II.

Ueber einige Anwendungen eines besondern Falles der homographischen Verwandtschaft (der Affinität).

Von

Dr. J. Korteweg

zu Breda.

Die Lehre von der Affinität wurde, wie bekannt, ausführlicher besprochen von Möbius in seinem „Barycentrischen Calcul" Cap. III, S. 191 § 144, und von Chasles in seinem berühmten „*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*", und zwar in dem beigefügten „*Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science: la dualité et l'homographie*". *Deuxième partie* § *XXIII*; sie war jedoch schon früher von Euler in der *Introductio in anal. inf. Tome II*, *Cap. XVIII* benannt und bestimmt worden. Ob sie später jemals einen Gegenstand von speciellem Studium ausgemacht hat, ist mir nicht bekannt; in den allgemeineren Schriften über neuere Geometrie von Poncelet, Chasles, Steiner, Magnus, Plücker, v. Staudt, T. Reye, Schlesinger, Salmon, Fiedler u. s. w. wird sie meistens nur sehr nebenbei, bisweilen gar nicht genauer behandelt. Eine gute Uebersicht über das schon von Möbius und Chasles Angeführte giebt F. Reye in seiner „Geometrie der Lage". Wir wollen nun zeigen, dass damit die Lehre von der Affinität noch nicht abgeschlossen, dass sie im Gegentheil geeignet ist, verschiedene Untersuchungen der Geometrie und Mechanik (namentlich die Frage nach grössten und kleinsten um- und eingeschriebenen Figuren und die Theorie des Trägheitsellipsoids) in dem Gebiete der neueren Geometrie unterzubringen.

1. Es ist bekannt, dass Affinität der besondere Fall von Homographie oder Collineation ist, wobei die Ebenen im Unendlichen der beiden homologen Systeme einander entsprechen. Hieraus leitet man folgende Theoreme ab:

a) Nennen wir, in Uebereinstimmung mit dem Ausdruck-Doppelverhältniss $\frac{AC}{BC}$ das Einzelverhältniss dreier Punkte A, B, C einer

Geraden, so sind die Einzelverhältnisse dreier Punkte auf einer Geraden und ihrer Homologen einander gleich.

b) Parallele Linien sind mit parallelen Linien homolog.

c) Das Verhältniss zwischen zwei parallelen begrenzten Linien ist dem zwischen ihren Homologen gleich.

d) Denkt man sich zwei homologe schiefwinklige Axensysteme in beiden affinen Systemen, so sind die Coordinaten eines beliebigen Punktes der einen Figur homolog und proportional den entsprechenden Coordinaten des homologen Coordinatensystems in der andern Figur. Zwei affine Figuren können also dadurch aus einander abgeleitet werden, dass man die gleichartigen Coordinaten aller Punkte der einen Figur in gleichem Verhältniss verändert und auf ein neues Axensystem überträgt.

e) Die Inhalte geschlossener Figuren in parallelen Ebenen verhalten sich wie die Inhalte der homologen Figuren. Die Volumina körperlicher Figuren sind proportional den Rauminhalten der homologen Figuren.

2. Diesen Theoremen, die man zum Beispiel im Lehrbuch des Herrn Reye bewiesen findet, fügen wir folgende hinzu:

f) Es ist immer möglich, durch jeden Punkt des ersten Systems ein rechtwinkliges Coordinatenaxen-System zu legen, homolog mit einem solchen im zweiten System.

Obwohl diese Eigenschaft auf rein elementarem Wege zu beweisen wäre, so würde dies hier zu weitläufig sein. Denkt man sich aber im ersten System eine Kugel, welcher im zweiten ein Ellipsoid entspricht, so correspondiren mit den Hauptaxen des Ellipsoids rechtwinklige Durchmesser der Kugel, und diese Axen und Durchmesser, welche man die orthogonalen Affinitätsaxen der beiden Systeme nennen könnte, bilden zusammen die verlangten homologen rechtwinkligen Coordinatenaxen.

3. Endlich müssen wir noch den Begriff von affinen Figuren einführen. Es sind dies bestimmte geometrische Figuren, welche sich durch Affinität von einander ableiten lassen. Einander affin sind z. B. alle Tetraeder, alle Parallelepipede, alle dreiseitigen Prismen, alle Ellipsoide, alle elliptischen Cylinder und Kegel u. s. w. Sie können es eindeutig oder mehrdeutig sein, je nachdem sie auf eine oder auf mehrere verschiedene Weisen als affin betrachtet werden können. So ist jedes Paar Tetraeder vierundzwanzigdeutig affin, da man die vier Flächen A, B, C, D des einen und die vier Flächen A', B', C', D' des andern paarweise in beliebiger Combination als miteinander homolog betrachten kann. Jedes Paar Ellipsoide kann auf unendlich viele Weisen als affin angesehen werden. Zwei unregelmässige Pentaeder dagegen sind, wenn affin, dann meistens eindeutig affin. Denkt man sich zwei affine Figuren nach der einen oder andern Auffassungsweise als Theile affiner Systeme,

so kann man von homologen Punkten, Linien, Flächen in beiden Figuren sprechen. Zwei Punkte in zwei Tetraedern können also gemäss einer der 24 Betrachtungsweisen homolog sein. In jedem Paar Tetraeder ist nur ein einziges Punktepaar, nämlich die Schwerpunkte, in allen 24 Fällen homolog. Diese Betrachtungen führen zu Untersuchungen, die jetzt nicht zu unserem Zwecke gehören. Wir ziehen es vor, jetzt zu unserer ersten Anwendung überzugehen.

4. Man denke sich zwei beliebige Figuren A und B, z. B. ein Tetraeder und eine Kugel. Mit A_p, A_q, A_r, allgemein $A_n \ldots$, bezeichnen wir allerlei verschiedene Figuren, die miteinander und mit A affin sind, ebenso mit B_p, B_q, $B_r, \ldots$, allgemein B_n . ., verschiedene Figuren affin mit B. Wählen wir dann zwei Figuren A_p und A_r, beide affin mit A und also auch einander affin, übrigens aber willkürlich, dann kann A_r aus A_p nach einer oder mehreren Betrachtungsweisen durch Affinität abgeleitet werden. Denkt man sich nun Figuren affin mit B um A_p und A_r beschrieben, so stimmt mit jeder Figur B_n um A_p eine andere um A_r beschriebene überein, und umgekehrt. Ihre Volumina sind dabei proportional. Die kleinste Figur oder die kleinsten Figuren B_n um A_p sind also homolog mit der kleinsten Figur oder die kleinsten Figuren B_n um A_r; daher:

g) Das Verhältniss zwischen beliebigen mit A affinen Figuren und den kleinsten umgeschriebenen, die mit B affin sind, ist eine constante Grösse k.

h) Bei zwei mit A affinen Figuren sind die kleinsten Figuren B_n um die eine homolog mit den kleinsten Figuren B_n um die andere.

Ganz dieselben Regeln gelten für die grössten eingeschriebenen Figuren B_n.

5. Wenn nun ferner k die soeben genannte constante Grösse bezeichnet, so wird eine Figur B_n **um** A_n niemals kleiner sein können als kA_n. Darum wird auch irgend eine Figur A_n **in** B_n nie grösser sein können wie $\frac{1}{k} B_n$. Betrachten wir nun die kleinste Figur B_r **um** A_r, dann ist

$$B_r = k A_r$$

und also auch

$$A_r = \frac{1}{k} B_r.$$

Daher muss ebenso, wie B_r die kleinste Figur **um** A_r ist, auch A_r die grösste **in** B_r sein oder zu den grössten gehören.

i) Gehört von zwei um- und eingeschriebenen Figuren die erste zu den kleinsten umgeschriebenen von all ihren

Affinen, so gehört auch die letzte zu den grössten eingeschriebenen von all ihren Affinen, und umgekehrt.

Das grösste Ellipsoid z. B. in einem Tetraeder wird so gelegen sein, dass das Tetraeder zu den kleinsten gehört, die um das Ellipsoid beschrieben werden können. Da nun so ein Tetraeder mit einem der kleinsten um die Kugel homolog ist, reducirt sich die Aufgabe, in ein Tetraeder das grösste Ellipsoid zu beschreiben, auf die reciproke Aufgabe, um eine Kugel das kleinste Tetraeder zu legen.

Der gefundene Lehrsatz findet ebenso gut Anwendung auf alle Fragen, betreffend grösste oder kleinste Tetraeder, dreiseitige Prismen, Parallelepipede, Ellipsoide, elliptische Kegel oder Cylinder, halbe Ellipsodie, um oder in einander beschrieben. Bei allen diesen Figuren gilt der Satz, dass, wenn die eine eine **Maximaleingeschriebene** ist, die andere **Umgeschriebene einen Minimalwerth hat, und umgekehrt.**

6. **Ferner gilt der gegebene Beweis ebenso gut für den etwas allgemeineren Lehrsatz:**

k) Steht irgend eine Figur A_p zu einer andern Figur B_p in einer Beziehung, welche durch affine Projection nicht geändert wird, und ist A_p die grösste von allen Figuren A_n, die in dieser Beziehung denkbar sind, so ist B_p die kleinste aller Figuren B_n, die mit A_p in gleichartige Beziehung gebracht werden können wie B_p.

Gilt es z. B. das kleinste Ellipsoid zu finden, welches durch eine der Ecken eines Tetraeders geht, das Tetraeder einschliesst und die gegenüberstehende Seitenfläche zur Mittelfläche hat, so muss das Tetraeder zu den grössten gehören, welche so in das Ellipsoid beschrieben werden können, dass ein Eckpunkt in die Oberfläche fällt und die gegenüberliegende Seitenfläche durch dessen Mittelpunkt geht. Es muss also die Tangentenfläche des Ellipsoids im Eckpunkte des Tetraeders der Grundfläche des Tetraeders parallel sein. Oder gilt es das grösste Ellipsoid zu bestimmen, welches die sechs Kanten eines Tetraeders (und nicht deren Verlängerungen) berührt, so wird dieses Tetraeder das kleinste Tetraeder sein müssen, dessen Kanten selbst (und nicht ihre Verlängerungen) Tangenten des Ellipsoids sind.

7. **Es ist unsere Absicht wieder nicht, die Fragen, zu deren Lösung diese Lehrsätze führen, weiter zu erörtern, denn wir würden meistens nur zu solchen besonderen Resultaten gelangen, die sich auch auf anderem Wege ableiten lassen; wir bezweifeln aber, ob es möglich sein wird, auf anderem Wege die genannten Beziehungen zwischen ein- und umgeschriebenen Figuren von so allgemeinem Gesichtspunkte aus zu betrachten. Nur wollen wir noch folgenden Satz als eine unmittelbare Folge des gefundenen aussprechen:**

e) W e n n e i n e g e s c h l o s s e n e O b e r f l ä c h e e i n e m P o l y e d e r d e r g e s t a l t e i n b e s c h r i e b e n i s t , d a s s d i e P o l y e d e r f l ä c h e n i n i h r e n S c h w e r p u n k t e n v o n d e r O b e r f l ä c h e b e r ü h r t w e r d e n , s o i s t d i e s e O b e r f l ä c h e u n t e r a l l e n e i n g e s c h r i e b e n e n a f f i n e n O b e r f l ä c h e n e i n M a x i m u m.

Selbstverständlich hat dieser Satz nur Bedeutung, wenn die Anzahl der Flächen des Polyeders das Einschreiben mehrerer Affinen erlaubt. Als besonderer Fall ergiebt sich sofort: W e n n s i c h e i n e m P o l y e d e r e i n E l l i p s o i d d e r g e s t a l t e i n s c h r e i b e n l ä s s t , d a s s d i e F l ä c h e n d e s P o l y e d e r s i n i h r e n S c h w e r p u n k t e n b e r ü h r t w e r d e n , s o i s t d a s E l l i p s o i d u n t e r a l l e n e i n g e s c h r i e b e n e n e i n M a x i m u m, und dieser Satz genügt vollkommen, um die Position des grössten, dem Tetraeder, resp. einem dreiseitigen Prisma oder einem Parallelepiped eingeschriebenen Ellipsoids oder des elliptischen Cylinders und des elliptischen Kegels zu bestimmen. Ein analoger Satz, obwohl nicht so einfach, gilt für umgeschriebene affine Maximaloberflächen.

8. Gehen wir nun zu einer zweiten Anwendung über. Diese bezieht sich auf die Trägheits- oder mehr speciell die Centralellipsoide einiger einfachen Körper. Die Eigenschaften dieser Ellipsoide leitet man gewöhnlich auf analytischem Wege ab, doch wird es nicht schwierig sein, sie auch auf rein geometrischem Wege zu finden. Das würde hier aber wieder zu weitläufig sein und wir scheuen uns daher nicht, von den vorhin entwickelten Eigenschaften Gebrauch zu machen.

Es sind die drei Hauptaxen des Trägheitsellipsoids eines Punktes O zugleich die Axen, um welche die Centrifugalkräfte einander das Gleichgewicht halten oder eine einzige Resultante besitzen. Nehmen wir diese Axen zu Coordinatenaxen und nennen ZZ_1, ZZ_2, ZZ_3 die Coordinaten eines Punktes Z, so haben wir

$$\Sigma ZZ_1 . ZZ_2 \Delta V = 0, \quad \Sigma ZZ_2 . ZZ_3 \Delta V = 0, \quad \Sigma ZZ_3 . ZZ_1 \Delta V = 0;$$

diese Bedingungen reichen hin, um die Identität der Coordinatenaxen und der Axen des Trägheitsellipsoids zu constatiren.

9. Setzen wir zunächst den s e h r besondern Fall, dass dieses rechtwinklige Coordinatensystem mit einem ebenfalls rechtwinkligen Coordinatensystem in einer andern affinen Figur homolog sei, so gilt für jeden Punkt Z' dieser Figur

$$Z'Z'_1 = k_1 . ZZ_1, \quad Z'Z'_2 = k_2 . ZZ_2, \quad Z'Z'_3 = k_3 . ZZ_3,$$
$$\Delta V' = k_1 k_2 k_3 \Delta V$$

und daher

$$\Sigma Z'Z'_1 . Z'Z'_2 \Delta V' = k_1^2 k_2^2 k_3 \Sigma ZZ_1 . ZZ_2 \Delta V = 0 \text{ u. s. w.},$$

so dass die homologen Coordinatenaxen nun auch in affinen Körperaxen des T r ä g h e i t s e l l i p s o i d s d e s P u n k t e s O' s i n d , d e s s e n A x e n a l s o i n d i e s e m b e s o n d e r n F a l l e m i t d e n A x e n d e s j e n i g e n

Ellipsoids zusammenfallen, welches in der zweiten Figur homolog ist mit dem Centralellipsoid der ersten.

10. Was übrigens das Verhältniss der Axen dieser verschiedenen Ellipsoide betrifft, so verhalten sich die des Trägheitsellipsoids des ersten Körpers wie

I) $$\frac{1}{\sqrt{B+C}}:\frac{1}{\sqrt{C+A}}:\frac{1}{\sqrt{A+B}},$$

worin
$$A=\Sigma ZZ_1^2\Delta V,\quad B'=\Sigma ZZ_2^2\Delta V,\quad C=\Sigma ZZ_3^2\Delta V;$$

die Axen des Trägheitsellipsoids des zweiten affinen Körpers verhalten sich daher wie

II) $$\frac{1}{\sqrt{k_2^2 B+k_3^2 B}}:\frac{1}{\sqrt{k_3^2 C+k_1^2 A}}:\frac{1}{\sqrt{k_1^2 A+k_2^2 B}},$$

dagegen die des Ellipsoids in dem zweiten System, welches homolog ist mit dem Trägheitsellipsoid des ersten Systems, wie

III) $$\frac{k_1}{\sqrt{B+C}}:\frac{k_2}{\sqrt{C+A}}:\frac{k_3}{\sqrt{A+B}}.$$

Das mit dem ersten Trägheitsellipsoid homologe Ellipsoid ist also dem zweiten Trägheitsellipsoid nicht ähnlich.

11. Der in 9 besprochene Satz gilt nur für den Fall, dass die Hauptaxen des ersten Körpers für den Punkt O mit den orthogonalen Affinitätsaxen homolog sind. Er wird nur dann eine allgemeinere Bedeutung erhalten, wenn das Trägheitsellipsoid des ersten Körpers in eine Kugel übergeht. Dann lassen sich nämlich in der Kugel stets drei senkrechte Durchmesser angeben, welche mit drei senkrechten Geraden (den orthogonalen Affinitätsaxen) der andern Figur übereinstimmen. Diese Durchmesser der Kugel sind dann von selbst Hauptaxen des ersten Körpers, die homologen Axen sind also auch Hauptträgheitsaxen im zweiten Körper und somit Hauptaxen des Trägheitsellipsoids im homologen Punkte des zweiten Körpers, zugleich aber Hauptaxen des Ellipsoids, welches mit der Trägheitskugel homolog ist; dann fallen also die Axen des mit der Kugel homologen Ellipsoids mit denen des Trägheitsellipsoids im homologen Punkte des zweiten Körpers zusammen.

f) Betrachtet man irgend einen Körper als affine Projection eines andern, welcher in einem gegebenen Punkte eine Trägheitskugel besitzt, so werden in diesem Körper die Axen des Trägheitsellipsoids und die Axen des mit der Trägheitskugel homologen Ellipsoids zusammenfallen; dieses Ellipsoid und das Trägheitsellipsoid gehen [wie es die Verhältnisse II) und III), wo jetzt $A=B=C$, zeigen] gleichzeitig in Rotationskörper über.

So ist z. B. jedes Tetraeder affin mit dem regelmässigen Tetraeder; es lässt sich aber leicht auf rein geometrischem Wege zeigen, dass letzteres eine Centralkugel besitzt, welche natürlich mit der eingeschriebenen Kugel homothetisch ist. Das Centralellipsoid für das Tetraeder hat daher dieselben Hauptaxen, wie die affine Projection jener Trägheitskugel oder jener eingeschriebenen Kugel, d. h. wie das grösste eingeschriebene Ellipsoid.

In jedem Tetraeder sind die Axen des Centralellipsoids mit den Axen des grössten eingeschriebenen Ellipsoids gleichgerichtet; beide Ellipsoide werden gleichzeitig zu Rotationskörpern.

Ganz derselbe Lehrsatz gilt für Parallelepipede. Für dreiseitige Prismen, elliptische Cylinder oder Kegel, halbe Ellipsoide u. s. w. muss vorher ihre Axe nach einem gegebenen Verhältnisse, welches sich leicht bestimmen lässt (für dreiseitige Prismen $\sqrt{6}:2$, für elliptische Cylinder $\sqrt{3}:1$) verkleinert werden. Das grösste Ellipsoid des neuen Körpers wird dann stets gleiche Axenrichtungen mit dem Centralellipsoid des Körpers mit ungeänderten Axen besitzen. Es ist übrigens das mit der Centralkugel affine Ellipsoid identisch mit dem Ebenen-Trägheitsellipsoid, welches Culmann in seiner graphischen Statik bespricht.

12 Betrachten wir zum Schluss noch einmal das Verhältniss II), so sehen wir, dass sich die Verhältnisszahlen durch zweckmässige Wahl der Coefficienten k_1, k_2, k_3 einander gleich machen lassen. Dazu wird nur gefordert

$$k_1 : k_2 : k_3 = \frac{1}{\sqrt{A}} : \frac{1}{\sqrt{B}} : \frac{1}{\sqrt{C}}.$$

g) Es lässt sich zu jedem Körper für jeden Punkt O eine ganze Reihe affiner, untereinander ähnlicher Körper construiren, die im homologen Punkte O' eine Trägheitskuge besitzen.

13. Setzen wir für die Trägheitskugel eines affinen Körpers

$$A = B = C = M,$$

so finden wir für das Axenverhältniss des Trägheitsellipsoids des ursprünglichen Körpers

$$\frac{1}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} : \frac{1}{\sqrt{k_3^2 + k_1^2}} : \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \quad \text{[vergl. Verh. II)]}$$

und für das Axenverhältniss des mit der Centralkugel homologen Ellipsoids

$$k_1 : k_2 : k_3.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar:

h) Verbindet man die drei Axenendpunkte des mit der Trägheitskugel affinen Ellipsoids, so verhalten sich die Höhen des entstandenen Dreiecks wie die Axen des Trägheitsellipsoids.

Wo sich also, wie bei dem Centralellipsoid des Tetraeders, das mit der Centralkugel affine Ellipsoid leichter als das Trägheitsellipsoid bestimmen lässt, kann es von Nutzen sein, zu wissen, wie die Gestalten beider Ellipsoide auf einfache Weise auseinander abgeleitet werden können.

---

14. Wir wollen noch zeigen, wie sich die gefundenen Sätze auf sehr allgemeine Probleme anwenden lassen.

Es sei gegeben ein beliebiger Körper A, einer seiner ebenen Durchschnitte α und ein beliebiger Punkt P; es besteht dann eine unendliche Zahl affiner Figuren, die den Durchschnitt α entsprechend gemein und als Trägheitsellipsoide ihrer mit P homologen Punkte Rotationskörper besitzen. Man fragt jetzt nach dem geometrischen Orte dieser mit P homologen Punkte.

Die Antwort auf diese Frage wird die Lösung vieler mehr speciellen Probleme enthalten. Es kann nämlich A ein Ellipsoid sein, das, wie bekannt, zugleich mit seinem Trägheitsellipsoid in einen Rotationskörper übergeht; es ist dann die Frage gelöst nach dem geometrischen Orte des Mittelpunktes der Rotationsellipsoide, die einen ebenen Durchschnitt entsprechend gemein haben. Es sind weiter alle Cylinder und Kegel affin, sobald sie einen congruenten ebenen Durchschnitt besitzen, der mit ihrer Grundfläche parallel ist. Man wird also auch den geometrischen Ort des Schwerpunktes aller Kegel und Cylinder gefunden haben die ihre Grundfläche entsprechend gemein und jede für sich ein Central-Rotationsellipsoid besitzen, welches Problem sich auf verschiedene Weise wieder mehr verallgemeinern lässt, ohne aus der betreffenden Lösung herauszukommen.

15. Zur Lösung des allgemeinen Problems denke man sich einen mit A affinen Körper A', der im Punkte P', homolog mit P, eine Trägheitskugel R' besitze. Eine dieser Kugel R' concentrische Kugel R'_1 tangire die Ebene des Durchschnittes α' homolog mit α in einem Punkte M', und es werde in der Ebene α' um diesen Punkt mit dem Radius $P'M'$ ein Kreis beschrieben, dem im Durchschnitte α eine Ellipse E homolog entsprechen möge. Es sei jetzt A'' einer der angedeuteten affinen Körper, welche den Durchschnitt α entsprechend gemein und welche ein Trägheits-Rotationsellipsoid im Punkte P'' homolog mit P besitzen. Es wird aber dieses Trägheitsellipsoid nur zugleich mit der affinen Projection R''_1 der Kugel R'_1 zum Rotationsellipsoid. Legen wir durch den Mittelpunkt P'' von R''_1 eine Ebene parallel zur Ebene α, dann wird diese das Ellipsoid R''_1 in einer Ellipse E_1 congruent und gleichgerichtet mit E schneiden. Der conjugirte Durchmesser dieses elliptischen Durch-

schnittes kann nichts Anderes sein, als die Linie MP'' (M Mittelpunkt der Ellipse E), weil das Ellipsoid R''_1 die Ebene α in M berührt. Ein solcher conjugirter Durchmesser darf sich aber nach einem bekannten Satze im Rotationsellipsoid nur auf die kleine oder grosse Axe des elliptischen Durchschnittes projiciren. Hieraus ergiebt sich unmittelbar der Satz: Der geometrische Ort der Punkte P'' muss in einer der beiden auf α senkrechten Ebenen liegen, welche durch die grosse und kleine Axe der Ellipse E im Durchschnitte α gehen.

Setzen wir zuerst den Fall, dass P'' in der durch die grösste Axe gehenden Ebene liegt. Nennen wir ϱ den Abstand MP'', φ den Winkel jener Verbindungslinie mit der Ebene α, a und b die Axen der congruenten Ellipsen E und E_1, dann ist b also die kleine Axe des durch den Punkt P'' parallel mit α gelegten Durchschnittes des Ellipsoids R''_1 und daher auch der Radius des grössten Kreisschnittes dieses Rotationsellipsoids. Der Durchschnitt dieses Ellipsoids mit einer Ebene, welche durch die grossen Axen der Ellipse E und E_1, sowie durch den Punkt P'' geht, ist daher eine Ellipse, welche b zur kleinen Axe, eine gewisse Linie p zur grossen Axe und ferner die Linien a und ϱ zu conjugirten Durchmessern hat, die sich unter dem Winkel φ schneiden. So erhalten wir

$$pb = a\varrho \sin\varphi, \quad p^2 + b^2 = a^2 + \varrho^2$$

oder durch Elimination von p, indem wir setzen

$$\varrho \cos\varphi = x, \quad p \sin\varphi = y,$$

die Beziehung

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2 - b^2} = 1;$$

daher bewegt sich der Punkt P'' in einer Hyperbel $\mathfrak{H}$, deren imaginäre Axe die halbe lineare Excentricität, deren reelle Axe der kleinen Axe der Ellipse E gleich ist und die sich also sehr einfach bestimmen lässt. Ebenso kann sich der Punkt P'' in der Ebene, welche durch die kleine Axe senkrecht auf die Ellipse E gelegt wird, in einer Ellipse $\mathfrak{E}$ bewegen, welche diese kleine Axe der Richtung nach zu einer ihrer Axen hat. Ihre auf E senkrechte Axe ist der halben kleinen Axe, die andere der halben Excentricität der Ellipse E gleich.

Das Problem ist hiermit vollständig gelöst.

16. Von geehrter Seite wurde mir die Bemerkung gemacht, dass diese Lösung in interessanter Beziehung stehe zu einem von Herrn J. Binet (*Journal de l'Ecole polytechnique XIV. Cah.*, *p.* 41) entwickelten Satze. Man kann nämlich in der Ebene α' um den Mittelpunkt M' einen dritten Kreis E'_2 affin mit einer Ellipse E_2 beschreiben, der die Eigenschaft hat, im Punkte P' eine mit der des Körpers A' concentrische Trägheitskugel zu besitzen. Es genügt dazu, seinen Radius $= 2\,M'P'$ zu

nehmen. Werden jetzt Körper und Kreis zusammen affin projicirt, so lässt sich sehr leicht beweisen, dass auch diese Projectionen im Punkte P'' homolog mit P homothetische Trägheitsellipsoide besitzen. Weil aber alle früher betrachteten Körper A'' den Durchschnitt α entsprechend gemein haben, so ist E_2 für diese Alle die affine Projection des Kreises E'_2, und die Trägheitsellipsoide dieser Körper in den Punkten P'' müssen den entsprechenden Trägheitsellipsoiden der Ellipse E_2 homothetisch sein. Es ist also die Ellipse E und die Hyperbel H der geometrische Ort der Mittelpunkte der Trägheits-Rotationsellipsoide der Ellipse E_2, und es ergiebt sich daraus folgender Satz:

Der geometrische Ort der Mittelpunkte der Trägheits-Rotationsellipsoide der Ellipse $(2a,\ 2b)$ besteht aus einer Hyperbel $(2\sqrt{b^2-a^2},\ 2b)$ und einer Ellipse $(2\sqrt{a^2-b^2},\ 2a)$; die zweiten Axen dieser Hyperbel und dieser Ellipse stehen senkrecht auf der Ebene der gegebenen Ellipse und gehen durch ihren Mittelpunkt; die ersten Axen der Hyperbel und Ellipse fallen resp. mit der ersten und zweiten Axe der gegebenen Ellipse zusammen.

Weil man aber statt des Kreises E'_2 eine unendliche Zahl ebener Figuren hätte wählen können, welchen in der Ebene α andere affine Figuren correspondiren, so muss sich dieser Satz allgemeiner aussprechen lassen. Es ist ja möglich, die ebene Figur in der Ebene α ganz beliebig zu nehmen, wenn man sich eine zweckmässige Wahl des Körpers A' vorbehält; weil aber der Beweis des Satzes von der Gestalt dieses Körpers A' unabhängig ist, so muss ganz allgemein der geometrische Ort der Mittelpunkte der Trägheits-Rotationsellipsoide einer ebenen Figur aus einer Hyperbel und einer Ellipse nach Analogie des vorigen Satzes bestehen, indem sich die Ellipse, die man statt der Ellipse $(2a,\ 2b)$ nehmen müsste, leicht bestimmen lassen würde.

Es gilt dieser Satz nach den angeführten Untersuchungen auch für Körper, was sich zwar synthetisch nachweisen lässt, uns aber zu weit führen würde. Umgekehrt könnte man aus diesem Satze die Lösung unseres Problems entwickeln.

Obwohl es uns möglich wäre, noch mehr Beispiele einfach gelöster Probleme beizubringen, so werden die gewählten doch schon die Fruchtbarkeit der Methode der affinen Verwandtschaft darthun.
