NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Zeitschrift für Mathematik und Physik

Verlag: Teubner

Jahr: 1876

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 MATH I, 755:21

Werk Id: PPN599415665_0021

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN599415665_0021|LOG_0008

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

I

Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte.

Von

Dr. Otto Hesse,
Professor am Polytechnikum zu München.

Dreiundzwanzigste Vorlesung.

Harmonische Pole und harmonische Polaren. Tangentenpaare und Punktepaare eines Kegelschnittes.

Wir haben in der siebenzehnten Vorlesung die Bedingungsgleichung 9) für harmonische Pole eines gegebenen Kegelschnittes $f=0$ abgeleitet oder, indem wir den einen Pol 0 als gegeben betrachteten, den geometrischen Ort des andern Poles als die Polare:

$$1)\qquad xf'(x_0)+yf'(y_0)+zf'(z_0)=0$$

des gegebenen Punktes 0 festgestellt.**

---

* In dem Hesse'schen Nachlasse fanden sich die obigen beiden Vorlesungen, welche den Schluss des Art. I im Jahrg. 1874 dies. Zeitschr. bilden, soweit druckfertig vor, dass nur in formaler Beziehung Einiges zu ändern war. Die Durchsicht hat Herr Prof. Gundelfinger in Tübingen freundlichst übernommen.

P. d. B. R.

** In der zwölften Vorlesung wurden die 60 Pascal'schen Sechsecke vorgeführt, welche dieselben sechs Ecken haben. Drei von den ihnen entsprechenden Pascal'schen Linien wurden durch die Symbole r, drei andere durch die Symbole ϱ ausgedrückt, und es ergab sich, dass die drei Linien r sich in einem Punkte δ und dass die drei Linien ϱ sich in einem Punkte d schneiden. Am Ende der Vorlesung wurde nur historisch angegeben, dass dieses Punktepaar δ und d ein Polepaar sei des den 60 Pascal'schen Sechsecken umschriebenen Kegelschnittes $k=0$. Die Richtigkeit dieser Angabe können wir jetzt prüfen, wenn wir die in der Anmerkung aufgeführte Kegelschnitt-Gleichung $k=0$ zu Grunde legen:

$$r^2+r'^2+r''^2-\varrho^2-\varrho'^2-\varrho''^2=0,$$

Rücksichtlich desselben Kegelschnittes, in der reciproken Form $F=0$ ihrer Gleichung, wurde alsdann in der neunzehnten Vorlesung die Bedingung 9) für harmonische Polaren oder, indem wir eine Polare 0 als gegeben annehmen, die Gleichung ihres Poles entwickelt:

$$2)\qquad uF'(u_0)+vF'(v_0)+wF'(w_0)=0.$$

Jede von diesen beiden Gleichungen entspringt aus der andern unter Vermittelung der Gleichung $f_{01}=F_{01}$, welche mit Weglassung des Index 1 in 10) der neunzehnten Vorlesung ausführlich dargelegt worden ist. Erinnern wir uns nun der Bedeutung der Function F_{01} in 7) der genannten Vorlesung und ersetzen die Coordinaten der Polare nach den bekannten Relationen durch die Coordinaten ihrer Pole, so können wir die Gleichung 1) der Polare des Punktes 0 auch in Determinantenform so wiedergeben:

$$1^*)\qquad \begin{vmatrix} e_{00}, & e_{01}, & e_{02}, & x_0 \\ e_{10}, & e_{11}, & e_{12}, & y_0 \\ e_{20}, & e_{21}, & e_{22}, & z_0 \\ x, & y, & z, & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Ebenso ergiebt 7) der siebenzehnten Vorlesung folgende Form der Gleichung 2) des Poles einer durch die Coordinaten u_0, v_0, w_0 gegebenen gerade Linie:

$$2^*)\qquad \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & u_0 \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & v_0 \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & w_0 \\ u, & v, & w, & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Dieselbe Form 1) der Bedingungsgleichung für harmonische Pole des Kegelschnittes behält die Gleichung auch bei, wenn man an Stelle der

---

und bemerken, dass in derselben sowohl die Symbole r, als die Symbole ϱ lineare homogene Ausdrücke der variabelen Punktcoordinaten x, y, z bedeuten.

Der Ausdruck r lässt sich nämlich so darstellen:

$$r=x\frac{\partial r}{\partial x}+y\frac{\partial r}{\partial y}+z\frac{\partial r}{\partial z},$$

und wir wollen annehmen, dass r in (r) übergehe, wenn man in demselben für x, y, z setzt x_0, y_0, z_0, dass also sei

$$(r)=x_0\frac{\partial r}{\partial x}+y_0\frac{\partial r}{\partial y}+z_0\frac{\partial r}{\partial z}.$$

Das Gleiche soll auch gelten für die übrigen Symbole r und ϱ.

Bilden wir alsdann nach Vorschrift von 1) die Bedingungsgleichung für harmonische Pole des vorliegenden Kegelschnittes, so erhalten wir

$$r(r)+r'(r')+r''(r'')-\varrho(\varrho)-\varrho'(\varrho')-\varrho''(\varrho'')=0.$$

Diese Gleichung wird aber erfüllt, wenn wir unter x, y, z die Coordinaten des Punktes δ verstehen, in welchem sich die drei Linien r schneiden, und x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Punktes d sind, in welchem sich die drei Linien ϱ schneiden; denn jedes einzelne Glied der Gleichung verschwindet unter dieser Annahme.

homogenen rechtwinkligen Coordinaten x, y, z homogene Dreiecks-coordinaten X, Y, Z einführt durch die Substitutionen:

$$3)\qquad \begin{aligned} x &= \alpha_0 X + \alpha_1 Y + \alpha_2 Z, \\ y &= \beta_0 X + \beta_1 Y + \beta_2 Z, \\ z &= \gamma_0 X + \gamma_1 Y + \gamma_2 Z, \end{aligned}$$

durch welche die Function f übergehen mag in:

$$4)\qquad f(x, y, z) = \varphi(X, Y, Z).$$

Denn differentiiren wir diese Gleichung nach den Variabelen X, Y, Z, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \alpha_0 f'(x) + \beta_0 f'(y) + \gamma_0 f'(z) &= \varphi'(X), \\ \alpha_1 f'(x) + \beta_1 f'(y) + \gamma_1 f'(z) &= \varphi'(Y), \\ \alpha_2 f'(x) + \beta_2 f'(y) + \gamma_2 f'(z) &= \varphi'(Z), \end{aligned}$$

und wenn wir mit X_0, Y_0, Z_0 die Dreieckscoordinaten des durch seine rechtwinkligen Coordinaten x_0, y_0, z_0 gegebenen Punktes 0 bezeichnen, so erhalten wir nach Multiplication der Gleichungen mit diesen Coordinaten durch Addition

$$5)\qquad xf'(x_0) + yf'(y) + zf'(z_0) = X_0\varphi'(Y) + Y_0\varphi'(Y) + Z_0\varphi'(Z).$$

Es wird also

$$1^{**})\qquad X\varphi'(X_0) + Y\varphi'(Y_0) + Z\varphi'(Z_0) = 0$$

die Bedingungsgleichung sein für ein Polepaar des durch Dreieckscoordinaten ausgedrückten Kegelschnittes $\varphi(X, Y, Z) = 0$.

Aus dieser Gleichung lassen sich nun die Dreieckscoordinaten U_0, V_0, W_0 der Polare des Punktes 0 abnehmen: $\frac{1}{2}\varphi'(X_0) = U_0$, $\frac{1}{2}\varphi'(Y_0) = V_0$, $\frac{1}{2}\varphi'(Z_0) = W_0$, und allgemein die Relationen zwischen den Coordinaten X, Y, Z eines beliebigen Poles und den Coordinaten U, V, W seiner Polare in den Dreieckssysteme aufstellen:

$$6)\qquad \tfrac{1}{2}\varphi'(X) = U, \quad \tfrac{1}{2}\varphi'(Y) = V, \quad \tfrac{1}{2}\varphi'(Z) = W.$$

Bezeichnen wir nun mit $\Phi(U, V, W)$ die reciproke Function von $\varphi(X, Y, Z)$, so haben wir die Gleichung:

$$7)\qquad \varphi(X, Y, Z) = \Phi(U, V, W),$$

welche die oben angegebenen Substitutionen zu einer identischen machen.

Hieraus ist ersichtlich, dass $\Phi(U, V, W) = 0$ die Gleichung unseres Kegelschnittes ist, ausgedrückt durch Liniencoordinaten des Dreieckssystems, und dass man die mit 6) äquivalenten Relationen hat:

$$8)\qquad \tfrac{1}{2}\Phi'(U) = X, \quad \tfrac{1}{2}\Phi'(V) = Y, \quad \tfrac{1}{2}\Phi'(W) = Z.$$

Benützen wir endlich die angegebenen sechs Relationen 6) und 8), um die Bedingungsgleichung 1**) für harmonische Pole durch Liniencoordinaten des Dreieckssystems auszudrücken, so finden wir:

$$2^{**})\qquad U\Phi'(U_1) + V\Phi'(V_1) + W\Phi'(W_1) = 0,$$

die Bedingung für harmonische Polaren des Kegelschnittes $\Phi = 0$, weil nach einem Satze der neunzehnten Vorlesung die Polaren von harmonischen Polen des Kegelschnittes harmonische Polaren sind.

Ebenso wenig, als sich die Form der Bedingungsgleichung 1) für harmonische Pole oder der Bedingungsgleichung 2) für harmonische Polaren ändert, wenn die Kegelschnitt-Gleichung auf ein Dreieckssystem bezogen ist, ändern sich die Formen der Gleichungen 1*) und 2*). An Stelle der Grössen e und a treten nur resp. die Coefficienten in Φ und φ ein.

Wir nehmen hieraus die Gelegenheit, auf die Anmerkung in der elften Vorlesung zurückzukommen, nach welcher

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=0,$$
$$U=0,\quad V=0,\quad W=0$$

die Gleichungen von drei Linienpaaren sind, welche sich in drei Punkten einer geraden Linie schneiden, wenn man identisch hat

$$U=\tfrac{1}{2}\varphi'(X),\quad V=\tfrac{1}{2}\varphi'(Y),\quad W=\tfrac{1}{2}\varphi'(Z)$$

und unter X, Y, Z lineare Ausdrücke der gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten versteht. Der Beweis ergab sich daraus, dass, wenn man die Coefficienten in der Function φ mit $b_{\varkappa\lambda}$ bezeichnet, die Gleichung

$$\frac{X}{b_{12}}+\frac{Y}{b_{20}}+\frac{Z}{b_{01}}=0$$

sich aus je zwei von den angegebenen correspondirenden Gleichungen zusammensetzen lässt. Damit haben wir zugleich einen Satz von den Kegelschnitten bewiesen. Um ihn kurz auszusprechen, nennen wir **reciproke Dreiecke** eines Kegelschnittes solche, in welchen die Ecken und Seiten des einen die Pole und Polaren der Seiten und Ecken des andern sind. In dieser Voraussetzung stellt sich der angekündigte Satz mit seinem reciproken Satze so dar:

Die correspondirenden Seiten zweier reciproken Dreiecke eines Kegelschnittes schneiden sich in drei Punkten, welche auf einer geraden Linie liegen.

Die Verbindungslinien der correspondirenden Ecken zweier reciproken Dreiecke eines Kegelschnittes schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Die reciproken Dreiecke eines Kegelschnittes können auch zusammenfallen, wodurch sie Poldreiecke des Kegelschnittes werden, von welchen im Folgenden die Rede sein wird.

Wenn man in 1) die Coordinaten des Poles 0 ersetzt durch die Coordinaten seiner Polare und in 2) die Coordinaten der Polare 0 durch die Coordinaten ihres Poles, so erhält man

$$xu_0+yv_0+zw_0=0,$$
$$ux_0+vy_0+wz_0=0,$$

Gleichungen, die folgende charakteristische Eigenschaften von harmonischen Polen und harmonischen Polaren erkennen lassen:

Von den Polaren zweier harmonischen Pole eines Kegelschnittes geht jede durch den Pol der andern.

Von den Polen zweier harmonischen Polaren eines Kegelschnittes liegt jeder auf der Polare des andern.

Richten wir nun unser Augenmerk auf Specialitäten harmonischer Polaren eines gegebenen Kegelschnittes.

Jede gerade Linie, welche durch den Mittelpunkt eines Kegelschnittes geht, heisst Durchmesser. Wenn zwei harmonische Polaren des Kegelschnittes sich in dem Mittelpunkte des Kegelschnittes schneiden, so nennt man sie conjugirte Durchmesser. Der Pol des einen liegt nach dem letztgenannten Satze auf dem andern und beide Pole liegen in dem Unendlichen, weil ihre Polaren durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes gehen. Es ist darum eine charakteristische Eigenschaft der conjugirten Durchmesser, dass jede Sehne des Kegelschnittes, welche parallel geht einem Durchmesser, durch den conjugirten Durchmesser halbirt wird.

Daraus ergiebt sich nun eine leichte Construction der conjugirten Durchmesser eines gegebenen Kegelschnittes. Die Axen des Kegelschnittes sind selbst conjugirte Durchmesser, weil, wie aus der Axengleichung des Kegelschnittes zu ersehen ist, die der einen Axe parallelen Sehnen durch die andere Axe halbirt werden. Sie sind conjugirte Durchmesser, welche aufeinander senkrecht stehen. Es behält die Kegelschnitt-Gleichung auch dieselbe einfache Form, wenn man statt des rechtwinkligen Coordinatensystems der Axen ein schiefwinkliges wählt, dessen Axen conjugirte Durchmesser sind, weil jede Sehne des Kegelschnittes, welche parallel geht der einen Axe des schiefwinkligen Coordinatensystems, durch die andere Axe halbirt wird.

In dem Kreise halbirt jeder Durchmesser alle Sehnen, welche auf ihm senkrecht stehen. Es sind deshalb für den Kreis jede zwei Durchmesser conjugirte Durchmesser, wenn sie aufeinander senkrecht stehen. Der Mittelpunkt des Kreises hat demnach die charakteristische Eigenschaft, dass je zwei gerade Linien, welche sich in ihm senkrecht schneiden, harmonische Polaren des Kreises sind. Der Mittelpunkt des Kegelschnittes hat die hervorgehobene Eigenschaft des Kreismittelpunktes nicht. Denn unter den conjugirten Durchmessern stehen nur die Axen des Kegelschnittes aufeinander senkrecht. Eine Ausnahme davon bildet der in der einundzwanzigsten Vorlesung eingeführte imaginäre Kegelschnitt $u^2+v^2=0$, der zwar nach der Regel 13) der neunzehnten Vorlesung keinen Mittelpunkt hat, für welchen aber jeder beliebige Punkt Mittelpunkt wäre, wenn man die hervorgehobene charakteristische Eigenschaft des Kreismittelpunktes als Definition des Mittelpunktes nehmen wollte. Denn jede zwei aufeinander senkrecht stehenden geraden

Linien sind, wie wir gesehen haben, harmonische Polaren des genannten imaginären Kegelschnittes.

Wenn nun der Mittelpunkt des Kegelschnittes die obengenannte charakteristische Eigenschaft des Kreismittelpunktes nicht hat, so erhebt sich die Frage, ob in dem gegebenen Kegelschnitte sich nicht andere Punkte der bezeichneten Art auffinden lassen? Da aus dem Kegelschnitte ein Kreis wird, wenn die Brennpunkte mit dem Mittelpunkte zusammenfallen, so können möglicherweise die Brennpunkte die verlangte Eigenschaft haben. Und in der That lässt sich dieses auch nachweisen.

Nehmen wir zu diesem Zwecke aus der zweiundzwanzigsten Vorlesung die homogen gemachte Gleichung 8) des Kegelschnittes, auf den Mittelpunkt und seine Axen bezogen:

9) $$(u^2 e^2 - w^2) + (a^2 - e^2)(u^2 + v^2) = 0,$$

so ist die Bedingung, dass die geraden Linien 0 und 1 harmonische Polaren des vorliegenden Kegelschnittes seien, folgende:

$$(u_0 u_1 e^2 - w_0 w_1) + (a^2 - e^2)(u_0 u_1 + v_0 v_1) = 0.$$

Geht nun jede der beiden Linien durch den einen Brennpunkt des Kegelschnittes, so hat man:

$$u_0 e + w_0 = 0, \quad u_1 e + w_1 = 0.$$

Setzt man alsdann die Werthe von w_0 und w_1 aus diesen Gleichungen in die vorhergehende, so geht dieselbe über in:

$$u_0 u_1 + v_0 v_1 = 0.$$

Diese Gleichung drückt aus, dass die beiden geraden Linien aufeinander senkrecht stehen. Da die erste von den vier Gleichungen sich aus den drei anderen zusammensetzt, so ist der folgende Satz ihre Interpretation:

Jede zwei geraden Linien, welche sich in einem Brennpunkte des Kegelschnittes senkrecht schneiden, sind harmonische Polaren des Kegelschnittes.

Dieser Satz gilt auch für die Parabel. Denn drücken wir die auf den Brennpunkt bezogene Parabelgleichung 19) der zweiundzwanzigsten Vorlesung durch Liniencoordinaten aus, so finden wir:

10) $$u^2 + v^2 - \frac{2uw}{\varkappa} = 0,$$

und die Bedingungsgleichung für zwei harmonische Polaren 0 und 1:

$$u_0 u_1 + v_0 v_1 - \frac{1}{\varkappa}(u_0 w_1 + u_1 w_0) = 0$$

setzt sich wieder zusammen aus den drei Gleichungen:

$$w_0 = 0, \quad w_1 = 0, \quad u_0 u_1 + v_0 v_1 = 0,$$

deren geometrische Bedeutung selbstverständlich ist.

Wenden wir uns nach dieser Digression über die Brennpunkte des Kegelschnittes wieder den conjugirten Durchmessern zu. Aus der oben angegebenen Definition der conjugirten Durchmesser des Kegelschnittes als zweier harmonischen Polaren, welche sich in dem Mittelpunkte des Kegelschnittes schneiden, ferner aus der Definition der Asymptoten in der einundzwanzigsten Vorlesung ergiebt sich sofort der Zusammenhang zwischen conjugirten Durchmessern und Asymptoten:

Ein jedes Paar conjugirter Durchmesser eines Kegelschnittes ist harmonisch zu seinem Asymptotenpaare,

und der Zusammenhang conjugirter Durchmesser unter sich:

Je drei Paare conjugirter Durchmesser eines Kegelschnittes bilden eine Involution.

Man braucht daher von einem Kegelschnitte Nichts weiter zu kennen, als zwei Paare conjugirter Durchmesser, um sowohl die Asymptoten, als auch die Axen des Kegelschnittes zu construiren. Die Asymptoten sind nämlich dasjenige Linienpaar, welches harmonisch ist mit jedem Paare conjugirter Durchmesser, und die Axen des Kegelschnittes, welche aufeinander senkrecht stehen, bilden mit jeden zwei Paaren conjugirter Durchmesser eine Involution.

Wir gingen zu Anfang unserer Vorlesung von zwei harmonischen Polen des Kegelschnittes aus. Die Polare des einen geht immer durch den andern Pol, und der Schnittpunkt der beiden Polaren wird harmonischer Pol zu jedem der beiden harmonischen Pole. Drei solcher Punkte bilden ein System harmonischer Pole des Kegelschnittes. Man versteht also unter einem System harmonischer Pole drei Punkte, von welchen je zwei harmonische Pole des Kegelschnittes sind. Das Dreieck, dessen Ecken zu zweien combinirt harmonische Pole des Kegelschnittes sind, heisst Poldreieck — ein specieller Fall der oben angegebenen conjugirten Dreiecke des Kegelschnittes.

Was die Seiten des Poldreiecks anbetrifft, so sind je zwei derselben harmonische Polaren des Kegelschnittes. Man kann daher das Poldreieck auch definiren als das Dreieck, von dem jede zwei Seiten harmonische Polaren des Kegelschnittes sind.

Aus dieser Definition ergiebt sich nun, dass ein gegebener Kegelschnitt unendlich viele Poldreiecke hat. Denn die eine Ecke des Dreiecks kann man ganz beliebig annehmen, die zweite Ecke wird auf der Polare der ersten Ecke beliebig gewählt werden können. Erst die dritte Ecke des Dreiecks wird durch die beiden anderen bestimmt sein.

Hiernach erhebt sich die Frage, wieviele Kegelschnitte erforderlich sind, um ein Poldreieck als ein gemeinschaftliches für alle festzustellen? Die Beantwortung dieser Frage soll der nächstfolgenden Vorlesung vorbehalten bleiben.

In der siebenzehnten Vorlesung ist die in λ quadratische Gleichung

11) $$f(x_0+\lambda x_1,\ y_0+\lambda y_1,\ z_0+\lambda z_1)=0,$$

welche entwickelt die Form erhielt

12) $$f_{00}+2\lambda f_{01}+\lambda^2 f_{11}=0,$$

als die Quelle weiterer geometrischer Sätze in Aussicht gestellt worden. Wir nehmen diese nur zum Theil verwerthete Gleichung wieder auf, indem wir auf die dort eingeführten Beziehungen verweisen. Es lagen nämlich zwei beliebige Punkte 0 und 1 vor. Ihre Verbindungslinie schneidet den Kegelschnitt $f(x, y, z)=0$ in zwei Punkten, die durch die quadratische Gleichung 12) bestimmt werden. Der eine Fall, wenn das Verhältniss der Wurzeln gleich -1 ist, führte auf die harmonischen Pole des Kegelschnittes. Die Untersuchung des andern Falles, wenn das Verhältniss der Wurzeln gleich $+1$ ist, wodurch die Verbindungslinie der beiden Punkte eine Tangente des Kegelschnittes wird, blieb an der genannten Stelle vorbehalten. Dieser Fall, wenn die Wurzeln der quadratischen Gleichung 12) einander gleich sind, soll hier discutirt werden.

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung 12) sind

$$\frac{1}{f_{11}}\left\{-f_{01}\pm\sqrt{f^2_{01}-f_{00}f_{11}}\right\}.$$

Sie werden einander gleich unter der Bedingung

13) $$f_{00}f_{11}-f^2_{01}=0.$$

Man erhält diese Bedingungsgleichung auf eine einfachere Art, wenn man die Gleichung 12) dadurch homogen macht, dass man für λ setzt $\frac{\lambda}{\varkappa}$ und mit $\varkappa$ multiplicirt. Differentiirt man hierauf partiell nach $\varkappa$ und λ und eliminirt, so erhält man die gesuchte Bedingungsgleichung 13).

Der linke Theil dieser Gleichung ist eine homogene Function zweiter Ordnung der Variabelen u, v, w:

$$y_0z_1-y_1z_0=u,\quad z_0x_1-z_1x_0=v,\quad x_0y_1-x_1y_0=w.$$

Denn wählt man die Determinantenform der Gleichung 13):

$$\begin{vmatrix} x_0f'(x_0)+y_0f'(y_0)+z_0f'(z_0), & x_0f'(x_1)+y_0f'(y_1)+z_0f'(z_1) \\ x_1f'(x_0)+y_1f'(y_0)+z_1f'(z_0), & x_1f'(x_1)+y_1f'(y_1)+z_1f'(z_1) \end{vmatrix}=0,$$

so lässt sie sich nach einem bekannten Satze von den Determinanten auch so darstellen:

$$u\{f'(y_0)f'(z_1)-f'(y_1)f'(z_0)\}+v\{f'(z_0)f'(x_1)-f'(z_1)f'(x_0)\}$$
$$+w\{f'(x_0)f'(y_1)-f'(y_0)f'(x_1)\}=0;$$

schliesslich wird

$$f'(y_0)f'(z_1)-f'(y_1)f'(z_0)=\tfrac{1}{2}AF'(u),$$
$$f'(z_0)f'(x_1)-f'(z_1)f'(x_0)=\tfrac{1}{2}AF'(v),$$
$$f'(x_0)f'(y_1)-f'(x_1)f'(y_0)=\tfrac{1}{2}AF'(w),$$

und unsere Gleichung geht über in die Gleichung $F(u, v, w) = 0$ des Kegelschnittes, ausgedrückt durch Liniencoordinaten.

Ein grösseres Gewicht als auf diese Bemerkung ist auf die Gleichung 13) selbst zu legen, welche mit Unterdrückung des den Coordinaten anhaftenden Index 1 sich so darstellt:

$$14)\quad 4f(x_0, y_0, z_0)\,f(x, y, z) - \{xf'(x_0) + yf'(y_0) + zf'(z_0)\}^2 = 0.$$

Wenn wir den Punkt 0 als gegeben betrachten, so drückt diese Gleichung einen Kegelschnitt aus, von dem jeder Punkt mit dem gegebenen durch eine gerade Linie verbunden, eine Tangente des gegebenen Kegelschnittes giebt. Da aber von dem gegebenen Punkte sich an den gegebenen Kegelschnitt nur zwei Tangenten ziehen lassen, so muss die Gleichung 14) die Gleichung des von dem gegebenen Punkte 0 an den Kegelschnitt gezogenen Tangentenpaares sein. Und in der That treffen auch die unter 15) der siebenzehnten Vorlesung aufgeführten Bedingungen für ein Linienpaar an dem Kegelschnitte 14) zu. Wir haben hiermit in 14) eine andere Auflösung der mit der Gleichung 12) der achtzehnten Vorlesung abgeschlossenen Aufgabe:

Die Gleichung des Tangentenpaares zu bestimmen, welches von einem gegebenen Punkte an einen gegebenen Kegelschnitt gezogen werden kann.

Zu demselben Resultate gelangen wir auch auf folgendem Wege, der zugleich die Ausbeute eines neuen Satzes liefern wird.

Die Gleichungen des Kegelschnittes $f(x, y, z) = 0$ und der Polaren irgend zweier Punkte 0 und 1:

$$xf'(x_0) + yf'(y_0) + zf'(z_0) = 0, \quad xf'(x_1) + yf'(y_1) + zf'(z_1) = 0$$

seien gegeben. Alsdann stellt die Gleichung

$$15)\quad \begin{aligned} &f(x, y, z)\\ &- \lambda\{xf'(x_0) + yf'(y_0) + zf'(z)\}\{xf'(x_1) + yf'(y_1) + zf'(z_1)\} = 0 \end{aligned}$$

mit dem willkürlichen Factor λ alle Kegelschnitte dar, welche durch die vier Punkte gehen, in welchen die Polaren den Kegelschnitt schneiden. Aus dieser Schaar von Kegelschnitten wollen wir nur den einen hervorheben, der durch den Punkt 0 geht, und den diesem Kegelschnitte entsprechenden Werth von λ bestimmen. Setzen wir zu diesem Zwecke in 15) für die Variabelen die Coordinaten des Punktes 0 ein, so finden wir:

$$\lambda = \frac{1}{2\{x_0 f'(x_1) + y_0 f'(y_1) + z_0 f'(z_1)\}},$$

und die Gleichung des hervorgehobenen Kegelschnittes, der durch den gegebenen Punkt 0 geht, wird:

$$16)\quad \begin{aligned} &2\{x_0 f'(x_1) + y_1 f'(y_1) + z_0 f'(z_1)\}\,f(x, y, z)\\ &- \{(xf'(x_0) + yf'(y_0) + zf'(z_0)\}\{xf'(x_1) + yf'(y_1) + zf'(z_1)\} = 0. \end{aligned}$$

Aus dem Umstande, dass bei Vertauschung der Punkte 0 und 1 die Gleichung ungeändert bleibt, können wir den folgenden Satz schliessen, dem wir gleich seinen reciproken Satz beigesellen:

Wenn man durch die Schnittpunkte zweier geraden Linien und eines Kegelschnittes einen Kegelschnitt legt, der durch den Pol der einen geraden Linie geht, so geht derselbe auch durch den Pol der andern geraden Linie.

Wenn man von zwei Punkten an einen Kegelschnitt die vier Tangenten legt und einen Kegelschnitt beschreibt, der die vier Tangenten berührt und zugleich auch die Polare des einen Punktes, so berührt er auch die Polare des andern Punktes.

Wenn die Punkte 0 und 1 zusammenfallen, so wird 16) die Gleichung eines Kegelschnittes, der den gegebenen Kegelschnitt in den Schnittpunkten der Polaren des Punktes 0 berührt und die Gleichung 14) geht über in die Gleichung 14) des von dem Punkte 0 ausgehenden Tangentenpaares.

Zu den Specialitäten der Tangentenpaare eines Kegelschnittes gehört das Asymptotenpaar. Fällt nämlich der gegebene Punkt 0 mit dem Mittelpunkte des Kegelschnittes zusammen, so wird $f'(x_0)=0$, $f'(y_0)=0$ und aus 14) geht die Gleichung des Asymptotenpaares hervor:

$$17) \qquad f(x,y,z)-\frac{z^2}{2z_0}f'(z_0)=0,$$

eine Gleichung, welche es bestätigt, dass man in der Gleichung eines Kegelschnittes nur das constante Glied so zu ändern braucht, dass die Gleichung in lineare Factoren zerlegbar wird, um die Asymptotengleichung zu erhalten.

Die Gleichung des imaginären Tangentenpaares zu bestimmen, welches von einem Brennpunkte des Kegelschnittes ausgeht.

Die Lösung der vorliegenden Aufgabe lässt sich nach dem ersten Theile der gegenwärtigen Vorlesung voraussagen. Nach demselben stehen jede zwei harmonische Polaren des Kegelschnittes, welche von dem Brennpunkte desselben ausgehen, aufeinander senkrecht wie die conjugirten Durchmesser eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Brennpunkt ist. Das von demselben Brennpunkte ausgehende Tangentenpaar des Kegelschnittes ist harmonisch zu jedem der genannten harmonischen Polarenpaare. Es wird sich also das gesuchte Tangentenpaar auffassen lassen als das von dem Mittelpunkte des Kreises ausgehende, an den Kreis gelegte Tangentenpaar. Daraus lässt sich weiter schliessen, dass die Gleichung des gesuchten Tangentenpaares die Kreisgleichung mit verschwindendem Radius sein wird, der Brennpunkt des Kegelschnittes für den Mittelpunkt des Kreises genommen. Die nachfolgende Rechnung wird die Schlussfolgerung bestätigen.

Gehen wir von der Gleichung der confocalen Kegelschnitte aus:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}-1=0$$

und bemerken, dass $x_0=e$, $y_0=0$, $z_0=1$ die Coordinaten eines Brennpunktes sind, so wird die Gleichung 14) in dem vorliegenden Falle:

$$\left\{\frac{e^2}{a^2+\lambda}-1\right\}\left\{\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}-1\right\}-\left\{\frac{e\,x}{a^2+\lambda}-1\right\}^2=0,$$

eine Gleichung, welche mit Rücksicht auf die Relation $e^2=a^2-b^2$ übergeht in:

$$(x-e)^2+y^2=0.$$

Liegt dagegen die Parabelgleichung vor

$$y^2-2\varkappa\left(x+\frac{\varkappa}{2}\right)=0$$

mit dem Brennpunkte, dessen Coordinaten $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=1$ sind, so wird die Gleichung 14) des von dem Brennpunkte ausgehenden Tangentenpaares

$$4\varkappa^2\left\{y^2-2\varkappa\left(x+\frac{\varkappa}{2}\right)\right\}+\{2\varkappa x+2\varkappa^2\}^2=0,$$

eine Gleichung, welche sich schliesslich reducirt auf:

$$x^2+y^2=0.$$

Wir fassen die eben gewonnenen Resultate zusammen, wenn wir sagen:

Das von einem Brennpunkte eines Kegelschnittes ausgehende imaginäre Tangentenpaar ist ein Kreis mit verschwindendem Radius, dessen Mittelpunkt der Brennpunkt ist.

Die conjugirten Durchmesser dieses Kreises sind demnach harmonische Polaren des Kegelschnittes. Ausserdem lässt die geführte Untersuchung folgenden Satz erkennen:

Wenn man die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Punktes 0 so bestimmt, dass die Gleichung 14) eine Kreisgleichung wird, so fällt der Punkt 0 in einen Brennpunkt des Kegelschnittes $f(x, y, z)=0$.

Dass der Kreis alsdann einen verschwindenden Radius haben muss, folgt daraus, dass die Gleichung 14) unter allen Umständen in lineare Factoren zerfällt. Dieser Satz wird bei Aufgaben über Brennpunkte von Kegelschnitten gute Dienste leisten.

Um auf eine neue Form der Gleichung 14) des Tangentenpaares zu kommen, welche Gleichung sich leicht in Determinantenform bringen lässt, erinnern wir daran, dass wir bereits in 12) der achtzehnten Vorlesung die Gleichung des Tangentenpaares entwickelt haben. Es handelte sich dort um die Elimination der Variabelen u, v, w aus folgenden drei Gleichungen:

$$F(u, v, w) = 0,$$
$$u x_0 + v y_0 + w z_0 = 0,$$
$$u x + v y + w z = 0.$$

Wählen wir für die erste dieser Gleichungen die Form

$$u \tfrac{1}{2} F'(u) + v \tfrac{1}{2} F'(v) + w \tfrac{1}{2} F'(w) = 0,$$

so sehen wir, dass sich zwei Grössen λ und μ derart bestimmen lassen, dass man hat

$$\tfrac{1}{2} F'(u) + \lambda x_0 + \mu x = 0,$$
$$\tfrac{1}{2} F'(v) + \lambda y_0 + \mu y = 0,$$
$$\tfrac{1}{2} F'(w) + \lambda z_0 + \mu z = 0.$$

Eliminiren wir nun aus diesen drei Gleichungen und den beiden zuletzt angegebenen linearen Gleichungen die fünf Unbekannten u, v, w, λ, μ, so erhalten wir die Gleichung des von dem Punkte 0 an den gegebenen Kegelschnitt $F = 0$ gezogenen Tangentenpaares:

$$18) \qquad \begin{vmatrix} e_{00}, & e_{01}, & e_{02}, & x_0, & x \\ e_{10}, & e_{11}, & e_{12}, & y_0, & y \\ e_{20}, & e_{21}, & e_{22}, & z_0, & z \\ x_0, & y_0, & z_0, & 0, & 0 \\ x, & y, & z, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung des Punktpaares zu bestimmen, in welchem ein gegebener Kegelschnitt von einer gegebenen geraden Linie geschnitten wird.

Wenn wir mit u_0, v_0, w_0 und u_1, v_1, w_1 die Coordinaten zweier gegebenen geraden Linien 0 und 1 bezeichnen, so hängt die Bestimmung des von dem Schnittpunkte der geraden Linien an einen gegebenen Kegelschnitt $F = 0$ gezogenen Tangentenpaares von der quadratischen Gleichung 4) der neunzehnten Vorlesung ab:

$$19) \qquad F_{00} + 2\lambda F_{01} + \lambda^2 F_{11} = 0.$$

Die beiden Tangenten fallen nur dann zusammen, wenn die beiden geraden Linien 0 und 1 sich in einem Punkte des Kegelschnittes schneiden. Sie schneiden sich in einem Punkte des Kegelschnittes, wenn die quadratische Gleichung gleiche Wurzeln hat, nämlich unter der Bedingung:

$$20) \qquad F_{00} F_{11} - F^2_{01} = 0.$$

Betrachtet man in dieser Gleichung die Coordinaten der einen geraden Linie 0 als gegeben, die Coordinaten der andern als Varabeln, so hat man die Auflösung der vorliegenden Aufgabe.

Zu demselben Resultate gelangt man auf folgendem Wege. Die Pole der gegebenen geraden Linie 0 und 1 werden ausgedrückt durch die Gleichungen $u\,F'(u_0)+v\,F'(v_0)+w\,F'(w_0)=0$, $u\,F'(u_1)+v\,F'(v_1)+w\,F'(w_1)=0$, und das Product der beiden Gleichungen stellt die beiden Pole dar. Es ist darum die Gleichung

$$\text{21)}\quad \begin{gathered} F(u,v,w) \\ -\lambda\{u\,F'(u_0)+v\,F'(v_0)+w\,F'(w_0)\}\{u\,F'(u_1)+v\,F'(v_1)+w\,F'(w_1)\}=0 \end{gathered}$$

der analytische Ausdruck für alle Kegelschnitte, welche die von den beiden Polen an den gegebenen Kegelschnitt $F=0$ gezogenen Tangenten liefern.

Unter diesen Kegelschnitten giebt es einen, der die gerade Linie 0 berührt. Sein analytischer Ausdruck ist:

$$\text{22)}\quad \begin{gathered} 2\{u_0F'(u_1)+v_0F'(v_1)+w_0F'(w_1)\}\,F(u,v,w) \\ -\{u\,F'(u_0)+v\,F'(v_0)+w\,F'(w_0)\}\{u\,F'(u_1)+v\,F'(v_1)+w\,F'(w_1)\}=0. \end{gathered}$$

Der geometrischen Bedeutung des Umstandes, dass diese Gleichung ungeändert bleibt, wenn man die Indices 0 und 1 miteinander verwechselt, ist in einem der vorausgegangenen Sätze bereits Ausdruck gegeben worden.

Fallen die beiden geraden Linien 0 und 1 zusammen, so hat man die Auflösung der vorgelegten Aufgabe:

$$\text{23)}\quad 4\,F(u_0,v_0,w_0)\,F(u,v,w)-\{u\,F'(u_0)+v\,F'(v_0)+w\,F'(w_0)\}^2=0$$

in einer Gleichung, welche das Punktepaar ausdrückt, in welchem die gegebene gerade Linie 0 den Kegelschnitt $F=0$ schneidet.

In der sechszehnten Vorlesung erhielt die Auflösung 12) derselben Aufgabe eine andere Form, weil dort die Gleichung des Kegelschnittes in Punktcoordinaten gegeben war. Es handelte sich an der angeführten Stelle um die Elimination der Variabelen x, y, z aus folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{gathered} f(x,y,z)=0, \\ xu_0+yv_0+zw_0=0, \\ xu+yv+zw=0. \end{gathered}$$

Wenn man diese Elimination nicht direct, sondern in der im Vorhergehenden angedeuteten Weise vollführt, so erhält man folgende Determinantengleichung des gesuchten Punktepaares:

$$\text{24)}\quad \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & u_0, & u \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & v_0, & v \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & w_0, & w \\ u_0, & v_0, & w_0, & 0, & 0 \\ u, & v, & w, & 0, & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Weder die Gleichung 14) eines Tangentenpaares des Kegelschnittes $f=0$, noch die Gleichung 23) eines Punktepaares desselben Kegelschnittes $F=0$ sind so durchsichtiger Art, dass man sie gern als Basis weiterer Untersuchungen der Kegelschnitte nehmen möchte. Wir haben darum in 18) und 24) andere Formen derselben Gleichungen vorgeführt, welche, wie die Gleichungen 1*) und 2*), ihre Zusammensetzung aus den Elementen sogleich erkennen lassen. Auch den Kegelschnittgleichungen 16) und 21) kann man ähnliche Formen geben. Setzt man nämlich in der vorletzten Horizontalreihe dor Gleichung 18) an Stelle des Index 0 den Index 1, so erhält man eine andere Form der Gleichung 16); verändert man in der vorletzten Horizontalreihe der Gleichung 24) den Index 0 in 1, so hat man einen andern Ausdruck für die Gleichung 21). Wenn man ferner bedenkt, dass nach der neunzehnten und einundzwanzigsten Vorlesung selbst die Kegelschnittgleichungen $f=0$ und $\varphi=0$ sich in Determinantenform darstellen lassen:

$$25)\quad \begin{vmatrix} e_{00}, & e_{01}, & e_{02}, & x \\ e_{10}, & e_{11}, & e_{12}, & y \\ e_{20}, & e_{21}, & e_{22}, & z \\ x, & y, & z, & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & u \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & v \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & w \\ u, & v, & w, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

so kann man zweifelhaft sein, ob nicht diese Determinantengleichungen bei der analytischen Behandlung der Kegelschnitte den Vorzug verdienen. In dieser Richtung verweisen wir auf die Abhandlung „Ein Cyclus von Determinantengleichungen“ in Crelle's Journal Bd. 75, S. 1, welche weiteres Material liefern wird zur Durchführung der angeregten Idee.

Vierundzwanzigste Vorlesung.

Die Auflösung von zwei Gleichungen des zweiten Grades mit zwei Unbekannten.

Gegen das Ende der sechszehnten Vorlesung haben wir auseinandergesetzt, wie die Algebra das Problem der Auflösung zweier Gleichungen des zweiten Grades mit zwei Unbekannten mit ihren Hilfsmitteln unternimmt. Sie führt das Problem zurück auf eine biquadratische Gleichung mit einer Unbekannten, welche, wie bekannt, durch eine kubische Gleichung gelöst wird. Da aber die biquadratische Gleichung nicht direct gegeben ist, so kann man sich wohl die Frage vorlegen, ob es nicht einfacher sei, zuerst die kubische Gleichung festzustellen und darauf die Auflösung zu begründen, als umgekehrt. Die Operation soll die aufgeworfene Frage beantworten.

Das geometrische Bild zweier Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten sind zwei Kegelschnitte, welche sich in vier Punkten schneiden. Diese vier Schnittpunkte zu bestimmen, verlangt das Problem. Nun haben wir aber am Ende der oben citirten sechszehnten Vorlesung angedeutet, dass durch die vier Schnittpunkte sich drei Linienpaare legen lassen, deren Bestimmung von einer leicht zu bildenden kubischen Gleichung abhängt. Sind alsdann durch Auflösung der kubischen Gleichung die drei Linienpaare bestimmt, so bedarf es noch der

Auflösung von drei quadratischen Gleichungen, um die drei Linienpaare in einzelne gerade Linien zu trennen. Auf diese Weise gelangen wir zu sechs geraden Linien, von welchen sich immer drei in einem der zu bestimmenden vier Punkte schneiden. Die gesuchten vier Punkte ergeben sich dann schliesslich als die Schnittpunkte von bekannten geraden Linien.

Dieses ist der Ideengang, der uns in der gegenwärtigen Vorlesung zum Wegweiser dienen soll. Er stimmt auch überein mit der Auflösung der biquadratischen Gleichung 1) in der siebenten Vorlesung, die zurückgeführt wurde auf die kubische Gleichung 13) und unter Vermittelung von 14) auf drei quadratische Gleichungen 7).

Wenn wir mit f und φ die Ausdrücke bezeichnen:

$$1)\qquad \begin{aligned} f&=a_{00}x^2+a_{11}y^2+a_{22}z^2+2a_{12}yz+2a_{20}zx+2a_{01}xy,\\ \varphi&=b_{00}x^2+b_{11}y^2+b_{22}z^2+2b_{12}yz+2b_{20}zx+2b_{01}xy,\end{aligned}$$

so stellt die Gleichung

$$2)\qquad f-\lambda\varphi=0$$

alle Kegelschnitte dar, welche durch die Schnittpunkte der durch ihre Gleichungen $f=0$ und $\varphi=0$ gegebenen Kegelschnitte gehen.

Der Kegelschnitt 2) wird ein Linienpaar, wenn sich Werthe von x, y, z, λ derart bestimmen lassen, dass folgenden drei Gleichungen zu gleicher Zeit genügt wird:

$$3)\qquad f'(x)-\lambda\varphi'(x)=0,\quad f'(y)-\lambda\varphi'(y)=0,\quad f'(z)-\lambda\varphi'(z)=0.$$

Durch Elimination der Unbekannten x, y, z erhalten wir hieraus, wenn wir setzen:

$$4)\qquad \varDelta=\begin{vmatrix} a_{00}-\lambda b_{00}, & a_{01}-\lambda b_{01}, & a_{02}-\lambda b_{02}\\ a_{10}-\lambda b_{10}, & a_{11}-\lambda b_{11}, & a_{12}-\lambda b_{12}\\ a_{20}-\lambda b_{20}, & a_{21}-\lambda b_{21}, & a_{22}-\lambda b_{22}\end{vmatrix},$$

die in λ kubische Gleichung

$$5)\qquad \varDelta=0,$$

von deren Lösung die drei Linienpaare abhängen, welche durch die Schnittpunkte der gegebenen Kegelschnitte $f=0$ und $\varphi=0$ gelegt werden können.

Wenn λ eine Wurzel der kubischen Gleichung $\varDelta=0$ ist, so bedeuten x, y, z in 3) die Coordinaten des Punktes, in welchem sich das der genannten Wurzel entsprechende Linienpaar schneidet. Nehmen wir daher an, dass λ_0, λ_1, λ_2 die Wurzeln der kubischen Gleichung $\varDelta=0$ seien und dass ihnen drei Punkte 0, 1, 2 entsprechen, von denen jeder ein Schnittpunkt ist eines der drei Linienpaare, so ergeben sich aus 3) die drei Systeme Gleichungen

$$6)\qquad \begin{aligned} &f'(x_0)-\lambda_0\varphi'(x_0)=0, && f'(x_1)-\lambda_1\varphi'(x_1)=0, && f'(x_2)-\lambda_2\varphi'(x_2)=0,\\ &f'(y_0)-\lambda_0\varphi'(y_0)=0, && f'(y_1)-\lambda_1\varphi'(y_1)=0, && f'(y_2)-\lambda_2\varphi'(y_2)=0,\\ &f'(z_0)-\lambda_0\varphi'(z_0)=0, && f'(z_1)-\lambda_1\varphi'(z_1)=0, && f'(z_2)-\lambda_2\varphi'(z_2)=0,\end{aligned}$$

und aus ihnen wieder folgende beiden Systeme, welche eine geometrische Interpretation zulassen:

$$7)\quad \begin{aligned} x_1 f'(x_2) + y_1 f'(y_2) + z_1 f'(z_2) &= 0, \\ x_2 f'(x_0) + y_2 f'(y_0) + z_2 f'(z_0) &= 0, \\ x_1 f'(x_0) + y_1 f'(y_0) + z_1 f'(z_0) &= 0, \end{aligned}$$

$$8)\quad \begin{aligned} x_1 \varphi'(x_2) + y_1 \varphi'(y_2) + z_1 \varphi'(z_2) &= 0, \\ x_2 \varphi'(x_0) + y_2 \varphi'(y_0) + z_2 \varphi'(z_0) &= 0, \\ x_1 \varphi'(x_0) + y_1 \varphi'(y_0) + z_1 \varphi'(z_0) &= 0. \end{aligned}$$

Denn multiplicirt man die Gleichungen des zweiten Systems 6) resp. mit x_2, y_2, z_2 und addirt, so erhält man:

$$\{x_2 f'(x_1) + y_2 f'(y_1) + z_2 f'(z_1)\} - \lambda_1 \{x_2 \varphi'(x_1) + y_2 \varphi'(y_1) + z_2 \varphi'(z_1)\} = 0.$$

Ebenso geht aus dem dritten System 6) durch Multiplication mit x, y, z und Addition die Gleichung hervor:

$$\{x_1 f'(x_2) + y_1 f'(y_2) + z_1 f'(z_2)\} - \lambda_2 \{x_1 \varphi'(x_2) + y_1 \varphi'(y_2) + z_1 \varphi'(z_2)\} = 0.$$

Zieht man die letzte Gleichung von der vorhergehenden ab, so wird:

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\{x_1 \varphi'(x_2) + y_1 \varphi'(y_2) + z_1 \varphi'(z_2)\} = 0.$$

Da nun der erste Factor $(\lambda_2 - \lambda_1)$ in dieser Gleichung nicht verschwinden kann, weil λ_2 und λ_1 verschiedene Wurzeln der kubischen Gleichung $\varDelta = 0$ sind, so muss der zweite Factor verschwinden, was eben durch die erste Gleichung 8) ausgedrückt ist. Die erste Gleichung 7) ergiebt sich dann aus jeder der beiden anderen zuletzt aufgestellten Gleichungen.

Wir wollen nicht unterlassen zu bemerken, dass wir in unserer Discussion nur den allgemeinen Fall vor Augen haben werden, wenn die Wurzeln der kubischen Gleichung $\varDelta = 0$ wirklich voneinander verschieden sind. Für den Fall zweier oder dreier gleicher Wurzeln bedarf es einer besondern Untersuchung.

Die Gleichungen 7) und 8) beweisen, dass die drei Punkte 0, 1, 2 die Ecken eines Poldreiecks bilden sowohl für den einen Kegelschnitt $f = 0$, als für den andern $\varphi = 0$. Ausserdem ist ersichtlich, dass dieses gemeinschaftliche Poldreieck auch jedem Kegelschnitte angehört, welcher durch die Schnittpunkte der gegebenen Kegelschnitte geht.

Die Gleichungen 7) und 8), die Bedingungen für das gemeinsame Poldreieck, gingen hervor aus den neun Gleichungen 6). Umgekehrt lassen sich aus den sechs Gleichungen 7) und 8) die drei Systeme 6) herstellen. Vergleicht man beispielsweise, um zum ersten dieser Systeme zu gelangen, die beiden letzten Relationen in 7) mit den beiden letzten Relationen in 8), so sieht man, dass die Grössen $f'(x_0)$, $f'(y_0)$, $f'(z_0)$ dieselben Verhältnisse besitzen wie $\varphi'(x_0)$, $\varphi'(y_0)$, $\varphi'(z_0)$, und dass also ein Factor λ_0 sich finden lässt, für welchen:

$$f'(x_0) = \lambda_0 \varphi'(x_0), \quad f'(y_0) = \lambda_0 \varphi'(y_0), \quad f'(z_0) = \lambda_0 \varphi'(z_0).$$

Hieraus schliessen wir auf den Satz:

Es giebt nur ein Poldreieck, welches zweien gegebenen Kegelschnitten gemeinschaftlich ist.

In dem vorliegenden Falle drücken sich die Seiten des gemeinschaftlichen Poldreiecks der beiden Kegelschnitte analytisch in doppelter Art so aus:

$$
9)\quad \begin{array}{ll}
x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0) = 0, & x \varphi'(x_0) + y \varphi'(y_0) + z \varphi'(z_0) = 0, \\
x f'(x_1) + y f'(y_1) + z f'(z_1) = 0, & x \varphi'(x_1) + y \varphi'(y_1) + z \varphi'(z_1) = 0, \\
x f'(x_2) + y f'(y_2) + z f'(z_2) = 0, & x \varphi'(x_2) + y \varphi'(y_2) + z \varphi'(z_2) = 0.
\end{array}
$$

Wir haben eben das gemeinschaftliche Poldreieck abhängig gemacht von den Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = 0$. Denn aus 6) ergeben sich die Coordinaten der Ecken 0, 1, 2 durch Auflösung linearer Gleichungen. Wie solche lineare Gleichungen mit Einmischung willkürlicher Constanten sich auflösen lassen, zeigt die Anmerkung*. Man kann aber

---

* Es ist eine häufig wiederkehrende Aufgabe, die Coordinaten des Schnittpunktes zweier geraden Linien zu bestimmen, welche durch ihre Gleichung $f(x, y, z) = 0$ gegeben sind. Die gesuchten Coordinaten ergeben sich, wie bekannt, aus je zweien von den drei Gleichungen

$$
\mathrm{I)}\quad f'(x) = 0, \quad f'(y) = 0, \quad f'(z) = 0,
$$

welche sämmtlich durch sie befriedigt werden.

Welche zwei Gleichungen man aber auch zu diesem Zwecke verwenden mag, die Ausdrücke für die Coordinaten werden unsymmetrisch. Man muss allen drei Gleichungen zugleich Rechnung tragen, um zu einem befriedigenden Resultate zu gelangen.

Bezeichnen wir die Determinante der Function f mit A und mit $A_{\varkappa\lambda}$ die Unterdeterminanten der letzteren, so erhalten wir durch Auflösung je zweier Gleichungen

$$
x:y:z = A_{00}:A_{10}:A_{20}, \quad x:y:z = A_{01}:A_{11}:A_{21}, \quad x:y:z = A_{02}:A_{12}:A_{22}.
$$

Hieraus setzen sich nun unter Einführung von drei willkürlichen Factoren $\varkappa$ die allgemeinsten Auflösungen der Gleichungen I) zusammen

$$
\mathrm{II)}\quad \begin{array}{l}
x = A_{00}\varkappa^0 + A_{01}\varkappa^1 + A_{02}\varkappa^2, \\
y = A_{10}\varkappa^0 + A_{11}\varkappa^1 + A_{12}\varkappa^2, \\
z = A_{20}\varkappa^0 + A_{21}\varkappa^1 + A_{22}\varkappa^2.
\end{array}
$$

Diese Ausdrücke der Unbekannten genügen den Gleichungen I). Denn setzt man dieselben in die Gleichungen ein, so verschwinden einzeln die Coefficienten der willkürlich angenommenen Factoren $\varkappa$. Diese Auflösungen II) umfassen aber auch die oben angegebenen. Denn lässt man zwei von den Constanten $\varkappa$ verschwinden, so erhält man jene speciellen Auflösungen.

Die vorgetragene Auflösungsmethode ist keineswegs beschränkt, weder auf die Zahl der Variabeln und Gleichungen, noch auf die Form der letzteren. Denn lassen wir die Gleichung

$$
\mathrm{III)}\quad a_0^\lambda x_0 + a_1^\lambda x_1 + \ldots + a_n^\lambda x_n = 0
$$

ein ganzes System linearer homogener Gleichungen bedeuten mit den Unbekannten x, indem wir unter λ alle Zahlen $0, 1, \ldots n$ verstehen, so haben wir die Auflösungen des Systems mit den willkürlichen Constanten $\varkappa$

$$
\mathrm{III)}\quad x_\lambda = A^0_\lambda \varkappa^0 + A^1_\lambda \varkappa^1 + \ldots + A^n_\lambda \varkappa^n.
$$

auch umgekehrt die kubische Gleichung abhängig machen von dem gemeinschaftlichen Poldreiecke. Denn multiplicirt man die Gleichungen des ersten Systems 6) mit x_0, y_0, z_0 und addirt, so erhält man für λ_0 den Ausdruck

10) $$\lambda_0 = \frac{x_0 f'(x_0) + y_0 f'(y_0) + z_0 f'(z_0)}{x_0 \varphi'(x_0) + y_0 \varphi'(y_0) + z_0 \varphi'(z_0)}.$$

Es soll sich nun darum handeln, diesen Ausdruck für die Wurzel λ_0 der kubischen Gleichung $\varDelta = 0$ geometrisch zu deuten.

Zu diesem Zwecke müssen wir die beiden Functionen f und φ näher fixiren, denn die kubische Gleichung $\varDelta = 0$ wird eine andere, wenn man die beiden Functionen mit willkürlichen Factoren multiplicirt, während die durch sie ausgedrückten Kegelschnitte sich dadurch nicht ändern. Wir werden deshalb festsetzen, dass die Function $2f$ der Einheit gleich werde, wenn man in derselben $z = 1$ setzt und die beiden anderen Coordinaten die Coordinaten m des Mittelpunktes des Kegelschnittes $f = 0$ bedeuten lässt. Ebenso soll die Function 2φ der Einheit gleich werden, wenn man in ihr $z = 1$ setzt und für die beiden anderen Coordinaten die Coordinaten des Mittelpunktes n des Kegelschnittes $\varphi = 0$. Man hat daher für den Mittelpunkt m des Kegelschnittes $f = 0$ die Gleichungen

11) $$f'(x) = 0, \quad f'(y) = 0, \quad f'(z) = 1,$$

und für den Mittelpunkt n des Kegelschnittes $\varphi = 0$

12) $$\varphi'(x) = 0, \quad \varphi'(y) = 0, \quad \varphi'(z) = 1.$$

Ausserdem wird es vortheilhaft sein, sämmtlichen z-Coordinaten den Werth der Einheit beizulegen, so dass man hat $z = z_0 = z_1 = z_2 = 1$.

Wir entnehmen aus 9) die Gleichung der geraden Linie 12:

$$x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0) = 0,$$

welche durch Multiplication mit dem Factor $-\frac{1}{\sqrt{f'(x_0)^2 + f'(y_0)^2}}$ auf die Normalform gebracht wird. Aus ihr erhalten wir dann den senkrechten Abstand p_0 eines durch die Coordinaten x, y, $z = 1$ gegebenen Punktes p von der geraden Linie 12:

$$p_0 = \frac{x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0)}{\sqrt{f'(x_0)^2 + f'(y_0)^2}} = \frac{x_0 f'(x) + y_0 f'(y) + z_0 f'(z)}{\sqrt{f'(x_0)^2 + f'(y_0)^2}}.$$

Hieraus ergiebt sich nun auf Grund der Gleichungen 11) der senkrechte Abstand m_0 des Mittelpunktes m des Kegelschnittes $f = 0$ von der geraden Linie 12:

$$m_0 = \frac{1}{\sqrt{f'(x_0)^2 + f'(y_0)^2}}.$$

Wir haben deshalb

$$\frac{p_0}{m_0} = x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0).$$

Das gleiche Verfahren, ausgeführt an dem Kegelschnitte $\varphi=0$, ergiebt:

$$\frac{p_0}{n_0}=x\,\varphi'(x_0)+y\,\varphi'(y_0)+z\,\varphi'(z_0),$$

wenn wir unter n_0 den senkrechten Abstand des Mittelpunktes n des Kegelschnittes $\varphi=0$ von der geraden Linie 12 verstehen. Aus diesen beiden Gleichungen folgt endlich

$$13)\qquad \frac{n_0}{m_0}=\frac{x\,f'(x_0)+y\,f'(y_0)+z\,f'(z_0)}{x\,\varphi'(x_0)+y\,\varphi'(y_0)+z\,\varphi'(z_0)},$$

ein Ausdruck für das Verhältniss der Abstände m_0 und n_0 der Mittelpunkte m und n der Kegelschnitte $f=0$ und $\varphi=0$ von der geraden Linie 12, welcher unabhängig ist von der Lage des Punktes p. Lässt man diesen Punkt p zusammenfallen mit dem Punkte 0, so ergiebt sich aus dem Vergleiche von 13) und 10) die geometrische Bedeutung der Wurzel

$$\lambda_0=\frac{n_0}{m_0}.$$

In dem angegebenen Verhältnisse $n_0:m_0$ der senkrechten Abstände der Mittelpunkte n und m von der geraden Linie 12 können wir auch die Entfernungen $\overline{[0]n}:\overline{[0]m}$ des Schnittpunktes $[0]$ der geraden Linien nm und 12 an Stelle der Abstände substituiren. Bezeichnen wir deshalb die Schnittpunkte der Verbindungslinie der Mittelpunkte n und m mit den Seiten des Poldreiecks resp. mit den Zeichen [0], [1], [2], so haben wir folgende geometrische Interpretation der Wurzeln der kubischen Gleichung $\varDelta=0$:

$$14)\qquad \lambda_0=\frac{\overline{[0]n}}{\overline{[0]m}},\quad \lambda_1=\frac{\overline{[1]n}}{\overline{[1]m}},\quad \lambda_2=\frac{\overline{[2]n}}{\overline{[2]m}}.$$

Die Beschränkung der Functionen f und φ, welche wir nur gemacht haben, um zu diesem Resultate zu gelangen, ist für das Folgende nicht nothwendig. Wir heben sie darum wieder auf.

Dass die Gleichung $f-\lambda\varphi=0$ ein Linienpaar darstellt, wenn λ eine Wurzel der kubischen Gleichung $\varDelta=0$ ist, drückt sich algebraisch aus, wenn man sagt, dass der Ausdruck $f-\lambda\varphi$ in lineare Factoren zerfällt. Zum Zwecke dieser Zerfällung in Factoren ist es nützlich, an Stelle der Variabelen x, y, z neue Variabelen X, Y, Z einzuführen durch folgende Gleichungen:

$$15)\qquad \begin{aligned} x\,\varphi'(x_0)+y\,\varphi'(y_0)+z\,\varphi'(z_0)&=2X,\\ x\,\varphi'(x_1)+y\,\varphi'(y_1)+z\,\varphi'(z_1)&=2Y,\\ x\,\varphi'(x_2)+y\,\varphi'(y_2)+z\,\varphi'(z_2)&=2Z,\end{aligned}$$

und mit φ_0, φ_1, φ_2 die Ausdrücke zu bezeichnen:

$$
16)\qquad
\begin{aligned}
x_0\,\varphi'(x_0)+y_0\,\varphi'(y_0)+z_0\,\varphi'(z_0)&=2\varphi_0,\\
x_1\,\varphi'(x_1)+y_1\,\varphi'(y_1)+z_1\,\varphi'(z_1)&=2\varphi_1,\\
x_2\,\varphi'(x_2)+y_2\,\varphi'(y_2)+z_2\,\varphi'(z_2)&=2\varphi_2.
\end{aligned}
$$

Es liegen nun drei lineare Ausdrücke der variabelen Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes p vor:

$$f'(x)-\lambda_0\,\varphi'(x),\quad 2Y,\quad 2Z,$$

welche verschwinden, wenn der Punkt p mit dem Punkte 0 zusammenfällt. Es müssen sich daher zwei Factoren ϱ derart bestimmen lassen, dass man identisch hat

$$f'(x)-\lambda_0\,\varphi'(x)=2\varrho_1 Y+2\varrho_2 Z.$$

Diese Factoren bestimmen sich in der identischen Gleichung dadurch, dass man für die Variabeln setzt entweder die Coordinaten des Punktes 1 oder des Punktes 2. Hierdurch wird

$$
\begin{aligned}
f'(x_1)-\lambda_0\,\varphi'(x_1)&=2\varrho_1\varphi_1,\\
f'(x_2)-\lambda_0\,\varphi'(x_2)&=2\varrho_2\varphi_2
\end{aligned}
$$

oder, da $f'(x_1)-\lambda_1\,\varphi'(x_1)=0$ und $f'(x_2)-\lambda_2\,\varphi'(x_2)=0$ ist, so wird

$$
\begin{aligned}
(\lambda_1-\lambda_0)\,\varphi'(x_1)&=2\varrho_1\varphi_1,\\
(\lambda_2-\lambda_0)\,\varphi'(x_2)&=2\varrho_2\varphi_2.
\end{aligned}
$$

Setzen wir diese Werthe der Factoren in die identische Gleichung ein und vertauschen die Coordinaten, so erhalten wir ein ganzes System Gleichungen, welche die Substitution 15) zu identischen Gleichungen machen:

$$
17)\qquad
\begin{aligned}
f'(x)-\lambda_0\,\varphi'(x)&=\frac{(\lambda_1-\lambda_0)}{\varphi_1}\,\varphi'(x_1)\,Y+\frac{(\lambda_2-\lambda_0)}{\varphi_2}\,\varphi'(x_2)\,Z,\\
f'(y)-\lambda_0\,\varphi'(y)&=\frac{(\lambda_1-\lambda_0)}{\varphi_1}\,\varphi'(y_1)\,Y+\frac{(\lambda_2-\lambda_0)}{\varphi_2}\,\varphi'(y_2)\,Z,\\
f'(z)-\lambda_0\,\varphi'(z)&=\frac{(\lambda_1-\lambda_0)}{\varphi_1}\,\varphi'(z_1)\,Y+\frac{(\lambda_2-\lambda_0)}{\varphi_2}\,\varphi'(z_2)\,Z.
\end{aligned}
$$

Multipliciren wir diese Gleichungen resp. mit x, y, z und addiren, so wird mit Rücksicht auf die Substitution 15)

$$f-\lambda_0\varphi=\frac{\lambda_1-\lambda_0}{\varphi_1}\,Y^2+\frac{\lambda_2-\lambda_0}{\varphi_2}\,Z^2$$

oder

$$(f-\lambda_0\varphi)(\lambda_1-\lambda_2)=-P\left\{\frac{Y^2}{\varphi_1(\lambda_2-\lambda_0)}-\frac{Z^2}{\varphi_2(\lambda_0-\lambda_1)}\right\},$$

wenn wir mit P das Product bezeichnen:

$$18)\qquad P=(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_0).$$

Bezeichnen wir endlich mit α, β, γ die Ausdrücke

$$19)\qquad \alpha=\sqrt{\varphi_0(\lambda_1-\lambda_2)},\quad \beta=\sqrt{\varphi_1(\lambda_2-\lambda_0)},\quad \gamma=\sqrt{\varphi_2(\lambda_0-\lambda_1)},$$

so kann man aus der letzten identischen Gleichung durch erlaubte Vertauschungen ein ganzes System Gleichungen ableiten:

$$20)\quad \begin{aligned} (f-\lambda_0\varphi)(\lambda_1-\lambda_2) &= -P\left\{\frac{Y^2}{\beta^2}-\frac{Z^2}{\gamma^2}\right\},\\ (f-\lambda_1\varphi)(\lambda_2-\lambda_0) &= -P\left\{\frac{Z^2}{\gamma^2}-\frac{X^2}{\alpha^2}\right\},\\ (f-\lambda_2\varphi)(\lambda_0-\lambda_1) &= -P\left\{\frac{X^2}{\alpha^2}-\frac{Y^2}{\beta^2}\right\}, \end{aligned}$$

welches sich auch so darstellen lässt:

$$21)\quad \begin{aligned} (f-\lambda_0\varphi)(\lambda_2-\lambda_2) &= -P\left\{\frac{Y}{\beta}+\frac{Z}{\gamma}\right\}\left\{\frac{Y}{\beta}-\frac{Z}{\gamma}\right\},\\ (f-\lambda_1\varphi)(\lambda_2-\lambda_0) &= -P\left\{\frac{Z}{\gamma}+\frac{X}{\alpha}\right\}\left\{\frac{Z}{\gamma}-\frac{X}{\alpha}\right\},\\ (f-\lambda_2\varphi)(\lambda_0-\lambda_1) &= -P\left\{\frac{X}{\alpha}+\frac{Y}{\beta}\right\}\left\{\frac{X}{\alpha}-\frac{Y}{\beta}\right\}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun diese umgewandelten Ausdrücke gleich 0, so erhalten wir die Gleichungen der drei Linienpaare, welche durch die Schnittpunkte der gegebenen Kegelschnitte $f=0$ und $\varphi=0$ gelegt werden können.

Zu gleicher Zeit sieht man aber auch, wie jedes Linienpaar sich in einzelne Linien trennt, und welche von den sechs geraden Linien zu dreien in einem der gesuchten vier Schnittpunkte der Kegelschnitte sich schneiden. So schneiden sich die drei geraden Linien

$$22)\quad \frac{Y}{\beta}-\frac{Z}{\gamma}=0,\quad \frac{Z}{\gamma}-\frac{X}{\alpha}=0,\quad \frac{X}{\alpha}-\frac{Y}{\beta}=0$$

in einem und demselben Punkte, weil die Summe ihrer Gleichungen identisch verschwindet.

Die drei anderen Zusammenstellungen von drei der genannten sechs geraden Linien, welche sich in einem der gesuchten Punkte schneiden, erhalten wir aus 22) durch Veränderung der Vorzeichen der Grössen α, β, γ.

Es bleibt noch übrig, die Coordinaten selbst eines Schnittpunktes der gegebenen beiden Kegelschnitte zu berechnen. Hierzu dienen die Gleichungen 22), welche wir in anderer Form so ausdrücken:

$$X:Y:Z=\alpha:\beta:\gamma.$$

Da es sich aber nur um die Verhältnisse der homogenen Coordinaten des Schnittpunktes handelt, so können wir für die angegebenen Verhältnisse auch folgende Gleichungen nehmen:

$$X=\alpha,\quad Y=\beta,\quad Z=\gamma,$$

welche sich mit Rücksicht auf 15) ausführlich so darstellen:

$$23)\quad \begin{aligned} x\,\varphi'(x_0)+y\,\varphi'(y_0)+z\,\varphi'(z_0) &= 2\alpha,\\ x\,\varphi'(x_1)+y\,\varphi'(y_1)+z\,\varphi'(z_1) &= 2\beta,\\ x\,\varphi'(x_2)+y\,\varphi'(y_2)+z\,\varphi'(z_2) &= 2\gamma. \end{aligned}$$

Um diese Gleichungen aufzulösen, bedienen wir uns der Methode der unbestimmten Coefficienten. Wir multipliciren die Gleichungen der Reihe nach mit X_0, X_1, X_2, addiren und richten die Coefficienten so ein, dass man hat:

$$\begin{aligned} &X_0\,\varphi'(x_0) + X_1\,\varphi'(x_1) + X_2\,\varphi'(x_2) = 1,\\ 24)\qquad &X_0\,\varphi'(y_0) + X_1\,\varphi'(y_1) + X_2\,\varphi'(y_2) = 0,\\ &X_0\,\varphi'(z_0) + X_1\,\varphi'(z_1) + X_2\,\varphi'(z_2) = 0. \end{aligned}$$

Alsdann erhalten wir den Werth der Unbekannten x:

$$x = 2(\alpha X_0 + \beta X_1 + \gamma X_2).$$

Die Werthe der zu bestimmenden Coefficienten ergeben sich aber aus 24), wenn man diese Gleichungen entweder mit x_0, y_0, z_0 oder mit x_1, y_1, z_1 oder mit x_2, y_2, z_2 multiplicirt und dann addirt:

$$X_0 = \frac{x_0}{2\varphi_0},\quad X_1 = \frac{x_1}{2\varphi_1},\quad X_2 = \frac{x_2}{2\varphi_2}.$$

Hiernach wird

$$x = \frac{\alpha x_0}{\varphi_0} + \frac{\beta x_1}{\varphi_1} + \frac{\gamma x_2}{\varphi_2},$$

und wir erhalten auf diese Weise die Auflösung der Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$ in homogenen Cordinaten

$$\begin{aligned} &x = \frac{\alpha x_0}{\varphi_0} + \frac{\beta x_1}{\varphi_1} + \frac{\gamma x_2}{\varphi_2},\\ 25)\qquad &y = \frac{\alpha y_0}{\varphi_0} + \frac{\beta y_1}{\varphi_1} + \frac{\gamma y_2}{\varphi_2},\\ &z = \frac{\alpha z_0}{\varphi_0} + \frac{\beta z_1}{\varphi_1} + \frac{\gamma z_2}{\varphi_2}. \end{aligned}$$

Da diese Gleichungen 25) die Auflösungen der linearen Gleichungen 23) sind, welche letzteren sich von den Substitutionen 15) nur in ihren rechten Theilen unterscheiden, so gehen die Gleichungen 25) über in die Auflösungen der Substitutionen, wenn man die Buchstaben α, β, γ verändert in X, Y, Z.

Die drei anderen Auflösungen derselben beiden Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$ gehen aus diesen Auflösungen hervor durch Veränderung der Vorzeichen der Grössen α, β, γ.

Multipliciren wir die Gleichungen 25) mit den variabelen Liniencoordinaten u, v, w und setzen die Summe gleich 0, so erhalten wir die Gleichung des gesuchten Schnittpunktes der gegebenen beiden Kegelschnitte. Wenn wir demnach die Bezeichnungen einführen:

$$\begin{aligned} U_0 &= (x_0 u + y_0 v + z_0 w)\sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\varphi_0}},\\ U_1 &= (x_1 u + y_1 v + z_1 w)\sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_0}{\varphi_1}},\\ U_2 &= (x_2 u + y_2 v + z_2 w)\sqrt{\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\varphi_2}}, \end{aligned}$$

so stellen sich die Gleichungen der vier Schnittpunkte der gegebenen Kegelschnitte in der eleganten Form dar

$$27)\qquad \begin{aligned} U_0+U_1+U_2&=0,\\ -U_0+U_1+U_2&=0,\\ U_0-U_1+U_2&=0,\\ U_0+U_1-U_2&=0. \end{aligned}$$

Nachdem wir unser am Anfange der Vorlesung aufgestelltes Problem vollständig gelöst haben, so werfen wir noch einen Blick zurück auf die durch die Substitutionen 15) identischen Gleichungen 20). Die ersten Theile der letzteren enthalten nur die Quadrate der neuen Variabelen X, Y, Z. Betrachtet man in zwei von diesen Gleichungen die Factoren f und φ als Unbekannte, so drücken sich dieselben durch die Quadrate der neuen Variabelen aus. Es werden sich daher immer lineare Substitutionen neuer Variabelen finden lassen, welche die gegebenen Functionen f und φ auf die Quadrate der neuen Variabelen zurückführen.

Lineare Substitutionen ähnlicher Art haben ihre geometrische Bedeutung in der elften Vorlesung in den Dreieckcoordinaten erhalten. Wir verlassen daher nicht das Gebiet der Geometrie, wenn wir noch eine zweite Art der Auflösung unsers Problems in Anregung bringen.

Es lassen sich zwei gegebene homogene Functionen f und φ des zweiten Grades der drei Variabelen x, y, z durch lineare Substitutionen anderer Variabelen X, Y, Z auf die Quadrate zurückführen wie folgt:

$$28)\qquad \begin{aligned} f&=\mu_0X^2+\mu_1Y^2+\mu_2Z^2,\\ \varphi&=\varkappa_0X^2+\varkappa_1Y^2+\varkappa_2Z^2. \end{aligned}$$

Denn die Substitutionen enthalten neun zu bestimmende Coefficienten, und die Gleichungen 28) sechs zu bestimmende Grössen μ und $\varkappa$, also im Ganzen 15 zu bestimmende Grössen. Macht man nun in den angegebenen Gleichungen die Substitutionen und setzt die Coefficienten der Quadrate und der Producte der Variabelen einander gleich, so erhält man nur zwölf Gleichungen, welchen die zu bestimmenden 15 Grössen zu genügen haben. Es können deshalb von den 15 zu bestimmenden Grössen gewisse drei beliebig angenommen werden. Welche Grössen dieses sind, ergiebt folgende Betrachtung.

Die Gleichungen 28) sind Folgen aus den Substitutionen. Verändert man in den Substitutionen die Variabelen X, Y, Z in ϱ_0X, ϱ_1Y, ϱ_2Z, so muss auch in den Gleichungen 28) die gleiche Veränderung eintreten. Die sechs Coefficienten μ und $\varkappa$ in 28) verändern sich dadurch in $\mu_0\varrho_0^2$, $\mu_1\varrho_1^2$, $\mu_2\varrho_3^2$; $\varkappa_0\varrho_0^2$, $\varkappa_1\varrho_1^2$, $\varkappa_2\varrho_2^2$. Was sich bei dieser Gelegenheit nicht ändert, das sind die Verhältnisse λ_0, λ_1, λ_2 der Grössen μ und $\varkappa$:

$$\lambda_0=\frac{\mu_0}{\varkappa_0},\quad \lambda_1=\frac{\mu_1}{\varkappa_1},\quad \lambda_2=\frac{\mu_2}{\varkappa_2}.$$

Es können daher drei von den sechs Grössen μ und $\varkappa$ beliebig angenommen werden unter der einzigen Beschränkung, dass die drei Grössen λ von der gemachten Annahme unberührt bleiben. Wie die Untersuchung lehren wird, ergeben sich dann die drei Grössen λ als die Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = 0$. Als Wegweiser zur Ausführung der Transformation wird die zwanzigste Vorlesung meiner Raumgeometrie dienlich sein, welche die Zahl der Variabelen unbeschränkt lässt.

Stellen wir uns nun vor, dass wir die Substitutionen kennen, welche die Transformationen 28) bewirken, so haben wir die aufzulösenden Gleichungen auf die Form zurückgeführt

$$29)\qquad \begin{aligned} \mu_0 X^2 + \mu_1 Y^2 + \mu_2 Z^2 = 0, \\ \varkappa_0 X^2 + \varkappa_1 Y^2 + \varkappa_2 Z^2 = 0, \end{aligned}$$

woraus sich sofort mit Einmischung eines unbestimmten Factors ϱ die Ausdrücke ergeben

$$30)\quad X = \varrho \sqrt{\mu_1 \varkappa_2 - \mu_2 \varkappa_1}, \quad Y = \varrho \sqrt{\mu_2 \varkappa_0 - \mu_0 \varkappa_2}, \quad Z = \varrho \sqrt{\mu_0 \varkappa_1 - \mu_1 \varkappa_0},$$

welche den beiden Gleichungen 29) zu gleicher Zeit genügen.

Da in diesen Gleichungen X, Y, Z bekannte lineare Ausdrücke der Coordinaten x, y, z sind, so handelt es sich nunmehr um die Auflösung linearer Gleichungen, um die Coordinaten der Schnittpunkte der gegebenen beiden Kegelschnitte $f = 0$ und $\varphi = 0$ festzustellen.

Wenn man es unternimmt, auf dem eben angegebenen Wege die gegebenen beiden Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$ aufzulösen, so wird man sich nicht befriedigt finden, wenn man nicht auf das einfache Resultat 25) zurückkommt.

Heben wir zum Schlusse unserer Vorlesung noch eine Specialität hervor, nämlich die, wenn die gegebenen beiden Kegelschnitte $f = 0$ und $\varphi = 0$ denselben Mittelpunkt haben.

Aus der in 14) angegebenen Construction der Wurzeln λ der kubischen Gleichung $\Delta = 0$ von den Mittelpunkten der Kegelschnitte aus durch das gemeinschaftliche Poldreieck wäre man geneigt zu schliessen, dass sämmtliche Wurzeln einander geich seien und dass gerade der Fall gleicher Wurzeln vorläge, den wir in unserer Untersuchung ausdrücklich ausgeschlossen haben. Der Fall gleicher Wurzeln braucht aber nicht vorzuliegen. Denn wenn der gemeinschaftliche Mittelpunkt der beiden Kegelschnitte in eine Ecke des Poldreiecks fällt, so giebt die Construction eine ganz bestimmte Wurzel, die beiden anderen aber werden illusorisch. Und in der That hat in dem vorgelegten Falle die kubische Gleichung drei ganz bestimmte, voneinander verschiedene Wurzeln.

Wie wir gesehen haben, wurden die Coordinaten x, y, z einer Ecke des gemeinschaftlichen Poldreiecks und der dieser Ecke zugehörige Werth von λ durch die drei Gleichungen 3) bestimmt:

$$f'(x) - \lambda\,\varphi'(x) = 0, \quad f'(y) - \lambda\,\varphi'(y) = 0, \quad f'(z) - \lambda\,\varphi'(z) = 0.$$

Bedeuten nun x, y, z die Coordinaten des gemeinschaftlichen Mittelpunktes der beiden Kegelschnitte, so werden die beiden ersten Gleichungen von selbst erfüllt und die letzte Gleichung giebt den zugehörigen Werth von λ. Dieses beweist, dass der gemeinsame Mittelpunkt wirklich mit einer Ecke des Poldreiecks zusammenfällt, und dass der dieser Ecke zugehörige Werth λ der Wurzel der kubischen Gleichung $\Delta = 0$ sich unabhängig von dieser Gleichung angeben lässt.

Mit der Kenntniss einer der Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = 0$ liegt nunmehr statt der kubischen eine quadratische Gleichung vor. Da die übrigen für den allgemeinen Fall vorgezeichneten Operationen zur Feststellung der Coordinaten der vier Schnittpunkte der gegebenen beiden Kegelschnitte auch Nichts weiter verlangen, als die Auflösungen von quadratischen Gleichungen, so ist ersichtlich, dass die Auflösung der vorliegenden Specialität nur von quadratischen Gleichungen abhängt.

Was das Poldreieck anbetrifft, dessen Ecke **2** zusammenfallen mag mit dem gemeinsamen Mittelpunkte der Kegelschnitte, so liegt die dieser Ecke gegenüberliegende Seite 01 in dem Unendlichen, weil sie die Polare des Mittelpunktes ist. Die beiden anderen Ecken ergeben sich alsdann als dasjenige Punktepaar, welches harmonisch ist zu den Schnittpunktepaaren der geraden Linie im Unendlichen mit den beiden Kegelschnitten.

Die Seiten 20 und 21 des eben beschriebenen Poldreiecks sind harmonische Polaren für jeden der beiden Kegelschnitte, und da sie von dem gemeinsamen Mittelpunkte ausgehen, so sind sie conjugirte Durchmesser für jeden der beiden Kegelschnitte. Wir können daraus schliessen:

Zwei Kegelschnitte mit gemeinsamem Mittelpunkte haben ein Paar conjugirter Durchmesser gemeinschaftlich.

Durchsichtiger noch wird dieses, wenn wir annehmen, dass die Gleichungen der gegebenen Kegelschnitte auf den Mittelpunkt bezogen seien, dass also $a_{20} = a_{21} = b_{20} = b_{21} = 0$. Denn alsdann zerfällt die Determinante Δ in die Factoren

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{00} - \lambda b_{00}, & a_{01} - \lambda b_{01} \\ a_{10} - \lambda b_{10}, & a_{11} - \lambda b_{11} \end{vmatrix} (a_{22} - \lambda b_{22}),$$

und in der Gleichung $\Delta = 0$ tritt der lineare Factor $(a_{22} - \lambda b_{22})$ sichtbar hervor, der fortgelassen die kubische Gleichung zu einer quadratischen Gleichung macht:

$$\begin{vmatrix} a_{00} - \lambda b_{00}, & a_{01} - \lambda b_{01} \\ a_{10} - \lambda b_{10}, & a_{11} - \lambda b_{11} \end{vmatrix} = 0.$$

Dass die Eckpunkte 0 und 1 des gemeinschaftlichen Poldreiecks in dem Unendlichen liegen, folgt aus denjenigen Gleichungen 6), welche in dem vorliegenden Falle die Gestalt annehmen $(a_{22} - \lambda_0 b_{22}) z_0 = 0$, $(a_{22} - \lambda_1 b_{22}) z_1 = 0$. Sie können aber nicht anders befriedigt werden, als wenn $z_0 = z_1 = 0$ sind. Die übrigen Coordinaten der Eckpunkte ergeben sich dann aus einer der specialisirten Gleichungen 3)

$$(a_{00} - \lambda b_{00}) x + (a_{01} - \lambda b_{01}) y = 0,$$
$$(a_{10} - \lambda b_{10}) x + (a_{11} - \lambda b_{11}) y = 0,$$

wenn man unter λ die eine oder die andere Wurzel der vorgenannten quadratischen Gleichung versteht. Unter dieser Annahme stellen diese Gleichungen zugleich die gemeinschaftlichen conjugirten Durchmesser der beiden Kegelschnitte dar in doppelter Ausdrucksweise.

Wenn wir endlich annehmen, dass der Kegelschnitt $\varphi = 0$ ein Kreis sei, dass also $b_{00} = b_{11} = 1$ und $b_{01} = 0$, und bemerken, dass die conjugirten Durchmesser eines Kreises immer aufeinander senkrecht stehen, so werden die gemeinschaftlichen conjugirten Durchmesser die Axen des Kegelschnittes $f = 0$. Und in der That sieht man, dass die obengenannte quadratische Gleichung in dem vorliegenden Falle

$$\begin{vmatrix} a_{00} - \lambda, & a_{01} \\ a_{10}, & a_{11} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

mit der Gleichung 8) in der zehnten Vorlesung und mit der Gleichung 4) in der einundzwanzigsten Vorlesung übereinstimmt, von welcher Gleichung dort das Axenproblem des Kegelschnittes $f = 0$ abhängig gemacht worden ist. Die Gleichungen der Axen selber ergeben sich dann aus den vorhergehenden beiden Gleichungen wieder in gleichbedeutenden Ausdrücken:

$$(a_{00} - \lambda) x + a_{01} y = 0,$$
$$a_{10} x + (a_{11} - \lambda) y = 0.$$

Wir wollen die quadratische Gleichung, von welcher die Axen eines Kegelschnittes abhängen, und die Gleichungen der Axen selber nicht wiederholt haben, ohne daran die Bemerkung zu knüpfen, dass diese Gleichungen ungeändert bleiben, wenn man in ihnen für a_{00} und a_{11} resp. setzt

$$a_{00} - \varkappa \text{ und } a_{11} - \varkappa$$

und zugleich für λ setzt $\lambda - \varkappa$, welchen Werth auch $\varkappa$ habe. Daraus ziehen wir den Schluss:

Alle Kegelschnitte, welche durch die vier Punkte gehen, in welchen sich ein Kegelschnitt und irgend ein Kreis schneiden, haben gleiche Richtungen ihrer Axen.

Wenn wir nämlich mit $f = 0$ eine Kegelschnittgleichung in gewöhnlichen Punktcoordinaten und mit $\varphi = 0$ die Kreisgleichung in der Normalform bezeichnen, so ist $f - \varkappa\varphi = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes, von welchem der Satz handelt. Bei der Bestimmung der Richtungen der Axen dieses Kegelschnittes kommen nur die Glieder zweiter Ordnung in Betracht:

$$(a_{00}-\varkappa)\,x^2+2\,a_{01}\,xy+(a_{11}-\varkappa)\,y^2.$$

Man erhält also aus der oben aufgestellten quadratischen Gleichung die dem vorliegenden Falle entsprechende quadratische Gleichung, wenn man für a_{00} und a_{11} resp. setzt

$$a_{00}-\varkappa \text{ und } a_{11}-\varkappa.$$

Ist aber λ eine Wurzel jener Gleichung, so ist $\lambda-\varkappa$ eine Wurzel dieser Gleichung. Diese Veränderungen bringen jedoch, wie schon bemerkt wurde, keine Aenderungen in den die Richtungen der Axen bestimmenden Gleichungen hervor.
