III.

Ueber die Klangfiguren einer quadratischen Platte von Flüssigkeit und des cubischen Volumens einer Luftmasse.

Von

Prof. Dr. Ludwig Matthiessen

in Rostock.

(Hierzu Taf. I, Fig. 1—5.)

In dem 134. Bande, S. 107 - 117, und dem 141. Bande, S. 375—393, von Poggendorff's Annalen ist von mir eine eingehende experimentelle Untersuchung über den Schwingungszustand der Faraday'schen Klangfiguren (Kräuselungen), sowie eine Reihe von Messungen über die Beziehungen zwischen der Schwingungsdauer und der Wellenbreite innerhalb der Klangfiguren von Platten tropfbarer und elastischer Flüssigkeiten mitgetheilt worden, worüber in den Berl. Ber. über die Fortschritte der Physik im J. 1868, S. 199—202, und im J. 1870, S. 259 bis 264, von Prof. Roeber berichtet ist.

Von der a. a. O. aufgestellten Ansicht über den Schwingungszustand der Flüssigkeitstheilchen, dass nämlich die Kräuselungen durch zwei sich einander senkrecht durchsetzende stehende Wellen entstehen, möge es mir gestattet sein, im Folgenden auch eine theoretische Erklärung des Phänomens durch die Discussion der Formeln für die Wellenbewegung zu geben. Die Deductionen lassen sich sowohl auf die Rippungen der in den auf einer Glasplatte schwingenden Flüssigkeitsschichten suspendirten Kreideschlempe, sowie auf die zuerst von Faraday (*Phil. Trans. f.* 1831, *p. II*, *pag.* 299, und Pogg. Ann. Bd. XXVI, S. 248, *prop.* 125) beobachteten, kürzlich von Prof. Kundt (Pogg. Ann. Bd. CXXXVII, 456 — 470, Fig. 6) beschriebenen Klangfiguren von eingeschlossenen quadratischen Luftplatten, als auch auf einige specielle Fälle von Chladnischen Klangfiguren auf quadratischen Platten von Glas oder Metall übertragen.

Angenommen, es durchsetzen sich gegenseitig unter einem rechten Winkel zwei stehende Flüssigkeitswellen von gleicher Breite und Fortpflanzungsgeschwindigkeit in den Richtungen AA' und CC' (Fig. 1, Taf. I). Die Distanz je zweier Knotenlinien AA' ist gleich einer halben Wellenbreite und der Abstand der äussersten Knotenlinien vom Rande der Platte gleich einer viertel Wellenbreite, indem wir analog den Schwingungszuständen stehender Flüssigkeitswellen in tiefen Gefässen diejenigen Stellen mit dem Namen „Knoten" bezeichnen, in welchen sich Wellenberg des einen Zuges und Wellenthal des entgegenkommenden Zuges vereinigen. Für eine begrenzte Flüssigkeitsschicht ist nun bei einer einfachen stehenden Welle der reflectirende Rand eine Stelle der grössten verticalen Deviation (Berg und Thal), wie solches in Fig. 2a und b dargestellt ist. Wegen der Incompressibilität des Flüssigen und wegen des Umstandes, dass die Flüssigkeit durch die Glastafel daran gehindert wird, nach unten auszuweichen, sind nun die obenerwähnten Knotenlinien AA' oder KK' Stellen der stärksten horizontalen Bewegung, also der Mechanismus der Bewegung der Theilchen, wie er sich im Laufe einer ganzen Schwingung vollzieht, der Darstellung in Fig. 2a und b entsprechend.

Bei Luftplatten, welche von unbeweglichen Wandungen eingeschlossen sind, ist eine transversale Deviation der schwingenden Molecule unmöglich; es bilden sich deshalb wegen der grossen Elasticität der Luft Longitudinalwellen. Dieselben Knotenlinien AA' oder KK' sind hier also ebenfalls Stellen der stärksten horizontalen Bewegung, also der Mechanismus der Bewegung der Molecule ist der Darstellung in Fig. 3 entsprechend. Unter „Knotenlinien" KK' sollen hier wiederum analog den stehenden Flüssigkeitswellen diejenigen Stellen verstanden werden, in denen sich die Expansionen E und die Compressionen C (Verdünnungen und Verdichtungen) begegnen. Sie sind also nicht zu verwechseln mit den Knotenlinien, welche man bei stehenden Longitudinalwellen gewöhnlich darunter begreift, nämlich die Stellen der Maxima der Verdichtungen und Verdünnungen. Zu diesen sind bei Luftsäulen ebenfalls die Ränder der Wandungen zu zählen. In beiden Schwingungszuständen nehmen wir also der Einfachheit der Betrachtungen wegen dieselben Knotenlinien an und die Stellen der stärksten Verdichtungen und Verdünnungen entsprechen den Stellen der Wellenberge und Wellenthäler der schwingenden flüssigen Platten. Wir gehen dabei von der gerechtfertigten Annahme aus, dass bei ganz geschlossenen Luftsäulen der tiefste Ton gleich einer halben Wellenbreite ist, also die beiden Enden derselben abwechselnd im Zustande der Verdichtung und Verdünnung sich befinden. Ist demnach die Länge der schwingenden flüssigen oder luftförmigen Säule gleich n Wellenbreiten, so bilden sich abwechselnd bei einer Flüssigkeit n Berge, $n+1$ Thäler und $n+1$ Berge,

n Thäler, bei der Luft abwechselnd ebensoviele Verdichtungen und Verdünnungen.

Wenn nun eine einfache stehende Welle AA' (Fig. 1) von einem andern stehenden Wellenzuge CC' derselben Wellenbreite durchsetzt wird (dieses ist immer der Fall, wenn die Schwingungszahl oder Tonhöhe dieselbe ist), so bilden sich aus den in der schwingenden Substanz suspendirten schweren Theilchen Klangfiguren an denjenigen Stellen vorzugsweise, wo die parallel der Wandung oder Glastafel gerichtete Bewegung der Molecule sich im Maximum, Berg und Thal oder Verdichtung und Verdünnung sich im Minimum befinden. Die Klangfiguren oder Rippungen sind aus parallelen geraden oder krummen Linien zusammengesetzt, welche überall senkrecht gegen die horizontale Bewegung gerichtet sind, also im eigentlichen Sinne Normalcurven. Ihre Gleichung lässt sich also genau bestimmen, sobald für jeden einzelnen Punkt der Platte die Resultante der Bewegung der Richtung und Grösse nach bekannt ist. Bei den Luftschwingungen liegen sie voneinander getrennt in nahezu gleichen Abständen l. Bei einer gleichen Dicke der Schicht ist nahezu $l^2 = m\,T$. Diese Intervalle rühren von den verticalen Schwingungen her, wodurch die Molecule veranlasst werden, in zackigen Bahnen zu schwingen. Die Rippungen fallen aber keineswegs mit den Knotenlinien AA' und CC' zusammen, sondern dies nur in den speciellen Fällen, wo die Amplitude der einen oder der andern Wellenbewegung gleich Null ist. Sind die beiden Amplituden gleich, so fallen die Rippungen der Maximalbewegung zusammen mit der Diagonalen der Quadrate E der Knotenlinien; die übrigen bilden geschlossene concentrische Curven, welche in der Nähe des Centrums der Felder B und T in Kreise übergehen. Sind die Amplituden verschieden, so bilden die Rippungen theils wellenförmige Curven (Figg. 4 und 5), welche in der Nähe des Centrums der Felder E in Hyperbeln übergehen, theils geschlossene concentrische Curven, welche in der Nähe des Centrums der Felder B und T in Ellipsen übergehen. Diese Sätze beweisen die von mir bisher angestellten Versuche auf's Deutlichste und sie werden durch die im Folgenden angestellten mathematischen Betrachtungen vollkommen bestätigt.

In Fig. 1 ist nun ein solches System von drei Wellenbreiten dargestellt; dasselbe enthält vier einfache Wellenzüge, T bezeichnet die Thäler (Verdünnungen), B die Berge (Verdichtungen), TB die Quadrate der Knotenlinien, in welchen Berg und Thal zusammentreffen. In Figg. 4 und 5 gelten dieselben Bezeichnungen und E ist an die Stelle von TB gesetzt. Die Platte E entspricht genau dem Schwingungszustande einer quadratischen Glasplatte, welche die Chladni'sche Klangfigur zeigt, wenn sie den zweiten Ton angiebt. Sie zeigt zwei gekreuzte Diagonalen, concentrisch von gleichseitigen Hyperbeln eingehüllt, wenn die Amplituden gleich sind; sie zeigt zwei hyperbelähnliche Curven, concentrisch von ungleichseitigen Hyperbeln umgeben, wenn die Amplituden verschieden sind. Die Fläche E ist eine Interferenzfläche und auf ihr bilden sich die Klangfiguren am deutlichsten aus. Am schwächsten bilden sich die Rippungen aus auf denjenigen Flächen, wo keine Interferenzen auftreten und sich die Amplituden summiren, also auf den Flächen B und T. Die Hauptrippe verbindet diejenigen Punkte, in welchen sich die parallel der Tafel gerichtete Bewegung der Molecule im Maximum befindet. Sie ist wellenförmig und verläuft durch sämmtliche Knotenpunkte der Knotenlinie AA', wenn die Amplitude a_1 der in der Richtung AA' laufenden Welle die kleinere ist; ist dagegen die Amplitude a_1 grösser als die der in der Richtung CC' laufenden Welle, so verläuft die Hauptrippe durch sämmtliche Knotenpunkte der Knotenlinie CC'. Bei den Faraday'schen Klangfiguren sind die Amplituden abhängig von den Krümmungshalbmessern der Hauptnormalschnitte der schwingenden Glastafel. Die Wellen laufen nämlich den Hauptnormalschnitten der gebogenen Glastafel parallel. Ist ϱ_1 der Krümmungshalbmesser desjenigen Hauptnormalschnittes, welcher der Knotenlinie AA' parallel ist, ϱ_2 der Krümmungshalbmesser desjenigen Hauptnormalschnittes, welcher der Knotenlinie CC' parallel ist, so ist $a_2 > a$, wenn $\varrho_2 < \varrho_1$ ist; wenn ϱ_2 gleich ∞ ist, so ist a_1 gleich Null; wenn $\varrho_2 = \varrho_1$ ist, so ist auch $a_2 = a_1$. (Vergl. Pogg. Ann. Bd. 134, die Figurentafel.)

Wir betrachten hier zunächst die Bewegungszustände einer vibrirenden Flüssigkeitsschicht; die der Luftplatten sind ihnen ganz analog. Nur ist die Breite bei den Wellen auf Flüssigkeiten verschieden und variirt zwischen den Tönen D und c^6 zwischen 28 Cm. und 200 Cm.; ausserdem ist die Wellenbreite viel kleiner, sie beträgt für den Ton c^3 nur 1 Mm., wogegen die Wellenlänge desselben Tones in atmosphärischer Luft nur 1 Fuss beträgt. Um die Bewegung in einem beliebigen Punkte P (Fig. 5) kennen zu lernen, so seien λ die Wellenbreite, $AP = u$, $CP = v$ die Coordinaten des Punktes P, a_1 die Amplitude der von A und A' ausgehenden Wellen, a_2 die Amplitude der von C und C' ausgehenden Wellen. Die Deviationen infolge der beiden stehenden Wellen, wenn die einzelnen Wellen in dem Abstande $d = n\lambda$ ihre Bewegung gleichzeitig in demselben Sinne beginnen, sind

$$\eta_1 = 2a_1 \cos\pi \frac{2u}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$\eta_2 = 2a_2 \cos\pi \frac{2v}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Bei Flüssigkeiten sind die Wellenbreiten beider Systeme stets einander gleich, da nahezu $\lambda^2 = mT$ ist. Die gesammte transversale Deviation ist demnach

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = 2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\left(a_1 \cos\pi \frac{2u}{\lambda} + a_2 \cos\pi \frac{2v}{\lambda}\right).$$

Für $a_2 = a_1$ ist

$$\eta = 4\, a_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos \pi \frac{u+v}{\lambda} \cos \pi \frac{u-v}{\lambda}.$$

Durch diese Gleichungen ist der Bewegungszustand der Flüssigkeit in jedem Punkte u, v vollständig bestimmt. Um die Gleichung der Curven genauer übersehen zu können, wählen wir den Punkt O, also den Durchschnittspunkt zweier Knotenlinien zum Coordinatenanfangspunkte, und setzen demgemäss

$$v = \frac{4n+1}{4}\lambda - y, \quad u = \tfrac{1}{4}\lambda + x.$$

Darnach wird nun

$$\eta = 2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\left(- a_1 \sin \pi \frac{2x}{\lambda} + a_2 \sin \pi \frac{2y}{\lambda}\right).$$

Dies ist die Gleichung aller Rippungen für den angenommenen Fall. Für die stärkste Rippung ist η gleich Null und

$$y = \frac{\lambda}{2\pi} \arcsin \left\{\frac{a_1}{a_2} \sin \pi \frac{2x}{\lambda}\right\}.$$

Die Curve ist wellenförmig und $y = 0$ für $x = \frac{n}{2}\lambda$; ferner ist y ein Maximum für $x = \frac{4n+1}{4}\lambda$, ein Maximum für $x = \frac{4n+3}{4}\lambda$; der zugehörige Werth von y ist

$$y_1 = \pm \frac{\lambda}{2\pi} \arcsin \frac{a_1}{a_2}.$$

Ist $a_2 = a_1$, so ist $y = \pm \frac{1}{4}\lambda$; allgemein $y = x$ (Gleichung der Diagonale). Ist a_2 gleich Null, so muss auch x Null werden (Gleichung der Knotenlinie CC'). Ist dagegen a_1 gleich Null, so muss es auch y sein (Gleichung der Knotenlinie AA').

Für die Klangfiguren der eingeschlossenen Luftmassen sind die Formeln ganz dieselben; sie lassen sich aus den Resultanten der componirenden Kräfte der Bewegung ableiten. Die Componenten der Longitudinalschwingungen sind für gleiche Wellenbreiten

$$\xi = 2\, a_1 \sin \pi \frac{2u}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$\eta = 2\, a_2 \sin \pi \frac{2v}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Bei schwingenden Luftsäulen sind die Wellenbreiten beider Systeme nicht immer gleich, sondern abhängig von der Länge der Säulen.

Substituirt man wiederum $u = \frac{1}{4}\lambda + x$, $v = \frac{4n+1}{4}\lambda - y$, so erhält man, indem das Vorzeichen in der Richtung von η sich umkehrt:

$$\xi = 2\, a_1 \cos \pi \frac{2x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$-\eta = 2a_2 \cos\pi \frac{2y}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Um die Richtung und Grösse der resultirenden Deviation zu erhalten, so ist die Grösse bestimmt durch $J=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, die Richtung durch

$$\operatorname{tang}\tau = \frac{\xi}{-\eta} = \frac{a_1 \cos\pi \frac{2x}{\lambda}}{a_2 \cos\pi \frac{2y}{\lambda}}.$$

Da die Richtung der Rippungen senkrecht gegen die Richtung der Bewegung der Massentheilchen ist, so wird $\frac{\xi}{-y} = \frac{\partial y}{\partial x}$ zu setzen sein, mithin wird

$$\xi\,\partial x + \eta\,\partial y = 0 \text{ und } \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a_1 \cos\pi \frac{2x}{\lambda}}{a_2 \cos\pi \frac{2y}{\lambda}}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$a_1 \sin\pi \frac{2x}{\lambda} = a_2 \sin\pi \frac{2y}{\lambda} + const.$$

Diese Curvenschaaren sind sogenannte Gleichgewichtsfiguren und schliessen lauter Luftschichten constanter Dichtigkeit ein.

Nun ist J ein Maximum, wenn $t = \frac{1}{4}T$ und zugleich x und y gleich Null sind. In diesem Falle ist die Constante auch Null. Wir erhalten hier die Gleichung der Hauptrippe; sie ist, wie oben

$$y = \frac{\lambda}{2\pi} \arcsin \left\{ \frac{a_1}{a_2} \sin\pi \frac{2x}{\lambda} \right\}.$$

Untersuchen wir die Gleichung einer Rippung, welche eine Knotenlinie CC' (Fig. 4) tangirt. Für $x = \frac{1}{2}\lambda$, $y = \frac{1}{4}\lambda$ ist $\xi = -2a_1$, $\eta = 0$ und die Constante gleich $-a_2$. Folglich ist die Gleichung der Rippung

$$a_1 \sin\pi \frac{2x}{\lambda} = a_2 \sin\pi \frac{2y}{\lambda} - a_2.$$

Für $x_1 = \frac{3}{4}\lambda$ ist $y_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \arcsin \frac{a_2 - a_1}{a_2}$. Der Werth der halben Nebenaxe ist also $\frac{1}{4}\lambda - y_1$, der Werth der Hauptaxe gleich $\frac{1}{4}\lambda$. Ist $a_2 = a_1$, so sind die beiden Axen gleich und die Rippungen sind nahezu kreisförmig innerhalb des Feldes T und B. Ist $a_2 > a_1$, so ist die Nebenaxe kleiner. Die Rippungen innerhalb des Feldes T sind nahezu elliptisch und die grosse Axe in der Richtung AA' gelegen. Die Curven sind geschlossen, denn sie geben innerhalb der Grenzen $x = \frac{1}{2}\lambda$ und λ immer zwei Werthe für y innerhalb der Grenzen $y = 0$ und $\frac{1}{2}\lambda$. Zwischen den Grenzen $x = 0$ und $\frac{1}{2}\lambda$ ist y für diesen Fall stets imaginär.

Um die Gleichung einer Rippung zu erhalten, welche die Knotenlinie AA' berührt, so setzen wir $x = \frac{3}{4}\lambda$, $y = 0$. Die Constante wird $+a_1$ und die Gleichung

$$a_1 \sin \pi \frac{2x}{\lambda} = a_2 \sin \pi \frac{2y}{\lambda} + a_1.$$

Der Werth der Nebenaxe ist $\frac{1}{4}\lambda$, der der Hauptaxe gleich $\frac{3}{4}\lambda - x_1$, wobei $x_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \arcsin \frac{a_2 - a_1}{a_1}$. Ist $a_2 > 2a_1$, so läuft diese Curve in die andere Hyperbelschaar über.

Untersuchen wir noch die Gleichungen der Curven in der Nähe der Centra E und F (Fig. 4), und zwar zunächst für E. Bezeichnen ω, ϑ und ψ sehr kleine Dimensionen und setzen wir $x = \frac{1}{4}\lambda + \omega$, $y = \frac{1}{4}\lambda + \vartheta$, also

$$a_1 \sin \pi \frac{\frac{1}{2}\lambda + 2\omega}{\lambda} = a_2 \sin \pi \frac{\frac{1}{2}\lambda + 2\vartheta}{\lambda} + const.,$$

so wird die Constante gleich $a_1 - a_2 \pm \psi$ und

$$a_1 \cos \pi \frac{2\omega}{\lambda} = a_2 \cos \pi \frac{2\vartheta}{\lambda} + a_1 - a_2 \pm \psi.$$

Führt man wegen der Kleinheit der Grössen ω und ϑ die Winkel ein, so reducirt sich die Gleichung auf

$$\frac{\omega^2}{\frac{\lambda^2 \psi}{2\pi^2 a_1}} - \frac{\vartheta^2}{\frac{\lambda^2 \psi}{2\pi^2 a_2}} = \mp 1.$$

Dies ist die Gleichung zweier Hyperbelschaaren, deren Hauptaxen senkrecht aufeinander stehen. Schreibt man die Gleichung in der Form

$$\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{\vartheta^2}{b^2} = \mp 1,$$

so ist $\tan \varphi = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}$, wo φ den halben Asymptotenwinkel FEG bezeichnet. Für $a_2 = a_1$ ist $\varphi = 45^0$. Wir fanden früher für die Tangente der Hauptrippungen

$$\tan \tau = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a_1 \cos \pi \frac{2x}{\lambda}}{a_2 \cos \pi \frac{2y}{\lambda}}.$$

Für den Knotenpunkt ist $x = \frac{1}{2}\lambda$, $y = 0$, mithin $\tan \tau = -\frac{a_1}{a_2}$ und für $a_2 = a_1$ der Winkel $\tau = 45^0$. Ist demnach $a_2 = a_1$, so fallen die Asymptoten und die Tangenten der Hauptrippen in den Knotenpunkten mit den Diagonalen der Quadrate E zusammen; in den übrigen Fällen divergiren sie in einem bestimmten Sinne. Die eine Hyperbelschaar gehört den Wellenbergen an, die andere den Wellenthälern.

Um noch die Gleichungen der Curven in der Nähe der Centra von T zu erhalten, so setzen wir $x = \frac{3}{4}\lambda + \omega$, $y = \frac{1}{4}\lambda + \vartheta$. Will man dieselben für B bestimmen, so setze man $x = \frac{1}{4}\lambda + \omega$, $y = \frac{3}{4}\lambda + \vartheta$. Man erhält im ersteren Falle

$$- a_1 \cos \pi \frac{2\omega}{\lambda} = a_2 \cos \pi \frac{2\vartheta}{\lambda} - a_1 - a_2 + \psi$$

oder, wenn man die Bogen einsetzt:

$$\frac{\omega^2}{\dfrac{\lambda^2 \psi}{2\pi^2 a_1}} + \frac{\vartheta^2}{\dfrac{\lambda^2 \psi}{2\pi^2 a_2}} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipsenschaar, deren Hauptaxen den Knotenlinien parallel laufen. Für $a_2 = a_1$ bilden sie concentrische Kreise. Ist $a_2 > a_1$, so ist $a > b$ und $b : a = \sqrt{a_1} : \sqrt{a_2}$.

In den vorstehenden Betrachtungen ist meiner Meinung nach die Theorie der Faraday'schen Klangfiguren in erschöpfender Weise entwickelt. Man kann sie mit Leichtigkeit ausdehnen auf die Theorie der Luftschwingungen in geschlossenen cubischen Räumen. Es kommt ein drittes Wellensystem mit der Amplitude a_3 hinzu. Die Schichten gleicher Schwingungsrichtung und Dichtigkeit der vibrirenden Luftmasse sind von eigenthümlichen Flächen eingeschlossen, deren Verlauf aus den vorstehenden Entwickelungen entnommen werden kann.

Da aus den angestellten Beobachtungen hervorgeht, dass in cubischen Räumen sich die Schwingungszahlen der Grundtöne umgekehrt wie homologen Linien verhalten, so lässt sich hieraus die Reihe der Obertöne, welche den Grundton begleiten müssen, genau ableiten. Bei dem Grundton ist ein Schwingungsbauch in der Mitte des Würfels; bei dem ersten Oberton treten acht solcher Bäuche auf, bei dem zweiten 27 u. s. w. Die grossen Axen der Bäuche verhalten sich nun offenbar wie $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ u. s. w.; mithin bilden die Obertöne des Grundtones c die harmonische Oberreihe g, $\bar{c}$, e. Möglicherweise und sehr wahrscheinlich tritt bei dem Grundton in der Mitte des Würfels gar kein Bauch auf; ist in diesem Falle c der Grundton, so wird die Reihe der Obertöne sein $\bar{c}$, $\bar{g}$, $\bar{\bar{c}}$, $\bar{\bar{e}}$. Diese stereometrischen Klangfiguren lassen sich sichtbar machen, indem man einen hohlen Glaswürfel von etwa 1 Cubikdecimeter Inhalt fast ganz mit trockenem Lycopodiumstaub anfüllt oder mit Rauch, und die eingeschlossene Luft durch einen auf die Obertöne abgestimmten Glasstab in Schwingungen versetzt. Nimmt man nach Seebeck die Schallgeschwindigkeit in Röhren zu 328 M. an, so ist die Schwingungszahl des ersten Obertones 3280, die des zweiten 4920 u. s. w. Die zugehörigen isochronen Glasstäbe haben die Länge 75 Cm., 50 Cm. u. s. w.

Es ist ferner nicht unmöglich, dass man auch ohne Anwendung von Staub die Schwingungszustände der Luftmasse durch die optische Interferenzmethode von Boltzmann und Töpler (Pogg. Ann. CXLI, 321) zu analysiren oder gar in grösseren cubischen Räumen direct wahrzunehmen im Stande sein wird.

Die im Vorstehenden beschriebenen Klangfiguren von Flüssigkeiten und Luftmassen gehören einer und derselben Kathegorie an. Ihnen gebührt mit Recht die Bezeichnung „Faraday'sche Klangfiguren". Um diese Behauptung ausser allen Zweifel zu setzen, mögen hier am Ende noch die eigenen Worte Faraday's ihren Platz finden. Ich entnehme sie dem Aufsatze in Pogg. Ann. Bd. XXVI, S. 248.

123. „Alle die bisher beschriebenen Erscheinungen können sich auf der Oberfläche derjenigen Flüssigkeiten zeigen, welche man für gewöhnlich als unelastisch betrachtet und bei denen die Elasticität, welche sie besitzen, keine wesentliche Eigenschaft ausmacht; es ist nicht möglich, dass sie sich im Innern dieser Masse zeigen können. Erweitert man die Schlüsse, so erscheint es indess nicht ganz unmöglich, dass ähnliche Erscheinungen auch in Gasen und Dämpfen stattfinden, wobei die Elasticität die für das Vibriren nöthige Bedingung liefert, welche bei den Flüssigkeiten in einer plötzlichen Begrenzung der Masse durch eine nicht eingeschlossene verschiebbare Oberfläche gegeben ist.

124. Wenn dem so ist, so muss, wenn eine Platte in der Atmosphäre vibrirt, die unmittelbar mit ihr in Berührung stehende Luft sich in zahlreiche Portionen theilen, welche zwei abwechselnde Reihen wie die beschriebenen Häufchen bilden, eine dichter und eine dünner als die gewöhnliche Atmosphäre. Bei jeder Vibration der Platte wechseln diese Reihen durch ihre Expansionen und Condensationen miteinander ab.

125. In der Hoffnung, einige Vorgänge der Art zu entdecken, befestigte ich eine kreisrunde Zinnscheibe, die mit einem hervorstehenden Rande von dreiviertel Zoll versehen war, auf einem Lineal, streute etwas Lycopodium auf dieselbe und liess sie stark ertönen, so dass das Pulver in der Luft nur eine einzige Wolke gebildet haben würde, welche wegen des Randes und der gleichen Bewegung aller Theile der Platte keine Neigung zu ihrer Anhäufung besitzen konnte. Sogleich sah man das Lycopodium, statt eine gleichförmige Wolke zu bilden, das Ansehen einer dicken Wabe annehmen, die ganz in einer zitternden Bewegung begriffen war, und bei aufmerksamer Betrachtung konnte man Wellen wahrnehmen, welche die Wolke in entgegengesetzter Richtung durchsetzten. Es war genau die Erscheinung, welche sich gebildet haben würde, wenn eine staubige Atmosphäre auf der Oberfläche einer Platte ruhte und in eine Anzahl abwechselnd und zugleich sich ausdehnender und zusammenziehender Portionen gefallen wäre."

IV.

Ueber eine einfache Behandlungsweise derjenigen Probleme der Hydromechanik, in welchen Ellipsoide mit kleinen Excentricitäten vorkommen.

Von

Dr. Arnold Giesen.

I. Theil. Homogene Ellipsoide.

§ 1. Näherungsformeln für das Potential eines homogenen Ellipsoids mit kleinen Excentricitäten.

Es sei ein homogenes Ellipsoid gegeben mit den Halbaxen a, b, c, welche in dieser Reihenfolge nach ihrer Grösse absteigend geordnet sein sollen. Die linearen Excentricitäten e und ε seien durch die Gleichungen bestimmt $a^2 - c^2 = e^2$, $b^2 - c^2 = \varepsilon^2$. Als Coordinatenaxen nehmen wir die Halbaxen des Ellipsoids an, dessen Dichtigkeit ϱ sei. Dann ist das Potential desselben in einem beliebigen Punkte (x, y, z):

$$V = abc\pi\varrho \int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}} \left[1 - \frac{x^2}{a^2+t} - \frac{y^2}{b^2+t} - \frac{z^2}{c^2+t}\right] dt.$$

Dabei ist die untere Integrationsgrenze σ für einen innern Punkt gleich Null, für einen äussern dagegen die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\sigma} + \frac{y^2}{b^2+\sigma} + \frac{z^2}{c^2+\sigma} - 1 = 0.$$

Wir setzen jetzt $a^2 = c^2 + e^2$, $b^2 = c^2 + \varepsilon^2$, ferner mit Vernachlässigung derjenigen Potenzen von e und ε, welche die zweite übersteigen:

$$\frac{1}{a^2+t} = \frac{1}{c^2+t}\left(1 - \frac{e^2}{c^2+t}\right); \quad \frac{1}{b^2+t} = \frac{1}{c^2+t}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{c^2+t}\right),$$

Dann wird

$$V = abc\pi\varrho \int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{1}{(c^2+t)^{3/2}}\left(1 - \frac{e^2+\varepsilon^2}{2(c^2+t)}\right)\left[1 - \frac{r^2}{c^2+t} + \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{(c^2+t)^2}\right] dt,$$

wobei $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, also r den Radius vector des angezogenen Punktes bedeutet. Es ist nun aber

$$\int_\sigma^\infty \frac{dt}{(c^2+t)^{\frac{m}{2}}} = \left[\frac{(c^2+t)^{-\frac{m}{2}+1}}{-\frac{m}{2}+1}\right]_\sigma^\infty.$$

Setzen wir daher $\sqrt{c^2+\sigma}$ für den äussern Punkt gleich c', so wird dieses Integral für einen innern Punkt $\frac{2}{(m-2)c^{m-2}}$ und für einen äussern $\frac{2}{(m-2)c'^{m-2}}$. Demnach erhält man für das innere Potential V_i des gegebenen Ellipsoids

$$V_i = abc\pi\varrho\int_0^\infty\left[\frac{1}{(c^2+t)^{3/2}} - \frac{e^2+\varepsilon^2}{2(c^2+t)^{5/2}} - \frac{r^2}{(c^2+t)^{5/2}} + \frac{(e^2+\varepsilon^2)r^2}{2(c^2+t)^{7/2}} + \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{(c^2+t)^{7/2}}\right]dt$$

1) $$= 2ab\varrho\pi\left\{1 - \frac{e^2+\varepsilon^2}{6c^2} - \frac{r^2}{c^2}\left[\tfrac{1}{3} - \frac{e^2+\varepsilon^2}{10c^2}\right] + \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{5c^4}\right\}.$$

Speciell für ein Rotationsellipsoid hat man

$$V'_i = 2a^2\varrho\pi\left\{1 - \tfrac{1}{3}\frac{e^2}{c^2} - \frac{1}{c^2}\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{5}\frac{e^2}{c^2}\right)(x^2+y^2) - \frac{1}{c^2}\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\frac{e^2}{c^2}\right)z^2\right\}.$$

Für den Ausdruck des äussern Potentials brauchen wir zunächst nur c' statt c zu setzen:

$$V_a = 2abc\varrho\pi\left\{\frac{1}{c'} - \frac{e^2+\varepsilon^2}{6c'^3} - \frac{r^2}{c'^3}\left[\tfrac{1}{3} - \frac{e^2+\varepsilon^2}{10c'^2}\right] + \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{5c'^5}\right\}.$$

Es kommt jetzt auf die Bestimmung von $c' = \sqrt{c^2+\sigma}$ an. Zur Bestimmung von σ dient die Gleichung

$$\frac{x^2}{c^2+\sigma}\left(1 - \frac{e^2}{c^2+\sigma}\right) + \frac{y^2}{c^2+\sigma}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{c^2+\sigma}\right) + \frac{z^2}{c^2+\sigma} - 1 = 0$$

oder auch

$$\frac{r^2}{c'^2} - \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{c'^4} - 1 = 0.$$

Hiernach hat c'^2 als ersten Näherungswerth r^2; setzten wir also $c'^2 = r^2 + \Delta$, so wird bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von Δ

$$1 - \frac{\Delta}{r^2} - \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{r^4} - 1 = 0, \text{ also } \Delta = -\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{r^2},$$

also ist bis auf Glieder zweiter Ordnung $c'^2 = r^2 - \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{r^2}$. Hiernach ist nun weiter

$$\frac{1}{c'} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{2r^4}\right) \text{ und } \frac{1}{c'^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 + \frac{3(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{2r^4}\right).$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die obige Formel für das äussere Potential in den Gliedern, welche im Zähler die Excentricitäten nicht enthalten, so kommt, da in den übrigen c' einfach durch r zu ersetzen ist:

$$V_a = 2abc\pi\varrho \left\{\frac{2}{3}\frac{1}{r} - \frac{1}{15}\frac{e^2+\varepsilon^2}{r^3} + \frac{1}{5}\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{r^5}\right\}.$$

Bezeichnet man die Masse $\frac{4}{3}abc\pi\varrho$ des Ellipsoids mit M, so kommt für das äussere Potential in einem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z und dessen Entfernung vom Mittelpunkte r ist:

$$2)\qquad V_a = M\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{10}\frac{e^2+\varepsilon^2}{r^3} + \frac{3}{10}\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{r^5}\right\}.$$

Dieser Ausdruck gilt natürlich noch für die Punkte der Oberfläche. Für diese ist

$$\frac{x^2}{c^2+e^2} + \frac{y^2}{c^2+\varepsilon^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Bei gehöriger Entwickelung hat man hierfür

$$\frac{x^2}{c^2}\left(1-\frac{e^2}{c^2}\right) + \frac{y^2}{c^2}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right) + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

oder $r^2 = c^2 + \dfrac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{c^2}$, weiter also $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{c}\left(1 - \dfrac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{2c^4}\right)$.

Nach Einsetzung dieser Werthe in Gleichung 2) kommt für Punkte der Oberfläche

$$3)\qquad V_0 = M\left\{\frac{1}{c} - \frac{1}{10}\frac{e^2+\varepsilon^2}{c^3} - \frac{1}{5}\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{c^5}\right\}.$$

Speciell für ein Rotationsellipsoid hat man allgemein

$$V'_a = M\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{5}\frac{e^2}{r^3} + \frac{3}{10}\frac{e^2(x^2+y^2)}{r^5}\right\}$$

und für die Oberfläche im Besondern

$$V'_0 = M\left\{\frac{1}{c} - \frac{1}{5}\frac{e^2}{c^3} - \frac{1}{5}\frac{e^2(x^2+y^2)}{c^5}\right\}.$$

Umformung. Drückt man a und b durch c aus vermittelst der Formeln

$$a = c\left(1+\frac{e^2}{2c^2}\right),\quad b = c\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2c^2}\right),$$

so wird

$$1')\quad V_i = 2\pi\varrho\left\{c^3 + \tfrac{1}{3}(e^2+\varepsilon^2) - \tfrac{1}{3}r^2\left(1+\frac{e^2+\varepsilon^2}{5c^2}\right) + \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{5c^2}\right\},$$

$$2')\quad V_a = \tfrac{4}{3}\pi\varrho\left\{\frac{c^3+\frac{1}{2}c(e^2+\varepsilon^2)}{r} - \frac{1}{10}\frac{c^3(e^2+\varepsilon^2)}{r^3} + \frac{3}{10}\frac{c^3(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{r^5}\right\}.$$

§ 2. Gestalt eines um einen Centralkörper rotirenden, homogenen flüssigen Satelliten.

Eine homogene flüssige Masse bewege sich als Satellit in einem Kreise um einen Centralkörper derart, als wenn beide in fester Verbindung ständen, so dass also der Satellit dem Centralkörper stets dieselbe

Seite zuwendet. Derselbe sei nur der Anziehung seiner eigenen Masse und jener des Centralkörpers unterworfen, der Radius seiner Bahn sehr gross im Vergleiche mit den Dimensionen beider Körper, seine Winkelgeschwindigkeit ϑ sehr klein. Es fragt sich, ob die flüssige Masse des Satelliten sich dadurch ins Gleichgewicht setzen könne, dass sie eine Gestalt annimmt, die wenigstens bei Vernachlässigung sehr kleiner Grössen sich als ein Ellipsoid mit kleinen Excentricitäten betrachten lässt.

Der Schwerpunkt des Satelliten sei der Coordinatenanfangspunkt, die Verbindungslinie der Schwerpunkte des Satelliten und des Centralkörpers, von letzterem abgewandt, sei die positive z-Axe, die x-Axe sei die Tangente der Bahn des Satelliten, die y-Axe stehe auf der Bahnebene desselben senkrecht. Der Halbmesser der Bahn, welche der Schwerpunkt des Satelliten durchläuft, sei R, die Entfernung eines Punktes des Satelliten von der Axe seiner Bahn sei s, seine Entfernung vom Mittelpunkte des Centralkörpers sei t. Das Potential des Centralkörpers sei W, dasjenige des Satelliten sei V, dann ist die Gleichgewichtsbedingung, welche für alle Punkte der Oberfläche des Satelliten erfüllt sein muss:

$$f(W+V_0)+\tfrac{1}{2}\vartheta^2[x^2+(R+z)^2]=Const.,$$

worin f die Anziehungsconstante bezeichnet. Wenn nun der Centralkörper wenig von der Kugelform abweicht und R gross ist, so kann, unter C die Masse des Centralkörpers verstanden, in hinreichender Annäherung gesetzt werden $W=\frac{C}{t}$. Nun ist aber

$$t^2=x^2+y^2+(R+z)^2, \text{ also } \frac{1}{t}=\frac{1}{R}\left[1-\frac{z}{R}-\frac{x^2+y^2+z^2}{2R^2}+\tfrac{3}{2}\frac{z^2}{R^2}+\ldots\right],$$

also in erster Annäherung

$$W=\frac{C}{R}\left[1-\frac{z}{R}-\frac{x^2+y^2-2z^2}{2R^2}\right].$$

Um das Potential V des Satelliten, dessen Masse S sei, darstellen zu können, machen wir die versuchsweise Annahme, dass seine Oberfläche ein Ellipsoid sei, also nach § 1, 3)

$$V_0=S\left[\frac{1}{c}-\tfrac{1}{10}\frac{e^2+\varepsilon^2}{c^3}-\tfrac{1}{5}\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{c^5}\right].$$

Für z^2 setzen wir $c^2-\frac{c^2}{a^2}x^2-\frac{c^2}{b^2}y^2$ oder näherungsweise bis auf die Quadrate der Excentricitäten $c^2-x^2-y^2+\frac{e^2}{c^2}x^2+\frac{\varepsilon^2}{c^2}y^2$. Man könnte wegen der kleinen Factoren $\frac{Cf}{R}$ und ϑ^2 von z^2 die beiden letzten Glieder dieses Ausdrucks weglassen. Der Vollständigkeit halber wollen wir sie aber zunächst beibehalten. Dann nimmt nach vollzogener Substitution obige Bedingungsgleichung folgende Form an:

$$\frac{Cf}{R}\left(1-\frac{z}{R}+\frac{c^2}{R^2}-\tfrac{3}{2}\frac{x^2+y^2}{R^2}+\frac{x^2}{R^2}\frac{e^2}{c^2}+\frac{y^2}{R^2}\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right)$$
$$+Sf\left(\frac{1}{c}-\tfrac{1}{10}\frac{e^2+\varepsilon^2}{c^3}-\tfrac{1}{5}\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{c^5}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}\vartheta^2\left(R^2+c^2+2Rz-y^2+\frac{e^2}{c^2}x^2+\frac{\varepsilon^2}{c^2}y^2\right)=Const.$$

Der Coefficient von z verschwindet, da zufolge der angenommenen Kreisbewegung des Satelliten $\vartheta^2 R=\frac{C}{R^2}f$. Da nun x^2 und y^2 voneinander unabhängig sind, so müssen ihre Coefficienten verschwinden. Es giebt dies folgende zwei Gleichungen:

$$-\tfrac{3}{2}\frac{Cf}{R^3}+\frac{Cf}{R^3}\frac{e^2}{c^2}-\tfrac{1}{5}\frac{Sf}{c^3}\frac{e^2}{c^2}+\tfrac{1}{2}\vartheta^2\frac{e^2}{c^2}=0,$$
$$-\tfrac{3}{2}\frac{Cf}{R^3}+\frac{Cf}{R^3}\frac{\varepsilon^2}{c^2}-\tfrac{1}{5}\frac{Sf}{c^3}\frac{\varepsilon^2}{c^2}-\tfrac{1}{2}\vartheta^2+\tfrac{1}{2}\vartheta^2\frac{\varepsilon^2}{c^2}=0$$

oder

$$-\tfrac{3}{2}\vartheta^2+\left(\tfrac{3}{2}\vartheta^2-\tfrac{1}{5}\frac{Sf}{c^3}\right)\frac{e^2}{c^2}=0,$$
$$-2\vartheta^2+\left(\tfrac{3}{2}\vartheta^2-\tfrac{1}{5}\frac{Sf}{c^3}\right)\frac{\varepsilon^2}{c^2}=0.$$

Da aber $\vartheta^2=\frac{Cf}{R^3}$ ist und R gegen c sehr gross angenommen wurde, so wird im Allgemeinen und wenn nicht C äusserst gross gegen S ist, ϑ^2 sehr klein gegen $\frac{Sf}{c^3}$ sein. Für unsern Mond ist z. B. C nahe $=80\,S$, R nahe $=60$ Erdhalbmesser oder, da der Mondhalbmesser nur etwas mehr als $\frac{1}{4}$ des Erdhalbmessers beträgt, R nahe $=240\cdot c$. Demnach verhält sich für unsern Mond ϑ^2 zu $\frac{Sf}{c^3}$ nahe wie $1:3\cdot240\cdot240$ oder wie $1:172800$. Demnach kann man ϑ^2 gegen $\frac{Sf}{c^3}$ vernachlässigen, was auf dasselbe hinauskommt, als wenn ursprünglich z^2 einfach durch $c^2-x^2-y^2$ ersetzt worden wäre. Vorige Gleichungen ergeben demnach für die Excentricitäten des Satelliten folgende Werthe:

$$\frac{a^2-c^2}{c^2}=\frac{e^2}{c^2}=-\tfrac{15}{2}\frac{c^3\vartheta^2}{Sf}=-\tfrac{45}{8}\frac{\vartheta^2}{\varrho\pi f},$$
$$\frac{b^2-c^2}{c^2}=\frac{\varepsilon^2}{c^2}=-10\frac{c^3\vartheta^2}{Sf}=-\tfrac{15}{2}\frac{\vartheta^2}{\varrho\pi f},$$

unter ϱ die Dichtigkeit des Satelliten verstanden, da $S=\frac{4}{3}c^3\pi\varrho$ gesetzt werden kann. Daraus folgt nun zunächst, dass ein Ellipsoid in der That eine mögliche Gleichgewichtsfigur für den Satelliten ist, und zwar ist dieses Ellipsoid ein dreiaxiges. Die dem Centralkörper zugekehrte Axe c ist die längste, die mittlere Axe a ist die, welche die Bahn tangirt, die kleinste besteht auf der Bahnebene senkrecht.

Da $\frac{a-c}{c}$ näherungsweise gleich $\frac{1}{2}\frac{e^2}{c^2}$, so sind die Abplattungen beider durch die längste Axe c gelegten Hauptschnitte

$$\frac{1}{2}\frac{e^2}{c^2}=-\frac{15}{4}\frac{c^3\vartheta^2}{Sf} \text{ und } \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{c^2}=-5\frac{c^3\vartheta^2}{Sf}.$$

Die in obigen Formeln vorkommenden Grössen sind z. B. für unsern Mond wenigstens näherungsweise bekannt. Zur Elimination von f setze man $\frac{Cf}{r^2}=g$, unter C die Erdmasse, r den Erdhalbmesser, g die Schwere an der Erdoberfläche verstanden, also $f=\frac{gr^2}{C^2}$. Dadurch kommt

$$\frac{e^2}{c^2}=-\frac{15}{2}\frac{C\vartheta^2c^3}{gr^2S},\quad \frac{\varepsilon^2}{c^2}=-10\frac{C\vartheta^2c^3}{gr^2S}.$$

Der Bruch $\frac{C}{S}$ der Erd- und Mondmasse ist nahe $=81$; der Bruch $\frac{c}{r}$ des mittlern Erd- und Mondhalbmessers ist $=0{,}27234$, c selbst $=234$ geogr. Meilen (à 7420,44 Meter), g im Mittel $=9{,}7974$ Meter. Die Umlaufszeit des Mondes um die Erde ist $27^d\ 7^h\ 43^m\ 11{,}5^s$ (nahe $27\frac{1}{3}$ Tage à 86400 Sec.), demnach $\vartheta=\frac{2\pi}{86400\,.\,27\frac{1}{3}}$ oder genauer $=\frac{2\pi}{86400\,.\,27{,}3217}$. Durch Ausrechnung findet sich für die Abplattungen der beiden Hauptschnitte durch die längste der Erde zugewandte Axe des Mondes

$$\frac{1}{2}\frac{e^2}{c^2}=\frac{a-c}{c}=-\frac{1}{353300},\quad \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{c^2}=\frac{b-c}{c}=-\frac{1}{265000}.$$

Demnach ist die Abweichung des Mondes von der Kugelform äusserst gering; man findet für den Ueberschuss des längsten der Erde zugewandten Halbmessers über den mittlern etwa 49 Meter und über den kleinsten etwa 65 Meter; der Unterschied der beiden für uns sichtbaren Halbmesser wäre demnach etwa 16 Meter. Mit diesen theoretischen Ergebnissen im Einklange steht die Thatsache, dass die Beobachtungen ausser den physischen Ungleichheiten der Oberfläche am Monde keinerlei Abweichung von der Kugelgestalt erkennen lassen.

§ 3. Ebbe und Fluth.

Die Erscheinungen der Ebbe und Fluth sollen hier nur unter mehreren, die Theorie wesentlich vereinfachenden Annahmen behandelt werden. Man denke sich die Erde bestehend aus einem kugelförmigen Kerne vom Radius A und einer denselben allseitig bedeckenden homogenen Flüssigkeit. Die ganze Erdmasse sei E, diejenige des festen

Kernes Ek, also die der Flüssigkeit $E(1-k)$; die Dichte der Flüssigkeit sei ϱ, die mittlere des festen Kernes $\sigma\varrho$. Man denke sich ferner einen zweiten auf die Erde anziehend wirkenden Körper von der Masse M, die Entfernung eines Flüssigkeitstheilchens von dessen Mittelpunkte heisse R, die Entfernung seines Mittelpunktes von dem der Erde sei D. Beide Körper bewegen sich infolge ihrer gegenseitigen Anziehung um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt in Kegelschnitten, die wir als Kreise voraussetzen werden. Der Abstand dieses gemeinschaftlichen Schwerpunktes vom Mittelpunkte der Erde sei d. Von der Rotation der Erde um ihre Axe sehen wir ab, und es geschehe die Bewegung so, als wenn beide Körper fest miteinander verbunden wären, indem sie sich stets dieselbe Seite zukehren. Unter diesen Umständen wird sich dann für die die Erde bedeckende Flüssigkeit ein Zustand des relativen Gleichgewichts einstellen, der eben bestimmt werden soll. Die Winkelgeschwindigkeit des Mittelpunktes der Erde bei dessen Rotation um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt sei ϑ. Dann muss, unter f die Attractionsconstante verstanden, die Gleichung bestehen $\vartheta^2 d = \frac{Mf}{D^2}$. Der Mittelpunkt der Erde sei der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen z-Axe der Verbindungslinie beider Himmelskörper entgegengesetzt gerichtet sei, während die x-Axe die Bahn des Mittelpunktes der Erde bei der Rotation um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt tangire und die y-Axe auf dieser Bahn senkrecht stehe. Wir fragen, ob die die Erde bedeckende Flüssigkeit sich unter den angegebenen Umständen dadurch ins Gleichgewicht setzen könne, dass sie die Gestalt eines von der Kugelform wenig abweichenden Ellipsoids annimmt, dessen Halbaxen a, b, c resp. in die x-, y-, z-Axe fallen. Die Excentricitätsquadrate a^2-c^2 und b^2-c^2 mögen wieder mit e^2 und ε^2 bezeichnet werden.

Die Componenten der Centrifugalkraft in den Punkten x, y, z sind, auf die Masseneinheit bezogen, die partiellen Differentialquotienten von

$$\tfrac{1}{2}\vartheta^2[x^2+(z+d)^2].$$

Das Potential des festen Kernes der Erde sei U, dasjenige der ihn bedeckenden flüssigen Schichte V, endlich das des anziehenden Körpers (des Mondes, der Sonne) W; dann muss im Gleichgewichtszustande für die Oberfläche der Flüssigkeit folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\alpha) \qquad f(U+V+W)+\tfrac{1}{2}\vartheta^2[x^2+(z+d)^2] = Const.$$

Bezeichnet r die Entfernung eines Flüssigkeitstheilchens vom Mittelpunkte der Erde, so ist erstlich $U=\frac{Ek}{r}$ oder, da für einen Punkt der als ellipsoidisch angenommenen Flüssigkeitsoberfläche ist (vergl. § 1)

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{c}\left(1-\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{2c^4}\right),$$

so können wir setzen

$$\beta)\qquad U=\frac{Ek}{c}\left(1-\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{2c^4}\right).$$

Für V haben wir nach Gleichung 2') in § 1

$$V=\tfrac{4}{3}\pi\varrho\left\{\frac{c\left(c^2+\frac{e^2+\varepsilon^2}{2}\right)-A^2}{r}-\tfrac{1}{10}\frac{c^3(e^2+\varepsilon^2)}{r^3}+\tfrac{3}{10}\frac{c^3(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{r^5}\right\}$$

oder, wenn wir in den die Excentricitäten e und ε nicht enthaltenden Theilen dieses Ausdruckes für $\frac{1}{r}$ wieder seinen obigen Werth, in den übrigen dagegen für r einfach c setzen

$$\gamma)\quad V=\tfrac{4}{3}\pi\varrho\left\{\frac{c\left(c^2+\frac{e^2+\varepsilon^2}{2}\right)-A^3}{c}-\frac{e^2+\varepsilon^2}{10}+\frac{(5A^3-2c^3)(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{10c^5}\right\}.$$

Endlich haben wir für das Potential des anziehenden Körpers M

$$W=\frac{M}{R}=\frac{M}{\sqrt{x^2+y^2+(D+z)^2}}$$
$$=\frac{M}{D}\left\{1-\frac{z}{D}-\frac{x^2+y^2+z^2}{2D^2}+\tfrac{3}{2}\frac{z^2}{D^2}+\dots\right\},$$

also mit Vernachlässigung der folgenden Glieder

$$\delta)\qquad W=\frac{M}{D}\left\{1-\frac{z}{D}-\frac{x^2+y^2-2z^2}{2D^2}\right\}.$$

Mit Benutzung der Gleichungen β), γ), δ) geht demnach die Bedingungsgleichung α) für die Oberfläche der Flüssigkeit in die nachstehende über, wenn man die constanten Glieder gleich in eine einzige Constante $\mathfrak{C}$ zusammenfasst:

$$\mathfrak{C}-\frac{Ekf(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{2c^5}+\frac{\frac{4}{3}\pi\varrho f(5A^3-2c^3)(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{10c^5}-\frac{Mf}{D^2}z$$
$$-\frac{Mf}{2D^3}(x^2+y^2-2z^2)+\tfrac{1}{2}\vartheta^2(x^2+z^2+2dz)=Const.$$

Aus dem Ausdrucke links in dieser Gleichung heben sich die beiden Glieder mit z auf, da nach dem Obigen $-\frac{Mf}{D^2}+\vartheta^2d=0$. Für z^2 hat man

$$z^2=c^2-x^2-y^2+\frac{e^2}{c^2}x^2+\frac{\varepsilon^2}{c^2}y^2.$$

Da indess z^2 nur mit sehr kleinen Factoren $\left(\frac{Mf}{D^3}\text{ und }\tfrac{1}{2}\vartheta^2\right)$ multiplicirt vorkommt, so setzen wir einfacher $z^2=c^2-x^2-y^2$. Ferner ist, da $\frac{4}{3}\pi\varrho A^3=Ek\frac{1}{\sigma}$, wegen des kleinen Factors $(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)$ näherungsweise zu setzen

$\frac{4}{3}\pi\varrho c^3 = Ek\frac{1}{\sigma} + E(1-k)$, also weiter $\frac{4}{3}\pi\varrho(5A^3-2c^3) = \left[3\frac{k}{\sigma}-2(1-k)\right]E.$

Dann wird obige Bedingungsgleichung, wenn wir wieder constante Glieder in $\mathfrak{C}$ einrechnen:

$$\mathfrak{C} - \frac{Ekf(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{2c^5} + \frac{\left[3\frac{k}{\sigma}-2(1-k)\right]Ef(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{10c^5}$$

$$-\frac{3Mf}{2D^3}(x^2+y^2) - \frac{Mf}{2dD^2}y^2 = Const.$$

Wegen der Unabhängigkeit von x^2 und y^2 zerfällt diese Gleichung wieder in nachstehende zwei:

$$-\frac{Ek}{2c^5}e^2 + \frac{\left[3\frac{k}{\sigma}-2(1-k)\right]E}{10c^5}e^2 - \frac{3M}{2D^3} = 0,$$

$$-\frac{Ek}{2c^5}\varepsilon^2 + \frac{\left[3\frac{k}{\sigma}-2(1-k)\right]E}{10c^5}\varepsilon^2 - \frac{3M}{2D^3} - \frac{M}{2dD^2} = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir

$$e^2 = -\frac{15Mc^5}{\left[2+3k\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\right]ED^3},$$

$$\varepsilon^2 = -\frac{5Mc^5\left(3+\frac{D}{d}\right)}{\left[2+3k\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\right]ED^3}.$$

Da diese Werthe für die Excentricitätsquadrate stets möglich und im Allgemeinen auch sehr klein sind, so ist also nachgewiesen, dass in der That die die Erde umgebende Flüssigkeitsmasse die Gestalt eines dreiaxigen Ellipsoids in ihrem relativen Gleichgewichtszustande annehmen kann. Die längste Axe der ellipsoidischen Wasseroberfläche ist dem anziehenden Körper zugewendet, die mittlere liegt in der Bahnebene der beiden Körper und die kürzeste steht auf der Bahnebene senkrecht. Da ferner $e^2 = a^2 - c^2$ nahe $= 2c(a-c)$ und ebenso $\varepsilon^2 = b^2 - c^2$ nahe $= 2c(b-c)$ ist, so können wir statt der obigen beiden Formeln auch setzen

$$c - a = \frac{15}{2\left[2+3k\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\right]}\cdot\frac{M}{E}\left(\frac{c}{D}\right)^3.c,$$

$$c - b = \frac{5\left(3+\frac{D}{d}\right)}{2\left[2+3k\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\right]}\cdot\frac{M}{E}\left(\frac{c}{D}\right)^3.c.$$

Es lassen sich hier nun zwei Hauptfälle unterscheiden. In dem ersten setzen wir eine sehr geringe Meerestiefe voraus, dann ist k sehr nahe $=1$, in dem zweiten setzen wir die ganze Erde als flüssig voraus und demgemäss $k=0$.

Wir erhalten sonach im ersten Hauptfalle ($k=1$):

$$c-a=\frac{3}{2\left(1-\frac{3}{5}\frac{1}{\sigma}\right)}\cdot\frac{M}{E}\left(\frac{c}{D}\right)^3 c,\quad c-b=\frac{3+\frac{D}{d}}{2\left(1-\frac{3}{5}\frac{1}{\sigma}\right)}\cdot\frac{M}{E}\left(\frac{c}{D}\right)^3 c,$$

im zweiten Hauptfalle dagegen ($k=0$)

$$c-a=\tfrac{15}{4}\frac{M}{E}\left(\frac{c}{D}\right)^3 c,\quad c-b=\tfrac{5}{4}\left(3+\frac{D}{d}\right)\frac{M}{E}\left(\frac{c}{D}\right)^3 c,$$

welch letztere Formeln sich auf die des § 2 zurückführen lassen, sobald $\frac{D}{d}=1$ gesetzt wird.

Behufs einer numerischen Ausrechnung setzen wir für die durch den Mond bewirkte Fluth $\frac{M}{E}=\frac{1}{81}$, $c=858{,}5$ geogr. Meilen à 7420,44 Meter oder 23643′ pr., $D=51762$ geogr. Meilen, $\sigma=5{,}5$. Dann kommt in den beiden extremen Fällen für $c-a$ **erstens** bei sehr geringer Meerestiefe 0,604 Meter oder 1,924′ pr., **zweitens**, wenn die ganze Erde flüssig wäre, 1,343 Meter oder 4,282′ pr. Da $\frac{D}{d}$ nahe $=82$, so ist die Differenz $c-b$ bedeutend, und zwar $28\frac{1}{3}$mal grösser als $c-a$.

Hinsichtlich der durch die Sonne bewirkten Fluth ist die Sonnenmasse 355500·81 mal grösser, als die Mondmasse, die Entfernung D der Sonne dagegen auch nahe 400 mal grösser als die Entfernung des Mondes. Der Werth der Differenz $c-a$ für die Sonnenfluth verhält sich daher zum Werthe derselben Differenz für die Mondfluth wie $\frac{355500.81}{400^3}$ zu 1, woraus sich ergiebt, dass diese Differenz für die Sonnenfluth nahe $2\frac{1}{4}$mal kleiner ist als für die Mondfluth. Ihre Werthe für die Sonnenfluth sind **erstens** bei geringer Meerestiefe 0,268 Meter oder 0,855′ pr., **zweitens** bei ganz flüssiger Erde 0,597 Meter oder 1,903′ pr. Für das System von Erde und Sonne ist $\frac{D}{d}$ sehr nahe $=1$; daher verhält sich für die Sonnenfluth $c-a$ zu $c-b$ wie $3:4$.

Denken wir uns nun die Erde in der That um **ihre Axe rotirend**, diese Rotation aber so langsam vor sich gehend, dass man den vorhin bestimmten Zustand des relativen Gleichgewichts als in jedem Augenblicke erreicht ansehen kann, und ferner die Mondbahn mit der Ebene des Aequators zusammenfallend. Die Pole behalten jetzt immer dieselbe vorhin bestimmte Höhe des Wasserstandes, die Punkte des

Aequators dagegen gehen abwechselnd durch die Gegenden des höchsten und tiefsten Wasserstandes hindurch. Zur Zeit des Neu- und Vollmondes, wo die Gesammthöhe der Fluth sehr nahe die Summe der einzelnen Höhen der Sonnen- und Mondfluth ist, wird der Unterschied des höchsten und tiefsten Wasserstandes am Aequator erstens für den Fall einer geringen Meerestiefe 0,872 Meter oder 2,779′ pr., zweitens für den Fall einer ganz flüssigen Erde 1,940 Meter oder 6,185′ pr. Zur Zeit der Quadraturen dagegen sind dieselben Grössen 0,336 Meter oder 1,069′ pr. und 0,746 Meter oder 2,379′ pr.

Die obige vorläufige Voraussetzung, dass trotz der Axendrehung der Erde der relative Gleichgewichtszustand stets erreicht sei, kann nun aber bei der verhältnissmässig raschen Rotation der Erde durchaus nicht als zulässig gelten; es findet vielmehr ein stetes Schwanken der Meeresoberfläche um ihre relative Gleichgewichtsfigur statt. Daher kann auch die hier vorliegende Theorie der Ebbe und Fluth nicht als das Wesen dieser Erscheinungen vollständig erschöpfend betrachtet werden; eine solche erschöpfende Untersuchung muss vielmehr die Theorie der betreffenden Erscheinungen als Problem der Oscillationen des Meeres auffassen, nicht als Problem einer relativen Gleichgewichtsfigur. Eine derartige Durchführung dieser Theorie giebt Laplace in der *Mécanique céleste.*

§ 4. Oscillationen einer homogenen Flüssigkeitsmasse, deren Theilchen nur ihrer eigenen Anziehung unterworfen sind.

1. Wir denken uns eine homogene flüssige Masse, auf deren Theilchen blos die gegenseitige Massenanziehung ihrer Theilchen wirkt. Dieselbe nimmt im Gleichgewichtszustande die Gestalt einer Kugel an und dieses Gleichgewicht ist ein stabiles. Wird nun die Flüssigkeitskugel einer kleinen Erschütterung ausgesetzt, so entfernen sich die Theilchen derselben ein wenig von ihrer anfänglichen Lage und es entstehen dadurch infolge der gegenseitigen Anziehung der Theilchen fortdauernde Oscillationen derselben um ihre Gleichgewichtslage. Die Gestalt, welche die Oberfläche der Flüssigkeit in den verschiedenen Stadien einer Oscillation darbietet, kann offenbar sehr verschieden sein und hängt von der Art der anfänglichen Erschütterung ab. Der denkbar einfachste Fall dieser Oscillationen scheint der zu sein, in welchem die Oberfläche stets die Gestalt eines Ellipsoids zeigt, dessen Mittelpunkt stets in den Mittelpunkt der ursprünglichen sphärischen Gleichgewichtsfigur fällt und dessen Axen stets dieselbe Richtung behalten, sich aber abwechselnd verkürzen und verlängern, — vorausgesetzt, dass eine derartige Bewegung überhaupt möglich ist. Wir machen demgemäss über die zu untersuchende Bewegung folgende Unterstellungen. Die Theilchen, welche sich ursprünglich im Mittelpunkte der sphärischen Gleichgewichtsfigur befinden, sollen während der ganzen Bewegung in Ruhe bleiben; die anderen Theilchen

dagegen sollen eine desto grössere Oscillationsamplitude besitzen, je weiter sie vom Mittelpunkte entfernt sind, und alle Theilchen, welche sich einmal auf einer Axe der nacheinander auftretenden Oberflächengestalten befinden, sollen auch fortwährend auf derselben verbleiben. Die Dauer T einer Oscillation sei für alle Theilchen die gleiche. Alle Oscillationen sollen fortwährend sehr klein und geradlinig bleiben. Wir haben also zu untersuchen, ob eine Bewegung, wie sie bisher im Allgemeinen charakterisirt wurde, möglich ist, und in diesem Falle ihre näheren Attribute zu bestimmen.

2. Den Mittelpunkt der ursprünglichen Kugelfläche und der nach unserer Annahme nachher auftretenden Ellipsoide nehmen wir zum Coordinatenanfangspunkt, die Axen der fraglichen Ellipsoide zu Coordinatenaxen. Die Dichtigkeit der Flüssigkeit werde mit ϱ, der Radius der ursprünglichen sphärischen Oberfläche mit R bezeichnet. Es seien x_0, y_0, z_0 die Coordinaten eines Theilchens im ursprünglichen Ruhezustande, x, y, z diejenigen desselben Theilchens zu einer beliebigen Zeit t; ξ, η, ζ die Projectionen der Verschiebung dieses Theilchens zur Zeit t auf die Axen. Dem oben dargestellten Charakter der Bewegung genügen nun folgende Annahmen über die Grössen ξ, η, ζ:

$$\xi = \mu_1 x_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \eta = \mu_2 y_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \zeta = \mu_3 z_0 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

unter μ_1, μ_2, μ_3 gewisse kleine Constante verstanden. Denn zwischen den ursprünglichen Coordinaten x_0, y_0, z_0 eines Theilchens, welches ursprünglich in der sphärischen Oberfläche lag und demzufolge auch stets in der Flüssigkeitsoberfläche verbleibt, besteht die Beziehung $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2$. Nun ist aber

$$x = x_0 + \xi = x_0 \left(1 + \mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right),$$

$$y = y_0 + \eta = y_0 \left(1 + \mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right),$$

$$z = z_0 + \zeta = z_0 \left(1 + \mu_3 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right),$$

folglich

$$\frac{x^2}{R^2\left(1 + \mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right)^2} + \frac{y^2}{R^2\left(1 + \mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right)^2} + \frac{z^2}{R^2\left(1 + \mu_3 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right)^2} = 1.$$

Die Oberfläche ist also ein Ellipsoid. Dass die übrigen Voraussetzungen erfüllt sind, ist sofort klar. Es bleibt also noch zu untersuchen, ob die angenommene Bewegung den Gesetzen der Hydrodynamik gehorche.

3. Für tropfbare Flüssigkeiten muss die cubische Dilatation, resp. Compression verschwinden, welche Bedingung sich ausspricht durch die sogenannte Continuitätsgleichung, die für diesen Fall (bei Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung) folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_0}+\frac{\partial \eta}{\partial y_0}+\frac{\partial \zeta}{\partial z_0}=0.$$

Es ist aber

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_0}=\mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y_0}=\mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z_0}=\mu_3 \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

und die Continuitätsgleichung geht über in

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3=0.$$

Nach dem d'Alembert'schen Princip muss ferner in jedem Augenblicke Gleichgewicht bestehen zwischen den an der Flüssigkeit wirkenden verlorenen Kräften. Ist V das Potential der flüssigen Masse, f die Anziehungsconstante, so sind die verlorenen Kräfte, auf die Masseneinheit bezogen

$$f\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad f\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad f\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

oder

$$f\frac{\partial V}{\partial x}+\mu_1 x\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$f\frac{\partial V}{\partial y}+\mu_2 y\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$f\frac{\partial V}{\partial z}-(\mu_1+\mu_2) z\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

wo mit Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung x, y, z statt x_0, y_0, z_0 gesetzt ist. Wenn also in irgend einem Momente an der Flüssigkeit Kräfte angebracht würden, deren Componenten durch die vorstehenden Ausdrücke dargestellt sind und die Flüssigkeitstheilchen zugleich in diesem Momente ihre Geschwindigkeiten verlören, so würde die Flüssigkeitsmasse in der Gestalt, welche sie in diesem Moment gerade besitzt, im Gleichgewicht verharren. Die Gleichung für den hydrostatischen Druck wird sonach

$$p=\varrho\left\{fV+\tfrac{1}{2}\left[\mu_1 x^2+\mu_2 y^2-(\mu_1+\mu_2) z^2\right]\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right\}+Const.$$

und also endlich die Gleichung für die Oberfläche

$$fV_0+\tfrac{1}{2}\left[\mu_1 x^2+\mu_2 y^2-(\mu_1+\mu_2) z^2\right]\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T}=Const.$$

Diese Gleichung muss in allen Punkten der Oberfläche in jedem Augenblicke erfüllt sein, wenn die vorausgesetzte Bewegung der Flüssigkeit möglich sein soll. Wir müssen jetzt zunächst das Potential V bilden. Zur Zeit t besitzt nach dem Obigen die Flüssigkeit die Gestalt eines Ellipsoids mit den Halbaxen

$$R\left(1+\mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad R\left(1+\mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad R\left(1-[\mu_1+\mu_2] \sin 2\pi \frac{t}{T}\right);$$

nennen wir diese kurz a, b, c, so haben wir weiter bei Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung

$$a^2 = R^2\left(1 + 2\mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right),$$

$$b^2 = R^2\left(1 + 2\mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right),$$

$$c^2 = R^2\left(1 - 2\,[\mu_1 + \mu_2] \sin 2\pi \frac{t}{T}\right).$$

Hieraus findet sich für die Quadrate der numerischen Excentricitäten $\varkappa$ und λ der Oberfläche, wieder bei Beschränkung auf kleine Grössen erster Ordnung

$$\varkappa^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2} = 2\,(2\,\mu_1 + \mu_2) \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$\lambda^2 = \frac{b^2 - c^2}{c^2} = 2\,(\mu_1 + 2\,\mu_2) \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Für das innere Potential eines Ellipsoids mit den Halbaxen a, b, c haben wir nun aber bei Beschränkung auf die Quadrate der Excentricitäten nach 1), § 1

$$V_i = 2\,a\,b\,\varrho\,\pi\,[1 - \tfrac{1}{6}(\varkappa^2 + \lambda^2)] - \frac{2\,a\,b}{c^2}\,\varrho\,\pi\,[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{10}(3\,\varkappa^2 + \lambda^2)]\,x^2$$

$$- \frac{2\,a\,b}{c^2}\,\varrho\,\pi\,[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{10}(\varkappa^2 + 3\,\lambda^2)]\,y^2 - \frac{2\,a\,b}{c^2}\,\varrho\,\pi\,[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{10}(\varkappa^2 + \lambda^2)]\,z^2.$$

Bei fortwährender Beschränkung auf die Grössen der niedrigsten Ordnung erhält man nach dem Obigen

$$a\,b = R^2\left(1 + [\mu_1 + \mu_2] \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad \frac{a\,b}{c^2} = 1 + 3\,[\mu_1 + \mu_2] \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Hieraus folgt nun durch Einsetzung in die Formel für V_i mit demselben Grade der Annäherung

$$V_i = 2\,R^2\varrho\,\pi - 2\,\varrho\,\pi\left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{5}\mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right]x^2 - 2\,\varrho\,\pi\left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{5}\,\mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right]y^2$$

$$- 2\,\varrho\,\pi\left[\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{5}\,(\mu_1 + \mu_2) \sin 2\pi \frac{t}{T}\right]z^2.$$

Dieser Ausdruck ist jetzt in die obige Bedingungsgleichung für die Oberfläche einzusetzen. Nach gehöriger Ordnung lässt sich diese dann in folgender Form schreiben:

$$\left\{- \tfrac{2}{3}\,\varrho\,\pi f\left[1 - \tfrac{6}{5}\,\mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right] + \tfrac{1}{2}\,\mu_1\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right\} x^2$$

$$+ \left\{- \tfrac{2}{3}\,\varrho\,\pi f\left[1 - \tfrac{6}{5}\,\mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right] + \tfrac{1}{2}\,\mu_2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right\} y^2$$

$$+ \left\{- \tfrac{2}{3}\,\varrho\,\pi f\left[1 + \tfrac{6}{5}\,(\mu_1 + \mu_2) \sin 2\pi \frac{t}{T}\right] - \tfrac{1}{2}\,(\mu_1 + \mu_2)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right\} z^2 = Const.$$

Das Bestehen dieser Gleichung für alle Punkte der Oberfläche erfordert, dass die Coefficienten von x^2, y^2, z^2 in derselben den entsprechenden Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche proportional sind. Die

Gleichung der Oberfläche können wir aber wegen der Kleinheit von μ_1 und μ_2 auch so schreiben:

$$x^2\left[1-2\mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right]+y^2\left[1-2\mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right]+z^2\left[1+2(\mu_1+\mu_2) \sin 2\pi \frac{t}{T}\right]=R^2.$$

Behufs der bequemern Vergleichung schreiben wir die vorige Bedingungsgleichung in folgender noch etwas geänderter Form:

$$\begin{aligned}
&\left\{-\tfrac{2}{3}\varrho\pi f\left[1-2\mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right]+\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2-\tfrac{8}{15}\varrho\pi f\right]\mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right\} x^2 \\
+&\left\{-\tfrac{2}{3}\varrho\pi f\left[1-2\mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right]+\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2-\tfrac{8}{15}\varrho\pi f\right]\mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right\} y^2 \\
+&\left\{-\tfrac{2}{3}\varrho\pi f\left[1+2(\mu_1+\mu_2) \sin 2\pi \frac{t}{T}\right]\right. \\
&\quad\left.-\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2-\tfrac{8}{15}\varrho\pi f\right](\mu_1+\mu_2) \sin 2\pi \frac{t}{T}\right\} z^2 = Const.
\end{aligned}$$

In dieser Form zeigt nun diese Gleichung sofort durch Vergleichung mit der Gleichung der Oberfläche, dass ihr Bestehen für alle Punkte der Oberfläche der Flüssigkeit blos an folgende Bedingung geknüpft ist:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2-\tfrac{8}{15}\varrho\pi f=0.$$

Wenn diese Gleichung erfüllt ist, so besteht in jedem Augenblick das Gleichgewicht des d'Alembert'schen Princips und die hypothetisch angenommene Bewegungsart der flüssigen Masse ist dann also in der That möglich. Es dient aber offenbar die vorige Gleichung zur Bestimmung der Oscillationsdauer T, für welche sie giebt

$$T=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{15\pi}{\varrho f}}.$$

Da dieser Werth reell ist, so kann also auch die vorhergehende Gleichung stets befriedigt werden, und wir ziehen daher aus allem Vorhergehenden jetzt folgendes Gesammtresultat:

Unter den möglichen Bewegungen der Flüssigkeitskugel giebt es auch regelmässige sehr kleine Oscillationen, bei welchen die Oberfläche der Flüssigkeit stets die Gestalt eines Ellipsoids behält und deren Charakter oben näher beschrieben wurde. Die Zeit einer ganzen derartigen Oscillation der Flüssigkeit ist gegeben durch die Gleichung $T=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{15\pi}{\varrho f}}$ und die Verschiebungen eines beliebigen Flüssigkeitstheilchens, dessen Coordinaten im ursprünglichen Ruhezustande x_0, y_0, z_0 waren, zur Zeit t sind gegeben durch die Gleichungen

$$\xi=\mu_1 x_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \eta=\mu_2 y_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \zeta=-(\mu_1+\mu_2) z_0 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

unter μ_1 und μ_2 zwei willkürliche sehr kleine Constante verstanden. Die Halbaxen der ellipsoidischen Oberfläche der Flüssigkeit sind zur Zeit t

$$R\left(1+\mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad R\left(1+\mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad R\left(1-[\mu_1+\mu_2] \sin 2\pi \frac{t}{T}\right).$$

4. Wir wollen die gefundene Bewegung noch etwas näher discutiren.

a) Die Formel für die Oscillationsdauer T zeigt, dass diese Grösse von den Dimensionen der Flüssigkeitsmasse ganz unabhängig ist, dagegen ist dieselbe der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit der Flüssigkeit umgekehrt proportional. Bezeichnet E den mittlern Halbmesser und σ die mittlere Dichtigkeit der Erde, g die Acceleration der Schwere, so haben wir, da eine homogene oder concentrisch geschichtete Kugel nach aussen so wirkt, als ob ihre ganze Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre, $\frac{\frac{4}{3}\pi E^3 \sigma f}{E^2} = g$ oder $f = \frac{3g}{4\pi\sigma E}$. Mittels dieses Werthes von f wird die Gleichung für T

$$T = \pi \sqrt{\frac{5E}{g} \cdot \frac{\sigma}{\varrho}}.$$

Nehmen wir als Werth des mittlern Erdhalbmessers E 858,5 geogr. Meilen à 7420,44 Meter, ferner für die Acceleration der Schwere $g =$ 9,7974 Meter pro Secunde, und setzen, um die Oscillationsdauer einer Wasserkugel zu bestimmen, $\frac{\sigma}{\varrho} = 5{,}62$, so ergiebt die Ausrechnung der vorigen Formel

$$T = 13430 \text{ Secunden} = 3\tfrac{3}{4} \text{ Stunden (nahe).}$$

Für eine Flüssigkeitskugel von derselben mittlern Dichtigkeit wie die Erde wäre die Oscillationsdauer 2,37 mal kleiner. Es versteht sich von selbst, dass die betrachtete Bewegung nur bei Flüssigkeitskugeln von grossem Radius überhaupt vorkommen kann, indem bei kleinem Radius die Wirkung der gegenseitigen Anziehung der Theilchen gegen die Wirkung der Molecularkräfte, welche die Wirkung der Oberflächenspannung bedingen, verschwindet.

b) Die erörterte Bewegung lässt sich folgendermassen geometrisch charakterisiren. Zu den Zeiten $t = 0, = \frac{1}{2}T, = T, = \frac{3}{2}T, = \ldots$ geht jedes Theilchen durch seine ursprüngliche Ruhelage und die Oberfläche der Flüssigkeit durch ihre sphärische Gleichgewichtsfigur. Die Richtung, in welcher ein Theilchen oscillirt, dessen Coordinaten im Gleichgewichtszustande x_0, y_0, z_0 sind, bildet mit den Axen Winkel, deren Cosinus sich verhalten wie

$$\mu_1 x_0 : \mu_2 y_0 : -(\mu_1+\mu_2) z_0.$$

Die Oscillationsrichtungen der Theilchen stehen also sämmtlich senkrecht auf den durch die Ruhelage derselben gehenden Hyperboloiden, deren Gleichung ist

$$\mu_1 x_0^2 + \mu_2 y_0^2 - (\mu_1 + \mu_2) z_0^2 = Const.$$

Oder denken wir uns die Orthogonalcurven, welche sich diesen Hyperboloiden zuordnen, so ist die Oscillationsrichtung jedes Theilchens Tangente an derjenigen dieser Orthogonalcurven, welche durch die Ruhelage des Theilchens geht. Die Differentialgleichungen dieser Orthogonalcurven sind

$$\frac{d x_0}{d s_0} : \frac{d y_0}{d s_0} : \frac{d z_0}{d s_0} = \mu_1 x_0 : \mu_2 y_0 : -(\mu_1 + \mu_2) z_0,$$

und deren Integrale, unter A und B zwei Constante verstanden,

$$y_0 = A x_0^{\frac{\mu_2}{\mu_1}}, \quad z_0 = B x_0^{-\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1}}.$$

Es sind also diese Strömungscurven parabolische Curven, und zwar im Allgemeinen solche doppelter Krümmung.

c) Die Gleichung der Oberfläche lässt sich schreiben

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2[\mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 - (\mu_1 + \mu_2) z^2] \sin 2\pi \frac{t}{T} = R^2.$$

Sie wird stets befriedigt für jedes t durch solche Werthe von x, y, z, welche den beiden Gleichungen genügen

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad \mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 - (\mu_1 + \mu_2) z^2 = 0.$$

Es schneiden sich also sämmtliche im Verlaufe der Bewegung auftretenden ellipsoidischen Oberflächengestalten in einer und derselben Raumcurve, in welcher auch die ursprüngliche Kugelfläche von einem gewissen Kegel zweiten Grades geschnitten wird.

d) Es sollen endlich noch zwei besonders interessante Specialfälle kurz hervorgehoben werden. Es sei erstens $\mu_2 = -\mu_1$. Jetzt wird $\zeta = 0$ und die Oscillationen aller Theilchen finden also parallel der xy-Ebene statt. Die Halbaxen der ellipsoidischen Oberfläche zur Zeit t werden jetzt, wenn wir einfach μ statt μ_1 schreiben

$$a = R\left(1 + \mu \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad b = R\left(1 - \mu \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad c = R;$$

die in die z-Axe fallende Axe der Flüssigkeit bleibt also in diesem Falle stets von gleicher Länge $2R$; von den beiden anderen Axen verlängert sich die eine stets, wenn die andere sich verkürzt, und umgekehrt. Die oben berührte Kegelfläche besitzt in diesem Falle die Gleichung $x^2 - y^2 = 0$, d. h. sie zerfällt in das System zweier in der z-Axe sich schneidender Ebenen, dargestellt durch $x + y = 0$, $x - y = 0$; es sind dieses die beiden Ebenen, welche die von der xz- und yz-Ebene gebildeten Winkel halbiren. Die besagten Ebenen schneiden die ursprüngliche Kugelfläche in zwei grössten Kreisen, in welchen dieselbe sonach in diesem Falle auch von allen der Reihe nach auftretenden ellipsoidischen Oberflächen geschnitten wird. Die Strömungslinien werden in diesem Falle, wie vorauszusehen war, ebene Curven, deren Gleichungen sind $y = Ax^{-1}$, $z = B$. Die erstere charakterisirt dieselben als gleichseitige Hyperbeln, deren Horizontalprojectionen sich an die x- und y-Axe als Asymptoten anschmiegen.

Ein zweiter ausgezeichneter Specialfall ist derjenige, in welchem man $\mu_1 = \mu_2$ hat. Schreiben wir dann wieder μ statt μ_1, so sind die Halbaxen der ellipsoidischen Oberfläche

$$a = R\left(1 + \mu \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad b = R\left(1 + \mu \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad c = R\left(1 - 2\mu \sin 2\pi \frac{t}{T}\right),$$

ferner die Gleichung der besagten Kegelfläche $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ und endlich die Gleichungen der Strömungscurven $y = Ax$, $z = Bx^{-2}$. Hieraus folgt, dass in diesem Falle sämmtliche ellipsoidische Oberflächen Rotationsellipsoide sind, deren Axe in die z-Axe und deren Aequatorebene in die xy-Ebene fällt, und zwar abwechselnd verlängerte und abgeplattete. Der Abstand des Polarhalbmessers von seinem Mittel ist absolut genommen immer doppelt so gross, wie der entgegengesetzte Unterschied des Aequatorhalbmessers von seinem Mittel. Die oben besagte Kegelfläche ist jetzt auch ein Rotationskegel um die z-Axe, dessen Seiten gegen die z-Axe um einen Winkel geneigt sind, dessen Tangente $= \sqrt{2}$ ist. Diese Kegelfläche schneidet jetzt wieder die ursprüngliche Kugelfläche in zwei Kreisen, durch welche ebenso alle ellipsoidischen Oberflächen gehen. Die Strömungscurven sind wieder ebene Curven, deren Ebenen durch die z-Axe gehen. Betrachten wir z. B. diejenigen, welche in der xz-Ebene liegen; es sind hyperbolische Curven dritten Grades, welche sich aber an die x-Axe viel enger anschliessen, als an die z-Axe.

II. Theil. Nicht homogene Ellipsoide.

§ 1. Näherungsformeln für das Potential eines nicht homogenen Ellipsoids mit kleinen Excentricitäten.

Denken wir uns zuerst eine homogene ellipsoidische Schale, begrenzt von zwei Ellipsoiden mit gleichgerichteten Axen, die sich beide nicht weit von der Kugelform entfernen. Dieselben seien bestimmt durch die eine Axe und die Excentricitäten c_0, e_0, ε_0; c_1, e_1, ε_1; die Dichtigkeit sei ϱ. Das Potential der Schale für einen Punkt des innern Hohlraumes oder des äussern Raumes stellt sich dann dar durch die Differenz der Potentiale für die Ellipsoide c_0, e_0, ε_0 und c_1, e_1, ε_1, und wir erhalten, wenn wir diese Differenz durch Δ andeuten,* gemäss der Formeln 1′) und 2′)

---

* Es ist also beispielsweise

$$\Delta\left(\frac{e_i^2}{c_i^2}\right) = \frac{e_i^2}{c_i^2} - \frac{e^2_{i-1}}{c^2_{i-1}}.$$

in § 1 des I. Theiles zunächst für das Potential in einem Punkte des innern Hohlraumes

$$v_i = 2\pi\varrho\left\{\varDelta(c^2+\tfrac{1}{3}[e^2+\varepsilon^2]) - \frac{r^2}{15}\varDelta\left(\frac{e^2}{c^2}+\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right) + \frac{x^2}{5}\varDelta\left(\frac{e^2}{c^2}\right) + \frac{y^2}{5}\varDelta\left(\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right)\right\},$$

und ebenso für das äussere Potential der Schale

$$v_a = \tfrac{4}{3}\pi\varrho\left\{\frac{\varDelta(c^3+\frac{1}{2}c[e^2+\varepsilon^2])}{r} - \tfrac{1}{10}\frac{\varDelta(c^3[e^2+\varepsilon^2])}{r^3} + \tfrac{3}{10}\frac{x^2\varDelta(c^3e^2)+y^2\varDelta(c^3\varepsilon^2)}{r^5}\right\}.$$

Nun denke man sich eine nicht homogene ellipsoidische Schale. Die Flächen, in denen die Dichtigkeit sich stetig oder discontinuirlich ändert, sollen aber, ebenso wie die beiden Oberflächen, sämmtlich Ellipsoide mit gleichgerichteten Axen und kleinen Excentricitäten sein. Dieselben theilen die gegebene nicht homogene Schale in eine endliche oder unendlich grosse Reihe homogener Schalen und wir erhalten also das Potential der gegebenen Schale durch eine Summation über alle homogenen Elementarschalen. Die Dichtigkeit ϱ, ebenso wie die Excentricitäten e und ε, sind hier als Functionen der Axe c zu betrachten. Die der innern und äussern Grenzfläche der gegebenen Schale entsprechenden Werthe von c seien c_0 und c_n. Dann ist für das innere Potential

$$4)\quad \begin{aligned} V_i = 2\pi\Bigg\{&\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\varDelta(c^2+\tfrac{1}{3}[e^2+\varepsilon^2]) - \tfrac{1}{15}r^2\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\varDelta\left(\frac{e^2}{c^2}+\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right) \\ &+ \tfrac{1}{5}x^2\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\varDelta\left(\frac{e^2}{c^2}\right) + \tfrac{1}{5}y^2\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\varDelta\left(\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right)\Bigg\},\end{aligned}$$

und für das äussere Potential

$$5)\quad \begin{aligned} V_a = \tfrac{4}{3}\pi\Bigg\{&\frac{\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\varDelta(c^3+\frac{1}{2}c[e^2+\varepsilon^2])}{r} - \tfrac{1}{10}\frac{\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\varDelta(c^3[e^2+\varepsilon^2])}{r^3} \\ &+ \tfrac{3}{10}\frac{x^2\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\varDelta(c^3e^2)+y^2\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\varDelta(c^3\varepsilon^2)}{r^5}\Bigg\}.\end{aligned}$$

Ist die Dichtigkeitsänderung eine stetige, so treten Differentiale und Integrale an die Stelle der Differenzen und Summen. Das äussere Potential eines vollen Ellipsoids, in welchem die Dichtigkeit nach ellipsoidischen Flächen mit gleichgerichteten Axen und kleinen Excentricitäten wechselt, wird aus der letzten Formel erhalten, wenn man nur c_0 durch Null ersetzt oder, was auf dasselbe hinauskommt, als untere Summationsgrenze Null nimmt.

§ 2. Gleichgewichtsfigur eines Systems von Flüssigkeiten, welche einen ellipsoidischen Kern umgeben, wenn das System eine Rotationsbewegung mit der kleinen Winkelgeschwindigkeit ϑ um die z-Axe ausführt.

1. Man habe ein Ellipsoid, dessen Oberfläche nur wenig von der Kugelform abweicht und durch die Halbaxen a', b', c' und die Excentricitäten $e' = \sqrt{a'^2 - c'^2}$ und $\varepsilon' = \sqrt{b'^2 - c'^2}$ bestimmt ist. Im Falle dasselbe nicht homogen ist, seien die Flächen constanter Dichtigkeit sämmtlich Ellipsoide von kleinen Excentricitäten, deren Axen mit denen der Oberfläche gleichgerichtet sind. Die Dichte werde mit σ bezeichnet, welches dann eine Function von c ist. Man kann nun das äussere Potential des Ellipsoids durch folgende Formel darstellen:

$$6)\qquad V_a = \frac{M}{r} - \tfrac{1}{10}\frac{P+Q}{r^3} + \tfrac{3}{10}\frac{Px^2 + Qy^2}{r^5};$$

dabei ist im Falle der Homogenität nach Gleichung 2) des § 1 im I. Theile

$$M = \tfrac{4}{3}\pi\sigma a'b'c' = \tfrac{4}{3}\pi\sigma[c'^3 + \tfrac{1}{2}c'(e'^2 + \varepsilon'^2)],$$
$$P = Me'^2 = \tfrac{4}{3}\pi\sigma c'^3 e'^2, \quad Q = M\varepsilon'^2 = \tfrac{4}{3}\pi\sigma c'^3\varepsilon'^2;$$

für ein nicht homogenes Ellipsoid ist nach Gleichung 5)

$$M = \tfrac{4}{3}\pi \sum_0^{c'} \sigma \Delta[c^3 + \tfrac{1}{2}c(e^2 + \varepsilon^2)],$$
$$P = \tfrac{4}{3}\pi \sum_0^{c'} \sigma\Delta(c^3 e^2), \quad Q = \tfrac{4}{3}\pi \sum_0^{c'} \sigma\Delta(c^3\varepsilon^2).$$

2. Denken wir uns jetzt ein System flüssiger Schichten verschiedener Dichtigkeit, die sich aber nicht mischen, über dem ellipsoidischen Kerne ausgebreitet, und das ganze System um die z-Axe mit der kleinen Winkelgeschwindigkeit ϑ gleichförmig rotirend. Wir fragen, ob das Gleichgewicht sich dadurch herstellen könne, dass alle Grenzflächen der einzelnen Schichten sich nach wenig excentrischen Ellipsoiden krümmen, deren Axen sämmtlich mit denen des festen Kernes gleichgerichtet sind. Dies vorausgesetzt, seien die Bestimmungsstücke der einzelnen Grenzflächen, von innen angefangen: c', e', ε'; c_1, e_1, ε_1; c_2, e_2, ε_2; ... c_n, e_n, ε_n; die Dichtigkeiten der einzelnen Schichten ϱ_1, ϱ_2, ... ϱ_n, ihre Potentialfunctionen V_1, V_2, ... V_n. Dann muss für jede Grenzfläche zweier Schichten und die äussere Oberfläche der äussersten die Bedingung erfüllt sein

$$f(V_a + V_1 + V_2 + \ldots + V_n) + \tfrac{1}{2}\vartheta^2(x^2 + y^2) = Const.,$$

worin f die Anziehungsconstante bezeichnet.

3. Um den Ausdruck des Gesammtpotentials für die Punkte der durch die Grössen c_i, e_i, ε_i bestimmten Trennungsfläche zwischen der i^{ten} und $(i+1)^{\text{ten}}$ Schichte aufzustellen, haben wir für die Schichten von

der ersten bis zur i^{ten} incl. das äussere, für die Schichten von der $(i+1)^{\text{ten}}$ bis zur n^{ten} das innere Potential zu nehmen. Dann erhalten wir gemäss den Gleichungen 5) und 1')

$$V_a + V_1 + V_2 + \ldots + V_n$$

$$= \frac{M + \frac{4}{3}\pi \sum_{c_1}^{c_i} \varrho \Delta [c^3 + \frac{1}{2} c (e^2 + \varepsilon^2)]}{r} - \frac{1}{10} \frac{P + Q + \frac{4}{3}\pi \sum_{c_1}^{c_i} \varrho \Delta [c^3 (e^2 + \varepsilon^2)]}{r^3}$$

$$+ \frac{3}{10} \frac{x^2 \left[P + \frac{4}{3}\pi \sum_{c_1}^{c_i} \varrho \Delta (c^3 e^2) \right] + y^2 \left[Q + \frac{4}{3}\pi \sum_{c_1}^{c_i} \varrho \Delta (c^3 \varepsilon^2) \right]}{r^5}$$

$$+ 2\pi \sum_{c_i+1}^{c_n} \varrho \Delta (c^2 + \tfrac{1}{3} e^2 + \tfrac{1}{3} \varepsilon^2) - \frac{2\pi}{15} r^2 \sum_{c_{i+1}}^{c_n} \varrho \Delta \left(\frac{e^2}{c^2} + \frac{\varepsilon^2}{c^2} \right)$$

$$+ \frac{2\pi}{5} x^2 \sum_{c_{i+1}}^{c_n} \varrho \Delta \left(\frac{e^2}{c^2} \right) + \frac{2\pi}{5} y^2 \sum_{c_i+1}^{c_n} \varrho \Delta \left(\frac{\varepsilon^2}{c^2} \right).$$

In denjenigen Gliedern dieses Ausdruckes, in welchen Grössen von der Ordnung der Excentricitätsquadrate vorkommen, ist r einfach durch c_i zu ersetzen, im ersten Gliede dagegen ist zu schreiben (vgl. § 1, I. Thl.)

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{c_i} - \frac{e_i^2 x^2 + \varepsilon_i^2 y^2}{2 c_i^5}.$$

Setzt man diesen Werth des Gesammtpotentials in obige Bedingungsgleichung ein, so erhält man durch Annullirung der Coefficienten der beiden unabhängigen Variabeln x^2 und y^2 zwei Gleichungen, welche nach Multiplication mit $10 c_i^5$ folgende Gestalt annehmen:

$$-5 \left[M + \tfrac{4}{3}\pi \sum_{c_1}^{c_i} \varrho \Delta (c^3) \right] e_i^2 + 4\pi \sum_{c_1}^{c_i} \varrho \Delta (c^3 e^2) + 4\pi c_i^5 \sum_{c_i+1}^{c_n} \varrho \Delta \left(\frac{e^2}{c^2} \right)$$
$$= -3P - \frac{5 \vartheta^2 c_i^5}{f},$$

$$-5 \left[M + \tfrac{4}{3}\pi \sum_{c_1}^{c_i} \varrho \Delta (c^3) \right] \varepsilon_i^2 + 4\pi \sum_{c_1}^{c_i} \varrho \Delta (c^3 \varepsilon^2) + 4\pi c_i^5 \sum_{c_i+1}^{c_n} \varrho \Delta \left(\frac{\varepsilon^2}{c^2} \right)$$
$$= -3Q - \frac{5 \vartheta^2 c_i^5}{f}.$$

Dies sind zwei lineare Gleichungen zwischen den Excentricitätsquadraten $e_1^2, e_2^2, \ldots e_n^2$; $\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \ldots \varepsilon_n^2$. Lässt man i die Werthereihe 1, 2, ... n durchlaufen, d. h. bildet man die entsprechenden zwei Gleichungen für jede Schichte, so erhält man $2n$ lineare Gleichungen zwischen den $2n$ unbekannten Excentricitätsquadraten, die sich also hierdurch eindeutig bestimmen. Auch sind die für dieselben sich ergebenden Werthe im Allgemeinen sehr kleine. Hat man also ein System beliebiger

Flüssigkeitsschichten, welche über einem wenig excentrischen ellipsoidischen festen Kerne ausgebreitet sind, und lässt das ganze System um eine der Axen des festen Kernes mit kleiner Winkelgeschwindigkeit rotiren, so ist ein einziger Gleichgewichtszustand möglich, bei welchem alle Grenzflächen der einzelnen flüssigen Schichten Ellipsoide von geringen Excentricitäten werden, deren Axen sämmtlich mit denen des festen Kernes gleichgerichtet sind.

4. Ist das feste Ellipsoid ein Rotationsellipsoid, so wird $P = Q$, $\varepsilon' = e'$, woraus folgt, dass, da die Coefficienten der Gleichungen für die Excentricitäten e und ε jetzt einander gleich werden, auch die ellipsoidischen Grenzflächen der verschiedenen Schichten der Flüssigkeit jetzt Rotationsellipsoide werden.

Obige zwei Gleichungen liefern auch dann noch für die Excentricitäten e und ε eindeutige und im Allgemeinen auch kleine Werthe, wenn $\vartheta = 0$ ist, woraus folgt, dass der oben definirte Gleichgewichtszustand auch dann noch ein möglicher ist, wenn das System keine Rotationsbewegung besitzt.

Ohne das vorliegende allgemeine Theorem in seinen Specialfällen zu discutiren, wollen wir nur noch zeigen, wie die Formeln dieses Paragraphen als Grundlage für eine Theorie der Gestalt der Erde dienen können.

§ 3. Zusammenhang zwischen der Dichtigkeit und der Abplattung der inneren Erdschichten.

Lässt man in § 2 die Annahme eines festen Kernes fallen, so wird $P = Q = M = 0$, $e' = \varepsilon' = 0$; also ist auch jetzt ein einziger Gleichgewichtszustand möglich, bei welchem alle Grenzflächen der einzelnen Schichten der Flüssigkeit concentrische Rotationsellipsoide werden, deren gemeinschaftliche Axe die Gerade ist, um welche das System sich dreht. Die Excentricitäten der einzelnen n-Flächen bestimmen sich durch ein System von n linearen Gleichungen, welches durch die folgende eine repräsentirt ist, in der i alle Werthe von 1 bis n zu durchlaufen hat:

$$\tfrac{5}{3}\sum_{0}^{c_i}\varrho\,\Delta(c^3)\,e_i^2 - \sum_{0}^{c_i}\varrho\,\Delta(c^3 e^2) - c_i^5\sum_{c_{i+1}}^{c_n}\varrho\,\Delta\left(\frac{e^2}{c^2}\right) = \frac{5\,c_i^5\,\vartheta^2}{4\pi f}.$$

Im Folgenden soll nun ϱ eine stetige Function des Polarhalbmessers c sein. Dann verwandelt sich obige Gleichung, wenn wir c_1 und e_1 statt c_n und e_n für die Werthe c und e an der Oberfläche setzen, in die folgende:

$$\tfrac{5}{3}\int_0^c \varrho\, d(c^3)\,.\,e^2 - \int_0^c \varrho\, d(c^3 e^2) - c^5\int_c^{c_1}\varrho\, d\left(\frac{e^2}{c^2}\right) = \frac{5\,c^5\,\vartheta^2}{4\pi f}.$$

Die Abplattung $\frac{a-c}{c}$ irgend einer der ellipsoidischen Flüssigkeitsschichten werde mit q bezeichnet; dann ist $\frac{e^2}{c^2}=q(2+q)$, also bei dem hier anzustrebenden Grade der Genauigkeit $q=\frac{1}{2}\frac{e^2}{c^2}$. Unsere nächste Aufgabe ist es nun, dieselbe als Function von c zu bestimmen, wenn ϱ als Function von c gegeben ist. Führen wir statt der Excentricität die Abplattung ein, so kommt

$$\tfrac{1}{3}c^2 q\int_0^c \varrho\, d(c^3)-\tfrac{1}{5}\int_0^c \varrho\, d(c^5 q)-\frac{c^5}{5}\int_c^{c_1}\varrho\, dq=\frac{c^5\vartheta^2}{8\pi f}$$

und nach Ausführung der Differentiation

$$c^2 q\int_0^c \varrho c^2\, dc-\int_0^c \varrho q c^4\, dc-\tfrac{1}{5}\int_0^c \varrho c^5\frac{dq}{dc}dc-\frac{c^5}{5}\int_c^{c_1}\varrho\frac{dq}{dc}dc=\frac{c^5\vartheta^2}{8\pi f}.$$

Um q ganz aus den Integralen zu entfernen, differentiiren wir diese Gleichung zweimal nach dem variabeln Polarhalbmesser c. Die erste Differentiation liefert, wenn man zugleich mit c^4 dividirt, um durch die zweite Differentiation das Glied mit ϑ zu entfernen:

$$\frac{2q}{c^3}\int_0^c \varrho c^2\, dc+\frac{1}{c^2}\frac{dq}{dc}\int_0^c \varrho c^2\, dc-\int_c^{c_1}\varrho\frac{dq}{dc}dc=\frac{5\vartheta^2}{8\pi f}.$$

Die zweite Differentiation liefert

$$7)\qquad \frac{d^2q}{dc^2}+\frac{2\varrho c^2}{\int_0^c \varrho c^2\, dc}\frac{dq}{dc}+2\left(\frac{\varrho c}{\int_0^c \varrho c^2\, dc}-\frac{3}{c^2}\right)q=0.$$

Es ist dies eine lineare Differentialgleichung in Hinsicht auf q, welche sich auch bei Laplace (*Méc. cél. l.* 3, *n.* 30) in fast ganz gleicher Gestalt findet. Ist ϱ als Function von c gegeben, so werden die Coefficienten derselben auch bekannte Functionen von c; sie ist also dann integrabel und bestimmt somit q als Function von c.

Auf specielle Annahmen über die unbekannte Function ϱ wollen wir hier nicht eingehen (vergl. hierüber die Abhandlung von Lipschitz, Crelle's Journal Bd. 62) und nur noch zeigen, wie sich das Clairot'sche Theorem aus Gleichung 6) ergiebt.

§ 4. Zusammenhang zwischen der Anziehung und Abplattung an der Oberfläche der Erde.

Die Componente der Schwere in einem Punkte der Oberfläche, d. h. der gesammten dort wirkenden Kraft, wie sie sich aus der reinen Anziehung und der Centrifugalkraft zusammensetzt, sind die partiellen Differentialquotienten der folgenden Function U, unter V wieder das Potential verstanden:

$$U = \tfrac{1}{2}\vartheta^2(x^2+y^2) + Vf,$$

oder nach Entwickelung von V, unter r den Radius vector verstanden:

$$U = \tfrac{1}{2}\vartheta^2(x^2+y^2) + f\left\{\frac{M}{r} - \tfrac{1}{5}\frac{P}{r^3} + \tfrac{3}{10}\frac{P(x^2+y^2)}{r^5}\right\},$$

wobei gesetzt ist [vergl. Gleich. 6)]

$$M = \tfrac{4}{3}\pi\int_0^{c_1}\varrho\, d(c^3 + ce^2), \quad P = \tfrac{4}{3}\pi\int_0^{c_1}\varrho\, d(c^3 e^2).$$

1. Da die freie Oberfläche der Flüssigkeit eine Niveaufläche ist, so muss die Richtung der Schwere oder Gesammtkraft in jedem Punkte derselben auf ihr senkrecht stehen, und wir müssten also, um die ganze Intensität der Schwere in einem Punkte der Oberfläche zu erhalten, U nach der Normalen der Oberfläche in diesem Punkte differentiiren. Statt dessen können wir aber auch U nach r oder dem Radius vector differentiiren, da der Cosinus des Winkels zwischen Normale und Radius vector erst um eine kleine Grösse zweiter Ordnung von der Einheit abweicht. Um U nach der Richtung des Radius vector bequem differentiiren zu können, führen wir in diesen Ausdruck den Winkel φ ein, den der Radius vector mit der xy-Ebene oder der Aequatorealebene macht. Dieser Winkel wird sonst als „verbesserte Breite" bezeichnet und ist für die Erde von der „Breite" oder Polhöhe nur um eine kleine Grösse erster Ordnung verschieden. Wir setzen also $x^2 + y^2 = r^2 \cos\varphi^2$ und haben darnach

$$U = \tfrac{1}{2}\vartheta^2 r^2 \cos\varphi^2 + f\left\{\frac{M}{r} - \tfrac{1}{5}\frac{P}{r^3} + \tfrac{3}{10}\frac{P\cos\varphi^2}{r^3}\right\},$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \vartheta^2 r \cos\varphi^2 - f\left\{\frac{M}{r^2} - \tfrac{3}{5}\frac{P}{r^4} + \tfrac{9}{10}\frac{P\cos\varphi^2}{r^4}\right\}.$$

Um beide Formeln auf die Oberfläche anzuwenden, setzen wir in dem ersten Gliede des eingeklammerten Ausdruckes bezüglich

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{c_1} - \frac{e_1^2\cos\varphi^2}{2c_1^3}; \quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{c_1^2} - \frac{e_1^2\cos\varphi^2}{c_1^4},$$

wie sich aus dem früher (I. Theil, § 1) benutzten Ausdrucke

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{e^2x^2 + \varepsilon^2y^2}{2c^4}\right)$$

ergiebt. In allen übrigen Gliedern, die schon kleine Factoren enthalten, ist r einfach durch c_i zu ersetzen. Deuten wir die Werthe von U und $\frac{\partial U}{\partial r}$ für die Oberfläche mit U_{c_1} und $\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{c_1}$ an, so ist demnach

$$U_{c_1} = \tfrac{1}{2}\vartheta^2 c_1{}^2 \cos\varphi^2 + f\left\{\frac{M}{c_1} - \tfrac{1}{5}\frac{P}{c_1{}^3} - \frac{M e_1{}^2 \cos\varphi^2}{2 c_1{}^3} + \tfrac{3}{10}\frac{P\cos\varphi^2}{c_1{}^3}\right\},$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{c_1} = \vartheta^2 c_1 \cos\varphi^2 - f\left\{\frac{M}{c_1{}^2} - \tfrac{3}{5}\frac{P}{c_1{}^4} - \frac{M e_1{}^2 \cos\varphi^2}{c_1{}^4} + \tfrac{9}{10}\frac{P\cos\varphi^2}{c_1{}^4}\right\}.$$

Aus dem letzten Ausdrucke müssen wir P wegschaffen. Die Bedingung, dass U_{c_1} für die ganze Oberfläche constant sein muss, erfordert die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\vartheta c_1{}^2 + f\left(-\frac{M e_1{}^2}{2 c_1{}^3} + \tfrac{3}{10}\frac{P}{c_1{}^3}\right) = 0.$$

Hieraus folgt für P

$$\frac{P}{c_1{}^3} f = -\tfrac{5}{3}\vartheta^2 c_1{}^2 + \tfrac{5}{3}\frac{M e_1{}^2 f}{c_1{}^3}.$$

Demgemäss erhalten wir

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{c_1} = -\left[\vartheta^2 c_1 + \frac{Mf}{c_1{}^2}\left(1 - \frac{e_1{}^2}{c_1{}^2}\right)\right] + \left[\tfrac{5}{2}\vartheta^2 c_1 - \tfrac{1}{2}\frac{M e_1{}^2 f}{c_1{}^4}\right]\cos\varphi^2.$$

Bezeichnet nun g den absoluten Werth der Intensität der Schwere, so ist

$$g = -\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{c_1}.$$

Daraus folgt

$$g = A - B\cos\varphi^2,$$

wo

$$A = \vartheta^2 c_1 + \frac{Mf}{c_1{}^2}\left(1 - \frac{e_1{}^2}{c_1{}^2}\right), \quad B = 2\tfrac{1}{2}\vartheta^2 c_1 - \tfrac{1}{2}\frac{M e_1{}^2 f}{c_1{}^4}.$$

Da wegen der Kleinheit der Aenderungen der Schwere an der Erdoberfläche B klein sein muss gegen A, so kann man bei Vernachlässigung der sehr kleinen Grössen zweiter Ordnung statt φ die „Breite“ oder Polhöhe ψ schreiben:

$$g = A - B\cos\psi^2.$$

In diesem Resultate spricht sich der bekannte Satz aus, dass die Abnahme der Schwere von den Polen nach dem Aequator hin proportional dem Quadrate des Cosinus der Breite ist.

2. Ist g_p und g_q bezüglich die Intensität der Schwere an den Polen und am Aequator, so ist

$$g_p = A, \quad g_q = A - B.$$

Hiernach haben wir also

$$g_p = \vartheta^2 c_1 + \frac{Mf}{c_1{}^2}\left(1 - \frac{c_1{}^2}{c_1{}^2}\right), \quad g_p - g_q = \tfrac{5}{2}\vartheta^2 c_1 - \tfrac{1}{2}\frac{M e_1{}^2 f}{c_1{}^4}.$$

Wir wollen hier für $\frac{e_1^2}{c_1^2}$ wieder den sehr nahe gleichen Ausdruck $2q_1$ setzen, unter q_1 die Abplattung $\frac{a_1 - c_1}{c_1}$ verstanden. Dann erhalten wir aus der letzten Gleichung

$$q_1 = \frac{2\frac{1}{2}\vartheta^2 c_1 - (g_p - g_q)}{\frac{Mf}{c_1^2}}.$$

Für den Nenner dieses Ausdruckes, der in erster Annäherung die Schwere an der Erdoberfläche darstellt, können wir, da im Zähler kleine Grössen stehen, an sich beliebig g_p oder g_q, oder irgend einen mittlern Werth von g setzen. Am genauesten aber verfährt man, wie es scheint, in folgender Weise. Man setzt in die erste der obigen zwei Gleichungen für q_1 den Näherungswerth ein, den man erhält, wenn man im Nenner des vorigen Ausdruckes $\frac{Mf}{c_1^2}$ einfach durch g_p ersetzt. Dieselbe liefert dann bei angenäherter Entwickelung

$$\frac{Mf}{c_1^2} = g_p + 4\vartheta^2 c_1 - (g_p - g_q).$$

Diesen Ausdruck setzen wir jetzt in die obige Formel für die Abplattung der Erde ein. Dann haben wir endlich

$$8) \qquad q_1 = \frac{2\frac{1}{2}\vartheta^2 c_1 - (g_p - g_q)}{g_q + 4\vartheta^2 c_1 - (g_p - g_q)}.$$

Für den Polarhalbmesser c_1 können wir wegen des sehr kleinen Factors ϑ^2 auch den mittlern Erdhalbmesser oder den Halbmesser a_1 des Aequators setzen. Schreibt man, was ohne erheblichen Fehler geschehen kann, statt des Nenners blos g_q, so hat man

$$q_1 = \frac{2\frac{1}{2}\vartheta^2 a_1 - (g_p - g_q)}{g_q}.$$

In dieser Gestalt wurde das Theorem von Clairaut entdeckt und lautet in Worten: Die Abplattung der Erde, vermehrt um den Quotienten aus dem Ueberschusse der Schwere an den Polen über die am Aequator, und der Schwere am Aequator ist gleich dem $2\frac{1}{2}$fachen des Quotienten aus der Centrifugalkraft am Aequator und der Schwere am Aequator.

Die letzte Gleichung liefert für die Abplattung der Erde den Werth $\frac{1}{290}$, während sich aus Gleichung 8) der Werth $\frac{1}{293}$ ergiebt.