Werk

Titel: Zeitschrift für Mathematik und Physik

Verlag: Teubner

Jahr: 1876

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 MATH I, 755:21

Werk Id: PPN599415665_0021

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN599415665_0021|LOG_0006

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

21. Jahrgang. 1. Heft.

Mit 1 lithographirten Tafel.

Ausgegeben am 28. December 1875.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1876.

I

Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte.

Von

Dr. Otto Hesse,
Professor am Polytechnikum zu München.

Dreiundzwanzigste Vorlesung.

Harmonische Pole und harmonische Polaren. Tangentenpaare und Punktepaare eines Kegelschnittes.

Wir haben in der siebenzehnten Vorlesung die Bedingungsgleichung 9) für harmonische Pole eines gegebenen Kegelschnittes $f=0$ abgeleitet oder, indem wir den einen Pol 0 als gegeben betrachteten, den geometrischen Ort des andern Poles als die Polare:

$$1)\qquad xf'(x_0)+yf'(y_0)+zf'(z_0)=0$$

des gegebenen Punktes 0 festgestellt.**

* In dem Hesse'schen Nachlasse fanden sich die obigen beiden Vorlesungen, welche den Schluss des Art. I im Jahrg. 1874 dies. Zeitschr. bilden, soweit druckfertig vor, dass nur in formaler Beziehung Einiges zu ändern war. Die Durchsicht hat Herr Prof. Gundelfinger in Tübingen freundlichst übernommen.

P. d. B. R.

** In der zwölften Vorlesung wurden die 60 Pascal'schen Sechsecke vorgeführt, welche dieselben sechs Ecken haben. Drei von den ihnen entsprechenden Pascal'schen Linien wurden durch die Symbole r, drei andere durch die Symbole ϱ ausgedrückt, und es ergab sich, dass die drei Linien r sich in einem Punkte δ und dass die drei Linien ϱ sich in einem Punkte d schneiden. Am Ende der Vorlesung wurde nur historisch angegeben, dass dieses Punktepaar δ und d ein Polepaar sei des den 60 Pascal'schen Sechsecken umschriebenen Kegelschnittes $k=0$. Die Richtigkeit dieser Angabe können wir jetzt prüfen, wenn wir die in der Anmerkung aufgeführte Kegelschnitt-Gleichung $k=0$ zu Grunde legen:

$$r^2+r'^2+r''^2-\varrho^2-\varrho'^2-\varrho''^2=0,$$

Rücksichtlich desselben Kegelschnittes, in der reciproken Form $F=0$ ihrer Gleichung, wurde alsdann in der neunzehnten Vorlesung die Bedingung 9) für harmonische Polaren oder, indem wir eine Polare 0 als gegeben annehmen, die Gleichung ihres Poles entwickelt:

$$2)\qquad uF'(u_0)+vF'(v_0)+wF'(w_0)=0.$$

Jede von diesen beiden Gleichungen entspringt aus der andern unter Vermittelung der Gleichung $f_{01}=F_{01}$, welche mit Weglassung des Index 1 in 10) der neunzehnten Vorlesung ausführlich dargelegt worden ist. Erinnern wir uns nun der Bedeutung der Function F_{01} in 7) der genannten Vorlesung und ersetzen die Coordinaten der Polare nach den bekannten Relationen durch die Coordinaten ihrer Pole, so können wir die Gleichung 1) der Polare des Punktes 0 auch in Determinantenform so wiedergeben:

$$1^*)\qquad \begin{vmatrix} e_{00}, & e_{01}, & e_{02}, & x_0 \\ e_{10}, & e_{11}, & e_{12}, & y_0 \\ e_{20}, & e_{21}, & e_{22}, & z_0 \\ x, & y, & z, & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Ebenso ergiebt 7) der siebenzehnten Vorlesung folgende Form der Gleichung 2) des Poles einer durch die Coordinaten u_0, v_0, w_0 gegebenen gerade Linie:

$$2^*)\qquad \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & u_0 \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & v_0 \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & w_0 \\ u, & v, & w, & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Dieselbe Form 1) der Bedingungsgleichung für harmonische Pole des Kegelschnittes behält die Gleichung auch bei, wenn man an Stelle der

---

und bemerken, dass in derselben sowohl die Symbole r, als die Symbole ϱ lineare homogene Ausdrücke der variabelen Punktcoordinaten x, y, z bedeuten.

Der Ausdruck r lässt sich nämlich so darstellen:

$$r=x\frac{\partial r}{\partial x}+y\frac{\partial r}{\partial y}+z\frac{\partial r}{\partial z},$$

und wir wollen annehmen, dass r in (r) übergehe, wenn man in demselben für x, y, z setzt x_0, y_0, z_0, dass also sei

$$(r)=x_0\frac{\partial r}{\partial x}+y_0\frac{\partial r}{\partial y}+z_0\frac{\partial r}{\partial z}.$$

Das Gleiche soll auch gelten für die übrigen Symbole r und ϱ.

Bilden wir alsdann nach Vorschrift von 1) die Bedingungsgleichung für harmonische Pole des vorliegenden Kegelschnittes, so erhalten wir

$$r(r)+r'(r')+r''(r'')-\varrho(\varrho)-\varrho'(\varrho')-\varrho''(\varrho'')=0.$$

Diese Gleichung wird aber erfüllt, wenn wir unter x, y, z die Coordinaten des Punktes δ verstehen, in welchem sich die drei Linien r schneiden, und x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Punktes d sind, in welchem sich die drei Linien ϱ schneiden; denn jedes einzelne Glied der Gleichung verschwindet unter dieser Annahme.

homogenen rechtwinkligen Coordinaten x, y, z homogene Dreieckscoordinaten X, Y, Z einführt durch die Substitutionen:

$$3)\qquad \begin{aligned} x &= \alpha_0 X + \alpha_1 Y + \alpha_2 Z, \\ y &= \beta_0 X + \beta_1 Y + \beta_2 Z, \\ z &= \gamma_0 X + \gamma_1 Y + \gamma_2 Z, \end{aligned}$$

durch welche die Function f übergehen mag in:

$$4)\qquad f(x, y, z) = \varphi(X, Y, Z).$$

Denn differentiiren wir diese Gleichung nach den Variabelen X, Y, Z, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \alpha_0 f'(x) + \beta_0 f'(y) + \gamma_0 f'(z) &= \varphi'(X), \\ \alpha_1 f'(x) + \beta_1 f'(y) + \gamma_1 f'(z) &= \varphi'(Y), \\ \alpha_2 f'(x) + \beta_2 f'(y) + \gamma_2 f'(z) &= \varphi'(Z), \end{aligned}$$

und wenn wir mit X_0, Y_0, Z_0 die Dreieckscoordinaten des durch seine rechtwinkligen Coordinaten x_0, y_0, z_0 gegebenen Punktes 0 bezeichnen, so erhalten wir nach Multiplication der Gleichungen mit diesen Coordinaten durch Addition

$$5)\qquad x f'(x_0) + y f'(y) + z f'(z_0) = X_0 \varphi'(Y) + Y_0 \varphi'(Y) + Z_0 \varphi'(Z).$$

Es wird also

$$1^{**})\qquad X\varphi'(X_0) + Y\varphi'(Y_0) + Z\varphi'(Z_0) = 0$$

die Bedingungsgleichung sein für ein Polepaar des durch Dreieckscoordinaten ausgedrückten Kegelschnittes $\varphi(X, Y, Z) = 0$.

Aus dieser Gleichung lassen sich nun die Dreieckscoordinaten U_0, V_0, W_0 der Polare des Punktes 0 abnehmen: $\frac{1}{2}\varphi'(X_0) = U_0$, $\frac{1}{2}\varphi'(Y_0) = V_0$, $\frac{1}{2}\varphi'(Z_0) = W_0$, und allgemein die Relationen zwischen den Coordinaten X, Y, Z eines beliebigen Poles und den Coordinaten U, V, W seiner Polare in den Dreieckssysteme aufstellen:

$$6)\qquad \tfrac{1}{2}\varphi'(X) = U, \quad \tfrac{1}{2}\varphi'(Y) = V, \quad \tfrac{1}{2}\varphi'(Z) = W.$$

Bezeichnen wir nun mit $\Phi(U, V, W)$ die reciproke Function von $\varphi(X, Y, Z)$, so haben wir die Gleichung:

$$7)\qquad \varphi(X, Y, Z) = \Phi(U, V, W),$$

welche die oben angegebenen Substitutionen zu einer identischen machen.

Hieraus ist ersichtlich, dass $\Phi(U, V, W) = 0$ die Gleichung unseres Kegelschnittes ist, ausgedrückt durch Liniencoordinaten des Dreieckssystems, und dass man die mit 6) äquivalenten Relationen hat:

$$8)\qquad \tfrac{1}{2}\Phi'(U) = X, \quad \tfrac{1}{2}\Phi'(V) = Y, \quad \tfrac{1}{2}\Phi'(W) = Z.$$

Benützen wir endlich die angegebenen sechs Relationen 6) und 8), um die Bedingungsgleichung 1**) für harmonische Pole durch Liniencoordinaten des Dreieckssystems auszudrücken, so finden wir:

$$2^{**})\qquad U\Phi'(U_1) + V\Phi'(V_1) + W\Phi'(W_1) = 0,$$

die Bedingung für harmonische Polaren des Kegelschnittes $\Phi = 0$, weil nach einem Satze der neunzehnten Vorlesung die Polaren von harmonischen Polen des Kegelschnittes harmonische Polaren sind.

Ebenso wenig, als sich die Form der Bedingungsgleichung 1) für harmonische Pole oder der Bedingungsgleichung 2) für harmonische Polaren ändert, wenn die Kegelschnitt-Gleichung auf ein Dreieckssystem bezogen ist, ändern sich die Formen der Gleichungen 1*) und 2*). An Stelle der Grössen e und a treten nur resp. die Coefficienten in Φ und φ ein.

Wir nehmen hieraus die Gelegenheit, auf die Anmerkung in der elften Vorlesung zurückzukommen, nach welcher

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=0,$$
$$U=0,\quad V=0,\quad W=0$$

die Gleichungen von drei Linienpaaren sind, welche sich in drei Punkten einer geraden Linie schneiden, wenn man identisch hat

$$U=\tfrac{1}{2}\varphi'(X),\quad V=\tfrac{1}{2}\varphi'(Y),\quad W=\tfrac{1}{2}\varphi'(Z)$$

und unter X, Y, Z lineare Ausdrücke der gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten versteht. Der Beweis ergab sich daraus, dass, wenn man die Coefficienten in der Function φ mit $b_{\varkappa\lambda}$ bezeichnet, die Gleichung

$$\frac{X}{b_{12}}+\frac{Y}{b_{20}}+\frac{Z}{b_{01}}=0$$

sich aus je zwei von den angegebenen correspondirenden Gleichungen zusammensetzen lässt. Damit haben wir zugleich einen Satz von den Kegelschnitten bewiesen. Um ihn kurz auszusprechen, nennen wir reciproke Dreiecke eines Kegelschnittes solche, in welchen die Ecken und Seiten des einen die Pole und Polaren der Seiten und Ecken des andern sind. In dieser Voraussetzung stellt sich der angekündigte Satz mit seinem reciproken Satze so dar:

Die correspondirenden Seiten zweier reciproken Dreiecke eines Kegelschnittes schneiden sich in drei Punkten, welche auf einer geraden Linie liegen.

Die Verbindungslinien der correspondirenden Ecken zweier reciproken Dreiecke eines Kegelschnittes schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Die reciproken Dreiecke eines Kegelschnittes können auch zusammenfallen, wodurch sie Poldreiecke des Kegelschnittes werden, von welchen im Folgenden die Rede sein wird.

Wenn man in 1) die Coordinaten des Poles 0 ersetzt durch die Coordinaten seiner Polare und in 2) die Coordinaten der Polare 0 durch die Coordinaten ihres Poles, so erhält man

$$xu_0+yv_0+zw_0=0,$$
$$ux_0+vy_0+wz_0=0,$$

Gleichungen, die folgende charakteristische Eigenschaften von harmonischen Polen und harmonischen Polaren erkennen lassen:

Von den Polaren zweier harmonischen Pole eines Kegelschnittes geht jede durch den Pol der andern.

Von den Polen zweier harmonischen Polaren eines Kegelschnittes liegt jeder auf der Polare des andern.

Richten wir nun unser Augenmerk auf Specialitäten harmonischer Polaren eines gegebenen Kegelschnittes.

Jede gerade Linie, welche durch den Mittelpunkt eines Kegelschnittes geht, heisst Durchmesser. Wenn zwei harmonische Polaren des Kegelschnittes sich in dem Mittelpunkte des Kegelschnittes schneiden, so nennt man sie conjugirte Durchmesser. Der Pol des einen liegt nach dem letztgenannteu Satze auf dem andern und beide Pole liegen in dem Unendlichen, weil ihre Polaren durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes gehen. Es ist darum eine charakteristische Eigenschaft der conjugirten Durchmesser, dass jede Sehne des Kegelschnittes, welche parallel geht einem Durchmesser, durch den conjugirten Durchmesser halbirt wird.

Daraus ergiebt sich nun eine leichte Construction der conjugirten Durchmesser eines gegebenen Kegelschnittes. Die Axen des Kegelschnittes sind selbst conjugirte Durchmesser, weil, wie aus der Axengleichung des Kegelschnittes zu ersehen ist, die der einen Axe parallelen Sehnen durch die andere Axe halbirt werden. Sie sind conjugirte Durchmesser, welche aufeinander senkrecht stehen. Es behält die Kegelschnitt-Gleichung auch dieselbe einfache Form, wenn man statt des rechtwinkligen Coordinatensystems der Axen ein schiefwinkliges wählt, dessen Axen conjugirte Durchmesser sind, weil jede Sehne des Kegelschnittes, welche parallel geht der einen Axe des schiefwinkligen Coordinatensystems, durch die andere Axe halbirt wird.

In dem Kreise halbirt jeder Durchmesser alle Sehnen, welche auf ihm senkrecht stehen. Es sind deshalb für den Kreis jede zwei Durchmesser conjugirte Durchmesser, wenn sie aufeinander senkrecht stehen. Der Mittelpunkt des Kreises hat demnach die charakteristische Eigenschaft, dass je zwei gerade Linien, welche sich in ihm senkrecht schneiden, harmonische Polaren des Kreises sind. Der Mittelpunkt des Kegelschnittes hat die hervorgehobene Eigenschaft des Kreismittelpunktes nicht. Denn unter den conjugirten Durchmessern stehen nur die Axen des Kegelschnittes aufeinander senkrecht. Eine Ausnahme davon bildet der in der einundzwanzigsten Vorlesung eingeführte imaginäre Kegelschnitt $u^2 + v^2 = 0$, der zwar nach der Regel 13) der neunzehnten Vorlesung keinen Mittelpunkt hat, für welchen aber jeder beliebige Punkt Mittelpunkt wäre, wenn man die hervorgehobene charakteristische Eigenschaft des Kreismittelpunktes als Definition des Mittelpunktes nehmen wollte. Denn jede zwei aufeinander senkrecht stehenden geraden

Linien sind, wie wir gesehen haben, harmonische Polaren des genannten imaginären Kegelschnittes.

Wenn nun der Mittelpunkt des Kegelschnittes die obengenannte charakteristische Eigenschaft des Kreismittelpunktes nicht hat, so erhebt sich die Frage, ob in dem gegebenen Kegelschnitte sich nicht andere Punkte der bezeichneten Art auffinden lassen? Da aus dem Kegelschnitte ein Kreis wird, wenn die Brennpunkte mit dem Mittelpunkte zusammenfallen, so können möglicherweise die Brennpunkte die verlangte Eigenschaft haben. Und in der That lässt sich dieses auch nachweisen.

Nehmen wir zu diesem Zwecke aus der zweiundzwanzigsten Vorlesung die homogen gemachte Gleichung 8) des Kegelschnittes, auf den Mittelpunkt und seine Axen bezogen:

9) $$(u^2e^2 - w^2) + (a^2 - e^2)(u^2 + v^2) = 0,$$

so ist die Bedingung, dass die geraden Linien 0 und 1 harmonische Polaren des vorliegenden Kegelschnittes seien, folgende:

$$(u_0 u_1 e^2 - w_0 w_1) + (a^2 - e^2)(u_0 u_1 + v_0 v_1) = 0.$$

Geht nun jede der beiden Linien durch den einen Brennpunkt des Kegelschnittes, so hat man:

$$u_0 e + w_0 = 0, \quad u_1 e + w_1 = 0.$$

Setzt man alsdann die Werthe von w_0 und w_1 aus diesen Gleichungen in die vorhergehende, so geht dieselbe über in:

$$u_0 u_1 + v_0 v_1 = 0.$$

Diese Gleichung drückt aus, dass die beiden geraden Linien aufeinander senkrecht stehen. Da die erste von den vier Gleichungen sich aus den drei anderen zusammensetzt, so ist der folgende Satz ihre Interpretation:

Jede zwei geraden Linien, welche sich in einem Brennpunkte des Kegelschnittes senkrecht schneiden, sind harmonische Polaren des Kegelschnittes.

Dieser Satz gilt auch für die Parabel. Denn drücken wir die auf den Brennpunkt bezogene Parabelgleichung 19) der zweiundzwanzigsten Vorlesung durch Liniencoordinaten aus, so finden wir:

10) $$u^2 + v^2 - \frac{2uw}{\varkappa} = 0,$$

und die Bedingungsgleichung für zwei harmonische Polaren 0 und 1:

$$u_0 u_1 + v_0 v_1 - \frac{1}{\varkappa}(u_0 w_1 + u_1 w_0) = 0$$

setzt sich wieder zusammen aus den drei Gleichungen:

$$w_0 = 0, \quad w_1 = 0, \quad u_0 u_1 + v_0 v_1 = 0,$$

deren geometrische Bedeutung selbstverständlich ist.

Wenden wir uns nach dieser Digression über die Brennpunkte des Kegelschnittes wieder den conjugirten Durchmessern zu. Aus der oben angegebenen Definition der conjugirten Durchmesser des Kegelschnittes als zweier harmonischen Polaren, welche sich in dem Mittelpunkte des Kegelschnittes schneiden, ferner aus der Definition der Asymptoten in der einundzwanzigsten Vorlesung ergiebt sich sofort der Zusammenhang zwischen conjugirten Durchmessern und Asymptoten:

Ein jedes Paar conjugirter Durchmesser eines Kegelschnittes ist harmonisch zu seinem Asymptotenpaare,

und der Zusammenhang conjugirter Durchmesser unter sich:

Je drei Paare conjugirter Durchmesser eines Kegelschnittes bilden eine Involution.

Man braucht daher von einem Kegelschnitte Nichts weiter zu kennen, als zwei Paare conjugirter Durchmesser, um sowohl die Asymptoten, als auch die Axen des Kegelschnittes zu construiren. Die Asymptoten sind nämlich dasjenige Linienpaar, welches harmonisch ist mit jedem Paare conjugirter Durchmesser, und die Axen des Kegelschnittes, welche aufeinander senkrecht stehen, bilden mit jeden zwei Paaren conjugirter Durchmesser eine Involution.

Wir gingen zu Anfang unserer Vorlesung von zwei harmonischen Polen des Kegelschnittes aus. Die Polare des einen geht immer durch den andern Pol, und der Schnittpunkt der beiden Polaren wird harmonischer Pol zu jedem der beiden harmonischen Pole. Drei solcher Punkte bilden ein System harmonischer Pole des Kegelschnittes. Man versteht also unter einem System harmonischer Pole drei Punkte, von welchen je zwei harmonische Pole des Kegelschnittes sind. Das Dreieck, dessen Ecken zu zweien combinirt harmonische Pole des Kegelschnittes sind, heisst Poldreieck — ein specieller Fall der oben angegebenen conjugirten Dreiecke des Kegelschnittes.

Was die Seiten des Poldreiecks anbetrifft, so sind je zwei derselben harmonische Polaren des Kegelschnittes. Man kann daher das Poldreieck auch definiren als das Dreieck, von dem jede zwei Seiten harmonische Polaren des Kegelschnittes sind.

Aus dieser Definition ergiebt sich nun, dass ein gegebener Kegelschnitt unendlich viele Poldreiecke hat. Denn die eine Ecke des Dreiecks kann man ganz beliebig annehmen, die zweite Ecke wird auf der Polare der ersten Ecke beliebig gewählt werden können. Erst die dritte Ecke des Dreiecks wird durch die beiden anderen bestimmt sein.

Hiernach erhebt sich die Frage, wieviele Kegelschnitte erforderlich sind, um ein Poldreieck als ein gemeinschaftliches für alle festzustellen? Die Beantwortung dieser Frage soll der nächstfolgenden Vorlesung vorbehalten bleiben.

In der siebenzehnten Vorlesung ist die in λ quadratische Gleichung

$$11)\qquad f(x_0+\lambda x_1,\ y_0+\lambda y_1,\ z_0+\lambda z_1)=0,$$

welche entwickelt die Form erhielt

$$12)\qquad f_{00}+2\lambda f_{01}+\lambda^2 f_{11}=0,$$

als die Quelle weiterer geometrischer Sätze in Aussicht gestellt worden. Wir nehmen diese nur zum Theil verwerthete Gleichung wieder auf, indem wir auf die dort eingeführten Beziehungen verweisen. Es lagen nämlich zwei beliebige Punkte 0 und 1 vor. Ihre Verbindungslinie schneidet den Kegelschnitt $f(x, y, z)=0$ in zwei Punkten, die durch die quadratische Gleichung 12) bestimmt werden. Der eine Fall, wenn das Verhältniss der Wurzeln gleich -1 ist, führte auf die harmonischen Pole des Kegelschnittes. Die Untersuchung des andern Falles, wenn das Verhältniss der Wurzeln gleich $+1$ ist, wodurch die Verbindungslinie der beiden Punkte eine Tangente des Kegelschnittes wird, blieb an der genannten Stelle vorbehalten. Dieser Fall, wenn die Wurzeln der quadratischen Gleichung 12) einander gleich sind, soll hier discutirt werden.

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung 12) sind

$$\frac{1}{f_{11}}\{-f_{01}\pm\sqrt{f^2_{01}-f_{00}f_{11}}\}.$$

Sie werden einander gleich unter der Bedingung

$$13)\qquad f_{00}f_{11}-f^2_{01}=0.$$

Man erhält diese Bedingungsgleichung auf eine einfachere Art, wenn man die Gleichung 12) dadurch homogen macht, dass man für λ setzt $\frac{\lambda}{\varkappa}$ und mit $\varkappa$ multiplicirt. Differentiirt man hierauf partiell nach $\varkappa$ und λ und eliminirt, so erhält man die gesuchte Bedingungsgleichung 13).

Der linke Theil dieser Gleichung ist eine homogene Function zweiter Ordnung der Variabelen u, v, w:

$$y_0z_1-y_1z_0=u,\quad z_0x_1-z_1x_0=v,\quad x_0y_1-x_1y_0=w.$$

Denn wählt man die Determinantenform der Gleichung 13):

$$\begin{vmatrix} x_0f'(x_0)+y_0f'(y_0)+z_0f'(z_0), & x_0f'(x_1)+y_0f'(y_1)+z_0f'(z_1) \\ x_1f'(x_0)+y_1f'(y_0)+z_1f'(z_0), & x_1f'(x_1)+y_1f'(y_1)+z_1f'(z_1)\end{vmatrix}=0,$$

so lässt sie sich nach einem bekannten Satze von den Determinanten auch so darstellen:

$$u\{f'(y_0)f'(z_1)-f'(y_1)f'(z_0)\}+v\{f'(z_0)f'(x_1)-f'(z_1)f'(x_0)\}$$
$$+w\{f'(x_0)f'(y_1)-f'(y_0)f'(x_1)\}=0;$$

schliesslich wird

$$f'(y_0)f'(z_1)-f'(y_1)f'(z_0)=\tfrac{1}{2}AF'(u),$$
$$f'(z_0)f'(x_1)-f'(z_1)f'(x_0)=\tfrac{1}{2}AF'(v),$$
$$f'(x_0)f'(y_1)-f'(x_1)f'(y_0)=\tfrac{1}{2}AF'(w),$$

und unsere Gleichung geht über in die Gleichung $F(u, v, w) = 0$ des Kegelschnittes, ausgedrückt durch Liniencoordinaten.

Ein grösseres Gewicht als auf diese Bemerkung ist auf die Gleichung 13) selbst zu legen, welche mit Unterdrückung des den Coordinaten anhaftenden Index 1 sich so darstellt:

$$14)\quad 4f(x_0, y_0, z_0)\,f(x, y, z) - \{xf'(x_0) + yf'(y_0) + zf'(z_0)\}^2 = 0.$$

Wenn wir den Punkt 0 als gegeben betrachten, so drückt diese Gleichung einen Kegelschnitt aus, von dem jeder Punkt mit dem gegebenen durch eine gerade Linie verbunden, eine Tangente des gegebenen Kegelschnittes giebt. Da aber von dem gegebenen Punkte sich an den gegebenen Kegelschnitt nur zwei Tangenten ziehen lassen, so muss die Gleichung 14) die Gleichung des von dem gegebenen Punkte 0 an den Kegelschnitt gezogenen Tangentenpaares sein. Und in der That treffen auch die unter 15) der siebenzehnten Vorlesung aufgeführten Bedingungen für ein Linienpaar an dem Kegelschnitte 14) zu. Wir haben hiermit in 14) eine andere Auflösung der mit der Gleichung 12) der achtzehnten Vorlesung abgeschlossenen Aufgabe:

Die Gleichung des Tangentenpaares zu bestimmen, welches von einem gegebenen Punkte an einen gegebenen Kegelschnitt gezogen werden kann.

Zu demselben Resultate gelangen wir auch auf folgendem Wege, der zugleich die Ausbeute eines neuen Satzes liefern wird.

Die Gleichungen des Kegelschnittes $f(x, y, z) = 0$ und der Polaren irgend zweier Punkte 0 und 1:

$$xf'(x_0) + yf'(y_0) + zf'(z_0) = 0, \quad xf'(x_1) + yf'(y_1) + zf'(z_1) = 0$$

seien gegeben. Alsdann stellt die Gleichung

$$15)\quad \begin{aligned} &f(x, y, z) \\ - \lambda\{xf'(x_0) + yf'(y_0) + zf'(z)\}&\{xf'(x_1) + yf'(y_1) + zf'(z_1)\} = 0 \end{aligned}$$

mit dem willkürlichen Factor λ alle Kegelschnitte dar, welche durch die vier Punkte gehen, in welchen die Polaren den Kegelschnitt schneiden. Aus dieser Schaar von Kegelschnitten wollen wir nur den einen hervorheben, der durch den Punkt 0 geht, und den diesem Kegelschnitte entsprechenden Werth von λ bestimmen. Setzen wir zu diesem Zwecke in 15) für die Variabelen die Coordinaten des Punktes 0 ein, so finden wir:

$$\lambda = \frac{1}{2\{x_0 f'(x_1) + y_0 f'(y_1) + z_0 f'(z_1)\}},$$

und die Gleichung des hervorgehobenen Kegelschnittes, der durch den gegebenen Punkt 0 geht, wird:

$$16)\quad \begin{aligned} &2\{x_0 f'(x_1) + y_1 f'(y_1) + z_0 f'(z_1)\}\,f(x, y, z) \\ - \{(xf'(x_0) + yf'(y_0) + zf'(z_0)\}&\{xf'(x_1) + yf'(y_1) + zf'(z_1)\} = 0. \end{aligned}$$

Aus dem Umstande, dass bei Vertauschung der Punkte 0 und 1 die Gleichung ungeändert bleibt, können wir den folgenden Satz schliessen, dem wir gleich seinen reciproken Satz beigesellen:

Wenn man durch die Schnittpunkte zweier geraden Linien und eines Kegelschnittes einen Kegelschnitt legt, der durch den Pol der einen geraden Linie geht, so geht derselbe auch durch den Pol der andern geraden Linie.

Wenn man von zwei Punkten an einen Kegelschnitt die vier Tangenten legt und einen Kegelschnitt beschreibt, der die vier Tangenten berührt und zugleich auch die Polare des einen Punktes, so berührt er auch die Polare des andern Punktes.

Wenn die Punkte 0 und 1 zusammenfallen, so wird 16) die Gleichung eines Kegelschnittes, der den gegebenen Kegelschnitt in den Schnittpunkten der Polaren des Punktes 0 berührt und die Gleichung 14) geht über in die Gleichung 14) des von dem Punkte 0 ausgehenden Tangentenpaares.

Zu den Specialitäten der Tangentenpaare eines Kegelschnittes gehört das Asymptotenpaar. Fällt nämlich der gegebene Punkt 0 mit dem Mittelpunkte des Kegelschnittes zusammen, so wird $f'(x_0)=0$, $f'(y_0)=0$ und aus 14) geht die Gleichung des Asymptotenpaares hervor:

$$17)\qquad f(x,y,z)-\frac{z^2}{2z_0}f'(z_0)=0,$$

eine Gleichung, welche es bestätigt, dass man in der Gleichung eines Kegelschnittes nur das constante Glied so zu ändern braucht, dass die Gleichung in lineare Factoren zerlegbar wird, um die Asymptotengleichung zu erhalten.

Die Gleichung des imaginären Tangentenpaares zu bestimmen, welches von einem Brennpunkte des Kegelschnittes ausgeht.

Die Lösung der vorliegenden Aufgabe lässt sich nach dem ersten Theile der gegenwärtigen Vorlesung voraussagen. Nach demselben stehen jede zwei harmonische Polaren des Kegelschnittes, welche von dem Brennpunkte desselben ausgehen, aufeinander senkrecht wie die conjugirten Durchmesser eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Brennpunkt ist. Das von demselben Brennpunkte ausgehende Tangentenpaar des Kegelschnittes ist harmonisch zu jedem der genannten harmonischen Polarenpaare. Es wird sich also das gesuchte Tangentenpaar auffassen lassen als das von dem Mittelpunkte des Kreises ausgehende, an den Kreis gelegte Tangentenpaar. Daraus lässt sich weiter schliessen, dass die Gleichung des gesuchten Tangentenpaares die Kreisgleichung mit verschwindendem Radius sein wird, der Brennpunkt des Kegelschnittes für den Mittelpunkt des Kreises genommen. Die nachfolgende Rechnung wird die Schlussfolgerung bestätigen.

Gehen wir von der Gleichung der confocalen Kegelschnitte aus:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}-1=0$$

und bemerken, dass $x_0=e$, $y_0=0$, $z_0=1$ die Coordinaten eines Brennpunktes sind, so wird die Gleichung 14) in dem vorliegenden Falle:

$$\left\{\frac{e^2}{a^2+\lambda}-1\right\}\left\{\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}-1\right\}-\left\{\frac{ex}{a^2+\lambda}-1\right\}^2=0,$$

eine Gleichung, welche mit Rücksicht auf die Relation $e^2=a^2-b^2$ übergeht in:

$$(x-e)^2+y^2=0.$$

Liegt dagegen die Parabelgleichung vor

$$y^2-2\varkappa\left(x+\frac{\varkappa}{2}\right)=0$$

mit dem Brennpunkte, dessen Coordinaten $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=1$ sind, so wird die Gleichung 14) des von dem Brennpunkte ausgehenden Tangentenpaares

$$4\varkappa^2\left\{y^2-2\varkappa\left(x+\frac{\varkappa}{2}\right)\right\}+\{2\varkappa x+2\varkappa^2\}^2=0,$$

eine Gleichung, welche sich schliesslich reducirt auf:

$$x^2+y^2=0.$$

Wir fassen die eben gewonnenen Resultate zusammen, wenn wir sagen:

Das von einem Brennpunkte eines Kegelschnittes ausgehende imaginäre Tangentenpaar ist ein Kreis mit verschwindendem Radius, dessen Mittelpunkt der Brennpunkt ist.

Die conjugirten Durchmesser dieses Kreises sind demnach harmonische Polaren des Kegelschnittes. Ausserdem lässt die geführte Untersuchung folgenden Satz erkennen:

Wenn man die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Punktes 0 so bestimmt, dass die Gleichung 14) eine Kreisgleichung wird, so fällt der Punkt 0 in einen Brennpunkt des Kegelschnittes $f(x, y, z)=0$.

Dass der Kreis alsdann einen verschwindenden Radius haben muss, folgt daraus, dass die Gleichung 14) unter allen Umständen in lineare Factoren zerfällt. Dieser Satz wird bei Aufgaben über Brennpunkte von Kegelschnitten gute Dienste leisten.

Um auf eine neue Form der Gleichung 14) des Tangentenpaares zu kommen, welche Gleichung sich leicht in Determinantenform bringen lässt, erinnern wir daran, dass wir bereits in 12) der achtzehnten Vorlesung die Gleichung des Tangentenpaares entwickelt haben. Es handelte sich dort um die Elimination der Variabelen u, v, w aus folgenden drei Gleichungen:

$$F(u, v, w) = 0,$$
$$ux_0 + vy_0 + wz_0 = 0,$$
$$ux + vy + wz = 0.$$

Wählen wir für die erste dieser Gleichungen die Form

$$u\tfrac{1}{2}F'(u) + v\tfrac{1}{2}F'(v) + w\tfrac{1}{2}F'(w) = 0,$$

so sehen wir, dass sich zwei Grössen λ und μ derart bestimmen lassen, dass man hat

$$\tfrac{1}{2}F'(u) + \lambda x_0 + \mu x = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}F'(v) + \lambda y_0 + \mu y = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}F'(w) + \lambda z_0 + \mu z = 0.$$

Eliminiren wir nun aus diesen drei Gleichungen und den beiden zuletzt angegebenen linearen Gleichungen die fünf Unbekannten u, v, w, λ, μ, so erhalten wir die Gleichung des von dem Punkte 0 an den gegebenen Kegelschnitt $F = 0$ gezogenen Tangentenpaares:

$$18) \qquad \begin{vmatrix} e_{00}, & e_{01}, & e_{02}, & x_0, & x \\ e_{10}, & e_{11}, & e_{12}, & y_0, & y \\ e_{20}, & e_{21}, & e_{22}, & z_0, & z \\ x_0, & y_0, & z_0, & 0, & 0 \\ x, & y, & z, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung des Punktpaares zu bestimmen, in welchem ein gegebener Kegelschnitt von einer gegebenen geraden Linie geschnitten wird.

Wenn wir mit u_0, v_0, w_0 und u_1, v_1, w_1 die Coordinaten zweier gegebenen geraden Linien 0 und 1 bezeichnen, so hängt die Bestimmung des von dem Schnittpunkte der geraden Linien an einen gegebenen Kegelschnitt $F = 0$ gezogenen Tangentenpaares von der quadratischen Gleichung 4) der neunzehnten Vorlesung ab:

$$19) \qquad F_{00} + 2\lambda F_{01} + \lambda^2 F_{11} = 0.$$

Die beiden Tangenten fallen nur dann zusammen, wenn die beiden geraden Linien 0 und 1 sich in einem Punkte des Kegelschnittes schneiden. Sie schneiden sich in einem Punkte des Kegelschnittes, wenn die quadratische Gleichung gleiche Wurzeln hat, nämlich unter der Bedingung:

$$20) \qquad F_{00}F_{11} - F^2_{01} = 0.$$

Betrachtet man in dieser Gleichung die Coordinaten der einen geraden Linie 0 als gegeben, die Coordinaten der andern als Varabeln, so hat man die Auflösung der vorliegenden Aufgabe.

Zu demselben Resultate gelangt man auf folgendem Wege. Die Pole der gegebenen geraden Linie 0 und 1 werden ausgedrückt durch die Gleichungen $uF'(u_0)+vF'(v_0)+wF'(w_0)=0$, $uF'(u_1)+vF'(v_1)+wF'(w_1)=0$, und das Product der beiden Gleichungen stellt die beiden Pole dar. Es ist darum die Gleichung

$$21)\quad \begin{array}{c} F(u,v,w) \\ -\lambda\{uF'(u_0)+vF'(v_0)+wF'(w_0)\}\{uF'(u_1)+vF'(v_1)+wF'(w_1)\}=0 \end{array}$$

der analytische Ausdruck für alle Kegelschnitte, welche die von den beiden Polen an den gegebenen Kegelschnitt $F=0$ gezogenen Tangenten liefern.

Unter diesen Kegelschnitten giebt es einen, der die gerade Linie 0 berührt. Sein analytischer Ausdruck ist:

$$22)\quad \begin{array}{c} 2\{u_0F'(u_1)+v_0F'(v_1)+w_0F'(w_1)\}F(u,v,w) \\ -\{uF'(u_0)+vF'(v_0)+wF'(w_0)\}\{uF'(u_1)+vF'(v_1)+wF'(w_1)\}=0. \end{array}$$

Der geometrischen Bedeutung des Umstandes, dass diese Gleichung ungeändert bleibt, wenn man die Indices 0 und 1 miteinander verwechselt, ist in einem der vorausgegangenen Sätze bereits Ausdruck gegeben worden.

Fallen die beiden geraden Linien 0 und 1 zusammen, so hat man die Auflösung der vorgelegten Aufgabe:

$$23)\quad 4F(u_0,v_0,w_0)F(u,v,w)-\{uF'(u_0)+vF'(v_0)+wF'(w_0)\}^2=0$$

in einer Gleichung, welche das Punktepaar ausdrückt, in welchem die gegebene gerade Linie 0 den Kegelschnitt $F=0$ schneidet.

In der sechszehnten Vorlesung erhielt die Auflösung 12) derselben Aufgabe eine andere Form, weil dort die Gleichung des Kegelschnittes in Punktcoordinaten gegeben war. Es handelte sich an der angeführten Stelle um die Elimination der Variabelen x, y, z aus folgenden drei Gleichungen:

$$f(x,y,z)=0,$$
$$xu_0+yv_0+zw_0=0,$$
$$xu+yv+zw=0.$$

Wenn man diese Elimination nicht direct, sondern in der im Vorhergehenden angedeuteten Weise vollführt, so erhält man folgende Determinantengleichung des gesuchten Punktepaares:

$$24)\quad \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & u_0, & u \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & v_0, & v \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & w_0, & w \\ u_0, & v_0, & w_0, & 0, & 0 \\ u, & v, & w, & 0, & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Weder die Gleichung 14) eines Tangentenpaares des Kegelschnittes $f=0$, noch die Gleichung 23) eines Punktepaares desselben Kegelschnittes $F=0$ sind so durchsichtiger Art, dass man sie gern als Basis weiterer Untersuchungen der Kegelschnitte nehmen möchte. Wir haben darum in 18) und 24) andere Formen derselben Gleichungen vorgeführt, welche, wie die Gleichungen 1*) und 2*), ihre Zusammensetzung aus den Elementen sogleich erkennen lassen. Auch den Kegelschnittgleichungen 16) und 21) kann man ähnliche Formen geben. Setzt man nämlich in der vorletzten Horizontalreihe dor Gleichung 18) an Stelle des Index 0 den Index 1, so erhält man eine andere Form der Gleichung 16); verändert man in der vorletzten Horizontalreihe der Gleichung 24) den Index 0 in 1, so hat man einen andern Ausdruck für die Gleichung 21). Wenn man ferner bedenkt, dass nach der neunzehnten und einundzwanzigsten Vorlesung selbst die Kegelschnittgleichungen $f=0$ und $\varphi=0$ sich in Determinantenform darstellen lassen:

$$25)\quad \begin{vmatrix} e_{00}, & e_{01}, & e_{02}, & x \\ e_{10}, & e_{11}, & e_{12}, & y \\ e_{20}, & e_{21}, & e_{22}, & z \\ x, & y, & z, & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & u \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & v \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & w \\ u, & v, & w, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

so kann man zweifelhaft sein, ob nicht diese Determinantengleichungen bei der analytischen Behandlung der Kegelschnitte den Vorzug verdienen. In dieser Richtung verweisen wir auf die Abhandlung „Ein Cyclus von Determinantengleichungen“ in Crelle's Journal Bd. 75, S. 1, welche weiteres Material liefern wird zur Durchführung der angeregten Idee.

Vierundzwanzigste Vorlesung.

Die Auflösung von zwei Gleichungen des zweiten Grades mit zwei Unbekannten.

Gegen das Ende der sechszehnten Vorlesung haben wir auseinandergesetzt, wie die Algebra das Problem der Auflösung zweier Gleichungen des zweiten Grades mit zwei Unbekannten mit ihren Hilfsmitteln unternimmt. Sie führt das Problem zurück auf eine biquadratische Gleichung mit einer Unbekannten, welche, wie bekannt, durch eine kubische Gleichung gelöst wird. Da aber die biquadratische Gleichung nicht direct gegeben ist, so kann man sich wohl die Frage vorlegen, ob es nicht einfacher sei, zuerst die kubische Gleichung festzustellen und darauf die Auflösung zu begründen, als umgekehrt. Die Operation soll die aufgeworfene Frage beantworten.

Das geometrische Bild zweier Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten sind zwei Kegelschnitte, welche sich in vier Punkten schneiden. Diese vier Schnittpunkte zu bestimmen, verlangt das Problem. Nun haben wir aber am Ende der oben citirten sechszehnten Vorlesung angedeutet, dass durch die vier Schnittpunkte sich drei Linienpaare legen lassen, deren Bestimmung von einer leicht zu bildenden kubischen Gleichung abhängt. Sind alsdann durch Auflösung der kubischen Gleichung die drei Linienpaare bestimmt, so bedarf es noch der

Auflösung von drei quadratischen Gleichungen, um die drei Linienpaare in einzelne gerade Linien zu trennen. Auf diese Weise gelangen wir zu sechs geraden Linien, von welchen sich immer drei in einem der zu bestimmenden vier Punkte schneiden. Die gesuchten vier Punkte ergeben sich dann schliesslich als die Schnittpunkte von bekannten geraden Linien.

Dieses ist der Ideengang, der uns in der gegenwärtigen Vorlesung zum Wegweiser dienen soll. Er stimmt auch überein mit der Auflösung der biquadratischen Gleichung 1) in der siebenten Vorlesung, die zurückgeführt wurde auf die kubische Gleichung 13) und unter Vermittelung von 14) auf drei quadratische Gleichungen 7).

Wenn wir mit f und φ die Ausdrücke bezeichnen:

$$1)\qquad \begin{aligned} f &= a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + 2a_{12}yz + 2a_{20}zx + 2a_{01}xy, \\ \varphi &= b_{00}x^2 + b_{11}y^2 + b_{22}z^2 + 2b_{12}yz + 2b_{20}zx + 2b_{01}xy, \end{aligned}$$

so stellt die Gleichung

$$2)\qquad f - \lambda\varphi = 0$$

alle Kegelschnitte dar, welche durch die Schnittpunkte der durch ihre Gleichungen $f=0$ und $\varphi=0$ gegebenen Kegelschnitte gehen.

Der Kegelschnitt 2) wird ein Linienpaar, wenn sich Werthe von x, y, z, λ derart bestimmen lassen, dass folgenden drei Gleichungen zu gleicher Zeit genügt wird:

$$3)\quad f'(x) - \lambda\varphi'(x) = 0,\quad f'(y) - \lambda\varphi'(y) = 0,\quad f'(z) - \lambda\varphi'(z) = 0.$$

Durch Elimination der Unbekannten x, y, z erhalten wir hieraus, wenn wir setzen:

$$4)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{00} - \lambda b_{00}, & a_{01} - \lambda b_{01}, & a_{02} - \lambda b_{02} \\ a_{10} - \lambda b_{10}, & a_{11} - \lambda b_{11}, & a_{12} - \lambda b_{12} \\ a_{20} - \lambda b_{20}, & a_{21} - \lambda b_{21}, & a_{22} - \lambda b_{22} \end{vmatrix},$$

die in λ kubische Gleichung

$$5)\qquad \Delta = 0,$$

von deren Lösung die drei Linienpaare abhängen, welche durch die Schnittpunkte der gegebenen Kegelschnitte $f=0$ und $\varphi=0$ gelegt werden können.

Wenn λ eine Wurzel der kubischen Gleichung $\Delta=0$ ist, so bedeuten x, y, z in 3) die Coordinaten des Punktes, in welchem sich das der genannten Wurzel entsprechende Linienpaar schneidet. Nehmen wir daher an, dass λ_0, λ_1, λ_2 die Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta=0$ seien und dass ihnen drei Punkte 0, 1, 2 entsprechen, von denen jeder ein Schnittpunkt ist eines der drei Linienpaare, so ergeben sich aus 3) die drei Systeme Gleichungen

$$6)\quad \begin{aligned} &f'(x_0) - \lambda_0\varphi'(x_0) = 0, && f'(x_1) - \lambda_1\varphi'(x_1) = 0, && f'(x_2) - \lambda_2\varphi'(x_2) = 0, \\ &f'(y_0) - \lambda_0\varphi'(y_0) = 0, && f'(y_1) - \lambda_1\varphi'(y_1) = 0, && f'(y_2) - \lambda_2\varphi'(y_2) = 0, \\ &f'(z_0) - \lambda_0\varphi'(z_0) = 0, && f'(z_1) - \lambda_1\varphi'(z_1) = 0, && f'(z_2) - \lambda_2\varphi'(z_2) = 0, \end{aligned}$$

und aus ihnen wieder folgende beiden Systeme, welche eine geometrische Interpretation zulassen:

$$7)\quad \begin{aligned} x_1 f'(x_2)+y_1 f'(y_2)+z_1 f'(z_2)&=0,\\ x_2 f'(x_0)+y_2 f'(y_0)+z_2 f'(z_0)&=0,\\ x_1 f'(x_0)+y_1 f'(y_0)+z_1 f'(z_0)&=0,\end{aligned}$$

$$8)\quad \begin{aligned} x_1 \varphi'(x_2)+y_1 \varphi'(y_2)+z_1 \varphi'(z_2)&=0,\\ x_2 \varphi'(x_0)+y_2 \varphi'(y_0)+z_2 \varphi'(z_0)&=0,\\ x_1 \varphi'(x_0)+y_1 \varphi'(y_0)+z_1 \varphi'(z_0)&=0.\end{aligned}$$

Denn multiplicirt man die Gleichungen des zweiten Systems 6) resp. mit x_2, y_2, z_2 und addirt, so erhält man:

$$\{x_2 f'(x_1)+y_2 f'(y_1)+z_2 f'(z_1)\}-\lambda_1\{x_2\varphi'(x_1)+y_2\varphi'(y_1)+z_2\varphi'(z_1)\}=0.$$

Ebenso geht aus dem dritten System 6) durch Multiplication mit x, y, z und Addition die Gleichung hervor:

$$\{x_1 f'(x_2)+y_1 f'(y_2)+z_1 f'(z_2)\}-\lambda_2\{x_1\varphi'(x_2)+y_1\varphi'(y_2)+z_1\varphi'(z_2)\}=0.$$

Zieht man die letzte Gleichung von der vorhergehenden ab, so wird:

$$(\lambda_2-\lambda_1)\{x_1\varphi'(x_2)+y_1\varphi'(y_2)+z_1\varphi'(z_2)\}=0.$$

Da nun der erste Factor $(\lambda_2-\lambda_1)$ in dieser Gleichung nicht verschwinden kann, weil λ_2 und λ_1 verschiedene Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta=0$ sind, so muss der zweite Factor verschwinden, was eben durch die erste Gleichung 8) ausgedrückt ist. Die erste Gleichung 7) ergiebt sich dann aus jeder der beiden anderen zuletzt aufgestellten Gleichungen.

Wir wollen nicht unterlassen zu bemerken, dass wir in unserer Discussion nur den allgemeinen Fall vor Augen haben werden, wenn die Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta=0$ wirklich voneinander verschieden sind. Für den Fall zweier oder dreier gleicher Wurzeln bedarf es einer besondern Untersuchung.

Die Gleichungen 7) und 8) beweisen, dass die drei Punkte 0, 1, 2 die Ecken eines Poldreiecks bilden sowohl für den einen Kegelschnitt $f=0$, als für den andern $\varphi=0$. Ausserdem ist ersichtlich, dass dieses gemeinschaftliche Poldreieck auch jedem Kegelschnitte angehört, welcher durch die Schnittpunkte der gegebenen Kegelschnitte geht.

Die Gleichungen 7) und 8), die Bedingungen für das gemeinsame Poldreieck, gingen hervor aus den neun Gleichungen 6). Umgekehrt lassen sich aus den sechs Gleichungen 7) und 8) die drei Systeme 6) herstellen. Vergleicht man beispielsweise, um zum ersten dieser Systeme zu gelangen, die beiden letzten Relationen in 7) mit den beiden letzten Relationen in 8), so sieht man, dass die Grössen $f'(x_0)$, $f'(y_0)$, $f'(z_0)$ dieselben Verhältnisse besitzen wie $\varphi'(x_0)$, $\varphi'(y_0)$, $\varphi'(z_0)$, und dass also ein Factor λ_0 sich finden lässt, für welchen:

$$f'(x_0)=\lambda_0\varphi'(x_0),\quad f'(y_0)=\lambda_0\varphi'(y_0),\quad f'(z_0)=\lambda_0\varphi'(z_0).$$

Hieraus schliessen wir auf den Satz:

Es giebt nur ein Poldreieck, welches zweien gegebenen Kegelschnitten gemeinschaftlich ist.

In dem vorliegenden Falle drücken sich die Seiten des gemeinschaftlichen Poldreiecks der beiden Kegelschnitte analytisch in doppelter Art so aus:

$$
9)\quad \begin{aligned}
&x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0) = 0, \quad && x \varphi'(x_0) + y \varphi'(y_0) + z \varphi'(z_0) = 0,\\
&x f'(x_1) + y f'(y_1) + z f'(z_1) = 0, \quad && x \varphi'(x_1) + y \varphi'(y_1) + z \varphi'(z_1) = 0,\\
&x f'(x_2) + y f'(y_2) + z f'(z_2) = 0, \quad && x \varphi'(x_2) + y \varphi'(y_2) + z \varphi'(z_2) = 0.
\end{aligned}
$$

Wir haben eben das gemeinschaftliche Poldreieck abhängig gemacht von den Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = 0$. Denn aus 6) ergeben sich die Coordinaten der Ecken $0, 1, 2$ durch Auflösung linearer Gleichungen. Wie solche lineare Gleichungen mit Einmischung willkürlicher Constanten sich auflösen lassen, zeigt die Anmerkung*. Man kann aber

---

* Es ist eine häufig wiederkehrende Aufgabe, die Coordinaten des Schnittpunktes zweier geraden Linien zu bestimmen, welche durch ihre Gleichung $f(x, y, z) = 0$ gegeben sind. Die gesuchten Coordinaten ergeben sich, wie bekannt, aus je zweien von den drei Gleichungen

$$
\mathrm{I)}\qquad f'(x) = 0, \quad f'(y) = 0, \quad f'(z) = 0,
$$

welche sämmtlich durch sie befriedigt werden.

Welche zwei Gleichungen man aber auch zu diesem Zwecke verwenden mag, die Ausdrücke für die Coordinaten werden unsymmetrisch. Man muss allen drei Gleichungen zugleich Rechnung tragen, um zu einem befriedigenden Resultate zu gelangen.

Bezeichnen wir die Determinante der Function f mit A und mit $A_{\varkappa\lambda}$ die Unterdeterminanten der letzteren, so erhalten wir durch Auflösung je zweier Gleichungen

$$
x:y:z = A_{00}:A_{10}:A_{20}, \quad x:y:z = A_{01}:A_{11}:A_{21}, \quad x:y:z = A_{02}:A_{12}:A_{22}.
$$

Hieraus setzen sich nun unter Einführung von drei willkürlichen Factoren $\varkappa$ die allgemeinsten Auflösungen der Gleichungen I) zusammen

$$
\mathrm{II)}\qquad \begin{aligned}
x &= A_{00}\varkappa^0 + A_{01}\varkappa^1 + A_{02}\varkappa^2,\\
y &= A_{10}\varkappa^0 + A_{11}\varkappa^1 + A_{12}\varkappa^2,\\
z &= A_{20}\varkappa^0 + A_{21}\varkappa^1 + A_{22}\varkappa^2.
\end{aligned}
$$

Diese Ausdrücke der Unbekannten genügen den Gleichungen I). Denn setzt man dieselben in die Gleichungen ein, so verschwinden einzeln die Coefficienten der willkürlich angenommenen Factoren $\varkappa$. Diese Auflösungen II) umfassen aber auch die oben angegebenen. Denn lässt man zwei von den Constanten $\varkappa$ verschwinden, so erhält man jene speciellen Auflösungen.

Die vorgetragene Auflösungsmethode ist keineswegs beschränkt, weder auf die Zahl der Variabeln und Gleichungen, noch auf die Form der letzteren. Denn lassen wir die Gleichung

$$
\mathrm{III)}\qquad a_0^\lambda x_0 + a_1^\lambda x_1 + \ldots + a_n^\lambda x_n = 0
$$

ein ganzes System linearer homogener Gleichungen bedeuten mit den Unbekannten x, indem wir unter λ alle Zahlen $0, 1, \ldots n$ verstehen, so haben wir die Auflösungen des Systems mit den willkürlichen Constanten $\varkappa$

$$
\mathrm{III)}\qquad x_\lambda = A^0_\lambda \varkappa^0 + A^1_\lambda \varkappa^1 + \ldots + A^n_\lambda \varkappa^n.
$$

auch umgekehrt die kubische Gleichung abhängig machen von dem gemeinschaftlichen Poldreiecke. Denn multiplicirt man die Gleichungen des ersten Systems 6) mit x_0, y_0, z_0 und addirt, so erhält man für λ_0 den Ausdruck

$$10) \qquad \lambda_0 = \frac{x_0 f'(x_0) + y_0 f'(y_0) + z_0 f'(z_0)}{x_0 \varphi'(x_0) + y_0 \varphi'(y_0) + z_0 \varphi'(z_0)}.$$

Es soll sich nun darum handeln, diesen Ausdruck für die Wurzel λ_0 der kubischen Gleichung $\Delta = 0$ geometrisch zu deuten.

Zu diesem Zwecke müssen wir die beiden Functionen f und φ näher fixiren, denn die kubische Gleichung $\Delta = 0$ wird eine andere, wenn man die beiden Functionen mit willkürlichen Factoren multiplicirt, während die durch sie ausgedrückten Kegelschnitte sich dadurch nicht ändern. Wir werden deshalb festsetzen, dass die Function $2f$ der Einheit gleich werde, wenn man in derselben $z = 1$ setzt und die beiden anderen Coordinaten die Coordinaten m des Mittelpunktes des Kegelschnittes $f = 0$ bedeuten lässt. Ebenso soll die Function 2φ der Einheit gleich werden, wenn man in ihr $z = 1$ setzt und für die beiden anderen Coordinaten die Coordinaten des Mittelpunktes n des Kegelschnittes $\varphi = 0$. Man hat daher für den Mittelpunkt m des Kegelschnittes $f = 0$ die Gleichungen

$$11) \qquad f'(x) = 0, \quad f'(y) = 0, \quad f'(z) = 1,$$

und für den Mittelpunkt n des Kegelschnittes $\varphi = 0$

$$12) \qquad \varphi'(x) = 0, \quad \varphi'(y) = 0, \quad \varphi'(z) = 1.$$

Ausserdem wird es vortheilhaft sein, sämmtlichen z-Coordinaten den Werth der Einheit beizulegen, so dass man hat $z = z_0 = z_1 = z_2 = 1$.

Wir entnehmen aus 9) die Gleichung der geraden Linie 12:

$$x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0) = 0,$$

welche durch Multiplication mit dem Factor $-\dfrac{1}{\sqrt{f'(x_0)^2 + f'(y_0)^2}}$ auf die Normalform gebracht wird. Aus ihr erhalten wir dann den senkrechten Abstand p_0 eines durch die Coordinaten x, y, $z = 1$ gegebenen Punktes p von der geraden Linie 12:

$$p_0 = \frac{x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0)}{\sqrt{f'(x_0)^2 + f'(y_0)^2}} = \frac{x_0 f'(x) + y_0 f'(y) + z_0 f'(z)}{\sqrt{f'(x_0)^2 + f'(y_0)^2}}.$$

Hieraus ergiebt sich nun auf Grund der Gleichungen 11) der senkrechte Abstand m_0 des Mittelpunktes m des Kegelschnittes $f = 0$ von der geraden Linie 12:

$$m_0 = \frac{1}{\sqrt{f'(x_0)^2 + f'(y_0)^2}}.$$

Wir haben deshalb

$$\frac{p_0}{m_0} = x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0).$$

Das gleiche Verfahren, ausgeführt an dem Kegelschnitte $\varphi = 0$, ergiebt:

$$\frac{p_0}{n_0} = x\,\varphi'(x_0) + y\,\varphi'(y_0) + z\,\varphi'(z_0),$$

wenn wir unter n_0 den senkrechten Abstand des Mittelpunktes n des Kegelschnittes $\varphi = 0$ von der geraden Linie 12 verstehen. Aus diesen beiden Gleichungen folgt endlich

$$13)\qquad \frac{n_0}{m_0} = \frac{x\,f'(x_0) + y\,f'(y_0) + z\,f'(z_0)}{x\,\varphi'(x_0) + y\,\varphi'(y_0) + z\,\varphi'(z_0)},$$

ein Ausdruck für das Verhältniss der Abstände m_0 und n_0 der Mittelpunkte m und n der Kegelschnitte $f = 0$ und $\varphi = 0$ von der geraden Linie 12, welcher unabhängig ist von der Lage des Punktes p. Lässt man diesen Punkt p zusammenfallen mit dem Punkte 0, so ergiebt sich aus dem Vergleiche von 13) und 10) die geometrische Bedeutung der Wurzel

$$\lambda_0 = \frac{n_0}{m_0}.$$

In dem angegebenen Verhältnisse $n_0 : m_0$ der senkrechten Abstände der Mittelpunkte n und m von der geraden Linie 12 können wir auch die Entfernungen $\overline{[0]n} : \overline{[0]m}$ des Schnittpunktes [0] der geraden Linien nm und 12 an Stelle der Abstände substituiren. Bezeichnen wir deshalb die Schnittpunkte der Verbindungslinie der Mittelpunkte n und m mit den Seiten des Poldreiecks resp. mit den Zeichen [0], [1], [2], so haben wir folgende geometrische Interpretation der Wurzeln der kubischen Gleichung $\varDelta = 0$:

$$14)\qquad \lambda_0 = \frac{\overline{[0]n}}{\overline{[0]m}}, \quad \lambda_1 = \frac{\overline{[1]n}}{\overline{[1]m}}, \quad \lambda_2 = \frac{\overline{[2]n}}{\overline{[2]m}}.$$

Die Beschränkung der Functionen f und φ, welche wir nur gemacht haben, um zu diesem Resultate zu gelangen, ist für das Folgende nicht nothwendig. Wir heben sie darum wieder auf.

Dass die Gleichung $f - \lambda\varphi = 0$ ein Linienpaar darstellt, wenn λ eine Wurzel der kubischen Gleichung $\varDelta = 0$ ist, drückt sich algebraisch aus, wenn man sagt, dass der Ausdruck $f - \lambda\varphi$ in lineare Factoren zerfällt. Zum Zwecke dieser Zerfällung in Factoren ist es nützlich, an Stelle der Variabelen x, y, z neue Variabelen X, Y, Z einzuführen durch folgende Gleichungen:

$$15)\qquad \begin{aligned} x\,\varphi'(x_0) + y\,\varphi'(y_0) + z\,\varphi'(z_0) &= 2X, \\ x\,\varphi'(x_1) + y\,\varphi'(y_1) + z\,\varphi'(z_1) &= 2Y, \\ x\,\varphi'(x_2) + y\,\varphi'(y_2) + z\,\varphi'(z_2) &= 2Z, \end{aligned}$$

und mit φ_0, φ_1, φ_2 die Ausdrücke zu bezeichnen:

$$
\begin{aligned}
&x_0\,\varphi'(x_0)+y_0\,\varphi'(y_0)+z_0\,\varphi'(z_0)=2\varphi_0,\\
16)\qquad &x_1\,\varphi'(x_1)+y_1\,\varphi'(y_1)+z_1\,\varphi'(z_1)=2\varphi_1,\\
&x_2\,\varphi'(x_2)+y_2\,\varphi'(y_2)+z_2\,\varphi'(z_2)=2\varphi_2.
\end{aligned}
$$

Es liegen nun drei lineare Ausdrücke der variabelen Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes p vor:

$$f'(x)-\lambda_0\,\varphi'(x),\quad 2Y,\quad 2Z,$$

welche verschwinden, wenn der Punkt p mit dem Punkte 0 zusammenfällt. Es müssen sich daher zwei Factoren ϱ derart bestimmen lassen, dass man identisch hat

$$f'(x)-\lambda_0\,\varphi'(x)=2\varrho_1 Y+2\varrho_2 Z.$$

Diese Factoren bestimmen sich in der identischen Gleichung dadurch, dass man für die Variabeln setzt entweder die Coordinaten des Punktes 1 oder des Punktes 2. Hierdurch wird

$$
\begin{aligned}
f'(x_1)-\lambda_0\,\varphi'(x_1)&=2\varrho_1\varphi_1,\\
f'(x_2)-\lambda_0\,\varphi'(x_2)&=2\varrho_2\varphi_2
\end{aligned}
$$

oder, da $f'(x_1)-\lambda_1\,\varphi'(x_1)=0$ und $f'(x_2)-\lambda_2\,\varphi'(x_2)=0$ ist, so wird

$$
\begin{aligned}
(\lambda_1-\lambda_0)\,\varphi'(x_1)&=2\varrho_1\varphi_1,\\
(\lambda_2-\lambda_0)\,\varphi'(x_2)&=2\varrho_2\varphi_2.
\end{aligned}
$$

Setzen wir diese Werthe der Factoren in die identische Gleichung ein und vertauschen die Coordinaten, so erhalten wir ein ganzes System Gleichungen, welche die Substitution 15) zu identischen Gleichungen machen:

$$
\begin{aligned}
&f'(x)-\lambda_0\,\varphi'(x)=\frac{(\lambda_1-\lambda_0)}{\varphi_1}\,\varphi'(x_1)\,Y+\frac{(\lambda_2-\lambda_0)}{\varphi_2}\,\varphi'(x_2)\,Z,\\
17)\qquad &f'(y)-\lambda_0\,\varphi'(y)=\frac{(\lambda_1-\lambda_0)}{\varphi_1}\,\varphi'(y_1)\,Y+\frac{(\lambda_2-\lambda_0)}{\varphi_2}\,\varphi'(y_2)\,Z,\\
&f'(z)-\lambda_0\,\varphi'(z)=\frac{(\lambda_1-\lambda_0)}{\varphi_1}\,\varphi'(z_1)\,Y+\frac{(\lambda_2-\lambda_0)}{\varphi_2}\,\varphi'(z_2)\,Z.
\end{aligned}
$$

Multipliciren wir diese Gleichungen resp. mit x, y, z und addiren, so wird mit Rücksicht auf die Substitution 15)

$$f-\lambda_0\varphi=\frac{\lambda_1-\lambda_0}{\varphi_1}\,Y^2+\frac{\lambda_2-\lambda_0}{\varphi_2}\,Z^2$$

oder

$$(f-\lambda_0\varphi)(\lambda_1-\lambda_2)=-P\left\{\frac{Y^2}{\varphi_1(\lambda_2-\lambda_0)}-\frac{Z^2}{\varphi_2(\lambda_0-\lambda_1)}\right\},$$

wenn wir mit P das Product bezeichnen:

$$18)\qquad P=(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_0).$$

Bezeichnen wir endlich mit α, β, γ die Ausdrücke

$$19)\qquad \alpha=\sqrt{\varphi_0(\lambda_1-\lambda_2)},\quad \beta=\sqrt{\varphi_1(\lambda_2-\lambda_0)},\quad \gamma=\sqrt{\varphi_2(\lambda_0-\lambda_1)},$$

so kann man aus der letzten identischen Gleichung durch erlaubte Vertauschungen ein ganzes System Gleichungen ableiten:

20)
$$
\begin{aligned}
(f-\lambda_0\varphi)(\lambda_1-\lambda_2) &= -P\left\{\frac{Y^2}{\beta^2}-\frac{Z^2}{\gamma^2}\right\},\\
(f-\lambda_1\varphi)(\lambda_2-\lambda_0) &= -P\left\{\frac{Z^2}{\gamma^2}-\frac{X^2}{\alpha^2}\right\},\\
(f-\lambda_2\varphi)(\lambda_0-\lambda_1) &= -P\left\{\frac{X^2}{\alpha^2}-\frac{Y^2}{\beta^2}\right\},
\end{aligned}
$$

welches sich auch so darstellen lässt:

21)
$$
\begin{aligned}
(f-\lambda_0\varphi)(\lambda_2-\lambda_2) &= -P\left\{\frac{Y}{\beta}+\frac{Z}{\gamma}\right\}\left\{\frac{Y}{\beta}-\frac{Z}{\gamma}\right\},\\
(f-\lambda_1\varphi)(\lambda_2-\lambda_0) &= -P\left\{\frac{Z}{\gamma}+\frac{X}{\alpha}\right\}\left\{\frac{Z}{\gamma}-\frac{X}{\alpha}\right\},\\
(f-\lambda_2\varphi)(\lambda_0-\lambda_1) &= -P\left\{\frac{X}{\alpha}+\frac{Y}{\beta}\right\}\left\{\frac{X}{\alpha}-\frac{Y}{\beta}\right\}.
\end{aligned}
$$

Setzen wir nun diese umgewandelten Ausdrücke gleich 0, so erhalten wir die Gleichungen der drei Linienpaare, welche durch die Schnittpunkte der gegebenen Kegelschnitte $f=0$ und $\varphi=0$ gelegt werden können.

Zu gleicher Zeit sieht man aber auch, wie jedes Linienpaar sich in einzelne Linien trennt, und welche von den sechs geraden Linien zu dreien in einem der gesuchten vier Schnittpunkte der Kegelschnitte sich schneiden. So schneiden sich die drei geraden Linien

22)
$$
\frac{Y}{\beta}-\frac{Z}{\gamma}=0,\quad \frac{Z}{\gamma}-\frac{X}{\alpha}=0,\quad \frac{X}{\alpha}-\frac{Y}{\beta}=0
$$

in einem und demselben Punkte, weil die Summe ihrer Gleichungen identisch verschwindet.

Die drei anderen Zusammenstellungen von drei der genannten sechs geraden Linien, welche sich in einem der gesuchten Punkte schneiden, erhalten wir aus 22) durch Veränderung der Vorzeichen der Grössen α, β, γ.

Es bleibt noch übrig, die Coordinaten selbst eines Schnittpunktes der gegebenen beiden Kegelschnitte zu berechnen. Hierzu dienen die Gleichungen 22), welche wir in anderer Form so ausdrücken:

$$X:Y:Z=\alpha:\beta:\gamma.$$

Da es sich aber nur um die Verhältnisse der homogenen Coordinaten des Schnittpunktes handelt, so können wir für die angegebenen Verhältnisse auch folgende Gleichungen nehmen:

$$X=\alpha,\quad Y=\beta,\quad Z=\gamma,$$

welche sich mit Rücksicht auf 15) ausführlich so darstellen:

23)
$$
\begin{aligned}
x\,\varphi'(x_0)+y\,\varphi'(y_0)+z\,\varphi'(z_0) &= 2\alpha,\\
x\,\varphi'(x_1)+y\,\varphi'(y_1)+z\,\varphi'(z_1) &= 2\beta,\\
x\,\varphi'(x_2)+y\,\varphi'(y_2)+z\,\varphi'(z_2) &= 2\gamma.
\end{aligned}
$$

Um diese Gleichungen aufzulösen, bedienen wir uns der Methode der unbestimmten Coefficienten. Wir multipliciren die Gleichungen der Reihe nach mit X_0, X_1, X_2, addiren und richten die Coefficienten so ein, dass man hat:

$$\text{24)}\quad \begin{aligned} X_0\,\varphi'(x_0)+X_1\,\varphi'(x_1)+X_2\,\varphi'(x_2)&=1,\\ X_0\,\varphi'(y_0)+X_1\,\varphi'(y_1)+X_2\,\varphi'(y_2)&=0,\\ X_0\,\varphi'(z_0)+X_1\,\varphi'(z_1)+X_2\,\varphi'(z_2)&=0. \end{aligned}$$

Alsdann erhalten wir den Werth der Unbekannten x:

$$x=2(\alpha X_0+\beta X_1+\gamma X_2).$$

Die Werthe der zu bestimmenden Coefficienten ergeben sich aber aus 24), wenn man diese Gleichungen entweder mit x_0, y_0, z_0 oder mit x_1, y_1, z_1 oder mit x_2, y_2, z_2 multiplicirt und dann addirt:

$$X_0=\frac{x_0}{2\varphi_0},\quad X_1=\frac{x_1}{2\varphi_1},\quad X_2=\frac{x_2}{2\varphi_2}.$$

Hiernach wird

$$x=\frac{\alpha x_0}{\varphi_0}+\frac{\beta x_1}{\varphi_1}+\frac{\gamma x_2}{\varphi_2},$$

und wir erhalten auf diese Weise die Auflösung der Gleichungen $f=0$ und $\varphi=0$ in homogenen Cordinaten

$$\text{25)}\quad \begin{aligned} x&=\frac{\alpha x_0}{\varphi_0}+\frac{\beta x_1}{\varphi_1}+\frac{\gamma x_2}{\varphi_2},\\ y&=\frac{\alpha y_0}{\varphi_0}+\frac{\beta y_1}{\varphi_1}+\frac{\gamma y_2}{\varphi_2},\\ z&=\frac{\alpha z_0}{\varphi_0}+\frac{\beta z_1}{\varphi_1}+\frac{\gamma z_2}{\varphi_2}. \end{aligned}$$

Da diese Gleichungen 25) die Auflösungen der linearen Gleichungen 23) sind, welche letzteren sich von den Substitutionen 15) nur in ihren rechten Theilen unterscheiden, so gehen die Gleichungen 25) über in die Auflösungen der Substitutionen, wenn man die Buchstaben α, β, γ verändert in X, Y, Z.

Die drei anderen Auflösungen derselben beiden Gleichungen $f=0$ und $\varphi=0$ gehen aus diesen Auflösungen hervor durch Veränderung der Vorzeichen der Grössen α, β, γ.

Multipliciren wir die Gleichungen 25) mit den variabelen Liniencoordinaten u, v, w und setzen die Summe gleich 0, so erhalten wir die Gleichung des gesuchten Schnittpunktes der gegebenen beiden Kegelschnitte. Wenn wir demnach die Bezeichnungen einführen:

$$\begin{aligned} U_0&=(x_0u+y_0v+z_0w)\sqrt{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\varphi_0}},\\ U_1&=(x_1u+y_1v+z_1w)\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_0}{\varphi_1}},\\ U_2&=(x_2u+y_2v+z_2w)\sqrt{\frac{\lambda_0-\lambda_1}{\varphi_2}}, \end{aligned}$$

so stellen sich die Gleichungen der vier Schnittpunkte der gegebenen Kegelschnitte in der eleganten Form dar

$$\begin{aligned} 27) \qquad & U_0 + U_1 + U_2 = 0\,, \\ & -U_0 + U_1 + U_2 = 0\,, \\ & U_0 - U_1 + U_2 = 0\,, \\ & U_0 + U_1 - U_2 = 0. \end{aligned}$$

Nachdem wir unser am Anfange der Vorlesung aufgestelltes Problem vollständig gelöst haben, so werfen wir noch einen Blick zurück auf die durch die Substitutionen 15) identischen Gleichungen 20). Die ersten Theile der letzteren enthalten nur die Quadrate der neuen Variabelen X, Y, Z. Betrachtet man in zwei von diesen Gleichungen die Factoren f und φ als Unbekannte, so drücken sich dieselben durch die Quadrate der neuen Variabelen aus. Es werden sich daher immer lineare Substitutionen neuer Variabelen finden lassen, welche die gegebenen Functionen f und φ auf die Quadrate der neuen Variabelen zurückführen.

Lineare Substitutionen ähnlicher Art haben ihre geometrische Bedeutung in der elften Vorlesung in den Dreieckcoordinaten erhalten. Wir verlassen daher nicht das Gebiet der Geometrie, wenn wir noch eine zweite Art der Auflösung unsers Problems in Anregung bringen.

Es lassen sich zwei gegebene homogene Functionen f und φ des zweiten Grades der drei Variabelen x, y, z durch lineare Substitutionen anderer Variabelen X, Y, Z auf die Quadrate zurückführen wie folgt:

$$\begin{aligned} 28) \qquad & f = \mu_0 X^2 + \mu_1 Y^2 + \mu_2 Z^2, \\ & \varphi = \varkappa_0 X^2 + \varkappa_1 Y^2 + \varkappa_2 Z^2. \end{aligned}$$

Denn die Substitutionen enthalten neun zu bestimmende Coefficienten, und die Gleichungen 28) sechs zu bestimmende Grössen μ und $\varkappa$, also im Ganzen 15 zu bestimmende Grössen. Macht man nun in den angegebenen Gleichungen die Substitutionen und setzt die Coefficienten der Quadrate und der Producte der Variabelen einander gleich, so erhält man nur zwölf Gleichungen, welchen die zu bestimmenden 15 Grössen zu genügen haben. Es können deshalb von den 15 zu bestimmenden Grössen gewisse drei beliebig angenommen werden. Welche Grössen dieses sind, ergiebt folgende Betrachtung.

Die Gleichungen 28) sind Folgen aus den Substitutionen. Verändert man in den Substitutionen die Variabelen X, Y, Z in $\varrho_0 X$, $\varrho_1 Y$, $\varrho_2 Z$, so muss auch in den Gleichungen 28) die gleiche Veränderung eintreten. Die sechs Coefficienten μ und $\varkappa$ in 28) verändern sich dadurch in $\mu_0\varrho_0^2$, $\mu_1\varrho_1^2$, $\mu_2\varrho_3^2$; $\varkappa_0\varrho_0^2$, $\varkappa_1\varrho_1^2$, $\varkappa_2\varrho_2^2$. Was sich bei dieser Gelegenheit nicht ändert, das sind die Verhältnisse λ_0, λ_1, λ_2 der Grössen μ und $\varkappa$:

$$\lambda_0 = \frac{\mu_0}{\varkappa_0}\,, \quad \lambda_1 = \frac{\mu_1}{\varkappa_1}\,, \quad \lambda_2 = \frac{\mu_2}{\varkappa_2}\,.$$

Es können daher drei von den sechs Grössen μ und $\varkappa$ beliebig angenommen werden unter der einzigen Beschränkung, dass die drei Grössen λ von der gemachten Annahme unberührt bleiben. Wie die Untersuchung lehren wird, ergeben sich dann die drei Grössen λ als die Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = 0$. Als Wegweiser zur Ausführung der Transformation wird die zwanzigste Vorlesung meiner Raumgeometrie dienlich sein, welche die Zahl der Variabelen unbeschränkt lässt.

Stellen wir uns nun vor, dass wir die Substitutionen kennen, welche die Transformationen 28) bewirken, so haben wir die aufzulösenden Gleichungen auf die Form zurückgeführt

$$29) \qquad \begin{aligned} \mu_0 X^2 + \mu_1 Y^2 + \mu_2 Z^2 = 0, \\ \varkappa_0 X^2 + \varkappa_1 Y^2 + \varkappa_2 Z^2 = 0, \end{aligned}$$

woraus sich sofort mit Einmischung eines unbestimmten Factors ϱ die Ausdrücke ergeben

$$30) \quad X = \varrho \sqrt{\mu_1 \varkappa_2 - \mu_2 \varkappa_1}, \quad Y = \varrho \sqrt{\mu_2 \varkappa_0 - \mu_0 \varkappa_2}, \quad Z = \varrho \sqrt{\mu_0 \varkappa_1 - \mu_1 \varkappa_0},$$

welche den beiden Gleichungen 29) zu gleicher Zeit genügen.

Da in diesen Gleichungen X, Y, Z bekannte lineare Ausdrücke der Coordinaten x, y, z sind, so handelt es sich nunmehr um die Auflösung linearer Gleichungen, um die Coordinaten der Schnittpunkte der gegebenen beiden Kegelschnitte $f = 0$ und $\varphi = 0$ festzustellen.

Wenn man es unternimmt, auf dem eben angegebenen Wege die gegebenen beiden Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$ aufzulösen, so wird man sich nicht befriedigt finden, wenn man nicht auf das einfache Resultat 25) zurückkommt.

Heben wir zum Schlusse unserer Vorlesung noch eine Specialität hervor, nämlich die, wenn die gegebenen beiden Kegelschnitte $f = 0$ und $\varphi = 0$ denselben Mittelpunkt haben.

Aus der in 14) angegebenen Construction der Wurzeln λ der kubischen Gleichung $\Delta = 0$ von den Mittelpunkten der Kegelschnitte aus durch das gemeinschaftliche Poldreieck wäre man geneigt zu schliessen, dass sämmtliche Wurzeln einander geich seien und dass gerade der Fall gleicher Wurzeln vorläge, den wir in unserer Untersuchung ausdrücklich ausgeschlossen haben. Der Fall gleicher Wurzeln braucht aber nicht vorzuliegen. Denn wenn der gemeinschaftliche Mittelpunkt der beiden Kegelschnitte in eine Ecke des Poldreiecks fällt, so giebt die Construction eine ganz bestimmte Wurzel, die beiden anderen aber werden illusorisch. Und in der That hat in dem vorgelegten Falle die kubische Gleichung drei ganz bestimmte, voneinander verschiedene Wurzeln.

Wie wir gesehen haben, wurden die Coordinaten x, y, z einer Ecke des gemeinschaftlichen Poldreiecks und der dieser Ecke zugehörige Werth von λ durch die drei Gleichungen 3) bestimmt:

$$f'(x) - \lambda\,\varphi'(x) = 0, \quad f'(y) - \lambda\,\varphi'(y) = 0, \quad f'(z) - \lambda\,\varphi'(z) = 0.$$

Bedeuten nun x, y, z die Coordinaten des gemeinschaftlichen Mittelpunktes der beiden Kegelschnitte, so werden die beiden ersten Gleichungen von selbst erfüllt und die letzte Gleichung giebt den zugehörigen Werth von λ. Dieses beweist, dass der gemeinsame Mittelpunkt wirklich mit einer Ecke des Poldreiecks zusammenfällt, und dass der dieser Ecke zugehörige Werth λ der Wurzel der kubischen Gleichung $\varDelta = 0$ sich unabhängig von dieser Gleichung angeben lässt.

Mit der Kenntniss einer der Wurzeln der kubischen Gleichung $\varDelta = 0$ liegt nunmehr statt der kubischen eine quadratische Gleichung vor. Da die übrigen für den allgemeinen Fall vorgezeichneten Operationen zur Feststellung der Coordinaten der vier Schnittpunkte der gegebenen beiden Kegelschnitte auch Nichts weiter verlangen, als die Auflösungen von quadratischen Gleichungen, so ist ersichtlich, dass die Auflösung der vorliegenden Specialität nur von quadratischen Gleichungen abhängt.

Was das Poldreieck anbetrifft, dessen Ecke 2 zusammenfallen mag mit dem gemeinsamen Mittelpunkte der Kegelschnitte, so liegt die dieser Ecke gegenüberliegende Seite 01 in dem Unendlichen, weil sie die Polare des Mittelpunktes ist. Die beiden anderen Ecken ergeben sich alsdann als dasjenige Punktepaar, welches harmonisch ist zu den Schnittpunktepaaren der geraden Linie im Unendlichen mit den beiden Kegelschnitten.

Die Seiten 20 und 21 des eben beschriebenen Poldreiecks sind harmonische Polaren für jeden der beiden Kegelschnitte, und da sie von dem gemeinsamen Mittelpunkte ausgehen, so sind sie conjugirte Durchmesser für jeden der beiden Kegelschnitte. Wir können daraus schliessen:

Zwei Kegelschnitte mit gemeinsamem Mittelpunkte haben ein Paar conjugirter Durchmesser gemeinschaftlich.

Durchsichtiger noch wird dieses, wenn wir annehmen, dass die Gleichungen der gegebenen Kegelschnitte auf den Mittelpunkt bezogen seien, dass also $a_{20} = a_{21} = b_{20} = b_{21} = 0$. Denn alsdann zerfällt die Determinante $\varDelta$ in die Factoren

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{00} - \lambda b_{00}, & a_{01} - \lambda b_{01} \\ a_{10} - \lambda b_{10}, & a_{11} - \lambda b_{11} \end{vmatrix} (a_{22} - \lambda b_{22}),$$

und in der Gleichung $\varDelta = 0$ tritt der lineare Factor $(a_{22} - \lambda b_{22})$ sichtbar hervor, der fortgelassen die kubische Gleichung zu einer quadratischen Gleichung macht:

$$\begin{vmatrix} a_{00} - \lambda b_{00}, & a_{01} - \lambda b_{01} \\ a_{10} - \lambda b_{10}, & a_{11} - \lambda b_{11} \end{vmatrix} = 0.$$

Dass die Eckpunkte 0 und 1 des gemeinschaftlichen Poldreiecks in dem Unendlichen liegen, folgt aus denjenigen Gleichungen 6), welche in dem vorliegenden Falle die Gestalt annehmen $(a_{22} - \lambda_0 b_{22}) z_0 = 0$, $(a_{22} - \lambda_1 b_{22}) z_1 = 0$. Sie können aber nicht anders befriedigt werden, als wenn $z_0 = z_1 = 0$ sind. Die übrigen Coordinaten der Eckpunkte ergeben sich dann aus einer der specialisirten Gleichungen 3)

$$(a_{00} - \lambda b_{00}) x + (a_{01} - \lambda b_{01}) y = 0,$$
$$(a_{10} - \lambda b_{10}) x + (a_{11} - \lambda b_{11}) y = 0,$$

wenn man unter λ die eine oder die andere Wurzel der vorgenannten quadratischen Gleichung versteht. Unter dieser Annahme stellen diese Gleichungen zugleich die gemeinschaftlichen conjugirten Durchmesser der beiden Kegelschnitte dar in doppelter Ausdrucksweise.

Wenn wir endlich annehmen, dass der Kegelschnitt $\varphi = 0$ ein Kreis sei, dass also $b_{00} = b_{11} = 1$ und $b_{01} = 0$, und bemerken, dass die conjugirten Durchmesser eines Kreises immer aufeinander senkrecht stehen, so werden die gemeinschaftlichen conjugirten Durchmesser die Axen des Kegelschnittes $f = 0$. Und in der That sieht man, dass die obengenannte quadratische Gleichung in dem vorliegenden Falle

$$\begin{vmatrix} a_{00} - \lambda, & a_{01} \\ a_{10}, & a_{11} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

mit der Gleichung 8) in der zehnten Vorlesung und mit der Gleichung 4) in der einundzwanzigsten Vorlesung übereinstimmt, von welcher Gleichung dort das Axenproblem des Kegelschnittes $f = 0$ abhängig gemacht worden ist. Die Gleichungen der Axen selber ergeben sich dann aus den vorhergehenden beiden Gleichungen wieder in gleichbedeutenden Ausdrücken:

$$(a_{00} - \lambda) x + a_{01} y = 0,$$
$$a_{10} x + (a_{11} - \lambda) y = 0.$$

Wir wollen die quadratische Gleichung, von welcher die Axen eines Kegelschnittes abhängen, und die Gleichungen der Axen selber nicht wiederholt haben, ohne daran die Bemerkung zu knüpfen, dass diese Gleichungen ungeändert bleiben, wenn man in ihnen für a_{00} und a_{11} resp. setzt

$$a_{00} - \varkappa \text{ und } a_{11} - \varkappa$$

und zugleich für λ setzt $\lambda - \varkappa$, welchen Werth auch $\varkappa$ habe. Daraus ziehen wir den Schluss:

Alle Kegelschnitte, welche durch die vier Punkte gehen, in welchen sich ein Kegelschnitt und irgend ein Kreis schneiden, haben gleiche Richtungen ihrer Axen.

Wenn wir nämlich mit $f = 0$ eine Kegelschnittgleichung in gewöhnlichen Punktcoordinaten und mit $\varphi = 0$ die Kreisgleichung in der Normalform bezeichnen, so ist $f - \varkappa \varphi = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes, von welchem der Satz handelt. Bei der Bestimmung der Richtungen der Axen dieses Kegelschnittes kommen nur die Glieder zweiter Ordnung in Betracht:

$$(a_{00}-\varkappa)\,x^2+2\,a_{01}\,xy+(a_{11}-\varkappa)\,y^2.$$

Man erhält also aus der oben aufgestellten quadratischen Gleichung die dem vorliegenden Falle entsprechende quadratische Gleichung, wenn man für a_{00} und a_{11} resp. setzt

$$a_{00}-\varkappa \text{ und } a_{11}-\varkappa.$$

Ist aber λ eine Wurzel jener Gleichung, so ist $\lambda-\varkappa$ eine Wurzel dieser Gleichung. Diese Veränderungen bringen jedoch, wie schon bemerkt wurde, keine Aenderungen in den die Richtungen der Axen bestimmenden Gleichungen hervor.

II.

Ueber einige Anwendungen eines besondern Falles der homographischen Verwandtschaft (der Affinität).

Von

Dr. J. Korteweg

zu Breda.

Die Lehre von der Affinität wurde, wie bekannt, ausführlicher besprochen von Möbius in seinem „Barycentrischen Calcul" Cap. III, S. 191 § 144, und von Chasles in seinem berühmten „*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*", und zwar in dem beigefügten „*Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science: la dualité et l'homographie*". *Deuxième partie* § *XXIII*; sie war jedoch schon früher von Euler in der *Introductio in anal. inf. Tome II*, *Cap. XVIII* benannt und bestimmt worden. Ob sie später jemals einen Gegenstand von speciellem Studium ausgemacht hat, ist mir nicht bekannt; in den allgemeineren Schriften über neuere Geometrie von Poncelet, Chasles, Steiner, Magnus, Plücker, v. Staudt, T. Reye, Schlesinger, Salmon, Fiedler u. s. w. wird sie meistens nur sehr nebenbei, bisweilen gar nicht genauer behandelt. Eine gute Uebersicht über das schon von Möbius und Chasles Angeführte giebt F. Reye in seiner „Geometrie der Lage". Wir wollen nun zeigen, dass damit die Lehre von der Affinität noch nicht abgeschlossen, dass sie im Gegentheil geeignet ist, verschiedene Untersuchungen der Geometrie und Mechanik (namentlich die Frage nach grössten und kleinsten um- und eingeschriebenen Figuren und die Theorie des Trägheitsellipsoids) in dem Gebiete der neueren Geometrie unterzubringen.

1. Es ist bekannt, dass Affinität der besondere Fall von Homographie oder Collineation ist, wobei die Ebenen im Unendlichen der beiden homologen Systeme einander entsprechen. Hieraus leitet man folgende Theoreme ab:

a) Nennen wir, in Uebereinstimmung mit dem Ausdruck-Doppelverhältniss $\frac{AC}{BC}$ das Einzelverhältniss dreier Punkte A, B, C einer

Geraden, so sind die Einzelverhältnisse dreier Punkte auf einer Geraden und ihrer Homologen einander gleich.

b) Parallele Linien sind mit parallelen Linien homolog.

c) Das Verhältniss zwischen zwei parallelen begrenzten Linien ist dem zwischen ihren Homologen gleich.

d) Denkt man sich zwei homologe schiefwinklige Axensysteme in beiden affinen Systemen, so sind die Coordinaten eines beliebigen Punktes der einen Figur homolog und proportional den entsprechenden Coordinaten des homologen Coordinatensystems in der andern Figur. Zwei affine Figuren können also dadurch aus einander abgeleitet werden, dass man die gleichartigen Coordinaten aller Punkte der einen Figur in gleichem Verhältniss verändert und auf ein neues Axensystem überträgt.

e) Die Inhalte geschlossener Figuren in parallelen Ebenen verhalten sich wie die Inhalte der homologen Figuren. Die Volumina körperlicher Figuren sind proportional den Rauminhalten der homologen Figuren.

2. Diesen Theoremen, die man zum Beispiel im Lehrbuch des Herrn Reye bewiesen findet, fügen wir folgende hinzu:

f) Es ist immer möglich, durch jeden Punkt des ersten Systems ein rechtwinkliges Coordinatenaxen-System zu legen, homolog mit einem solchen im zweiten System.

Obwohl diese Eigenschaft auf rein elementarem Wege zu beweisen wäre, so würde dies hier zu weitläufig sein. Denkt man sich aber im ersten System eine Kugel, welcher im zweiten ein Ellipsoid entspricht, so correspondiren mit den Hauptaxen des Ellipsoids rechtwinklige Durchmesser der Kugel, und diese Axen und Durchmesser, welche man die orthogonalen Affinitätsaxen der beiden Systeme nennen könnte, bilden zusammen die verlangten homologen rechtwinkligen Coordinatenaxen.

3. Endlich müssen wir noch den Begriff von affinen Figuren einführen. Es sind dies bestimmte geometrische Figuren, welche sich durch Affinität von einander ableiten lassen. Einander affin sind z. B. alle Tetraeder, alle Parallelepipede, alle dreiseitigen Prismen, alle Ellipsoide, alle elliptischen Cylinder und Kegel u. s. w. Sie können es eindeutig oder mehrdeutig sein, je nachdem sie auf eine oder auf mehrere verschiedene Weisen als affin betrachtet werden können. So ist jedes Paar Tetraeder vierundzwanzigdeutig affin, da man die vier Flächen A, B, C, D des einen und die vier Flächen A', B', C', D' des andern paarweise in beliebiger Combination als miteinander homolog betrachten kann. Jedes Paar Ellipsoide kann auf unendlich viele Weisen als affin angesehen werden. Zwei unregelmässige Pentaeder dagegen sind, wenn affin, dann meistens eindeutig affin. Denkt man sich zwei affine Figuren nach der einen oder andern Auffassungsweise als Theile affiner Systeme,

so kann man von homologen Punkten, Linien, Flächen in beiden Figuren sprechen. Zwei Punkte in zwei Tetraedern können also gemäss einer der 24 Betrachtungsweisen homolog sein. In jedem Paar Tetraeder ist nur ein einziges Punktepaar, nämlich die Schwerpunkte, in allen 24 Fällen homolog. Diese Betrachtungen führen zu Untersuchungen, die jetzt nicht zu unserem Zwecke gehören. Wir ziehen es vor, jetzt zu unserer ersten Anwendung überzugehen.

4. Man denke sich zwei beliebige Figuren A und B, z. B. ein Tetraeder und eine Kugel. Mit A_p, A_q, A_r, allgemein $A_n \ldots$, bezeichnen wir allerlei verschiedene Figuren, die miteinander und mit A affin sind, ebenso mit B_p, B_q, $B_r, \ldots$, allgemein B_n . ., verschiedene Figuren affin mit B. Wählen wir dann zwei Figuren A_p und A_r, beide affin mit A und also auch einander affin, übrigens aber willkürlich, dann kann A_r aus A_p nach einer oder mehreren Betrachtungsweisen durch Affinität abgeleitet werden. Denkt man sich nun Figuren affin mit B um A_p und A_r beschrieben, so stimmt mit jeder Figur B_n um A_p eine andere um A_r beschriebene überein, und umgekehrt. Ihre Volumina sind dabei proportional. Die kleinste Figur oder die kleinsten Figuren B_n um A_p sind also homolog mit der kleinsten Figur oder die kleinsten Figuren B_n um A_r; daher:

g) Das Verhältniss zwischen beliebigen mit A affinen Figuren und den kleinsten umgeschriebenen, die mit B affin sind, ist eine constante Grösse k.

h) Bei zwei mit A affinen Figuren sind die kleinsten Figuren B_n um die eine homolog mit den kleinsten Figuren B_n um die andere.

Ganz dieselben Regeln gelten für die grössten eingeschriebenen Figuren B_n.

5. Wenn nun ferner k die soeben genannte constante Grösse bezeichnet, so wird eine Figur B_n **um** A_n niemals kleiner sein können als kA_n. Darum wird auch irgend eine Figur A_n **in** B_n nie grösser sein können wie $\frac{1}{k} B_n$. Betrachten wir nun die kleinste Figur B_r **um** A_r, dann ist

$$B_r = k A_r$$

und also auch

$$A_r = \frac{1}{k} B_r.$$

Daher muss ebenso, wie B_r die kleinste Figur **um** A_r ist, auch A_r die grösste **in** B_r sein oder zu den grössten gehören.

i) Gehört von zwei um- und eingeschriebenen Figuren die erste zu den kleinsten umgeschriebenen von all ihren

Affinen, so gehört auch die letzte zu den grössten eingeschriebenen von all ihren Affinen, und umgekehrt.

Das grösste Ellipsoid z. B. in einem Tetraeder wird so gelegen sein, dass das Tetraeder zu den kleinsten gehört, die um das Ellipsoid beschrieben werden können. Da nun so ein Tetraeder mit einem der kleinsten um die Kugel homolog ist, reducirt sich die Aufgabe, in ein Tetraeder das grösste Ellipsoid zu beschreiben, auf die reciproke Aufgabe, um eine Kugel das kleinste Tetraeder zu legen.

Der gefundene Lehrsatz findet ebenso gut Anwendung auf alle Fragen, betreffend grösste oder kleinste Tetraeder, dreiseitige Prismen, Parallelepipede, Ellipsoide, elliptische Kegel oder Cylinder, halbe Ellipsodie, um oder in einander beschrieben. Bei allen diesen Figuren gilt der Satz, dass, wenn die eine eine **Maximaleingeschriebene** ist, die andere **Umgeschriebene einen Minimalwerth hat, und umgekehrt.**

6. **Ferner gilt der gegebene Beweis ebenso gut für den etwas allgemeineren Lehrsatz:**

k) Steht irgend eine Figur A_p zu einer andern Figur B_p in einer Beziehung, welche durch affine Projection nicht geändert wird, und ist A_p die grösste von allen Figuren A_n, die in dieser Beziehung denkbar sind, so ist B_p die kleinste aller Figuren B_n, die mit A_p in gleichartige Beziehung gebracht werden können wie B_p.

Gilt es z. B. das kleinste Ellipsoid zu finden, welches durch eine der Ecken eines Tetraeders geht, das Tetraeder einschliesst und die gegenüberstehende Seitenfläche zur Mittelfläche hat, so muss das Tetraeder zu den grössten gehören, welche so in das Ellipsoid beschrieben werden können, dass ein Eckpunkt in die Oberfläche fällt und die gegenüberliegende Seitenfläche durch dessen Mittelpunkt geht. Es muss also die Tangentenfläche des Ellipsoids im Eckpunkte des Tetraeders der Grundfläche des Tetraeders parallel sein. Oder gilt es das grösste Ellipsoid zu bestimmen, welches die sechs Kanten eines Tetraeders (und nicht deren Verlängerungen) berührt, so wird dieses Tetraeder das kleinste Tetraeder sein müssen, dessen Kanten selbst (und nicht ihre Verlängerungen) Tangenten des Ellipsoids sind.

7. **Es ist unsere Absicht wieder nicht, die Fragen, zu deren Lösung diese Lehrsätze führen, weiter zu erörtern, denn wir würden meistens nur zu solchen besonderen Resultaten gelangen, die sich auch auf anderem Wege ableiten lassen; wir bezweifeln aber, ob es möglich sein wird, auf anderem Wege die genannten Beziehungen zwischen ein- und umgeschriebenen Figuren von so allgemeinem Gesichtspunkte aus zu betrachten. Nur wollen wir noch folgenden Satz als eine unmittelbare Folge des gefundenen aussprechen:**

e) Wenn eine geschlossene Oberfläche einem Polyeder dergestalt einbeschrieben ist, dass die Polyederflächen in ihren Schwerpunkten von der Oberfläche berührt werden, so ist diese Oberfläche unter allen eingeschriebenen affinen Oberflächen ein Maximum.

Selbstverständlich hat dieser Satz nur Bedeutung, wenn die Anzahl der Flächen des Polyeders das Einschreiben mehrerer Affinen erlaubt. Als besonderer Fall ergiebt sich sofort: Wenn sich einem Polyeder ein Ellipsoid dergestalt einschreiben lässt, dass die Flächen des Polyeders in ihren Schwerpunkten berührt werden, so ist das Ellipsoid unter allen eingeschriebenen ein Maximum, und dieser Satz genügt vollkommen, um die Position des grössten, dem Tetraeder, resp. einem dreiseitigen Prisma oder einem Parallelepiped eingeschriebenen Ellipsoids oder des elliptischen Cylinders und des elliptischen Kegels zu bestimmen. Ein analoger Satz, obwohl nicht so einfach, gilt für umgeschriebene affine Maximaloberflächen.

8. Gehen wir nun zu einer zweiten Anwendung über. Diese bezieht sich auf die Trägheits- oder mehr speciell die Centralellipsoide einiger einfachen Körper. Die Eigenschaften dieser Ellipsoide leitet man gewöhnlich auf analytischem Wege ab, doch wird es nicht schwierig sein, sie auch auf rein geometrischem Wege zu finden. Das würde hier aber wieder zu weitläufig sein und wir scheuen uns daher nicht, von den vorhin entwickelten Eigenschaften Gebrauch zu machen.

Es sind die drei Hauptaxen des Trägheitsellipsoids eines Punktes O zugleich die Axen, um welche die Centrifugalkräfte einander das Gleichgewicht halten oder eine einzige Resultante besitzen. Nehmen wir diese Axen zu Coordinatenaxen und nennen ZZ_1, ZZ_2, ZZ_3 die Coordinaten eines Punktes Z, so haben wir

$$\Sigma ZZ_1 . ZZ_2 \Delta V = 0, \quad \Sigma ZZ_2 . ZZ_3 \Delta V = 0, \quad \Sigma ZZ_3 . ZZ_1 \Delta V = 0;$$

diese Bedingungen reichen hin, um die Identität der Coordinatenaxen und der Axen des Trägheitsellipsoids zu constatiren.

9. Setzen wir zunächst den sehr besondern Fall, dass dieses rechtwinklige Coordinatensystem mit einem ebenfalls rechtwinkligen Coordinatensystem in einer andern affinen Figur homolog sei, so gilt für jeden Punkt Z' dieser Figur

$$Z'Z'_1 = k_1 . ZZ_1, \quad Z'Z'_2 = k_2 . ZZ_2, \quad Z'Z'_3 = k_3 . ZZ_3,$$
$$\Delta V' = k_1 k_2 k_3 \Delta V$$

und daher

$$\Sigma Z'Z'_1 . Z'Z'_2 \Delta V' = k_1^2 k_2^2 k_3 \Sigma ZZ_1 . ZZ_2 \Delta V = 0 \text{ u. s. w.},$$

so dass die homologen Coordinatenaxen nun auch in affinen Körperaxen des Trägheitsellipsoids des Punktes O' sind, dessen Axen also in diesem besondern Falle mit den Axen desjenigen

Ellipsoids zusammenfallen, welches in der zweiten Figur homolog ist mit dem Centralellipsoid der ersten.

10. Was übrigens das Verhältniss der Axen dieser verschiedenen Ellipsoide betrifft, so verhalten sich die des Trägheitsellipsoids des ersten Körpers wie

$$\text{I)}\qquad \frac{1}{\sqrt{B+C}}:\frac{1}{\sqrt{C+A}}:\frac{1}{\sqrt{A+B}},$$

worin

$$A=\Sigma ZZ_1^2\varDelta V,\quad B'=\Sigma ZZ_2^2\varDelta V,\quad C=\Sigma ZZ_3^2\varDelta V;$$

die Axen des Trägheitsellipsoids des zweiten affinen Körpers verhalten sich daher wie

$$\text{II)}\qquad \frac{1}{\sqrt{k_2^2B+k_3^2B}}:\frac{1}{\sqrt{k_3^2C+k_1^2A}}:\frac{1}{\sqrt{k_1^2A+k_2^2B}},$$

dagegen die des Ellipsoids in dem zweiten System, welches homolog ist mit dem Trägheitsellipsoid des ersten Systems, wie

$$\text{III)}\qquad \frac{k_1}{\sqrt{B+C}}:\frac{k_2}{\sqrt{C+A}}:\frac{k_3}{\sqrt{A+B}}.$$

Das mit dem ersten Trägheitsellipsoid homologe Ellipsoid ist also dem zweiten Trägheitsellipsoid nicht ähnlich.

11. Der in 9 besprochene Satz gilt nur für den Fall, dass die Hauptaxen des ersten Körpers für den Punkt O mit den orthogonalen Affinitätsaxen homolog sind. Er wird nur dann eine allgemeinere Bedeutung erhalten, wenn das Trägheitsellipsoid des ersten Körpers in eine Kugel übergeht. Dann lassen sich nämlich in der Kugel stets drei senkrechte Durchmesser angeben, welche mit drei senkrechten Geraden (den orthogonalen Affinitätsaxen) der andern Figur übereinstimmen. Diese Durchmesser der Kugel sind dann von selbst Hauptaxen des ersten Körpers, die homologen Axen sind also auch Hauptträgheitsaxen im zweiten Körper und somit Hauptaxen des Trägheitsellipsoids im homologen Punkte des zweiten Körpers, zugleich aber Hauptaxen des Ellipsoids, welches mit der Trägheitskugel homolog ist; dann fallen also die Axen des mit der Kugel homologen Ellipsoids mit denen des Trägheitsellipsoids im homologen Punkte des zweiten Körpers zusammen.

f) Betrachtet man irgend einen Körper als affine Projection eines andern, welcher in einem gegebenen Punkte eine Trägheitskugel besitzt, so werden in diesem Körper die Axen des Trägheitsellipsoids und die Axen des mit der Trägheitskugel homologen Ellipsoids zusammenfallen; dieses Ellipsoid und das Trägheitsellipsoid gehen [wie es die Verhältnisse II) und III), wo jetzt $A=B=C$, zeigen] gleichzeitig in Rotationskörper über.

So ist z. B. jedes Tetraeder affin mit dem regelmässigen Tetraeder; es lässt sich aber leicht auf rein geometrischem Wege zeigen, dass letzteres eine Centralkugel besitzt, welche natürlich mit der eingeschriebenen Kugel homothetisch ist. Das Centralellipsoid für das Tetraeder hat daher dieselben Hauptaxen, wie die affine Projection jener Trägheitskugel oder jener eingeschriebenen Kugel, d. h. wie das grösste eingeschriebene Ellipsoid.

In jedem Tetraeder sind die Axen des Centralellipsoids mit den Axen des grössten eingeschriebenen Ellipsoids gleichgerichtet; beide Ellipsoide werden gleichzeitig zu Rotationskörpern.

Ganz derselbe Lehrsatz gilt für Parallelepipede. Für dreiseitige Prismen, elliptische Cylinder oder Kegel, halbe Ellipsoide u. s. w. muss vorher ihre Axe nach einem gegebenen Verhältnisse, welches sich leicht bestimmen lässt (für dreiseitige Prismen $\sqrt{6}:2$, für elliptische Cylinder $\sqrt{3}:1$) verkleinert werden. Das grösste Ellipsoid des neuen Körpers wird dann stets gleiche Axenrichtungen mit dem Centralellipsoid des Körpers mit ungeänderten Axen besitzen. Es ist übrigens das mit der Centralkugel affine Ellipsoid identisch mit dem Ebenen-Trägheitsellipsoid, welches Culmann in seiner graphischen Statik bespricht.

12 Betrachten wir zum Schluss noch einmal das Verhältniss II), so sehen wir, dass sich die Verhältnisszahlen durch zweckmässige Wahl der Coefficienten k_1, k_2, k_3 einander gleich machen lassen. Dazu wird nur gefordert

$$k_1 : k_2 : k_3 = \frac{1}{\sqrt{A}} : \frac{1}{\sqrt{B}} : \frac{1}{\sqrt{C}}.$$

g) Es lässt sich zu jedem Körper für jeden Punkt O eine ganze Reihe affiner, untereinander ähnlicher Körper construiren, die im homologen Punkte O' eine Trägheitskuge besitzen.

13. Setzen wir für die Trägheitskugel eines affinen Körpers

$$A = B = C = M,$$

so finden wir für das Axenverhältniss des Trägheitsellipsoids des ursprünglichen Körpers

$$\frac{1}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} : \frac{1}{\sqrt{k_3^2 + k_1^2}} : \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \quad \text{[vergl. Verh. II)]}$$

und für das Axenverhältniss des mit der Centralkugel homologen Ellipsoids

$$k_1 : k_2 : k_3.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar:

h) Verbindet man die drei Axenendpunkte des mit der Trägheitskugel affinen Ellipsoids, so verhalten sich die Höhen des entstandenen Dreiecks wie die Axen des Trägheitsellipsoids.

Wo sich also, wie bei dem Centralellipsoid des Tetraeders, das mit der Centralkugel affine Ellipsoid leichter als das Trägheitsellipsoid bestimmen lässt, kann es von Nutzen sein, zu wissen, wie die Gestalten beider Ellipsoide auf einfache Weise auseinander abgeleitet werden können.

---

14. Wir wollen noch zeigen, wie sich die gefundenen Sätze auf sehr allgemeine Probleme anwenden lassen.

Es sei gegeben ein beliebiger Körper A, einer seiner ebenen Durchschnitte α und ein beliebiger Punkt P; es besteht dann eine unendliche Zahl affiner Figuren, die den Durchschnitt α entsprechend gemein und als Trägheitsellipsoide ihrer mit P homologen Punkte Rotationskörper besitzen. Man fragt jetzt nach dem geometrischen Orte dieser mit P homologen Punkte.

Die Antwort auf diese Frage wird die Lösung vieler mehr speciellen Probleme enthalten. Es kann nämlich A ein Ellipsoid sein, das, wie bekannt, zugleich mit seinem Trägheitsellipsoid in einen Rotationskörper übergeht; es ist dann die Frage gelöst nach dem geometrischen Orte des Mittelpunktes der Rotationsellipsoide, die einen ebenen Durchschnitt entsprechend gemein haben. Es sind weiter alle Cylinder und Kegel affin, sobald sie einen congruenten ebenen Durchschnitt besitzen, der mit ihrer Grundfläche parallel ist. Man wird also auch den geometrischen Ort des Schwerpunktes aller Kegel und Cylinder gefunden haben die ihre Grundfläche entsprechend gemein und jede für sich ein Central-Rotationsellipsoid besitzen, welches Problem sich auf verschiedene Weise wieder mehr verallgemeinern lässt, ohne aus der betreffenden Lösung herauszukommen.

15. Zur Lösung des allgemeinen Problems denke man sich einen mit A affinen Körper A', der im Punkte P', homolog mit P, eine Trägheitskugel R' besitze. Eine dieser Kugel R' concentrische Kugel R'_1 tangire die Ebene des Durchschnittes α' homolog mit α in einem Punkte M', und es werde in der Ebene α' um diesen Punkt mit dem Radius $P'M'$ ein Kreis beschrieben, dem im Durchschnitte α eine Ellipse E homolog entsprechen möge. Es sei jetzt A'' einer der angedeuteten affinen Körper, welche den Durchschnitt α entsprechend gemein und welche ein Trägheits-Rotationsellipsoid im Punkte P'' homolog mit P besitzen. Es wird aber dieses Trägheitsellipsoid nur zugleich mit der affinen Projection R''_1 der Kugel R'_1 zum Rotationsellipsoid. Legen wir durch den Mittelpunkt P'' von R''_1 eine Ebene parallel zur Ebene α, dann wird diese das Ellipsoid R''_1 in einer Ellipse E_1 congruent und gleichgerichtet mit E schneiden. Der conjugirte Durchmesser dieses elliptischen Durch-

schnittes kann nichts Anderes sein, als die Linie MP'' (M Mittelpunkt der Ellipse E), weil das Ellipsoid R''_1 die Ebene α in M berührt. Ein solcher conjugirter Durchmesser darf sich aber nach einem bekannten Satze im Rotationsellipsoid nur auf die kleine oder grosse Axe des elliptischen Durchschnittes projiciren. Hieraus ergiebt sich unmittelbar der Satz: Der geometrische Ort der Punkte P'' muss in einer der beiden auf α senkrechten Ebenen liegen, welche durch die grosse und kleine Axe der Ellipse E im Durchschnitte α gehen.

Setzen wir zuerst den Fall, dass P'' in der durch die grösste Axe gehenden Ebene liegt. Nennen wir ϱ den Abstand MP'', φ den Winkel jener Verbindungslinie mit der Ebene α, a und b die Axen der congruenten Ellipsen E und E_1, dann ist b also die kleine Axe des durch den Punkt P'' parallel mit α gelegten Durchschnittes des Ellipsoids R''_1 und daher auch der Radius des grössten Kreisschnittes dieses Rotationsellipsoids. Der Durchschnitt dieses Ellipsoids mit einer Ebene, welche durch die grossen Axen der Ellipse E und E_1, sowie durch den Punkt P'' geht, ist daher eine Ellipse, welche b zur kleinen Axe, eine gewisse Linie p zur grossen Axe und ferner die Linien a und ϱ zu conjugirten Durchmessern hat, die sich unter dem Winkel φ schneiden. So erhalten wir

$$pb = a\varrho \sin\varphi, \quad p^2 + b^2 = a^2 + \varrho^2$$

oder durch Elimination von p, indem wir setzen

$$\varrho \cos\varphi = x, \quad p \sin\varphi = y,$$

die Beziehung

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2 - b^2} = 1;$$

daher bewegt sich der Punkt P'' in einer Hyperbel $\mathfrak{H}$, deren imaginäre Axe die halbe lineare Excentricität, deren reelle Axe der kleinen Axe der Ellipse E gleich ist und die sich also sehr einfach bestimmen lässt. Ebenso kann sich der Punkt P'' in der Ebene, welche durch die kleine Axe senkrecht auf die Ellipse E gelegt wird, in einer Ellipse $\mathfrak{E}$ bewegen, welche diese kleine Axe der Richtung nach zu einer ihrer Axen hat. Ihre auf E senkrechte Axe ist der halben kleinen Axe, die andere der halben Excentricität der Ellipse E gleich.

Das Problem ist hiermit vollständig gelöst.

16. Von geehrter Seite wurde mir die Bemerkung gemacht, dass diese Lösung in interessanter Beziehung stehe zu einem von Herrn J. Binet (*Journal de l'Ecole polytechnique XIV. Cah.*, *p.* 41) entwickelten Satze. Man kann nämlich in der Ebene α' um den Mittelpunkt M' einen dritten Kreis E'_2 affin mit einer Ellipse E_2 beschreiben, der die Eigenschaft hat, im Punkte P' eine mit der des Körpers A' concentrische Trägheitskugel zu besitzen. Es genügt dazu, seinen Radius $= 2M'P'$ zu

nehmen. Werden jetzt Körper und Kreis zusammen affin projicirt, so lässt sich sehr leicht beweisen, dass auch diese Projectionen im Punkte P'' homolog mit P homothetische Trägheitsellipsoide besitzen. Weil aber alle früher betrachteten Körper A'' den Durchschnitt α entsprechend gemein haben, so ist E_2 für diese Alle die affine Projection des Kreises E'_2, und die Trägheitsellipsoide dieser Körper in den Punkten P'' müssen den entsprechenden Trägheitsellipsoiden der Ellipse E_2 homothetisch sein. Es ist also die Ellipse E und die Hyperbel H der geometrische Ort der Mittelpunkte der Trägheits-Rotationsellipsoide der Ellipse E_2, und es ergiebt sich daraus folgender Satz:

Der geometrische Ort der Mittelpunkte der Trägheits-Rotationsellipsoide der Ellipse $(2a,\ 2b)$ besteht aus einer Hyperbel $(2\sqrt{b^2-a^2},\ 2b)$ und einer Ellipse $(2\sqrt{a^2-b^2},\ 2a)$; die zweiten Axen dieser Hyperbel und dieser Ellipse stehen senkrecht auf der Ebene der gegebenen Ellipse und gehen durch ihren Mittelpunkt; die ersten Axen der Hyperbel und Ellipse fallen resp. mit der ersten und zweiten Axe der gegebenen Ellipse zusammen.

Weil man aber statt des Kreises E'_2 eine unendliche Zahl ebener Figuren hätte wählen können, welchen in der Ebene α andere affine Figuren correspondiren, so muss sich dieser Satz allgemeiner aussprechen lassen. Es ist ja möglich, die ebene Figur in der Ebene α ganz beliebig zu nehmen, wenn man sich eine zweckmässige Wahl des Körpers A' vorbehält; weil aber der Beweis des Satzes von der Gestalt dieses Körpers A' unabhängig ist, so muss ganz allgemein der geometrische Ort der Mittelpunkte der Trägheits-Rotationsellipsoide einer ebenen Figur aus einer Hyperbel und einer Ellipse nach Analogie des vorigen Satzes bestehen, indem sich die Ellipse, die man statt der Ellipse $(2a,\ 2b)$ nehmen müsste, leicht bestimmen lassen würde.

Es gilt dieser Satz nach den angeführten Untersuchungen auch für Körper, was sich zwar synthetisch nachweisen lässt, uns aber zu weit führen würde. Umgekehrt könnte man aus diesem Satze die Lösung unseres Problems entwickeln.

Obwohl es uns möglich wäre, noch mehr Beispiele einfach gelöster Probleme beizubringen, so werden die gewählten doch schon die Fruchtbarkeit der Methode der affinen Verwandtschaft darthun.

III.

Ueber die Klangfiguren einer quadratischen Platte von Flüssigkeit und des cubischen Volumens einer Luftmasse.

Von

Prof. Dr. Ludwig Matthiessen

in Rostock.

(Hierzu Taf. I, Fig. 1—5.)

In dem 134. Bande, S. 107 - 117, und dem 141. Bande, S. 375—393, von Poggendorff's Annalen ist von mir eine eingehende experimentelle Untersuchung über den Schwingungszustand der Faraday'schen Klangfiguren (Kräuselungen), sowie eine Reihe von Messungen über die Beziehungen zwischen der Schwingungsdauer und der Wellenbreite innerhalb der Klangfiguren von Platten tropfbarer und elastischer Flüssigkeiten mitgetheilt worden, worüber in den Berl. Ber. über die Fortschritte der Physik im J. 1868, S. 199—202, und im J. 1870, S. 259 bis 264, von Prof. Roeber berichtet ist.

Von der a. a. O. aufgestellten Ansicht über den Schwingungszustand der Flüssigkeitstheilchen, dass nämlich die Kräuselungen durch zwei sich einander senkrecht durchsetzende stehende Wellen entstehen, möge es mir gestattet sein, im Folgenden auch eine theoretische Erklärung des Phänomens durch die Discussion der Formeln für die Wellenbewegung zu geben. Die Deductionen lassen sich sowohl auf die Rippungen der in den auf einer Glasplatte schwingenden Flüssigkeitsschichten suspendirten Kreideschlempe, sowie auf die zuerst von Faraday (*Phil. Trans. f.* 1831, *p. II*, *pag.* 299, und Pogg. Ann. Bd. XXVI, S. 248, *prop.* 125) beobachteten, kürzlich von Prof. Kundt (Pogg. Ann. Bd. CXXXVII, 456 — 470, Fig. 6) beschriebenen Klangfiguren von eingeschlossenen quadratischen Luftplatten, als auch auf einige specielle Fälle von Chladnischen Klangfiguren auf quadratischen Platten von Glas oder Metall übertragen.

Angenommen, es durchsetzen sich gegenseitig unter einem rechten Winkel zwei stehende Flüssigkeitswellen von gleicher Breite und Fortpflanzungsgeschwindigkeit in den Richtungen AA' und CC' (Fig. 1, Taf. I). Die Distanz je zweier Knotenlinien AA' ist gleich einer halben Wellenbreite und der Abstand der äussersten Knotenlinien vom Rande der Platte gleich einer viertel Wellenbreite, indem wir analog den Schwingungszuständen stehender Flüssigkeitswellen in tiefen Gefässen diejenigen Stellen mit dem Namen „Knoten" bezeichnen, in welchen sich Wellenberg des einen Zuges und Wellenthal des entgegenkommenden Zuges vereinigen. Für eine begrenzte Flüssigkeitsschicht ist nun bei einer einfachen stehenden Welle der reflectirende Rand eine Stelle der grössten verticalen Deviation (Berg und Thal), wie solches in Fig. 2 *a* und *b* dargestellt ist. Wegen der Incompressibilität des Flüssigen und wegen des Umstandes, dass die Flüssigkeit durch die Glastafel daran gehindert wird, nach unten auszuweichen, sind nun die obenerwähnten Knotenlinien AA' oder KK' Stellen der stärksten horizontalen Bewegung, also der Mechanismus der Bewegung der Theilchen, wie er sich im Laufe einer ganzen Schwingung vollzieht, der Darstellung in Fig. 2 *a* und *b* entsprechend.

Bei Luftplatten, welche von unbeweglichen Wandungen eingeschlossen sind, ist eine transversale Deviation der schwingenden Molecule unmöglich; es bilden sich deshalb wegen der grossen Elasticität der Luft Longitudinalwellen. Dieselben Knotenlinien AA' oder KK' sind hier also ebenfalls Stellen der stärksten horizontalen Bewegung, also der Mechanismus der Bewegung der Molecule ist der Darstellung in Fig. 3 entsprechend. Unter „Knotenlinien" KK' sollen hier wiederum analog den stehenden Flüssigkeitswellen diejenigen Stellen verstanden werden, in denen sich die Expansionen E und die Compressionen C (Verdünnungen und Verdichtungen) begegnen. Sie sind also nicht zu verwechseln mit den Knotenlinien, welche man bei stehenden Longitudinalwellen gewöhnlich darunter begreift, nämlich die Stellen der Maxima der Verdichtungen und Verdünnungen. Zu diesen sind bei Luftsäulen ebenfalls die Ränder der Wandungen zu zählen. In beiden Schwingungszuständen nehmen wir also der Einfachheit der Betrachtungen wegen dieselben Knotenlinien an und die Stellen der stärksten Verdichtungen und Verdünnungen entsprechen den Stellen der Wellenberge und Wellenthäler der schwingenden flüssigen Platten. Wir gehen dabei von der gerechtfertigten Annahme aus, dass bei ganz geschlossenen Luftsäulen der tiefste Ton gleich einer halben Wellenbreite ist, also die beiden Enden derselben abwechselnd im Zustande der Verdichtung und Verdünnung sich befinden. Ist demnach die Länge der schwingenden flüssigen oder luftförmigen Säule gleich n Wellenbreiten, so bilden sich abwechselnd bei einer Flüssigkeit n Berge, $n+1$ Thäler und $n+1$ Berge,

n Thäler, bei der Luft abwechselnd ebensoviele Verdichtungen und Verdünnungen.

Wenn nun eine einfache stehende Welle AA' (Fig. 1) von einem andern stehenden Wellenzuge CC' derselben Wellenbreite durchsetzt wird (dieses ist immer der Fall, wenn die Schwingungszahl oder Tonhöhe dieselbe ist), so bilden sich aus den in der schwingenden Substanz suspendirten schweren Theilchen Klangfiguren an denjenigen Stellen vorzugsweise, wo die parallel der Wandung oder Glastafel gerichtete Bewegung der Molecule sich im Maximum, Berg und Thal oder Verdichtung und Verdünnung sich im Minimum befinden. Die Klangfiguren oder Rippungen sind aus parallelen geraden oder krummen Linien zusammengesetzt, welche überall senkrecht gegen die horizontale Bewegung gerichtet sind, also im eigentlichen Sinne Normalcurven. Ihre Gleichung lässt sich also genau bestimmen, sobald für jeden einzelnen Punkt der Platte die Resultante der Bewegung der Richtung und Grösse nach bekannt ist. Bei den Luftschwingungen liegen sie voneinander getrennt in nahezu gleichen Abständen l. Bei einer gleichen Dicke der Schicht ist nahezu $l^2 = m\,T$. Diese Intervalle rühren von den verticalen Schwingungen her, wodurch die Molecule veranlasst werden, in zackigen Bahnen zu schwingen. Die Rippungen fallen aber keineswegs mit den Knotenlinien AA' und CC' zusammen, sondern dies nur in den speciellen Fällen, wo die Amplitude der einen oder der andern Wellenbewegung gleich Null ist. Sind die beiden Amplituden gleich, so fallen die Rippungen der Maximalbewegung zusammen mit der Diagonalen der Quadrate E der Knotenlinien; die übrigen bilden geschlossene concentrische Curven, welche in der Nähe des Centrums der Felder B und T in Kreise übergehen. Sind die Amplituden verschieden, so bilden die Rippungen theils wellenförmige Curven (Figg. 4 und 5), welche in der Nähe des Centrums der Felder E in Hyperbeln übergehen, theils geschlossene concentrische Curven, welche in der Nähe des Centrums der Felder B und T in Ellipsen übergehen. Diese Sätze beweisen die von mir bisher angestellten Versuche auf's Deutlichste und sie werden durch die im Folgenden angestellten mathematischen Betrachtungen vollkommen bestätigt.

In Fig. 1 ist nun ein solches System von drei Wellenbreiten dargestellt; dasselbe enthält vier einfache Wellenzüge, T bezeichnet die Thäler (Verdünnungen), B die Berge (Verdichtungen), TB die Quadrate der Knotenlinien, in welchen Berg und Thal zusammentreffen. In Figg. 4 und 5 gelten dieselben Bezeichnungen und E ist an die Stelle von TB gesetzt. Die Platte E entspricht genau dem Schwingungszustande einer quadratischen Glasplatte, welche die Chladni'sche Klangfigur zeigt, wenn sie den zweiten Ton angiebt. Sie zeigt zwei gekreuzte Diagonalen, concentrisch von gleichseitigen Hyperbeln eingehüllt, wenn die Amplituden gleich sind; sie zeigt zwei hyperbelähnliche Curven, concentrisch von ungleichseitigen Hyperbeln umgeben, wenn die Amplituden verschieden sind. Die Fläche E ist eine Interferenzfläche und auf ihr bilden sich die Klangfiguren am deutlichsten aus. Am schwächsten bilden sich die Rippungen aus auf denjenigen Flächen, wo keine Interferenzen auftreten und sich die Amplituden summiren, also auf den Flächen B und T. Die Hauptrippe verbindet diejenigen Punkte, in welchen sich die parallel der Tafel gerichtete Bewegung der Molecule im Maximum befindet. Sie ist wellenförmig und verläuft durch sämmtliche Knotenpunkte der Knotenlinie AA', wenn die Amplitude a_1 der in der Richtung AA' laufenden Welle die kleinere ist; ist dagegen die Amplitude a_1 grösser als die der in der Richtung CC' laufenden Welle, so verläuft die Hauptrippe durch sämmtliche Knotenpunkte der Knotenlinie CC'. Bei den Faraday'schen Klangfiguren sind die Amplituden abhängig von den Krümmungshalbmessern der Hauptnormalschnitte der schwingenden Glastafel. Die Wellen laufen nämlich den Hauptnormalschnitten der gebogenen Glastafel parallel. Ist ϱ_1 der Krümmungshalbmesser desjenigen Hauptnormalschnittes, welcher der Knotenlinie AA' parallel ist, ϱ_2 der Krümmungshalbmesser desjenigen Hauptnormalschnittes, welcher der Knotenlinie CC' parallel ist, so ist $a_2 > a$, wenn $\varrho_2 < \varrho_1$ ist; wenn ϱ_2 gleich ∞ ist, so ist a_1 gleich Null; wenn $\varrho_2 = \varrho_1$ ist, so ist auch $a_2 = a_1$. (Vergl. Pogg. Ann. Bd. 134, die Figurentafel.)

Wir betrachten hier zunächst die Bewegungszustände einer vibrirenden Flüssigkeitsschicht; die der Luftplatten sind ihnen ganz analog. Nur ist die Breite bei den Wellen auf Flüssigkeiten verschieden und variirt zwischen den Tönen D und c^6 zwischen 28 Cm. und 200 Cm.; ausserdem ist die Wellenbreite viel kleiner, sie beträgt für den Ton c^3 nur 1 Mm., wogegen die Wellenlänge desselben Tones in atmosphärischer Luft nur 1 Fuss beträgt. Um die Bewegung in einem beliebigen Punkte P (Fig. 5) kennen zu lernen, so seien λ die Wellenbreite, $AP = u$, $CP = v$ die Coordinaten des Punktes P, a_1 die Amplitude der von A und A' ausgehenden Wellen, a_2 die Amplitude der von C und C' ausgehenden Wellen. Die Deviationen infolge der beiden stehenden Wellen, wenn die einzelnen Wellen in dem Abstande $d = n\lambda$ ihre Bewegung gleichzeitig in demselben Sinne beginnen, sind

$$\eta_1 = 2a_1 \cos\pi \frac{2u}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$\eta_2 = 2a_2 \cos\pi \frac{2v}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Bei Flüssigkeiten sind die Wellenbreiten beider Systeme stets einander gleich, da nahezu $\lambda^2 = mT$ ist. Die gesammte transversale Deviation ist demnach

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = 2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\left(a_1 \cos\pi \frac{2u}{\lambda} + a_2 \cos\pi \frac{2v}{\lambda}\right).$$

Für $a_2 = a_1$ ist

$$\eta = 4\,a_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos\pi \frac{u+v}{\lambda} \cos\pi \frac{u-v}{\lambda}.$$

Durch diese Gleichungen ist der Bewegungszustand der Flüssigkeit in jedem Punkte u, v vollständig bestimmt. Um die Gleichung der Curven genauer übersehen zu können, wählen wir den Punkt O, also den Durchschnittspunkt zweier Knotenlinien zum Coordinatenanfangspunkte, und setzen demgemäss

$$v = \frac{4n+1}{4}\lambda - y, \quad u = \tfrac{1}{4}\lambda + x.$$

Darnach wird nun

$$\eta = 2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\left(- a_1 \sin\pi \frac{2x}{\lambda} + a_2 \sin\pi \frac{2y}{\lambda}\right).$$

Dies ist die Gleichung aller Rippungen für den angenommenen Fall. Für die stärkste Rippung ist η gleich Null und

$$y = \frac{\lambda}{2\pi} \arcsin\left\{\frac{a_1}{a_2} \sin\pi \frac{2x}{\lambda}\right\}.$$

Die Curve ist wellenförmig und $y = 0$ für $x = \frac{n}{2}\lambda$; ferner ist y ein Maximum für $x = \frac{4n+1}{4}\lambda$, ein Maximum für $x = \frac{4n+3}{4}\lambda$; der zugehörige Werth von y ist

$$y_1 = \pm \frac{\lambda}{2\pi} \arcsin \frac{a_1}{a_2}.$$

Ist $a_2 = a_1$, so ist $y = \pm \frac{1}{4}\lambda$; allgemein $y = x$ (Gleichung der Diagonale). Ist a_2 gleich Null, so muss auch x Null werden (Gleichung der Knotenlinie CC'). Ist dagegen a_1 gleich Null, so muss es auch y sein (Gleichung der Knotenlinie AA').

Für die Klangfiguren der eingeschlossenen Luftmassen sind die Formeln ganz dieselben; sie lassen sich aus den Resultanten der componirenden Kräfte der Bewegung ableiten. Die Componenten der Longitudinalschwingungen sind für gleiche Wellenbreiten

$$\xi = 2\,a_1 \sin\pi \frac{2u}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$\eta = 2\,a_2 \sin\pi \frac{2v}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Bei schwingenden Luftsäulen sind die Wellenbreiten beider Systeme nicht immer gleich, sondern abhängig von der Länge der Säulen.

Substituirt man wiederum $u = \frac{1}{4}\lambda + x$, $v = \frac{4n+1}{4}\lambda - y$, so erhält man, indem das Vorzeichen in der Richtung von η sich umkehrt:

$$\xi = 2\,a_1 \cos\pi \frac{2x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$-\eta = 2 a_2 \cos \pi \frac{2y}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Um die Richtung und Grösse der resultirenden Deviation zu erhalten, so ist die Grösse bestimmt durch $J = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, die Richtung durch

$$tang\, \tau = \frac{\xi}{-\eta} = \frac{a_1 \cos \pi \frac{2x}{\lambda}}{a_2 \cos \pi \frac{2y}{\lambda}}.$$

Da die Richtung der Rippungen senkrecht gegen die Richtung der Bewegung der Massentheilchen ist, so wird $\frac{\xi}{-y} = \frac{\partial y}{\partial x}$ zu setzen sein, mithin wird

$$\xi \partial x + \eta \partial y = 0 \text{ und } \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a_1 \cos \pi \frac{2x}{\lambda}}{a_2 \cos \pi \frac{2y}{\lambda}}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$a_1 \sin \pi \frac{2x}{\lambda} = a_2 \sin \pi \frac{2y}{\lambda} + const.$$

Diese Curvenschaaren sind sogenannte Gleichgewichtsfiguren und schliessen lauter Luftschichten constanter Dichtigkeit ein.

Nun ist J ein Maximum, wenn $t = \frac{1}{4} T$ und zugleich x und y gleich Null sind. In diesem Falle ist die Constante auch Null. Wir erhalten hier die Gleichung der Hauptrippe; sie ist, wie oben

$$y = \frac{\lambda}{2\pi} \arcsin \left\{ \frac{a_1}{a_2} \sin \pi \frac{2x}{\lambda} \right\}.$$

Untersuchen wir die Gleichung einer Rippung, welche eine Knotenlinie CC' (Fig. 4) tangirt. Für $x = \frac{1}{2}\lambda$, $y = \frac{1}{4}\lambda$ ist $\xi = -2a_1$, $\eta = 0$ und die Constante gleich $-a_2$. Folglich ist die Gleichung der Rippung

$$a_1 \sin \pi \frac{2x}{\lambda} = a_2 \sin \pi \frac{2y}{\lambda} - a_2.$$

Für $x_1 = \frac{3}{4}\lambda$ ist $y_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \arcsin \frac{a_2 - a_1}{a_2}$. Der Werth der halben Nebenaxe ist also $\frac{1}{4}\lambda - y_1$, der Werth der Hauptaxe gleich $\frac{1}{4}\lambda$. Ist $a_2 = a_1$, so sind die beiden Axen gleich und die Rippungen sind nahezu kreisförmig innerhalb des Feldes T und B. Ist $a_2 > a_1$, so ist die Nebenaxe kleiner. Die Rippungen innerhalb des Feldes T sind nahezu elliptisch und die grosse Axe in der Richtung AA' gelegen. Die Curven sind geschlossen, denn sie geben innerhalb der Grenzen $x = \frac{1}{2}\lambda$ und λ immer zwei Werthe für y innerhalb der Grenzen $y = 0$ und $\frac{1}{2}\lambda$. Zwischen den Grenzen $x = 0$ und $\frac{1}{4}\lambda$ ist y für diesen Fall stets imaginär.

Um die Gleichung einer Rippung zu erhalten, welche die Knotenlinie AA' berührt, so setzen wir $x = \frac{3}{4}\lambda$, $y = 0$. Die Constante wird $+a_1$ und die Gleichung

$$a_1 \sin \pi \frac{2x}{\lambda} = a_2 \sin \pi \frac{2y}{\lambda} + a_1.$$

Der Werth der Nebenaxe ist $\frac{1}{4}\lambda$, der der Hauptaxe gleich $\frac{3}{4}\lambda - x_1$, wobei $x_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \arcsin \frac{a_2 - a_1}{a_1}$. Ist $a_2 > 2a_1$, so läuft diese Curve in die andere Hyperbelschaar über.

Untersuchen wir noch die Gleichungen der Curven in der Nähe der Centra E und F (Fig. 4), und zwar zunächst für E. Bezeichnen ω, ϑ und ψ sehr kleine Dimensionen und setzen wir $x = \frac{1}{4}\lambda + \omega$, $y = \frac{1}{4}\lambda + \vartheta$, also

$$a_1 \sin \pi \frac{\frac{1}{2}\lambda + 2\omega}{\lambda} = a_2 \sin \pi \frac{\frac{1}{2}\lambda + 2\vartheta}{\lambda} + const.,$$

so wird die Constante gleich $a_1 - a_2 \pm \psi$ und

$$a_1 \cos \pi \frac{2\omega}{\lambda} = a_2 \cos \pi \frac{2\vartheta}{\lambda} + a_1 - a_2 \pm \psi.$$

Führt man wegen der Kleinheit der Grössen ω und ϑ die Winkel ein, so reducirt sich die Gleichung auf

$$\frac{\omega^2}{\frac{\lambda^2 \psi}{2\pi^2 a_1}} - \frac{\vartheta^2}{\frac{\lambda^2 \psi}{2\pi^2 a_2}} = \mp 1.$$

Dies ist die Gleichung zweier Hyperbelschaaren, deren Hauptaxen senkrecht aufeinander stehen. Schreibt man die Gleichung in der Form

$$\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{\vartheta^2}{b^2} = \mp 1,$$

so ist $\tan \varphi = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}$, wo φ den halben Asymptotenwinkel FEG bezeichnet. Für $a_2 = a_1$ ist $\varphi = 45^0$. Wir fanden früher für die Tangente der Hauptrippungen

$$\tan \tau = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a_1 \cos \pi \frac{2x}{\lambda}}{a_2 \cos \pi \frac{2y}{\lambda}}.$$

Für den Knotenpunkt ist $x = \frac{1}{2}\lambda$, $y = 0$, mithin $\tan \tau = -\frac{a_1}{a_2}$ und für $a_2 = a_1$ der Winkel $\tau = 45^0$. Ist demnach $a_2 = a_1$, so fallen die Asymptoten und die Tangenten der Hauptrippen in den Knotenpunkten mit den Diagonalen der Quadrate E zusammen; in den übrigen Fällen divergiren sie in einem bestimmten Sinne. Die eine Hyperbelschaar gehört den Wellenbergen an, die andere den Wellenthälern.

Um noch die Gleichungen der Curven in der Nähe der Centra von T zu erhalten, so setzen wir $x = \frac{3}{4}\lambda + \omega$, $y = \frac{1}{4}\lambda + \vartheta$. Will man dieselben für B bestimmen, so setze man $x = \frac{1}{4}\lambda + \omega$, $y = \frac{3}{4}\lambda + \vartheta$. Man erhält im ersteren Falle

$$-a_1 \cos\pi \frac{2\omega}{\lambda} = a_2 \cos\pi \frac{2\vartheta}{\lambda} - a_1 - a_2 + \psi$$

oder, wenn man die Bogen einsetzt:

$$\frac{\omega^2}{\frac{\lambda^2\psi}{2\pi^2 a_1}} + \frac{\vartheta^2}{\frac{\lambda^2\psi}{2\pi^2 a_2}} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipsenschaar, deren Hauptaxen deh Knotenlinien parallel laufen. Für $a_2 = a_1$ bilden sie concentrische Kreise. Ist $a_2 > a_1$, so ist $a > b$ und $b : a = \sqrt{a_1} : \sqrt{a_2}$.

In den vorstehenden Betrachtungen ist meiner Meinung nach die Theorie der Faraday'schen Klangfiguren in erschöpfender Weise entwickelt. Man kann sie mit Leichtigkeit ausdehnen auf die Theorie der Luftschwingungen in geschlossenen cubischen Räumen. Es kommt ein drittes Wellensystem mit der Amplitude a_3 hinzu. Die Schichten gleicher Schwingungsrichtung und Dichtigkeit der vibrirenden Luftmasse sind von eigenthümlichen Flächen eingeschlossen, deren Verlauf aus den vorstehenden Entwickelungen entnommen werden kann.

Da aus den angestellten Beobachtungen hervorgeht, dass in cubischen Räumen sich die Schwingungszahlen der Grundtöne umgekehrt wie homologen Linien verhalten, so lässt sich hieraus die Reihe der Obertöne, welche den Grundton begleiten müssen, genau ableiten. Bei dem Grundton ist ein Schwingungsbauch in der Mitte des Würfels; bei dem ersten Oberton treten acht solcher Bäuche auf, bei dem zweiten 27 u. s. w. Die grossen Axen der Bäuche verhalten sich nun offenbar wie $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ u. s. w.; mithin bilden die Obertöne des Grundtones c die harmonische Oberreihe g, $\bar{c}$, e. Möglicherweise und sehr wahrscheinlich tritt bei dem Grundton in der Mitte des Würfels gar kein Bauch auf; ist in diesem Falle c der Grundton, so wird die Reihe der Obertöne sein $\bar{c}$, $\bar{g}$, $\bar{\bar{c}}$, $\bar{\bar{e}}$. Diese stereometrischen Klangfiguren lassen sich sichtbar machen, indem man einen hohlen Glaswürfel von etwa 1 Cubikdecimeter Inhalt fast ganz mit trockenem Lycopodiumstaub anfüllt oder mit Rauch, und die eingeschlossene Luft durch einen auf die Obertöne abgestimmten Glasstab in Schwingungen versetzt. Nimmt man nach Seebeck die Schallgeschwindigkeit in Röhren zu 328 M. an, so ist die Schwingungszahl des ersten Obertones 3280, die des zweiten 4920 u. s. w. Die zugehörigen isochronen Glasstäbe haben die Länge 75 Cm., 50 Cm. u. s. w.

Es ist ferner nicht unmöglich, dass man auch ohne Anwendung von Staub die Schwingungszustände der Luftmasse durch die optische Interferenzmethode von Boltzmann und Töpler (Pogg. Ann. CXLI, 321) zu analysiren oder gar in grösseren cubischen Räumen direct wahrzunehmen im Stande sein wird.

Die im Vorstehenden beschriebenen Klangfiguren von Flüssigkeiten und Luftmassen gehören einer und derselben Kathegorie an. Ihnen gebührt mit Recht die Bezeichnung „Faraday'sche Klangfiguren". Um diese Behauptung ausser allen Zweifel zu setzen, mögen hier am Ende noch die eigenen Worte Faraday's ihren Platz finden. Ich entnehme sie dem Aufsatze in Pogg. Ann. Bd. XXVI, S. 248.

123. „Alle die bisher beschriebenen Erscheinungen können sich auf der Oberfläche derjenigen Flüssigkeiten zeigen, welche man für gewöhnlich als unelastisch betrachtet und bei denen die Elasticität, welche sie besitzen, keine wesentliche Eigenschaft ausmacht; es ist nicht möglich, dass sie sich im Innern dieser Masse zeigen können. Erweitert man die Schlüsse, so erscheint es indess nicht ganz unmöglich, dass ähnliche Erscheinungen auch in Gasen und Dämpfen stattfinden, wobei die Elasticität die für das Vibriren nöthige Bedingung liefert, welche bei den Flüssigkeiten in einer plötzlichen Begrenzung der Masse durch eine nicht eingeschlossene verschiebbare Oberfläche gegeben ist.

124. Wenn dem so ist, so muss, wenn eine Platte in der Atmosphäre vibrirt, die unmittelbar mit ihr in Berührung stehende Luft sich in zahlreiche Portionen theilen, welche zwei abwechselnde Reihen wie die beschriebenen Häufchen bilden, eine dichter und eine dünner als die gewöhnliche Atmosphäre. Bei jeder Vibration der Platte wechseln diese Reihen durch ihre Expansionen und Condensationen miteinander ab.

125. In der Hoffnung, einige Vorgänge der Art zu entdecken, befestigte ich eine kreisrunde Zinnscheibe, die mit einem hervorstehenden Rande von dreiviertel Zoll versehen war, auf einem Lineal, streute etwas Lycopodium auf dieselbe und liess sie stark ertönen, so dass das Pulver in der Luft nur eine einzige Wolke gebildet haben würde, welche wegen des Randes und der gleichen Bewegung aller Theile der Platte keine Neigung zu ihrer Anhäufung besitzen konnte. Sogleich sah man das Lycopodium, statt eine gleichförmige Wolke zu bilden, das Ansehen einer dicken Wabe annehmen, die ganz in einer zitternden Bewegung begriffen war, und bei aufmerksamer Betrachtung konnte man Wellen wahrnehmen, welche die Wolke in entgegengesetzter Richtung durchsetzten. Es war genau die Erscheinung, welche sich gebildet haben würde, wenn eine staubige Atmosphäre auf der Oberfläche einer Platte ruhte und in eine Anzahl abwechselnd und zugleich sich ausdehnender und zusammenziehender Portionen gefallen wäre."

IV.

Ueber eine einfache Behandlungsweise derjenigen Probleme der Hydromechanik, in welchen Ellipsoide mit kleinen Excentricitäten vorkommen.

Von

Dr. Arnold Giesen.

I. Theil. Homogene Ellipsoide.

§ 1. Näherungsformeln für das Potential eines homogenen Ellipsoids mit kleinen Excentricitäten.

Es sei ein homogenes Ellipsoid gegeben mit den Halbaxen a, b, c, welche in dieser Reihenfolge nach ihrer Grösse absteigend geordnet sein sollen. Die linearen Excentricitäten e und ε seien durch die Gleichungen bestimmt $a^2-c^2=e^2$, $b^2-c^2=\varepsilon^2$. Als Coordinatenaxen nehmen wir die Halbaxen des Ellipsoids an, dessen Dichtigkeit ϱ sei. Dann ist das Potential desselben in einem beliebigen Punkte (x, y, z):

$$V=abc\pi\varrho\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}\left[1-\frac{x^2}{a^2+t}-\frac{y^2}{b^2+t}-\frac{z^2}{c^2+t}\right]dt.$$

Dabei ist die untere Integrationsgrenze σ für einen innern Punkt gleich Null, für einen äussern dagegen die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\sigma}+\frac{y^2}{b^2+\sigma}+\frac{z^2}{c^2+\sigma}-1=0.$$

Wir setzen jetzt $a^2=c^2+e^2$, $b^2=c^2+\varepsilon^2$, ferner mit Vernachlässigung derjenigen Potenzen von e und ε, welche die zweite übersteigen:

$$\frac{1}{a^2+t}=\frac{1}{c^2+t}\left(1-\frac{e^2}{c^2+t}\right);\quad\frac{1}{b^2+t}=\frac{1}{c^2+t}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{c^2+t}\right),$$

Dann wird

$$V=abc\pi\varrho\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{1}{(c^2+t)^{3/2}}\left(1-\frac{e^2+\varepsilon^2}{2(c^2+t)}\right)\left[1-\frac{r^2}{c^2+t}+\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{(c^2+t)^2}\right]dt,$$

wobei $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, also r den Radius vector des angezogenen Punktes bedeutet. Es ist nun aber

$$\int_\sigma^\infty \frac{dt}{(c^2+t)^{\frac{m}{2}}} = \left[\frac{(c^2+t)^{-\frac{m}{2}+1}}{-\frac{m}{2}+1}\right]_\sigma^\infty.$$

Setzen wir daher $\sqrt{c^2+\sigma}$ für den äussern Punkt gleich c', so wird dieses Integral für einen innern Punkt $\frac{2}{(m-2)c^{m-2}}$ und für einen äussern $\frac{2}{(m-2)\,c'^{m-2}}$. Demnach erhält man für das innere Potential V_i des gegebenen Ellipsoids

$$\begin{aligned} V_i &= abc\pi\varrho\int_0^\infty\left[\frac{1}{(c^2+t)^{3/2}} - \frac{e^2+\varepsilon^2}{2(c^2+t)^{5/2}} - \frac{r^2}{(c^2+t)^{5/2}} + \frac{(e^2+\varepsilon^2)r^2}{2(c^2+t)^{7/2}} + \frac{e^2x^2+e^2y^2}{(c^2+t)^{7/2}}\right]dt \\ 1) \quad &= 2ab\varrho\pi\left\{1 - \frac{e^2+\varepsilon^2}{6c^2} - \frac{r^2}{c^2}\left[\tfrac{1}{3} - \frac{e^2+\varepsilon^2}{10c^2}\right] + \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{5c^4}\right\}. \end{aligned}$$

Speciell für ein Rotationsellipsoid hat man

$$V'_i = 2a^2\varrho\pi\left\{1 - \tfrac{1}{3}\frac{e^2}{c^2} - \frac{1}{c^2}\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{5}\frac{e^2}{c^2}\right)(x^2+y^2) - \frac{1}{c^2}\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\frac{e^2}{c^2}\right)z^2\right\}.$$

Für den Ausdruck des äussern Potentials brauchen wir zunächst nur c' statt c zu setzen:

$$V_a = 2abc\varrho\pi\left\{\frac{1}{c'} - \frac{e^2+\varepsilon^2}{6c'^3} - \frac{r^2}{c'^3}\left[\tfrac{1}{3} - \frac{e^2+\varepsilon^2}{10c'^2}\right] + \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{5c'^5}\right\}.$$

Es kommt jetzt auf die Bestimmung von $c' = \sqrt{c^2+\sigma}$ an. Zur Bestimmung von σ dient die Gleichung

$$\frac{x^2}{c^2+\sigma}\left(1 - \frac{e^2}{c^2+\sigma}\right) + \frac{y^2}{c^2+\sigma}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{c^2+\sigma}\right) + \frac{z^2}{c^2+\sigma} - 1 = 0$$

oder auch

$$\frac{r^2}{c'^2} - \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{c'^4} - 1 = 0.$$

Hiernach hat c'^2 als ersten Näherungswerth r^2; setzten wir also $c'^2 = r^2 + \varDelta$, so wird bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\varDelta$

$$1 - \frac{\varDelta}{r^2} - \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{r^4} - 1 = 0, \text{ also } \varDelta = -\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{r^2},$$

also ist bis auf Glieder zweiter Ordnung $c'^2 = r^2 - \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{r^2}$. Hiernach ist nun weiter

$$\frac{1}{c'} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{2r^4}\right) \text{ und } \frac{1}{c'^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 + \frac{3(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{2r^4}\right).$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die obige Formel für das äussere Potential in den Gliedern, welche im Zähler die Excentricitäten nicht enthalten, so kommt, da in den übrigen c' einfach durch r zu ersetzen ist:

$$V_a = 2abc\pi\varrho\left\{\frac{2}{3}\frac{1}{r} - \frac{1}{15}\frac{e^2+\varepsilon^2}{r^3} + \frac{1}{5}\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{r^5}\right\}.$$

Bezeichnet man die Masse $\frac{4}{3}abc\pi\varrho$ des Ellipsoids mit M, so kommt für das äussere Potential in einem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z und dessen Entfernung vom Mittelpunkte r ist:

$$2)\qquad V_a = M\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{10}\frac{e^2+\varepsilon^2}{r^3} + \frac{3}{10}\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{r^5}\right\}.$$

Dieser Ausdruck gilt natürlich noch für die Punkte der Oberfläche. Für diese ist

$$\frac{x^2}{c^2+e^2} + \frac{y^2}{c^2+\varepsilon^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Bei gehöriger Entwickelung hat man hierfür

$$\frac{x^2}{c^2}\left(1-\frac{e^2}{c^2}\right) + \frac{y^2}{c^2}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right) + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

oder $r^2 = c^2 + \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{c^2}$, weiter also $\frac{1}{r} = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{2c^4}\right)$.

Nach Einsetzung dieser Werthe in Gleichung 2) kommt für Punkte der Oberfläche

$$3)\qquad V_0 = M\left\{\frac{1}{c} - \frac{1}{10}\frac{e^2+\varepsilon^2}{c^3} - \frac{1}{5}\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{c^5}\right\}.$$

Speciell für ein Rotationsellipsoid hat man allgemein

$$V'_a = M\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{5}\frac{e^2}{r^3} + \frac{3}{10}\frac{e^2(x^2+y^2)}{r^5}\right\}$$

und für die Oberfläche im Besondern

$$V'_0 = M\left\{\frac{1}{c} - \frac{1}{5}\frac{e^2}{c^3} - \frac{1}{5}\frac{e^2(x^2+y^2)}{c^5}\right\}.$$

Umformung. Drückt man a und b durch c aus vermittelst der Formeln

$$a = c\left(1+\frac{e^2}{2c^2}\right),\quad b = c\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2c^2}\right),$$

so wird

$$1')\qquad V_i = 2\pi\varrho\left\{c^3 + \tfrac{1}{3}(e^2+\varepsilon^2) - \tfrac{1}{3}r^2\left(1+\frac{e^2+\varepsilon^2}{5c^2}\right) + \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{5c^2}\right\},$$

$$2')\qquad V_a = \tfrac{4}{3}\pi\varrho\left\{\frac{c^3+\frac{1}{2}c(e^2+\varepsilon^2)}{r} - \frac{1}{10}\frac{c^3(e^2+\varepsilon^2)}{r^3} + \frac{3}{10}\frac{c^3(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{r^5}\right\}.$$

§ 2. Gestalt eines um einen Centralkörper rotirenden, homogenen flüssigen Satelliten.

Eine homogene flüssige Masse bewege sich als Satellit in einem Kreise um einen Centralkörper derart, als wenn beide in fester Verbindung ständen, so dass also der Satellit dem Centralkörper stets dieselbe

Seite zuwendet. Derselbe sei nur der Anziehung seiner eigenen Masse und jener des Centralkörpers unterworfen, der Radius seiner Bahn sehr gross im Vergleiche mit den Dimensionen beider Körper, seine Winkelgeschwindigkeit ϑ sehr klein. Es fragt sich, ob die flüssige Masse des Satelliten sich dadurch ins Gleichgewicht setzen könne, dass sie eine Gestalt annimmt, die wenigstens bei Vernachlässigung sehr kleiner Grössen sich als ein Ellipsoid mit kleinen Excentricitäten betrachten lässt.

Der Schwerpunkt des Satelliten sei der Coordinatenanfangspunkt, die Verbindungslinie der Schwerpunkte des Satelliten und des Centralkörpers, von letzterem abgewandt, sei die positive z-Axe, die x-Axe sei die Tangente der Bahn des Satelliten, die y-Axe stehe auf der Bahnebene desselben senkrecht. Der Halbmesser der Bahn, welche der Schwerpunkt des Satelliten durchläuft, sei R, die Entfernung eines Punktes des Satelliten von der Axe seiner Bahn sei s, seine Entfernung vom Mittelpunkte des Centralkörpers sei t. Das Potential des Centralkörpers sei W, dasjenige des Satelliten sei V, dann ist die Gleichgewichtsbedingung, welche für alle Punkte der Oberfläche des Satelliten erfüllt sein muss:

$$f(W+V_0)+\tfrac{1}{2}\vartheta^2[x^2+(R+z)^2]=Const.,$$

worin f die Anziehungsconstante bezeichnet. Wenn nun der Centralkörper wenig von der Kugelform abweicht und R gross ist, so kann, unter C die Masse des Centralkörpers verstanden, in hinreichender Annäherung gesetzt werden $W=\frac{C}{t}$. Nun ist aber

$$t^2=x^2+y^2+(R+z)^2,\ \text{also}\ \frac{1}{t}=\frac{1}{R}\left[1-\frac{z}{R}-\frac{x^2+y^2+z^2}{2R^2}+\tfrac{3}{2}\frac{z^2}{R^2}+\cdots\right],$$

also in erster Annäherung

$$W=\frac{C}{R}\left[1-\frac{z}{R}-\frac{x^2+y^2-2z^2}{2R^2}\right].$$

Um das Potential V des Satelliten, dessen Masse S sei, darstellen zu können, machen wir die versuchsweise Annahme, dass seine Oberfläche ein Ellipsoid sei, also nach § 1, 3)

$$V_0=S\left[\frac{1}{c}-\tfrac{1}{10}\frac{e^2+\varepsilon^2}{c^3}-\tfrac{1}{5}\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{c^5}\right].$$

Für z^2 setzen wir $c^2-\frac{c^2}{a^2}x^2-\frac{c^2}{b^2}y^2$ oder näherungsweise bis auf die Quadrate der Excentricitäten $c^2-x^2-y^2+\frac{e^2}{c^2}x^2+\frac{\varepsilon^2}{c^2}y^2$. Man könnte wegen der kleinen Factoren $\frac{Cf}{R}$ und ϑ^2 von z^2 die beiden letzten Glieder dieses Ausdrucks weglassen. Der Vollständigkeit halber wollen wir sie aber zunächst beibehalten. Dann nimmt nach vollzogener Substitution obige Bedingungsgleichung folgende Form an:

$$\frac{Cf}{R}\left(1-\frac{z}{R}+\frac{c^2}{R^2}-\tfrac{3}{2}\,\frac{x^2+y^2}{R^2}+\frac{x^2}{R^2}\,\frac{e^2}{c^2}+\frac{y^2}{R^2}\,\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right)$$
$$+Sf\left(\frac{1}{c}-\tfrac{1}{10}\,\frac{e^2+\varepsilon^2}{c^3}-\tfrac{1}{5}\,\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{c^5}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}\vartheta^2\left(R^2+c^2+2Rz-y^2+\frac{e^2}{c^2}x^2+\frac{\varepsilon^2}{c^2}y^2\right)=Const.$$

Der Coefficient von z verschwindet, da zufolge der angenommenen Kreisbewegung des Satelliten $\vartheta^2 R=\frac{C}{R^2}f$. Da nun x^2 und y^2 voneinander unabhängig sind, so müssen ihre Coefficienten verschwinden. Es giebt dies folgende zwei Gleichungen:

$$-\tfrac{3}{2}\,\frac{Cf}{R^3}+\frac{Cf}{R^3}\,\frac{e^2}{c^2}-\tfrac{1}{5}\,\frac{Sf}{c^3}\,\frac{e^2}{c^2}+\tfrac{1}{2}\vartheta^2\,\frac{e^2}{c^2}=0,$$
$$-\tfrac{3}{2}\,\frac{Cf}{R^3}+\frac{Cf}{R^3}\,\frac{\varepsilon^2}{c^2}-\tfrac{1}{5}\,\frac{Sf}{c^3}\,\frac{\varepsilon^2}{c^2}-\tfrac{1}{2}\vartheta^2+\tfrac{1}{2}\vartheta^2\,\frac{\varepsilon^2}{c^2}=0$$

oder

$$-\tfrac{3}{2}\vartheta^2+\left(\tfrac{3}{2}\vartheta^2-\tfrac{1}{5}\,\frac{Sf}{c^3}\right)\frac{e^2}{c^2}=0,$$
$$-2\vartheta^2+\left(\tfrac{3}{2}\vartheta^2-\tfrac{1}{5}\,\frac{Sf}{c^3}\right)\frac{\varepsilon^2}{c^2}=0.$$

Da aber $\vartheta^2=\frac{Cf}{R^3}$ ist und R gegen c sehr gross angenommen wurde, so wird im Allgemeinen und wenn nicht C äusserst gross gegen S ist, ϑ^2 sehr klein gegen $\frac{Sf}{c^3}$ sein. Für unsern Mond ist z. B. C nahe $=80\,S$, R nahe $=60$ Erdhalbmesser oder, da der Mondhalbmesser nur etwas mehr als $\frac{1}{4}$ des Erdhalbmessers beträgt, R nahe $=240\cdot c$. Demnach verhält sich für unsern Mond ϑ^2 zu $\frac{Sf}{c^3}$ nahe wie $1:3\cdot 240\cdot 240$ oder wie $1:172800$. Demnach kann man ϑ^2 gegen $\frac{Sf}{c^3}$ vernachlässigen, was auf dasselbe hinauskommt, als wenn ursprünglich z^2 einfach durch $c^2-x^2-y^2$ ersetzt worden wäre. Vorige Gleichungen ergeben demnach für die Excentricitäten des Satelliten folgende Werthe:

$$\frac{a^2-c^2}{c^2}=\frac{e^2}{c^2}=-\tfrac{15}{2}\,\frac{c^3\vartheta^2}{Sf}=-\tfrac{45}{8}\,\frac{\vartheta^2}{\varrho\pi f},$$
$$\frac{b^2-c^2}{c^2}=\frac{\varepsilon^2}{c^2}=-10\,\frac{c^3\vartheta^2}{Sf}=-\tfrac{15}{2}\,\frac{\vartheta^2}{\varrho\pi f},$$

unter ϱ die Dichtigkeit des Satelliten verstanden, da $S=\frac{4}{3}c^3\pi\varrho$ gesetzt werden kann. Daraus folgt nun zunächst, dass ein Ellipsoid in der That eine mögliche Gleichgewichtsfigur für den Satelliten ist, und zwar ist dieses Ellipsoid ein dreiaxiges. Die dem Centralkörper zugekehrte Axe c ist die längste, die mittlere Axe a ist die, welche die Bahn tangirt, die kleinste besteht auf der Bahnebene senkrecht.

Da $\frac{a-c}{c}$ näherungsweise gleich $\frac{1}{2}\frac{e^2}{c^2}$, so sind die Abplattungen beider durch die längste Axe c gelegten Hauptschnitte

$$\tfrac{1}{2}\frac{e^2}{c^2} = -\tfrac{15}{4}\frac{c^3\vartheta^2}{Sf} \text{ und } \tfrac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{c^2} = -5\frac{c^3\vartheta^2}{Sf}.$$

Die in obigen Formeln vorkommenden Grössen sind z. B. für unsern Mond wenigstens näherungsweise bekannt. Zur Elimination von f setze man $\frac{Cf}{r^2} = g$, unter C die Erdmasse, r den Erdhalbmesser, g die Schwere an der Erdoberfläche verstanden, also $f = \frac{g r^2}{C^2}$. Dadurch kommt

$$\frac{e^2}{c^2} = -\tfrac{15}{2}\frac{C\vartheta^2 c^3}{g r^2 S}, \quad \frac{\varepsilon^2}{c^2} = -10\frac{C\vartheta^2 c^3}{g r^2 S}.$$

Der Bruch $\frac{C}{S}$ der Erd- und Mondmasse ist nahe $=81$; der Bruch $\frac{c}{r}$ des mittlern Erd- und Mondhalbmessers ist $=0{,}27234$, c selbst $=234$ geogr. Meilen (à 7420,44 Meter), g im Mittel $=9{,}7974$ Meter. Die Umlaufszeit des Mondes um die Erde ist $27^d\ 7^h\ 43^m\ 11{,}5^s$ (nahe $27\tfrac{1}{3}$ Tage à 86400 Sec.), demnach $\vartheta = \frac{2\pi}{86400 \,.\, 27\frac{1}{3}}$ oder genauer $= \frac{2\pi}{86400 \,.\, 27{,}3217}$. Durch Ausrechnung findet sich für die Abplattungen der beiden Hauptschnitte durch die längste der Erde zugewandte Axe des Mondes

$$\tfrac{1}{2}\frac{e^2}{c^2} = \frac{a-c}{c} = -\frac{1}{353000}, \quad \tfrac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{c^2} = \frac{b-c}{c} = -\frac{1}{265000}.$$

Demnach ist die Abweichung des Mondes von der Kugelform äusserst gering; man findet für den Ueberschuss des längsten der Erde zugewandten Halbmessers über den mittlern etwa 49 Meter und über den kleinsten etwa 65 Meter; der Unterschied der beiden für uns sichtbaren Halbmesser wäre demnach etwa 16 Meter. Mit diesen theoretischen Ergebnissen im Einklange steht die Thatsache, dass die Beobachtungen ausser den physischen Ungleichheiten der Oberfläche am Monde keinerlei Abweichung von der Kugelgestalt erkennen lassen.

§ 3. Ebbe und Fluth.

Die Erscheinungen der Ebbe und Fluth sollen hier nur unter mehreren, die Theorie wesentlich vereinfachenden Annahmen behandelt werden. Man denke sich die Erde bestehend aus einem kugelförmigen Kerne vom Radius A und einer denselben allseitig bedeckenden homogenen Flüssigkeit. Die ganze Erdmasse sei E, diejenige des festen

Kernes Ek, also die der Flüssigkeit $E(1-k)$; die Dichte der Flüssigkeit sei ϱ, die mittlere des festen Kernes $\sigma\varrho$. Man denke sich ferner einen zweiten auf die Erde anziehend wirkenden Körper von der Masse M, die Entfernung eines Flüssigkeitstheilchens von dessen Mittelpunkte heisse R, die Entfernung seines Mittelpunktes von dem der Erde sei D. Beide Körper bewegen sich infolge ihrer gegenseitigen Anziehung um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt in Kegelschnitten, die wir als Kreise voraussetzen werden. Der Abstand dieses gemeinschaftlichen Schwerpunktes vom Mittelpunkte der Erde sei d. Von der Rotation der Erde um ihre Axe sehen wir ab, und es geschehe die Bewegung so, als wenn beide Körper fest miteinander verbunden wären, indem sie sich stets dieselbe Seite zukehren. Unter diesen Umständen wird sich dann für die die Erde bedeckende Flüssigkeit ein Zustand des relativen Gleichgewichts einstellen, der eben bestimmt werden soll. Die Winkelgeschwindigkeit des Mittelpunktes der Erde bei dessen Rotation um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt sei ϑ. Dann muss, unter f die Attractionsconstante verstanden, die Gleichung bestehen $\vartheta^2 d = \frac{Mf}{D^2}$. Der Mittelpunkt der Erde sei der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen z-Axe der Verbindungslinie beider Himmelskörper entgegengesetzt gerichtet sei, während die x-Axe die Bahn des Mittelpunktes der Erde bei der Rotation um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt tangire und die y-Axe auf dieser Bahn senkrecht stehe. Wir fragen, ob die die Erde bedeckende Flüssigkeit sich unter den angegebenen Umständen dadurch ins Gleichgewicht setzen könne, dass sie die Gestalt eines von der Kugelform wenig abweichenden Ellipsoids annimmt, dessen Halbaxen a, b, c resp. in die x-, y-, z-Axe fallen. Die Excentricitätsquadrate a^2-c^2 und b^2-c^2 mögen wieder mit e^2 und ε^2 bezeichnet werden.

Die Componenten der Centrifugalkraft in den Punkten x, y, z sind, auf die Masseneinheit bezogen, die partiellen Differentialquotienten von

$$\tfrac{1}{2}\vartheta^2[x^2+(z+d)^2].$$

Das Potential des festen Kernes der Erde sei U, dasjenige der ihn bedeckenden flüssigen Schichte V, endlich das des anziehenden Körpers (des Mondes, der Sonne) W; dann muss im Gleichgewichtszustande für die Oberfläche der Flüssigkeit folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\alpha)\qquad f(U+V+W)+\tfrac{1}{2}\vartheta^2[x^2+(z+d)^2]=Const.$$

Bezeichnet r die Entfernung eines Flüssigkeitstheilchens vom Mittelpunkte der Erde, so ist erstlich $U=\frac{Ek}{r}$ oder, da für einen Punkt der als ellipsoidisch angenommenen Flüssigkeitsoberfläche ist (vergl. § 1)

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{c}\left(1-\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{2c^4}\right),$$

so können wir setzen

$$\beta)\qquad U=\frac{Ek}{c}\left(1-\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{2c^4}\right).$$

Für V haben wir nach Gleichung 2′) in § 1

$$V=\tfrac{4}{3}\pi\varrho\left\{\frac{c\left(c^2+\frac{e^2+\varepsilon^2}{2}\right)-A^2}{r}-\tfrac{1}{10}\frac{c^3(e^2+\varepsilon^2)}{r^3}+\tfrac{3}{10}\frac{c^3(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{r^5}\right\}$$

oder, wenn wir in den die Excentricitäten e und ε nicht enthaltenden Theilen dieses Ausdruckes für $\frac{1}{r}$ wieder seinen obigen Werth, in den übrigen dagegen für r einfach c setzen

$$\gamma)\quad V=\tfrac{4}{3}\pi\varrho\left\{\frac{c\left(c^2+\frac{e^2+\varepsilon^2}{2}\right)-A^3}{c}-\frac{e^2+\varepsilon^2}{10}+\frac{(5A^3-2c^3)(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{10c^5}\right\}.$$

Endlich haben wir für das Potential des anziehenden Körpers M

$$W=\frac{M}{R}=\frac{M}{\sqrt{x^2+y^2+(D+z)^2}}$$
$$=\frac{M}{D}\left\{1-\frac{z}{D}-\frac{x^2+y^2+z^2}{2D^2}+\tfrac{3}{2}\frac{z^2}{D^2}+\ldots\right\},$$

also mit Vernachlässigung der folgenden Glieder

$$\delta)\qquad W=\frac{M}{D}\left\{1-\frac{z}{D}-\frac{x^2+y^2-2z^2}{2D^2}\right\}.$$

Mit Benutzung der Gleichungen β), γ), δ) geht demnach die Bedingungsgleichung α) für die Oberfläche der Flüssigkeit in die nachstehende über, wenn man die constanten Glieder gleich in eine einzige Constante $\mathfrak{C}$ zusammenfasst:

$$\mathfrak{C}-\frac{Ekf(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{2c^5}+\frac{\frac{4}{3}\pi\varrho f(5A^3-2c^3)(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{10c^5}-\frac{Mf}{D^2}z$$
$$-\frac{Mf}{2D^3}(x^2+y^2-2z^2)+\tfrac{1}{2}\vartheta^2(x^2+z^2+2dz)=Const.$$

Aus dem Ausdrucke links in dieser Gleichung heben sich die beiden Glieder mit z auf, da nach dem Obigen $-\frac{Mf}{D^2}+\vartheta^2d=0$. Für z^2 hat man

$$z^2=c^2-x^2-y^2+\frac{e^2}{c^2}x^2+\frac{\varepsilon^2}{c^2}y^2.$$

Da indess z^2 nur mit sehr kleinen Factoren $\left(\frac{Mf}{D^3}\text{ und }\tfrac{1}{2}\vartheta^2\right)$ multiplicirt vorkommt, so setzen wir einfacher $z^2=c^2-x^2-y^2$. Ferner ist, da $\frac{4}{3}\pi\varrho A^3=Ek\frac{1}{\sigma}$, wegen des kleinen Factors $(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)$ näherungsweise zu setzen

$\frac{4}{3}\pi\varrho c^3 = Ek\frac{1}{\sigma} + E(1-k)$, also weiter $\frac{4}{3}\pi\varrho(5A^3 - 2c^3) = \left[3\frac{k}{\sigma} - 2(1-k)\right]E.$

Dann wird obige Bedingungsgleichung, wenn wir wieder constante Glieder in $\mathfrak{C}$ einrechnen:

$$\mathfrak{C} - \frac{Ekf(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{2c^5} + \frac{\left[3\frac{k}{\sigma} - 2(1-k)\right]Ef(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{10c^5}$$
$$-\frac{3Mf}{2D^3}(x^2+y^2) - \frac{Mf}{2dD^2}y^2 = Const.$$

Wegen der Unabhängigkeit von x^2 und y^2 zerfällt diese Gleichung wieder in nachstehende zwei:

$$-\frac{Ek}{2c^5}e^2 + \frac{\left[3\frac{k}{\sigma} - 2(1-k)\right]E}{10c^5}e^2 - \frac{3M}{2D^3} = 0,$$

$$-\frac{Ek}{2c^5}\varepsilon^2 + \frac{\left[3\frac{k}{\sigma} - 2(1-k)\right]E}{10c^5}\varepsilon^2 - \frac{3M}{2D^3} - \frac{M}{2dD^2} = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir

$$e^2 = -\frac{15Mc^5}{\left[2+3k\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\right]ED^3},$$

$$\varepsilon^2 = -\frac{5Mc^5\left(3+\frac{D}{d}\right)}{\left[2+3k\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\right]ED^3}.$$

Da diese Werthe für die Excentricitätsquadrate stets möglich und im Allgemeinen auch sehr klein sind, so ist also nachgewiesen, dass in der That die die Erde umgebende Flüssigkeitsmasse die Gestalt eines dreiaxigen Ellipsoids in ihrem relativen Gleichgewichtszustande annehmen kann. Die längste Axe der ellipsoidischen Wasseroberfläche ist dem anziehenden Körper zugewendet, die mittlere liegt in der Bahnebene der beiden Körper und die kürzeste steht auf der Bahnebene senkrecht. Da ferner $e^2 = a^2 - c^2$ nahe $= 2c(a-c)$ und ebenso $\varepsilon^2 = b^2 - c^2$ nahe $= 2c(b-c)$ ist, so können wir statt der obigen beiden Formeln auch setzen

$$c - a = \frac{15}{2\left[2+3k\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\right]}\cdot\frac{M}{E}\left(\frac{c}{D}\right)^3 . c,$$

$$c - b = \frac{5\left(3+\frac{D}{d}\right)}{2\left[2+3k\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\right]}\cdot\frac{M}{E}\left(\frac{c}{D}\right)^3 . c.$$

Es lassen sich hier nun zwei Hauptfälle unterscheiden. In dem ersten setzen wir eine sehr geringe Meerestiefe voraus, dann ist k sehr nahe $=1$, in dem zweiten setzen wir die ganze Erde als flüssig voraus und demgemäss $k=0$.

Wir erhalten sonach im ersten Hauptfalle ($k=1$):

$$c-a=\frac{3}{2\left(1-\frac{3}{5}\frac{1}{\sigma}\right)}\cdot\frac{M}{E}\left(\frac{c}{D}\right)^3 c,\quad c-b=\frac{3+\frac{D}{d}}{2\left(1-\frac{3}{5}\frac{1}{\sigma}\right)}\cdot\frac{M}{E}\left(\frac{c}{D}\right)^3 c,$$

im zweiten Hauptfalle dagegen ($k=0$)

$$c-a=\tfrac{15}{4}\frac{M}{E}\left(\frac{c}{D}\right)^3 c,\quad c-b=\tfrac{5}{4}\left(3+\frac{D}{d}\right)\frac{M}{E}\left(\frac{c}{D}\right)^3 c,$$

welch letztere Formeln sich auf die des § 2 zurückführen lassen, sobald $\frac{D}{d}=1$ gesetzt wird.

Behufs einer numerischen Ausrechnung setzen wir für die durch den Mond bewirkte Fluth $\frac{M}{E}=\frac{1}{81}$, $c=858{,}5$ geogr. Meilen à 7420,44 Meter oder 23643′ pr., $D=51762$ geogr. Meilen, $\sigma=5{,}5$. Dann kommt in den beiden extremen Fällen für $c-a$ erstens bei sehr geringer Meerestiefe 0,604 Meter oder 1,924′ pr., zweitens, wenn die ganze Erde flüssig wäre, 1,343 Meter oder 4,282′ pr. Da $\frac{D}{d}$ nahe $=82$, so ist die Differenz $c-b$ bedeutend, und zwar $28\frac{1}{3}$mal grösser als $c-a$.

Hinsichtlich der durch die Sonne bewirkten Fluth ist die Sonnenmasse $355500\cdot81$ mal grösser, als die Mondmasse, die Entfernung D der Sonne dagegen auch nahe 400 mal grösser als die Entfernung des Mondes. Der Werth der Differenz $c-a$ für die Sonnenfluth verhält sich daher zum Werthe derselben Differenz für die Mondfluth wie $\frac{355500.81}{400^3}$ zu 1, woraus sich ergiebt, dass diese Differenz für die Sonnenfluth nahe $2\frac{1}{4}$mal kleiner ist als für die Mondfluth. Ihre Werthe für die Sonnenfluth sind erstens bei geringer Meerestiefe 0,268 Meter oder 0,855′ pr., zweitens bei ganz flüssiger Erde 0,597 Meter oder 1,903′ pr. Für das System von Erde und Sonne ist $\frac{D}{d}$ sehr nahe $=1$; daher verhält sich für die Sonnenfluth $c-a$ zu $c-b$ wie $3:4$.

Denken wir uns nun die Erde in der That um ihre Axe rotirend, diese Rotation aber so langsam vor sich gehend, dass man den vorhin bestimmten Zustand des relativen Gleichgewichts als in jedem Augenblicke erreicht ansehen kann, und ferner die Mondbahn mit der Ebene des Aequators zusammenfallend. Die Pole behalten jetzt immer dieselbe vorhin bestimmte Höhe des Wasserstandes, die Punkte des

Aequators dagegen gehen abwechselnd durch die Gegenden des höchsten und tiefsten Wasserstandes hindurch. Zur Zeit des Neu- und Vollmondes, wo die Gesammthöhe der Fluth sehr nahe die Summe der einzelnen Höhen der Sonnen- und Mondfluth ist, wird der Unterschied des höchsten und tiefsten Wasserstandes am Aequator erstens für den Fall einer geringen Meerestiefe 0,872 Meter oder 2,779′ pr., zweitens für den Fall einer ganz flüssigen Erde 1,940 Meter oder 6,185′ pr. Zur Zeit der Quadraturen dagegen sind dieselben Grössen 0,336 Meter oder 1,069′ pr. und 0,746 Meter oder 2,379′ pr.

Die obige vorläufige Voraussetzung, dass trotz der Axendrehung der Erde der relative Gleichgewichtszustand stets erreicht sei, kann nun aber bei der verhältnissmässig raschen Rotation der Erde durchaus nicht als zulässig gelten; es findet vielmehr ein stetes Schwanken der Meeresoberfläche um ihre relative Gleichgewichtsfigur statt. Daher kann auch die hier vorliegende Theorie der Ebbe und Fluth nicht als das Wesen dieser Erscheinungen vollständig erschöpfend betrachtet werden; eine solche erschöpfende Untersuchung muss vielmehr die Theorie der betreffenden Erscheinungen als Problem der Oscillationen des Meeres auffassen, nicht als Problem einer relativen Gleichgewichtsfigur. Eine derartige Durchführung dieser Theorie giebt Laplace in der *Mécanique céleste.*

§ 4. Oscillationen einer homogenen Flüssigkeitsmasse, deren Theilchen nur ihrer eigenen Anziehung unterworfen sind.

1. Wir denken uns eine homogene flüssige Masse, auf deren Theilchen blos die gegenseitige Massenanziehung ihrer Theilchen wirkt. Dieselbe nimmt im Gleichgewichtszustande die Gestalt einer Kugel an und dieses Gleichgewicht ist ein stabiles. Wird nun die Flüssigkeitskugel einer kleinen Erschütterung ausgesetzt, so entfernen sich die Theilchen derselben ein wenig von ihrer anfänglichen Lage und es entstehen dadurch infolge der gegenseitigen Anziehung der Theilchen fortdauernde Oscillationen derselben um ihre Gleichgewichtslage. Die Gestalt, welche die Oberfläche der Flüssigkeit in den verschiedenen Stadien einer Oscillation darbietet, kann offenbar sehr verschieden sein und hängt von der Art der anfänglichen Erschütterung ab. Der denkbar einfachste Fall dieser Oscillationen scheint der zu sein, in welchem die Oberfläche stets die Gestalt eines Ellipsoids zeigt, dessen Mittelpunkt stets in den Mittelpunkt der ursprünglichen sphärischen Gleichgewichtsfigur fällt und dessen Axen stets dieselbe Richtung behalten, sich aber abwechselnd verkürzen und verlängern, — vorausgesetzt, dass eine derartige Bewegung überhaupt möglich ist. Wir machen demgemäss über die zu untersuchende Bewegung folgende Unterstellungen. Die Theilchen, welche sich ursprünglich im Mittelpunkte der sphärischen Gleichgewichtsfigur befinden, sollen während der ganzen Bewegung in Ruhe bleiben; die anderen Theilchen

dagegen sollen eine desto grössere Oscillationsamplitude besitzen, je weiter sie vom Mittelpunkte entfernt sind, und alle Theilchen, welche sich einmal auf einer Axe der nacheinander auftretenden Oberflächengestalten befinden, sollen auch fortwährend auf derselben verbleiben. Die Dauer T einer Oscillation sei für alle Theilchen die gleiche. Alle Oscillationen sollen fortwährend sehr klein und geradlinig bleiben. Wir haben also zu untersuchen, ob eine Bewegung, wie sie bisher im Allgemeinen charakterisirt wurde, möglich ist, und in diesem Falle ihre näheren Attribute zu bestimmen.

2. Den Mittelpunkt der ursprünglichen Kugelfläche und der nach unserer Annahme nachher auftretenden Ellipsoide nehmen wir zum Coordinatenanfangspunkt, die Axen der fraglichen Ellipsoide zu Coordinatenaxen. Die Dichtigkeit der Flüssigkeit werde mit ϱ, der Radius der ursprünglichen sphärischen Oberfläche mit R bezeichnet. Es seien x_0, y_0, z_0 die Coordinaten eines Theilchens im ursprünglichen Ruhezustande, x, y, z diejenigen desselben Theilchens zu einer beliebigen Zeit t; ξ, η, ζ die Projectionen der Verschiebung dieses Theilchens zur Zeit t auf die Axen. Dem oben dargestellten Charakter der Bewegung genügen nun folgende Annahmen über die Grössen ξ, η, ζ:

$$\xi = \mu_1 x_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \eta = \mu_2 y_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \zeta = \mu_3 z_0 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

unter μ_1, μ_2, μ_3 gewisse kleine Constante verstanden. Denn zwischen den ursprünglichen Coordinaten x_0, y_0, z_0 eines Theilchens, welches ursprünglich in der sphärischen Oberfläche lag und demzufolge auch stets in der Flüssigkeitsoberfläche verbleibt, besteht die Beziehung $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2$. Nun ist aber

$$x = x_0 + \xi = x_0 \left(1 + \mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right),$$

$$y = y_0 + \eta = y_0 \left(1 + \mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right),$$

$$z = z_0 + \zeta = z_0 \left(1 + \mu_3 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right),$$

folglich

$$\frac{x^2}{R^2\left(1 + \mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right)^2} + \frac{y^2}{R^2\left(1 + \mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right)^2} + \frac{z^2}{R^2\left(1 + \mu_3 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right)^2} = 1.$$

Die Oberfläche ist also ein Ellipsoid. Dass die übrigen Voraussetzungen erfüllt sind, ist sofort klar. Es bleibt also noch zu untersuchen, ob die angenommene Bewegung den Gesetzen der Hydrodynamik gehorche.

3. Für tropfbare Flüssigkeiten muss die cubische Dilatation, resp. Compression verschwinden, welche Bedingung sich ausspricht durch die sogenannte Continuitätsgleichung, die für diesen Fall (bei Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung) folgende Gestalt annimmt:

Es ist aber

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_0} + \frac{\partial \eta}{\partial y_0} + \frac{\partial \zeta}{\partial z_0} = 0.$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_0} = \mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y_0} = \mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z_0} = \mu_3 \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

und die Continuitätsgleichung geht über in

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0.$$

Nach dem d'Alembert'schen Princip muss ferner in jedem Augenblicke Gleichgewicht bestehen zwischen den an der Flüssigkeit wirkenden verlorenen Kräften. Ist V das Potential der flüssigen Masse, f die Anziehungsconstante, so sind die verlorenen Kräfte, auf die Masseneinheit bezogen

$$f\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad f\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad f\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

oder

$$f\frac{\partial V}{\partial x} + \mu_1 x \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$f\frac{\partial V}{\partial y} + \mu_2 y \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$f\frac{\partial V}{\partial z} - (\mu_1 + \mu_2) z \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

wo mit Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung x, y, z statt x_0, y_0, z_0 gesetzt ist. Wenn also in irgend einem Momente an der Flüssigkeit Kräfte angebracht würden, deren Componenten durch die vorstehenden Ausdrücke dargestellt sind und die Flüssigkeitstheilchen zugleich in diesem Momente ihre Geschwindigkeiten verlören, so würde die Flüssigkeitsmasse in der Gestalt, welche sie in diesem Moment gerade besitzt, im Gleichgewicht verharren. Die Gleichung für den hydrostatischen Druck wird sonach

$$p = \varrho \left\{ fV + \tfrac{1}{2}\left[\mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 - (\mu_1 + \mu_2) z^2\right] \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T} \right\} + Const.$$

und also endlich die Gleichung für die Oberfläche

$$fV_0 + \tfrac{1}{2}\left[\mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 - (\mu_1 + \mu_2) z^2\right] \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T} = Const.$$

Diese Gleichung muss in allen Punkten der Oberfläche in jedem Augenblicke erfüllt sein, wenn die vorausgesetzte Bewegung der Flüssigkeit möglich sein soll. Wir müssen jetzt zunächst das Potential V bilden. Zur Zeit t besitzt nach dem Obigen die Flüssigkeit die Gestalt eines Ellipsoids mit den Halbaxen

$$R\left(1 + \mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad R\left(1 + \mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad R\left(1 - [\mu_1 + \mu_2] \sin 2\pi \frac{t}{T}\right);$$

nennen wir diese kurz a, b, c, so haben wir weiter bei Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung

$$a^2 = R^2\left(1 + 2\mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right),$$

$$b^2 = R^2\left(1 + 2\mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right),$$

$$c^2 = R^2\left(1 - 2\,[\mu_1 + \mu_2]\sin 2\pi \frac{t}{T}\right).$$

Hieraus findet sich für die Quadrate der numerischen Excentricitäten $\varkappa$ und λ der Oberfläche, wieder bei Beschränkung auf kleine Grössen erster Ordnung

$$\varkappa^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2} = 2\,(2\,\mu_1 + \mu_2)\sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$\lambda^2 = \frac{b^2 - c^2}{c^2} = 2\,(\mu_1 + 2\,\mu_2)\sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Für das innere Potential eines Ellipsoids mit den Halbaxen a, b, c haben wir nun aber bei Beschränkung auf die Quadrate der Excentricitäten nach 1), § 1

$$V_i = 2\,ab\,\varrho\pi\,[1 - \tfrac{1}{6}(\varkappa^2 + \lambda^2)] - \frac{2\,ab}{c^2}\varrho\pi\,[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{10}(3\,\varkappa^2 + \lambda^2)]\,x^2$$
$$- \frac{2\,ab}{c^2}\varrho\pi\,[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{10}(\varkappa^2 + 3\,\lambda^2)]\,y^2 - \frac{2\,ab}{c^2}\varrho\pi\,[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{10}(\varkappa^2 + \lambda^2)]\,z^2.$$

Bei fortwährender Beschränkung auf die Grössen der niedrigsten Ordnung erhält man nach dem Obigen

$$ab = R^2\left(1 + [\mu_1 + \mu_2]\sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad \frac{ab}{c^2} = 1 + 3\,[\mu_1 + \mu_2]\sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Hieraus folgt nun durch Einsetzung in die Formel für V_i mit demselben Grade der Annäherung

$$V_i = 2\,R^2\varrho\pi - 2\,\varrho\pi\left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{5}\mu_1 \sin 2\pi\frac{t}{T}\right]x^2 - 2\,\varrho\pi\left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{5}\mu_2 \sin 2\pi\frac{t}{T}\right]y^2$$
$$- 2\,\varrho\pi\left[\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{5}(\mu_1 + \mu_2)\sin 2\pi\frac{t}{T}\right]z^2.$$

Dieser Ausdruck ist jetzt in die obige Bedingungsgleichung für die Oberfläche einzusetzen. Nach gehöriger Ordnung lässt sich diese dann in folgender Form schreiben:

$$\left\{-\tfrac{2}{3}\varrho\pi f\left[1 - \tfrac{6}{5}\mu_1 \sin 2\pi\frac{t}{T}\right] + \tfrac{1}{2}\mu_1\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi\frac{t}{T}\right\}x^2$$
$$+ \left\{-\tfrac{2}{3}\varrho\pi f\left[1 - \tfrac{6}{5}\mu_2 \sin 2\pi\frac{t}{T}\right] + \tfrac{1}{2}\mu_2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi\frac{t}{T}\right\}y^2$$
$$+ \left\{-\tfrac{2}{3}\varrho\pi f\left[1 + \tfrac{6}{5}(\mu_1 + \mu_2)\sin 2\pi\frac{t}{T}\right] - \tfrac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi\frac{t}{T}\right\}z^2 = Const.$$

Das Bestehen dieser Gleichung für alle Punkte der Oberfläche erfordert, dass die Coefficienten von x^2, y^2, z^2 in derselben den entsprechenden Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche proportional sind. Die

Gleichung der Oberfläche können wir aber wegen der Kleinheit von μ_1 und μ_2 auch so schreiben:

$$x^2\left[1-2\mu_1 \sin 2\pi\frac{t}{T}\right]+y^2\left[1-2\mu_2 \sin 2\pi\frac{t}{T}\right]+z^2\left[1+2(\mu_1+\mu_2)\sin 2\pi\frac{t}{T}\right]=R^2.$$

Behufs der bequemern Vergleichung schreiben wir die vorige Bedingungsgleichung in folgender noch etwas geänderter Form:

$$\begin{aligned}&\left\{-\tfrac{2}{3}\varrho\pi f\left[1-2\mu_1 \sin 2\pi\frac{t}{T}\right]+\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2-\tfrac{8}{15}\varrho\pi f\right]\mu_1 \sin 2\pi\frac{t}{T}\right\}x^2\\ +&\left\{-\tfrac{2}{3}\varrho\pi f\left[1-2\mu_2 \sin 2\pi\frac{t}{T}\right]+\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2-\tfrac{8}{15}\varrho\pi f\right]\mu_2 \sin 2\pi\frac{t}{T}\right\}y^2\\ +&\left\{-\tfrac{2}{3}\varrho\pi f\left[1+2(\mu_1+\mu_2)\sin 2\pi\frac{t}{T}\right]\right.\\ &\quad\left.-\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2-\tfrac{8}{15}\varrho\pi f\right](\mu_1+\mu_2)\sin 2\pi\frac{t}{T}\right\}z^2=Const.\end{aligned}$$

In dieser Form zeigt nun diese Gleichung sofort durch Vergleichung mit der Gleichung der Oberfläche, dass ihr Bestehen für alle Punkte der Oberfläche der Flüssigkeit blos an folgende Bedingung geknüpft ist:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2-\tfrac{8}{15}\varrho\pi f=0.$$

Wenn diese Gleichung erfüllt ist, so besteht in jedem Augenblick das Gleichgewicht des d'Alembert'schen Princips und die hypothetisch angenommene Bewegungsart der flüssigen Masse ist dann also in der That möglich. Es dient aber offenbar die vorige Gleichung zur Bestimmung der Oscillationsdauer T, für welche sie giebt

$$T=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{15\pi}{\varrho f}}.$$

Da dieser Werth reell ist, so kann also auch die vorhergehende Gleichung stets befriedigt werden, und wir ziehen daher aus allem Vorhergehenden jetzt folgendes Gesammtresultat:

Unter den möglichen Bewegungen der Flüssigkeitskugel giebt es auch regelmässige sehr kleine Oscillationen, bei welchen die Oberfläche der Flüssigkeit stets die Gestalt eines Ellipsoids behält und deren Charakter oben näher beschrieben wurde. Die Zeit einer ganzen derartigen Oscillation der Flüssigkeit ist gegeben durch die Gleichung $T=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{15\pi}{\varrho f}}$ und die Verschiebungen eines beliebigen Flüssigkeitstheilchens, dessen Coordinaten im ursprünglichen Ruhezustande x_0, y_0, z_0 waren, zur Zeit t sind gegeben durch die Gleichungen

$$\xi=\mu_1 x_0 \sin 2\pi\frac{t}{T},\quad \eta=\mu_2 y_0 \sin 2\pi\frac{t}{T},\quad \zeta=-(\mu_1+\mu_2)z_0 \sin 2\pi\frac{t}{T},$$

unter μ_1 und μ_2 zwei willkürliche sehr kleine Constante verstanden. Die Halbaxen der ellipsoidischen Oberfläche der Flüssigkeit sind zur Zeit t

$$R\left(1+\mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad R\left(1+\mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad R\left(1-[\mu_1+\mu_2] \sin 2\pi \frac{t}{T}\right).$$

4. Wir wollen die gefundene Bewegung noch etwas näher discutiren.

a) Die Formel für die Oscillationsdauer T zeigt, dass diese Grösse von den Dimensionen der Flüssigkeitsmasse ganz unabhängig ist, dagegen ist dieselbe der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit der Flüssigkeit umgekehrt proportional. Bezeichnet E den mittlern Halbmesser und σ die mittlere Dichtigkeit der Erde, g die Acceleration der Schwere, so haben wir, da eine homogene oder concentrisch geschichtete Kugel nach aussen so wirkt, als ob ihre ganze Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre, $\frac{\frac{4}{3}\pi E^3 \sigma f}{E^2} = g$ oder $f = \frac{3g}{4\pi\sigma E}$. Mittels dieses Werthes von f wird die Gleichung für T

$$T = \pi \sqrt{\frac{5E}{g} \cdot \frac{\sigma}{\varrho}}.$$

Nehmen wir als Werth des mittlern Erdhalbmessers E 858,5 geogr. Meilen à 7420,44 Meter, ferner für die Acceleration der Schwere $g =$ 9,7974 Meter pro Secunde, und setzen, um die Oscillationsdauer einer Wasserkugel zu bestimmen, $\frac{\sigma}{\varrho} = 5{,}62$, so ergiebt die Ausrechnung der vorigen Formel

$$T = 13430 \text{ Secunden} = 3\tfrac{3}{4} \text{ Stunden (nahe).}$$

Für eine Flüssigkeitskugel von derselben mittlern Dichtigkeit wie die Erde wäre die Oscillationsdauer 2,37 mal kleiner. Es versteht sich von selbst, dass die betrachtete Bewegung nur bei Flüssigkeitskugeln von grossem Radius überhaupt vorkommen kann, indem bei kleinem Radius die Wirkung der gegenseitigen Anziehung der Theilchen gegen die Wirkung der Molecularkräfte, welche die Wirkung der Oberflächenspannung bedingen, verschwindet.

b) Die erörterte Bewegung lässt sich folgendermassen geometrisch charakterisiren. Zu den Zeiten $t = 0, = \frac{1}{2}T, = T, = \frac{3}{2}T, = \ldots$ geht jedes Theilchen durch seine ursprüngliche Ruhelage und die Oberfläche der Flüssigkeit durch ihre sphärische Gleichgewichtsfigur. Die Richtung, in welcher ein Theilchen oscillirt, dessen Coordinaten im Gleichgewichtszustande x_0, y_0, z_0 sind, bildet mit den Axen Winkel, deren Cosinus sich verhalten wie

$$\mu_1 x_0 : \mu_2 y_0 : -(\mu_1+\mu_2) z_0.$$

Die Oscillationsrichtungen der Theilchen stehen also sämmtlich senkrecht auf den durch die Ruhelage derselben gehenden Hyperboloiden, deren Gleichung ist

$$\mu_1 x_0^2 + \mu_2 y_0^2 - (\mu_1 + \mu_2) z_0^2 = Const.$$

Oder denken wir uns die Orthogonalcurven, welche sich diesen Hyperboloiden zuordnen, so ist die Oscillationsrichtung jedes Theilchens Tangente an derjenigen dieser Orthogonalcurven, welche durch die Ruhelage des Theilchens geht. Die Differentialgleichungen dieser Orthogonalcurven sind

$$\frac{dx_0}{ds_0} : \frac{dy_0}{ds_0} : \frac{dz_0}{ds_0} = \mu_1 x_0 : \mu_2 y_0 : -(\mu_1 + \mu_2) z_0,$$

und deren Integrale, unter A und B zwei Constante verstanden,

$$y_0 = A x_0^{\frac{\mu_2}{\mu_1}}, \quad z_0 = B x_0^{-\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1}}.$$

Es sind also diese Strömungscurven parabolische Curven, und zwar im Allgemeinen solche doppelter Krümmung.

c) Die Gleichung der Oberfläche lässt sich schreiben

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2[\mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 - (\mu_1 + \mu_2) z^2] \sin 2\pi \frac{t}{T} = R^2.$$

Sie wird stets befriedigt für jedes t durch solche Werthe von x, y, z, welche den beiden Gleichungen genügen

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad \mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 - (\mu_1 + \mu_2) z^2 = 0.$$

Es schneiden sich also sämmtliche im Verlaufe der Bewegung auftretenden ellipsoidischen Oberflächengestalten in einer und derselben Raumcurve, in welcher auch die ursprüngliche Kugelfläche von einem gewissen Kegel zweiten Grades geschnitten wird.

d) Es sollen endlich noch zwei besonders interessante Specialfälle kurz hervorgehoben werden. Es sei erstens $\mu_2 = -\mu_1$. Jetzt wird $\zeta = 0$ und die Oscillationen aller Theilchen finden also parallel der xy-Ebene statt. Die Halbaxen der ellipsoidischen Oberfläche zur Zeit t werden jetzt, wenn wir einfach μ statt μ_1 schreiben

$$a = R\left(1 + \mu \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad b = R\left(1 - \mu \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad c = R;$$

die in die z-Axe fallende Axe der Flüssigkeit bleibt also in diesem Falle stets von gleicher Länge $2R$; von den beiden anderen Axen verlängert sich die eine stets, wenn die andere sich verkürzt, und umgekehrt. Die oben berührte Kegelfläche besitzt in diesem Falle die Gleichung $x^2 - y^2 = 0$, d. h. sie zerfällt in das System zweier in der z-Axe sich schneidender Ebenen, dargestellt durch $x + y = 0$, $x - y = 0$; es sind dieses die beiden Ebenen, welche die von der xz- und yz-Ebene gebildeten Winkel halbiren. Die besagten Ebenen schneiden die ursprüngliche Kugelfläche in zwei grössten Kreisen, in welchen dieselbe sonach in diesem Falle auch von allen der Reihe nach auftretenden ellipsoidischen Oberflächen geschnitten wird. Die Strömungslinien werden in diesem Falle, wie vorauszusehen war, ebene Curven, deren Gleichungen sind $y = Ax^{-1}$, $z = B$. Die erstere charakterisirt dieselben als gleichseitige Hyperbeln, deren Horizontalprojectionen sich an die x- und y-Axe als Asymptoten anschmiegen.

Ein zweiter ausgezeichneter Specialfall ist derjenige, in welchem man $\mu_1 = \mu_2$ hat. Schreiben wir dann wieder μ statt μ_1, so sind die Halbaxen der ellipsoidischen Oberfläche

$$a = R\left(1 + \mu \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad b = R\left(1 + \mu \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad c = R\left(1 - 2\mu \sin 2\pi \frac{t}{T}\right),$$

ferner die Gleichung der besagten Kegelfläche $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ und endlich die Gleichungen der Strömungscurven $y = Ax$, $z = Bx^{-2}$. Hieraus folgt, dass in diesem Falle sämmtliche ellipsoidische Oberflächen Rotationsellipsoide sind, deren Axe in die z-Axe und deren Aequatorebene in die xy-Ebene fällt, und zwar abwechselnd verlängerte und abgeplattete. Der Abstand des Polarhalbmessers von seinem Mittel ist absolut genommen immer doppelt so gross, wie der entgegengesetzte Unterschied des Aequatorhalbmessers von seinem Mittel. Die oben besagte Kegelfläche ist jetzt auch ein Rotationskegel um die z-Axe, dessen Seiten gegen die z-Axe um einen Winkel geneigt sind, dessen Tangente $= \sqrt{2}$ ist. Diese Kegelfläche schneidet jetzt wieder die ursprüngliche Kugelfläche in zwei Kreisen, durch welche ebenso alle ellipsoidischen Oberflächen gehen. Die Strömungscurven sind wieder ebene Curven, deren Ebenen durch die z-Axe gehen. Betrachten wir z. B. diejenigen, welche in der xz-Ebene liegen; es sind hyperbolische Curven dritten Grades, welche sich aber an die x-Axe viel enger anschliessen, als an die z-Axe.

II. Theil. Nicht homogene Ellipsoide.

§ 1. Näherungsformeln für das Potential eines nicht homogenen Ellipsoids mit kleinen Excentricitäten.

Denken wir uns zuerst eine homogene ellipsoidische Schale, begrenzt von zwei Ellipsoiden mit gleichgerichteten Axen, die sich beide nicht weit von der Kugelform entfernen. Dieselben seien bestimmt durch die eine Axe und die Excentricitäten c_0, e_0, ε_0; c_1, e_1, ε_1; die Dichtigkeit sei ϱ. Das Potential der Schale für einen Punkt des innern Hohlraumes oder des äussern Raumes stellt sich dann dar durch die Differenz der Potentiale für die Ellipsoide c_0, e_0, ε_0 und c_1, e_1, ε_1, und wir erhalten, wenn wir diese Differenz durch Δ andeuten,* gemäss der Formeln 1') und 2')

* Es ist also beispielsweise

$$\Delta\left(\frac{e_i^2}{c_i^2}\right) = \frac{e_i^2}{c_i^2} - \frac{e^2_{i-1}}{c^2_{i-1}}.$$

in § 1 des I. Theiles zunächst für das Potential in einem Punkte des innern Hohlraumes

$$v_i = 2\pi\varrho\left\{\varDelta(c^2+\tfrac{1}{3}[e^2+\varepsilon^2]) - \frac{r^2}{15}\varDelta\left(\frac{e^2}{c^2}+\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right) + \frac{x^2}{5}\varDelta\left(\frac{e^2}{c^2}\right) + \frac{y^2}{5}\varDelta\left(\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right)\right\},$$

und ebenso für das äussere Potential der Schale

$$v_a = \tfrac{4}{3}\pi\varrho\left\{\frac{\varDelta(c^3+\frac{1}{2}c[e^2+\varepsilon^2])}{r} - \tfrac{1}{10}\frac{\varDelta(c^3[e^2+\varepsilon^2])}{r^3} + \tfrac{3}{10}\frac{x^2\varDelta(c^3e^2)+y^2\varDelta(c^3\varepsilon^2)}{r^5}\right\}.$$

Nun denke man sich eine nicht homogene ellipsoidische Schale. Die Flächen, in denen die Dichtigkeit sich stetig oder discontinuirlich ändert, sollen aber, ebenso wie die beiden Oberflächen, sämmtlich Ellipsoide mit gleichgerichteten Axen und kleinen Excentricitäten sein. Dieselben theilen die gegebene nicht homogene Schale in eine endliche oder unendlich grosse Reihe homogener Schalen und wir erhalten also das Potential der gegebenen Schale durch eine Summation über alle homogenen Elementarschalen. Die Dichtigkeit ϱ, ebenso wie die Excentricitäten e und ε, sind hier als Functionen der Axe c zu betrachten. Die der innern und äussern Grenzfläche der gegebenen Schale entsprechenden Werthe von c seien c_0 und c_n. Dann ist für das innere Potential

$$\text{4)}\quad \begin{aligned} V_i = 2\pi\Bigg\{&\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\varDelta(c^2+\tfrac{1}{3}[e^2+\varepsilon^2]) - \tfrac{1}{15}r^2\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\varDelta\left(\frac{e^2}{c^2}+\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right)\\ &+\tfrac{1}{5}x^2\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\varDelta\left(\frac{e^2}{c^2}\right) + \tfrac{1}{5}y^2\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\varDelta\left(\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right)\Bigg\}, \end{aligned}$$

und für das äussere Potential

$$\text{5)}\quad \begin{aligned} V_a = \tfrac{4}{3}\pi\Bigg\{&\frac{\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\varDelta(c^3+\frac{1}{2}c[e^2+\varepsilon^2])}{r} - \tfrac{1}{10}\frac{\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\varDelta(c^3[e^2+\varepsilon^2])}{r^3}\\ &+\tfrac{3}{10}\frac{x^2\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\varDelta(c^3e^2)+y^2\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\varDelta(c^3\varepsilon^2)}{r^5}\Bigg\}. \end{aligned}$$

Ist die Dichtigkeitsänderung eine stetige, so treten Differentiale und Integrale an die Stelle der Differenzen und Summen. Das äussere Potential eines vollen Ellipsoids, in welchem die Dichtigkeit nach ellipsoidischen Flächen mit gleichgerichteten Axen und kleinen Excentricitäten wechselt, wird aus der letzten Formel erhalten, wenn man nur c_0 durch Null ersetzt oder, was auf dasselbe hinauskommt, als untere Summationsgrenze Null nimmt.

§ 2. Gleichgewichtsfigur eines Systems von Flüssigkeiten, welche einen ellipsoidischen Kern umgeben, wenn das System eine Rotationsbewegung mit der kleinen Winkelgeschwindigkeit ϑ um die z-Axe ausführt.

1. Man habe ein Ellipsoid, dessen Oberfläche nur wenig von der Kugelform abweicht und durch die Halbaxen a', b', c' und die Excentricitäten $e'=\sqrt{a'^2-c'^2}$ und $\varepsilon'=\sqrt{b'^2-c'^2}$ bestimmt ist. Im Falle dasselbe nicht homogen ist, seien die Flächen constanter Dichtigkeit sämmtlich Ellipsoide von kleinen Excentricitäten, deren Axen mit denen der Oberfläche gleichgerichtet sind. Die Dichte werde mit σ bezeichnet, welches dann eine Function von c ist. Man kann nun das äussere Potential des Ellipsoids durch folgende Formel darstellen:

$$V_a=\frac{M}{r}-\tfrac{1}{10}\frac{P+Q}{r^3}+\tfrac{3}{10}\frac{Px^2+Qy^2}{r^5}; \tag{6}$$

dabei ist im Falle der Homogenität nach Gleichung 2) des § 1 im I. Theile

$$M=\tfrac{4}{3}\pi\sigma a'b'c'=\tfrac{4}{3}\pi\sigma[c'^3+\tfrac{1}{2}c'(e'^2+\varepsilon'^2)],$$
$$P=Me'^2=\tfrac{4}{3}\pi\sigma c'^3e'^2,\quad Q=M\varepsilon'^2=\tfrac{4}{3}\pi\sigma c'^3\varepsilon'^2;$$

für ein nicht homogenes Ellipsoid ist nach Gleichung 5)

$$M=\tfrac{4}{3}\pi\sum_0^{c'}\sigma\varDelta[c^3+\tfrac{1}{2}c(e^2+\varepsilon^2)],$$
$$P=\tfrac{4}{3}\pi\sum_0^{c'}\sigma\varDelta(c^3e^2),\quad Q=\tfrac{4}{3}\pi\sum_0^{c'}\sigma\varDelta(c^3\varepsilon^2).$$

2. Denken wir uns jetzt ein System flüssiger Schichten verschiedener Dichtigkeit, die sich aber nicht mischen, über dem ellipsoidischen Kerne ausgebreitet, und das ganze System um die z-Axe mit der kleinen Winkelgeschwindigkeit ϑ gleichförmig rotirend. Wir fragen, ob das Gleichgewicht sich dadurch herstellen könne, dass alle Grenzflächen der einzelnen Schichten sich nach wenig excentrischen Ellipsoiden krümmen, deren Axen sämmtlich mit denen des festen Kernes gleichgerichtet sind. Dies vorausgesetzt, seien die Bestimmungsstücke der einzelnen Grenzflächen, von innen angefangen: c', e', ε'; c_1, e_1, ε_1; c_2, e_2, ε_2; ... c_n, e_n, ε_n; die Dichtigkeiten der einzelnen Schichten ϱ_1, ϱ_2, ... ϱ_n, ihre Potentialfunctionen V_1, V_2, ... V_n. Dann muss für jede Grenzfläche zweier Schichten und die äussere Oberfläche der äussersten die Bedingung erfüllt sein

$$f(V_a+V_1+V_2+\ldots+V_n)+\tfrac{1}{2}\vartheta^2(x^2+y^2)=Const.,$$

worin f die Anziehungsconstante bezeichnet.

3. Um den Ausdruck des Gesammtpotentials für die Punkte der durch die Grössen c_i, e_i, ε_i bestimmten Trennungsfläche zwischen der i^{ten} und $(i+1)^{\text{ten}}$ Schichte aufzustellen, haben wir für die Schichten von

der ersten bis zur i^{ten} incl. das äussere, für die Schichten von der $(i+1)^{\text{ten}}$ bis zur n^{ten} das innere Potential zu nehmen. Dann erhalten wir gemäss den Gleichungen 5) und 1')

$$V_a+V_1+V_2+\ldots+V_n$$

$$=\frac{M+\frac{4}{3}\pi\sum\limits_{c_1}^{c_i}\varrho\varDelta[c^3+\frac{1}{2}c(e^2+\varepsilon^2)]}{r}-\frac{1}{10}\,\frac{P+Q+\frac{4}{3}\pi\sum\limits_{c_1}^{c_i}\varrho\varDelta[c^3(e^2+\varepsilon^2)]}{r^3}$$

$$+\frac{3}{10}\,\frac{x^2\left[P+\frac{4}{3}\pi\sum\limits_{c_1}^{c_i}\varrho\varDelta(c^3e^2)\right]+y^2\left[Q+\frac{4}{3}\pi\sum\limits_{c_1}^{c_i}\varrho\varDelta(c^3\varepsilon^2)\right]}{r^5}$$

$$+2\pi\sum_{c_i+1}^{c_n}\varrho\varDelta(c^2+\tfrac{1}{3}e^2+\tfrac{1}{3}\varepsilon^2)-\frac{2\pi}{15}r^2\sum_{c_{i+1}}^{c_n}\varrho\varDelta\left(\frac{e^2}{c^2}+\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right)$$

$$+\frac{2\pi}{5}x^2\sum_{c_{i+1}}^{c_n}\varrho\varDelta\left(\frac{e^2}{c^2}\right)+\frac{2\pi}{5}y^2\sum_{c_i+1}^{c_n}\varrho\varDelta\left(\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right).$$

In denjenigen Gliedern dieses Ausdruckes, in welchen Grössen von der Ordnung der Excentricitätsquadrate vorkommen, ist r einfach durch c_i zu ersetzen, im ersten Gliede dagegen ist zu schreiben (vgl. § 1, I. Thl.)

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{c_i}-\frac{e_i^2x^2+\varepsilon_i^2y^2}{2c_i^5}.$$

Setzt man diesen Werth des Gesammtpotentials in obige Bedingungsgleichung ein, so erhält man durch Annullirung der Coefficienten der beiden unabhängigen Variabeln x^2 und y^2 zwei Gleichungen, welche nach Multiplication mit $10c_i^5$ folgende Gestalt annehmen:

$$-5\left[M+\tfrac{4}{3}\pi\sum_{c_1}^{c_i}\varrho\varDelta(c^3)\right]e_i^2+4\pi\sum_{c_1}^{c_i}\varrho\varDelta(c^3e^2)+4\pi c_i^5\sum_{c_{i}+1}^{c_n}\varrho\varDelta\left(\frac{e^2}{c^2}\right)$$

$$=-3P-\frac{5\vartheta^2c_i^5}{f},$$

$$-5\left[M+\tfrac{4}{3}\pi\sum_{c_1}^{c_i}\varrho\varDelta(c^3)\right]\varepsilon_i^2+4\pi\sum_{c_1}^{c_i}\varrho\varDelta(c^3\varepsilon^2)+4\pi c_i^5\sum_{c_i+1}^{c_n}\varrho\varDelta\left(\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right)$$

$$=-3Q-\frac{5\vartheta^2c_i^5}{f}.$$

Dies sind zwei lineare Gleichungen zwischen den Excentricitätsquadraten $e_1^2, e_2^2, \ldots e_n^2$; $\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \ldots \varepsilon_n^2$. Lässt man i die Werthereihe 1, 2, ... n durchlaufen, d. h. bildet man die entsprechenden zwei Gleichungen für jede Schichte, so erhält man $2n$ lineare Gleichungen zwischen den $2n$ unbekannten Excentricitätsquadraten, die sich also hierdurch eindeutig bestimmen. Auch sind die für dieselben sich ergebenden Werthe im Allgemeinen sehr kleine. Hat man also ein System beliebiger

Flüssigkeitsschichten, welche über einem wenig excentrischen ellipsoidischen festen Kerne ausgebreitet sind, und lässt das ganze System um eine der Axen des festen Kernes mit kleiner Winkelgeschwindigkeit rotiren, so ist ein einziger Gleichgewichtszustand möglich, bei welchem alle Grenzflächen der einzelnen flüssigen Schichten Ellipsoide von geringen Excentricitäten werden, deren Axen sämmtlich mit denen des festen Kernes gleichgerichtet sind.

4. Ist das feste Ellipsoid ein Rotationsellipsoid, so wird $P = Q$, $\varepsilon' = e'$, woraus folgt, dass, da die Coefficienten der Gleichungen für die Excentricitäten e und ε jetzt einander gleich werden, auch die ellipsoidischen Grenzflächen der verschiedenen Schichten der Flüssigkeit jetzt Rotationsellipsoide werden.

Obige zwei Gleichungen liefern auch dann noch für die Excentricitäten e und ε eindeutige und im Allgemeinen auch kleine Werthe, wenn $\vartheta = 0$ ist, woraus folgt, dass der oben definirte Gleichgewichtszustand auch dann noch ein möglicher ist, wenn das System keine Rotationsbewegung besitzt.

Ohne das vorliegende allgemeine Theorem in seinen Specialfällen zu discutiren, wollen wir nur noch zeigen, wie die Formeln dieses Paragraphen als Grundlage für eine Theorie der Gestalt der Erde dienen können.

§ 3. Zusammenhang zwischen der Dichtigkeit und der Abplattung der inneren Erdschichten.

Lässt man in § 2 die Annahme eines festen Kernes fallen, so wird $P = Q = M = 0$, $e' = \varepsilon' = 0$; also ist auch jetzt ein einziger Gleichgewichtszustand möglich, bei welchem alle Grenzflächen der einzelnen Schichten der Flüssigkeit concentrische Rotationsellipsoide werden, deren gemeinschaftliche Axe die Gerade ist, um welche das System sich dreht. Die Excentricitäten der einzelnen n-Flächen bestimmen sich durch ein System von n linearen Gleichungen, welches durch die folgende eine repräsentirt ist, in der i alle Werthe von 1 bis n zu durchlaufen hat:

$$\tfrac{5}{3}\sum_{0}^{c_i}\varrho\Delta(c^3)e_i^2 - \sum_{0}^{c_i}\varrho\Delta(c^3e^2) - c_i^5\sum_{c_i+1}^{c_n}\varrho\Delta\left(\frac{e^2}{c^2}\right) = \frac{5c_i^5\vartheta^2}{4\pi f}.$$

Im Folgenden soll nun ϱ eine stetige Function des Polarhalbmessers c sein. Dann verwandelt sich obige Gleichung, wenn wir c_1 und e_1 statt c_n und e_n für die Werthe c und e an der Oberfläche setzen, in die folgende:

$$\tfrac{5}{3}\int_0^c\varrho\, d(c^3).e^2 - \int_0^c\varrho\, d(c^3e^2) - c^5\int_c^{c_1}\varrho\, d\left(\frac{e^2}{c^2}\right) = \frac{5c^5\vartheta^2}{4\pi f}.$$

Die Abplattung $\frac{a-c}{c}$ irgend einer der ellipsoidischen Flüssigkeitsschichten werde mit q bezeichnet; dann ist $\frac{e^2}{c^2}=q\,(2+q)$, also bei dem hier anzustrebenden Grade der Genauigkeit $q=\frac{1}{2}\frac{e^2}{c^2}$. Unsere nächste Aufgabe ist es nun, dieselbe als Function von c zu bestimmen, wenn ϱ als Function von c gegeben ist. Führen wir statt der Excentricität die Abplattung ein, so kommt

$$\tfrac{1}{3}c^2 q\int_0^c \varrho\, d\,(c^3) - \tfrac{1}{5}\int_0^c \varrho\, d\,(c^5 q) - \frac{c^5}{5}\int_c^{c_1} \varrho\, dq = \frac{c^5\,\vartheta^2}{8\pi f}$$

und nach Ausführung der Differentiation

$$c^2 q\int_0^c \varrho\, c^2\, dc - \int_0^c \varrho\, q\, c^4\, dc - \tfrac{1}{5}\int_0^c \varrho\, c^5 \frac{dq}{dc}\, dc - \frac{c^5}{5}\int_c^{c_1} \varrho \frac{dq}{dc}\, dc = \frac{c^5\,\vartheta^2}{8\pi f}.$$

Um q ganz aus den Integralen zu entfernen, differentiiren wir diese Gleichung zweimal nach dem variabeln Polarhalbmesser c. Die erste Differentiation liefert, wenn man zugleich mit c^4 dividirt, um durch die zweite Differentiation das Glied mit ϑ zu entfernen:

$$\frac{2q}{c^3}\int_0^c \varrho\, c^2\, dc + \frac{1}{c^2}\,\frac{dq}{dc}\int_0^c \varrho\, c^2\, dc - \int_c^{c_1} \varrho \frac{dq}{dc}\, dc = \frac{5\,\vartheta^2}{8\pi f}.$$

Die zweite Differentiation liefert

$$7)\qquad \frac{d^2 q}{dc^2} + \frac{2\varrho\, c^2}{\int_0^c \varrho\, c^2\, dc}\,\frac{dq}{dc} + 2\left(\frac{\varrho\, c}{\int_0^c \varrho\, c^2\, dc} - \frac{3}{c^2}\right) q = 0.$$

Es ist dies eine lineare Differentialgleichung in Hinsicht auf q, welche sich auch bei Laplace (*Méc. cél. l.* 3, *n.* 30) in fast ganz gleicher Gestalt findet. Ist ϱ als Function von c gegeben, so werden die Coefficienten derselben auch bekannte Functionen von c; sie ist also dann integrabel und bestimmt somit q als Function von c.

Auf specielle Annahmen über die unbekannte Function ϱ wollen wir hier nicht eingehen (vergl. hierüber die Abhandlung von Lipschitz, Crelle's Journal Bd. 62) und nur noch zeigen, wie sich das Clairot'sche Theorem aus Gleichung 6) ergiebt.

§ 4. Zusammenhang zwischen der Anziehung und Abplattung an der Oberfläche der Erde.

Die Componente der Schwere in einem Punkte der Oberfläche, d. h. der gesammten dort wirkenden Kraft, wie sie sich aus der reinen Anziehung und der Centrifugalkraft zusammensetzt, sind die partiellen Differentialquotienten der folgenden Function U, unter V wieder das Potential verstanden:

$$U = \tfrac{1}{2}\vartheta^2(x^2+y^2) + Vf,$$

oder nach Entwickelung von V, unter r den Radius vector verstanden:

$$U = \tfrac{1}{2}\vartheta^2(x^2+y^2) + f\left\{\frac{M}{r} - \tfrac{1}{5}\frac{P}{r^3} + \tfrac{3}{10}\frac{P(x^2+y^2)}{r^5}\right\},$$

wobei gesetzt ist [vergl. Gleich. 6)]

$$M = \tfrac{4}{3}\pi\int_0^{c_1}\varrho\, d(c^3+ce^2), \quad P = \tfrac{4}{3}\pi\int_0^{c_1}\varrho\, d(c^3e^2).$$

1. Da die freie Oberfläche der Flüssigkeit eine Niveaufläche ist, so muss die Richtung der Schwere oder Gesammtkraft in jedem Punkte derselben auf ihr senkrecht stehen, und wir müssten also, um die ganze Intensität der Schwere in einem Punkte der Oberfläche zu erhalten, U nach der Normalen der Oberfläche in diesem Punkte differentiiren. Statt dessen können wir aber auch U nach r oder dem Radius vector differentiiren, da der Cosinus des Winkels zwischen Normale und Radius vector erst um eine kleine Grösse zweiter Ordnung von der Einheit abweicht. Um U nach der Richtung des Radius vector bequem differentiiren zu können, führen wir in diesen Ausdruck den Winkel φ ein, den der Radius vector mit der xy-Ebene oder der Aequatorealebene macht. Dieser Winkel wird sonst als „verbesserte Breite" bezeichnet und ist für die Erde von der „Breite" oder Polhöhe nur um eine kleine Grösse erster Ordnung verschieden. Wir setzen also $x^2+y^2 = r^2\cos\varphi^2$ und haben darnach

$$U = \tfrac{1}{2}\vartheta^2 r^2\cos\varphi^2 + f\left\{\frac{M}{r} - \tfrac{1}{5}\frac{P}{r^3} + \tfrac{3}{10}\frac{P\cos\varphi^2}{r^3}\right\},$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \vartheta^2 r\cos\varphi^2 - f\left\{\frac{M}{r^2} - \tfrac{3}{5}\frac{P}{r^4} + \tfrac{9}{10}\frac{P\cos\varphi^2}{r^4}\right\}.$$

Um beide Formeln auf die Oberfläche anzuwenden, setzen wir in dem ersten Gliede des eingeklammerten Ausdruckes bezüglich

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{c_1} - \frac{e_1^2\cos\varphi^2}{2c_1^3}; \quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{c_1^2} - \frac{e_1^2\cos\varphi^2}{c_1^4},$$

wie sich aus dem früher (I. Theil, § 1) benutzten Ausdrucke

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{2c^4}\right)$$

ergiebt. In allen übrigen Gliedern, die schon kleine Factoren enthalten, ist r einfach durch c_i zu ersetzen. Deuten wir die Werthe von U und $\frac{\partial U}{\partial r}$ für die Oberfläche mit U_{c_1} und $\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{c_1}$ an, so ist demnach

$$U_{c_1} = \tfrac{1}{2}\vartheta^2 c_1{}^2 \cos\varphi^2 + f\left\{\frac{M}{c_1} - \tfrac{1}{5}\frac{P}{c_1{}^3} - \frac{M e_1{}^2 \cos\varphi^2}{2 c_1{}^3} + \tfrac{3}{10}\frac{P\cos\varphi^2}{c_1{}^3}\right\},$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{c_1} = \vartheta^2 c_1 \cos\varphi^2 - f\left\{\frac{M}{c_1{}^2} - \tfrac{3}{5}\frac{P}{c_1{}^4} - \frac{M e_1{}^2 \cos\varphi^2}{c_1{}^4} + \tfrac{9}{10}\frac{P\cos\varphi^2}{c_1{}^4}\right\}.$$

Aus dem letzten Ausdrucke müssen wir P wegschaffen. Die Bedingung, dass U_{c_1} für die ganze Oberfläche constant sein muss, erfordert die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\vartheta c_1{}^2 + f\left(-\frac{M e_1{}^2}{2 c_1{}^3} + \tfrac{3}{10}\frac{P}{c_1{}^3}\right) = 0.$$

Hieraus folgt für P

$$\frac{P}{c_1{}^3} f = -\tfrac{5}{3}\vartheta^2 c_1{}^2 + \tfrac{5}{3}\frac{M e_1{}^2 f}{c_1{}^3}.$$

Demgemäss erhalten wir

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{c_1} = -\left[\vartheta^2 c_1 + \frac{Mf}{c_1{}^2}\left(1 - \frac{e_1{}^2}{c_1{}^2}\right)\right] + \left[\tfrac{5}{2}\vartheta^2 c_1 - \tfrac{1}{2}\frac{M e_1{}^2 f}{c_1{}^4}\right]\cos\varphi^2.$$

Bezeichnet nun g den absoluten Werth der Intensität der Schwere, so ist

$$g = -\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{c_1}.$$

Daraus folgt

$$g = A - B\cos\varphi^2,$$

wo

$$A = \vartheta^2 c_1 + \frac{Mf}{c_1{}^2}\left(1 - \frac{e_1{}^2}{c_1{}^2}\right), \quad B = 2\tfrac{1}{2}\vartheta^2 c_1 - \tfrac{1}{2}\frac{M e_1{}^2 f}{c_1{}^4}.$$

Da wegen der Kleinheit der Aenderungen der Schwere an der Erdoberfläche B klein sein muss gegen A, so kann man bei Vernachlässigung der sehr kleinen Grössen zweiter Ordnung statt φ die „Breite“ oder Polhöhe ψ schreiben:

$$g = A - B\cos\psi^2.$$

In diesem Resultate spricht sich der bekannte Satz aus, dass die Abnahme der Schwere von den Polen nach dem Aequator hin proportional dem Quadrate des Cosinus der Breite ist.

2. Ist g_p und g_q bezüglich die Intensität der Schwere an den Polen und am Aequator, so ist

$$g_p = A, \quad g_q = A - B.$$

Hiernach haben wir also

$$g_p = \vartheta^2 c_1 + \frac{Mf}{c_1{}^2}\left(1 - \frac{e_1{}^2}{c_1{}^2}\right), \quad g_p - g_q = \tfrac{5}{2}\vartheta^2 c_1 - \tfrac{1}{2}\frac{M e_1{}^2 f}{c_1{}^4}.$$

Wir wollen hier für $\frac{e_1^2}{c_1^2}$ wieder den sehr nahe gleichen Ausdruck $2q_1$ setzen, unter q_1 die Abplattung $\frac{a_1 - c_1}{c_1}$ verstanden. Dann erhalten wir aus der letzten Gleichung

$$q_1 = \frac{2\frac{1}{2}\vartheta^2 c_1 - (g_p - g_q)}{\frac{Mf}{c_1^2}}.$$

Für den Nenner dieses Ausdruckes, der in erster Annäherung die Schwere an der Erdoberfläche darstellt, können wir, da im Zähler kleine Grössen stehen, an sich beliebig g_p oder g_q, oder irgend einen mittlern Werth von g setzen. Am genauesten aber verfährt man, wie es scheint, in folgender Weise. Man setzt in die erste der obigen zwei Gleichungen für q_1 den Näherungswerth ein, den man erhält, wenn man im Nenner des vorigen Ausdruckes $\frac{Mf}{c_1^2}$ einfach durch g_p ersetzt. Dieselbe liefert dann bei angenäherter Entwickelung

$$\frac{Mf}{c_1^2} = g_p + 4\vartheta^2 c_1 - (g_p - g_q).$$

Diesen Ausdruck setzen wir jetzt in die obige Formel für die Abplattung der Erde ein. Dann haben wir endlich

$$8) \qquad q_1 = \frac{2\frac{1}{2}\vartheta^2 c_1 - (g_p - g_q)}{g_q + 4\vartheta^2 c_1 - (g_p - g_q)}.$$

Für den Polarhalbmesser c_1 können wir wegen des sehr kleinen Factors ϑ^2 auch den mittlern Erdhalbmesser oder den Halbmesser a_1 des Aequators setzen. Schreibt man, was ohne erheblichen Fehler geschehen kann, statt des Nenners blos g_q, so hat man

$$q_1 = \frac{2\frac{1}{2}\vartheta^2 a_1 - (g_p - g_q)}{g_q}.$$

In dieser Gestalt wurde das Theorem von Clairaut entdeckt und lautet in Worten: Die Abplattung der Erde, vermehrt um den Quotienten aus dem Ueberschusse der Schwere an den Polen über die am Aequator, und der Schwere am Aequator ist gleich dem $2\frac{1}{2}$fachen des Quotienten aus der Centrifugalkraft am Aequator und der Schwere am Aequator.

Die letzte Gleichung liefert für die Abplattung der Erde den Werth $\frac{1}{290}$, während sich aus Gleichung 8) der Werth $\frac{1}{293}$ ergiebt.

Kleinere Mittheilungen.

I. Aufgabe.

Nach der vierten meiner Vorlesungen über Homographie, welche von einem neuen Uebertragungsprincip handelt, entspricht jedem Punktepaare auf der Fundamentallinie eindeutig ein Punkt p in der Ebene. Wenn das Punktepaar auf der Fundamentallinie fortrückt, ohne dass das von demselben begrenzte Stück der Fundamentallinie sich der Grösse nach ändert, so soll der geometrische Ort des Punktes p gefunden werden.

Für einen ganz speciellen Fall ist die Auflösung der Aufgabe nach der vierten Vorlesung bekannt. Bildet nämlich das gegebene Punktepaar, welches auf der Fundamentallinie fortrücken soll, einen Doppelpunkt, so entsprechen den Doppelpunkten auf der Fundamentallinie in der Ebene Punkte, welche auf der Directrix liegen. In diesem Falle beschreibt der Punkt p also einen Kegelschnitt. Wir werden nun untersuchen, ob im allgemeinen Falle eine Aenderung eintritt.

Das gegebene Punktepaar, welches auf der Fundamentallinie das gegebene Stück a begrenzen soll, nehmen wir der Einfachheit wegen als das Fundamentalpunktepaar, dessen Gleichungen in der Normalform gegeben sein mögen:

$$T_0 = 0, \quad T_1 = 0.$$

Die Punkte dieses Paares gehen nach der Verrückung um die Entfernung r in zwei andere über, deren Gleichungen nach 32) der ersten Vorlesung von der Form sind:

$$T_0 - \lambda_0 T_1 = 0, \quad T_0 - \lambda_1 T_1 = 0,$$

$$\lambda_0 = \frac{r}{r-a}, \quad \lambda_1 = \frac{r+a}{r}.$$

Nehmen wir nun an, dass A, B, C gegebene lineare Ausdrücke in Punktcoordinaten des Punktes p seien, so müssen dieselben der Gleichung genügen:

$$A + B\lambda + C\lambda^2 = 0,$$

wenn man darin für λ setzt λ_0 und λ_1.

Wir haben demnach zur Bestimmung des Punktes p die beiden, die willkürliche Grösse r involvirenden Relationen:

$$A(r-a)^2+Br(r-a)+Cr^2=0,$$
$$Ar^2+Br(r+a)+C(r+a)^2=0.$$

Sie stellen zwei Tangenten der Directrix dar, welche sich in dem Punkte p schneiden.

Die Elimination von r aus den beiden Gleichungen ergiebt:

$$(A+B+C)^2-(B^2-4\,AC)=0,$$

somit einen Kegelschnitt als geometrischen Ort des Punktes p.

Da die letzte Gleichung linear zusammengesetzt ist aus der Gleichung

$$B^2-4\,AC=0$$

der Directrix und dem Quadrate der Gleichung einer geraden Linie

$$A+B+C=0,$$

so beweist dieses, dass der Kegelschnitt, welcher der geometrische Ort des Punktes p ist, die Directrix immer in zwei Punkten berührt.

Man kann darin einen Widerspruch finden. Denn der Berührungspunkt des Kegelschnittes und der Directrix entspricht, weil er auf dem Kegelschnitte liegt, einem Punktepaare auf der Fundamentallinie, welches das Stück a begrenzt; er entspricht zugleich einem Doppelpunkte der Fundamentallinie, weil er der Directrix angehört. Dieser Widerspruch wird allein beseitigt, wenn der Doppelpunkt und das von dem Kegelschnitte herrührende Punktepaar beide im Unendlichen liegen. Nun haben wir aber zwei Berührungspunkte des Kegelschnittes und der Directrix. Da für den zweiten Berührungspunkt dasselbe gilt, so müssen die beiden Berührungspunkte zusammenfallen und die gerade Linie $A+B+C=0$ Tangente der Directrix sein.

Hieraus schliessen wir endlich, dass der geometrische Ort des Punktes p ein Kegelschnitt ist, welcher die Directrix in einem Punkte vierpunktig berührt, und dieser Berührungspunkt entspricht auf der Fundamentallinie dem Doppelpunkte im Unendlichen.

Dasselbe ergiebt sich analytisch aus einer der mit r behafteten Gleichungen, wenn man $r=\infty$ setzt.

Von einem andern, unverändert auf der Fundamentallinie fortrückenden Punktepaare lässt sich Gleiches sagen. Daraus ziehen wir den Schluss:

Wenn man auf der Directrix den Punkt fixirt, der dem auf der Fundamentallinie unendlich entfernten Punkte entspricht, und einen beliebigen Kegelschnitt construirt, der die Directrix in jenem Punkte vierpunktig berührt, so entsprechen den Punkten des Kegelschnittes Punktepaare auf der Fundamentallinie, deren jedes dasselbe Stück auf der Fundamentallinie begrenzt.

O. Hesse.

II. Ueber Flächen von gegebenen Eigenschaften.

Eine im Punkte xyz einer Fläche auf letzterer errichtete Normale schneidet die Horizontalebene xy unter einem Neigungswinkel ν, welcher bekanntlich durch die Formel

$$1) \qquad cot^2 \nu = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

bestimmt wird. Ist z eine explicite Function von x, y, und wird dem Winkel ν irgend ein constanter Werth ertheilt, so gilt die vorige Gleichung für die Horizontalprojectionen aller derjenigen Flächenpunkte, deren Normalen unter jenem constanten Winkel gegen den Horizont geneigt sind, d. h. die Gleichung 1) ist die Gleichung der Horizontalprojection der sogenannten Curve isokliner Normalen, welche jenem Winkel entspricht. Diese Betrachtung lässt sich auf folgende Weise umkehren. In der Gleichung

$$cot \nu = \psi(x, y)$$

bezeichne $\psi(x, y)$ eine gegebene Function von x und y; zu jedem constanten ν gehört dann die im Voraus bestimmte Curve, und die Aufgabe ist nun, die entsprechende Fläche zu finden. Mit anderen Worten, es handelt sich um die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$2) \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = [\psi(x, y)]^2;$$

einige Bemerkungen hierüber sind vielleicht nicht überflüssig.

Der vorstehenden Gleichung genügt man zunächst durch die Annahme

$$3) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \psi(x, y) \cos \omega, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \psi(x, y) \sin \omega,$$

worin ω einen unbekannten, von x und y unabhängigen Bogen bezeichnet. Differentiirt man die erste dieser Gleichungen nach y, die zweite nach x, so erhält man linker Hand dasselbe, mithin ist durch Vergleichung der rechten Seiten, wenn für $\psi(x, y)$ kurz ψ geschrieben wird,

$$4) \qquad \cos \omega . \frac{\partial \omega}{\partial x} + \sin \omega . \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial l \psi}{\partial y} \cos \omega - \frac{\partial l \psi}{\partial x} \sin \omega.$$

Diese lineare partielle Differentialgleichung lässt sich nach dem bekannten allgemeinen Verfahren auf die beiden simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückführen

$$\cos \omega . dy - \sin \omega . dx = 0,$$

$$\cos \omega . d\omega - \left(\frac{\partial l \psi}{\partial y} \cos \omega - \frac{\partial l \psi}{\partial x} \sin \omega\right) dx = 0$$

oder

5) $$\frac{dy}{dx} = \tan\omega, \quad \frac{d\omega}{dx} = \frac{\partial l\psi}{\partial y} - \frac{\partial l\psi}{\partial x}\tan\omega.$$

Die Integrale derselben mögen sein

$$\varphi(x, y, \omega) = c, \quad \Phi(x, y, \omega) = C,$$

das allgemeine Integral von 4) ist dann

6) $$C = F(c) \text{ oder } \Phi(x, y, \omega) = F[\varphi(x, y, \omega)].$$

Hieraus ergeben sich ω, $\cos\omega$, $\sin\omega$, und dann ist nach Nr. 3)

7) $$z = \int \psi \,.\, \cos\omega\, \partial x = \int \psi \,.\, \sin\omega\, \partial y,$$

wobei sich die Integrationen partiell auf x, resp. y beziehen.

Ein Beispiel hierzu bietet die Annahme

$$\cot\nu = \frac{h}{Ax + By},$$

bei welcher [wie überhaupt im Falle $\cot\nu = f(Ax + By)$] die Horizontalprojectionen der Curven isokliner Normalen eine Schaar von parallelen Geraden bilden. Aus Nr. 4) wird dann

8) $$\cos\omega \,.\, \frac{\partial\omega}{\partial x} + \sin\omega \,.\, \frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{A\sin\omega - B\cos\omega}{Ax + By}$$

und die Gleichungen 5) sind

9) $$\frac{dy}{dx} = \tan\omega, \quad \frac{d\omega}{dx} = \frac{A\tan\omega - B}{Ax + By}.$$

Giebt man der zweiten Gleichung die Form

$$Ax + By = \frac{A\tan\omega - B}{\omega'},$$

differenzirt sie nach x und ersetzt linker Hand $\frac{dy}{dx}$ durch $\tan\omega$, so erhält man sehr einfach

$$\omega'' = \omega'^2 \tan\omega$$

und hieraus nacheinander

$$\omega' = \frac{1}{c\,.\,\cos\omega}, \quad \sin\omega = \frac{x + c_1}{c},$$

mithin nach der zweiten Gleichung in 9)

$$\frac{Ax + By}{A\sin\omega - B\cos\omega} = c.$$

Substituirt man diesen Werth in die vorhergehende Gleichung und setzt $c_1 = BC$, so wird

$$\frac{x\cos\omega + y\sin\omega}{A\sin\omega - B\cos\omega} = C.$$

Das Integral der partiellen Differentialgleichung 7) ist demnach

10) $$\frac{x\cos\omega + y\sin\omega}{A\sin\omega - B\cos\omega} = F\left(\frac{Ax + By}{A\sin\omega - B\cos\omega}\right).$$

Um für einen einfachen Fall die Rechnung völlig auszuführen, nehmen wir $F(u) = u$, $A = \cos\gamma$, $B = \sin\gamma$; die beiden Auflösungen der Gleichung

$$x \cos\omega + y \sin\omega = x \cos\gamma + y \sin\gamma$$

sind dann

$$\omega = \gamma \text{ und } \omega = 2 \arctan \frac{y}{x} - \gamma.$$

Die erste Auflösung liefert nach Nr. 3), wenn k_1 die Integrationsconstante bezeichnet,

$$z = \int \frac{h \cos\gamma}{x \cos\gamma + y \sin\gamma} \partial x = hl\left(\frac{x \cos\gamma + y \sin\gamma}{k_1}\right)$$

oder in homogener Form

$$z = hl\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Die zweite Auflösung giebt

$$\begin{aligned} z &= \int \frac{h}{x \cos\gamma + y \sin\gamma} \cdot \frac{(x^2 - y^2)\cos\gamma + 2xy \sin\gamma}{x^2 + y^2} \partial x \\ &= hl\left[\frac{x^2 + y^2}{k_2(x \cos\gamma + y \sin\gamma)}\right] \end{aligned}$$

oder in homogener Form

$$z = hl\left(\frac{x^2 + y^2}{ax + by}\right).$$

Die anfängliche allgemeine Aufgabe lässt sich auch mit Hilfe von Cylindercoordinaten behandeln. Für $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$ geht nämlich die Gleichung 1) in die folgende über

$$\cot^2\nu = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2,$$

und wenn nun eine Gleichung von der Form

$$\cot\nu = \psi(r, \theta)$$

gegeben ist, so handelt es sich, analog Nr. 2), um die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$11)\qquad \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = [\psi(r, \theta)]^2.$$

Aus dieser erhält man, wenn

$$12)\qquad \frac{\partial z}{\partial r} = \psi(r, \theta) \cos\omega, \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = r\psi(r, \theta) \sin\omega$$

gesetzt und im Uebrigen wie früher verfahren wird,

$$13)\qquad r \cos\omega \frac{\partial \omega}{\partial r} + \sin\omega \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{\partial l\psi}{\partial \theta} \cos\omega - \left(r \frac{\partial l\psi}{\partial r} + 1\right) \sin\omega.$$

Diese partielle Differentialgleichung zerfällt in die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

14) $$r\frac{d\theta}{dr}=\tan\omega,\quad r\frac{d\omega}{dr}=\frac{\partial l\psi}{\partial\theta}-\left(r\frac{\partial l\psi}{\partial r}+1\right)\tan\omega,$$

deren Integrale

$$\varphi(r,\theta,\omega)=c,\quad \Phi(r,\theta,\omega)=C$$

sein mögen. Das allgemeine Integral von Nr. 13) ist dann

15) $$C=F(c)\ \text{oder}\ \Phi(r,\theta,\omega)=F[\varphi(r,\theta,\omega)]$$

und schliesslich geben die Gleichungen 12)

16) $$z=\int\psi.\cos\omega\,\partial r=\int r\psi.\sin\omega\,\partial\theta.$$

Wenn ψ eine Function von r allein ist, so bilden die Horizontalprojectionen der Curven isokliner Normalen eine Schaar concentrischer Kreise, und die Gleichungen 13) und 14) werden dann weit einfacher. Z. B. für

$$\cot\nu=\frac{a}{r}$$

gehen die Gleichungen 14) über in

$$r\frac{d\theta}{dr}=\tan\omega,\quad r\frac{d\omega}{dr}=0;$$

die zweite liefert $\omega=c$ und nachher die erste

$$\theta=lr.\tan c-C\ \text{oder}\ lr.\tan\omega-\theta=C;$$

das Integral der partiellen Differentialgleichung

$$r\cos\omega\frac{\partial\omega}{\partial r}+\sin\omega\frac{\partial\omega}{\partial\theta}=0$$

ist daher

$$lr.\tan\omega-\theta=F(\omega).$$

Dem speciellen Falle $F(\omega)=lb.\tan\omega$ entspricht die Auflösung

$$\tan\omega=\frac{\theta}{l\left(\frac{r}{b}\right)},\quad z=\int\frac{a}{r}\cos\omega\,\partial r=a\sqrt{\left[l\left(\frac{r}{b}\right)\right]^2+\theta^2}.$$

Ein bemerkenswerthes Resultat giebt die Annahme

$$\cot\nu=\frac{r}{a}.$$

Die Gleichungen 14) sind dann

$$r\frac{d\theta}{dr}=\tan\omega,\quad r\frac{d\omega}{dr}=-2\tan\omega,$$

aus denen man zunächst $2\,d\theta+d\omega=0$ oder

$$2\theta+\omega=c$$

erhält und ausserdem durch Integration der zweiten Gleichung

$$r^2\sin\omega=C.$$

Das Integral der partiellen Differentialgleichung

$$r \cos\omega \frac{\partial\omega}{\partial r} + \sin\omega \frac{\partial\omega}{\partial\theta} = -2 \sin\omega$$

ist hiernach

$$r^2 \sin\omega = F(\omega + 2\theta).$$

Die specielle Wahl $F(\omega + 2\theta) = b^2 \sin(\omega + 2\theta)$ liefert

$$\tan\omega = \frac{b^2 \sin 2\theta}{r^2 - b^2 \cos 2\theta}, \quad z = \int \frac{r}{a} \cos\omega \, \partial r,$$

d. i.

$$z = \frac{\sqrt{r^4 - 2b^2r^2\cos 2\theta + b^4}}{2a}$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten

$$4a^2z^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) + b^4.$$

Wie eine leichte Discussion zeigt, besteht jede der beiden Verticalspuren dieser Fläche aus zwei sich schneidenden Parabeln; die Horizontalschnitte sind Cassini'sche Curven, die für $z < \frac{b^2}{a}$ zwei geschlossene Blätter bilden, für $z = \frac{b^2}{a}$ in Lemniscaten übergehen und für $z > \frac{b^2}{a}$ zu Ovalfiguren werden; die Inflexionspunkte der letzteren haben die Lemniscate $r^2 = -b^2 \cos 2\theta$ zur Horizontalprojection.

Schlömilch.

III. Sätze über die Darstellbarkeit einer Zahl als Summe von Quadratzahlen.

In den folgenden Sätzen bedeuten λ, μ, ν die Null und alle ganzen Zahlen.

I. Die Zahlen von der Form

$$(8\lambda + 7)4^\mu$$

sind diejenigen, welche sich nicht als Summe von weniger als vier Quadratzahlen darstellen lassen.

II. Die Zahlen von der Form

$$(4\lambda + 3)2^\mu$$

und alle, welche durch Multiplication von je zwei solchen Zahlen, die relative Primzahlen sind, entstehen, sind diejenigen, welche sich nicht als Summe von weniger als drei Quadratzahlen darstellen lassen.

III. Die Zahlen von der Form

$$[4(\lambda^2 + \nu^2 + \nu) + 1]2^\mu$$

sind diejenigen, welche sich als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen lassen.

IV. Multiplicirt man je n Zahlen von der Form

$$4(\lambda^2 + \iota^2 + \nu) + 1,$$

die nicht alle einander gleich sind, untereinander und noch mit 2^{μ}, so erhält man diejenigen Zahlen, welche auf $n$fache Weise als Summe von zwei Quadratzahlen darstellbar sind.

V. Die Gleichung

$$x^2+y^2=2z^2$$

wird in ganzen Zahlen gelöst durch die Werthe

$$x=2\lambda\mu+(\lambda^2-\mu^2),\quad y=2\lambda\mu-(\lambda^2-\mu^2),\quad z=\lambda^2+\mu^2.$$

Waren in Mecklenburg. V. Schlegel.

IV. Construction für die Krümmungsmittelpunkte von Ellipsen und Hyperbeln.

Es sei C der Mittelpunkt einer Ellipse, P ein Peripheriepunkt derselben, durch welchen eine Normale gelegt ist, die in M die grosse, in N die kleine Axe schneidet, und welche von der in C auf CP errichteten Senkrechten in Q getroffen wird; trägt man nun von M nach N hin die Strecke $MR=NQ$ ab, so ist R der zum Punkte P gehörende Krümmungsmittelpunkt.

Für die Hyperbel bleibt die Construction im Wesentlichen dieselbe; für die Parabel wird sie selbstverständlich illusorisch.

Die Aufsuchung des Beweises möge dem Leser überlassen bleiben, da dieselbe keine Schwierigkeiten darbietet.

Tarnowitz. Dr. Geisenheimer,
Bergschul-Director.

Cantor, Dr. **Moritz**, die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst. Eine historisch-mathematische Untersuchung. Mit 5 lithogr. Tafeln. gr. 8. geh. n. ℳ 6. —

Clebsch, **Alfred**, **Vorlesungen über Geometrie.** Bearbeitet und herausgegeben von Dr. Ferdinand Lindemann. Mit einem Vorwort von Felix Klein. Ersten Bandes erster Theil. gr. 8. geh. n. ℳ 11. 20.

Curtze, **Maximilian**, **Reliquiae Copernicanae.** Nach den Originalen in der Universitäts-Bibliothek zu Upsala. Mit einem Holzschnitt und einer lithographirten Tafel. gr. 8. geh. n. ℳ 1. 60.

Fiedler, Dr. **Wilh.**, Professor am eidgenöss. Polytechnikum zu Zürich, **die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage.** Für Vorlesungen an technischen Hochschulen und zum Selbststudium. Zweite Auflage. Mit 260 Holzschnitten und 12 lithogr. Tafeln. gr. 8. geh. n. ℳ 18. —

Gordan, Dr. **Paul**, ordentl. Professor der Mathematik an der Universität zu Erlangen, **über das Formensystem binärer Formen.** gr. 8. geh. n. ℳ 2. —

Hankel, **Herm.**, weil. Professor in Tübingen, **Vorlesungen über die Elemente der projectivischen Geometrie.** gr. 8. geh. n. ℳ 7. —

Müller, Dr. **Hubert**, Oberlehrer am kaiserl. Lyceum in Metz, **Leitfaden der ebenen Geometrie** mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule. Zweiter Theil: Die Kegelschnitte und die Elemente der neueren Geometrie. Mit vielen Figuren im Text. gr. 8. geh. n. ℳ 1. 60.

Narr, Dr. **F.**, Docent der Physik an der Universität München, **Einleitung in die theoretische Mechanik.** Mit 35 Figuren in Holzschnitt. gr. 8. geh. n. ℳ 6. —

Neumann, Dr. **Carl**, Professor an der Universität zu Leipzig. **Vorlesungen über die mechanische Theorie der Wärme.** gr. 8. Geh. n. ℳ 7. 20.

Schlegel, **Victor**, Oberlehrer am Gymnasium zu Waren, **die Elemente der modernen Geometrie und Algebra.** Nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre und mit Berücksichtigung verwandter Methoden dargestellt. gr. 8. geh. n. ℳ 7. —

Steiner's, **Jacob**, Vorlesungen über synthetische Geometrie. I. Theil. A. u. d. T.: **Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung.** Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Steiner's bearbeitet von Dr. C. F. Geiser, Professor am Polytechnikum zu Zürich. Zweite Auflage. gr. 8. geh. n. ℳ 6. —

Waltenhofen, **A. von**, k. k. ordentl. Professor der Physik an der deutschen technischen Hochschule zu Prag, **Grundriss der allgemeinen mechanischen Physik.** Die wichtigsten Lehrsätze der Mechanik fester, flüssiger und gasförmiger Körper, der mechanischen Wärmetheorie und der Potentialtheorie nebst einer mathematischen Einleitung. Für Studirende an Hochschulen und für Lehramtscandidaten. gr. 8. geh. n. ℳ 8. —

Wüllner, Dr. **Adolf**, Professor der Physik an der kgl. polytechnischen Schule zu Aachen. **Lehrbuch der Experimentalphysik.** Dritte vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. 4 Bände. gr. 8. geh. n. ℳ 41. —

INHALT.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.