \sin(A+\delta)}{\sin(\alpha+D)\sin(A-\delta)+\sin(A+\delta)\sin D-\alpha)},$$

und

$$b = \tfrac{1}{2} d\,[\sin(\alpha+D)\sin(A-\delta)+\sin(A+\delta)\sin(D-\alpha)]\operatorname{sec}.F.$$

III. Der Winkel

$$C = 180^\circ - D + F;$$

denn man verlängere BC und CD bis sie einander in F schneiden; der Winkel unter welchem dieß geschieht ist $= F$.

Aber

Aber

$$FCD + FDC = 180^\circ - F$$
$$= C + CDF - F:$$

daher

$$FDC = C - F;$$

und da

$$FDC = 180^\circ - D;$$

so hat man

$$C - F = 180 - D,$$

woraus C wie angegeben.

IV. Auf ähnliche Art findet sich

$$B = 180^\circ - A - F$$

§. 142.

Der Zähler in der Formel für tang. F kann auch so ausgedrücket werden:

$$\sin A(-\alpha - D + \delta) + \operatorname{Cos}(A - \delta)\sin(\alpha + D) =$$
$$-\operatorname{Cos}(D - \alpha)\sin(A + \delta),$$

daß also

$$\text{Tang } F =$$

$$= \frac{\sin(A - \alpha - D + \delta) + \text{Cosin}(A + \delta)}{\sin(\alpha + D)\sin(A - \delta)} =$$

$$\frac{\times \sin(\alpha + D) - \text{Cosin}(D - \alpha)\sin(A + \delta)}{+ \sin(A + \delta)\sin(D - \alpha)}.$$

Ende des zweyten Theils.