Kleinere Mittheilungen.

I. Aufgabe.

Nach der vierten meiner Vorlesungen über Homographie, welche von einem neuen Uebertragungsprincip handelt, entspricht jedem Punktepaare auf der Fundamentallinie eindeutig ein Punkt p in der Ebene. Wenn das Punktepaar auf der Fundamentallinie fortrückt, ohne dass das von demselben begrenzte Stück der Fundamentallinie sich der Grösse nach ändert, so soll der geometrische Ort des Punktes p gefunden werden.

Für einen ganz speciellen Fall ist die Auflösung der Aufgabe nach der vierten Vorlesung bekannt. Bildet nämlich das gegebene Punktepaar, welches auf der Fundamentallinie fortrücken soll, einen Doppelpunkt, so entsprechen den Doppelpunkten auf der Fundamentallinie in der Ebene Punkte, welche auf der Directrix liegen. In diesem Falle beschreibt der Punkt p also einen Kegelschnitt. Wir werden nun untersuchen, ob im allgemeinen Falle eine Aenderung eintritt.

Das gegebene Punktepaar, welches auf der Fundamentallinie das gegebene Stück a begrenzen soll, nehmen wir der Einfachheit wegen als das Fundamentalpunktepaar, dessen Gleichungen in der Normalform gegeben sein mögen:

$$T_0 = 0, \quad T_1 = 0.$$

Die Punkte dieses Paares gehen nach der Verrückung um die Entfernung r in zwei andere über, deren Gleichungen nach 32) der ersten Vorlesung von der Form sind:

$$T_0 - \lambda_0 T_1 = 0, \quad T_0 - \lambda_1 T_1 = 0,$$

$$\lambda_0 = \frac{r}{r-a}, \quad \lambda_1 = \frac{r+a}{r}.$$

Nehmen wir nun an, dass A, B, C gegebene lineare Ausdrücke in Punktcoordinaten des Punktes p seien, so müssen dieselben der Gleichung genügen:

$$A + B\lambda + C\lambda^2 = 0,$$

wenn man darin für λ setzt λ_0 und λ_1.

Wir haben demnach zur Bestimmung des Punktes p die beiden, die willkürliche Grösse r involvirenden Relationen:

$$A(r-a)^2 + Br(r-a) + Cr^2 = 0,$$
$$Ar^2 + Br(r+a) + C(r+a)^2 = 0.$$

Sie stellen zwei Tangenten der Directrix dar, welche sich in dem Punkte p schneiden.

Die Elimination von r aus den beiden Gleichungen ergiebt:

$$(A+B+C)^2 - (B^2 - 4AC) = 0,$$

somit einen Kegelschnitt als geometrischen Ort des Punktes p.

Da die letzte Gleichung linear zusammengesetzt ist aus der Gleichung

$$B^2 - 4AC = 0$$

der Directrix und dem Quadrate der Gleichung einer geraden Linie

$$A + B + C = 0,$$

so beweist dieses, dass der Kegelschnitt, welcher der geometrische Ort des Punktes p ist, die Directrix immer in zwei Punkten berührt.

Man kann darin einen Widerspruch finden. Denn der Berührungspunkt des Kegelschnittes und der Directrix entspricht, weil er auf dem Kegelschnitte liegt, einem Punktepaare auf der Fundamentallinie, welches das Stück a begrenzt; er entspricht zugleich einem Doppelpunkte der Fundamentallinie, weil er der Directrix angehört. Dieser Widerspruch wird allein beseitigt, wenn der Doppelpunkt und das von dem Kegelschnitte herrührende Punktepaar beide im Unendlichen liegen. Nun haben wir aber zwei Berührungspunkte des Kegelschnittes und der Directrix. Da für den zweiten Berührungspunkt dasselbe gilt, so müssen die beiden Berührungspunkte zusammenfallen und die gerade Linie $A+B+C=0$ Tangente der Directrix sein.

Hieraus schliessen wir endlich, dass der geometrische Ort des Punktes p ein Kegelschnitt ist, welcher die Directrix in einem Punkte vierpunktig berührt, und dieser Berührungspunkt entspricht auf der Fundamentallinie dem Doppelpunkte im Unendlichen.

Dasselbe ergiebt sich analytisch aus einer der mit r behafteten Gleichungen, wenn man $r = \infty$ setzt.

Von einem andern, unverändert auf der Fundamentallinie fortrückenden Punktepaare lässt sich Gleiches sagen. Daraus ziehen wir den Schluss:

> Wenn man auf der Directrix den Punkt fixirt, der dem auf der Fundamentallinie unendlich entfernten Punkte entspricht, und einen beliebigen Kegelschnitt construirt, der die Directrix in jenem Punkte vierpunktig berührt, so entsprechen den Punkten des Kegelschnittes Punktepaare auf der Fundamentallinie, deren jedes dasselbe Stück auf der Fundamentallinie begrenzt.

O. Hesse.

II. Ueber Flächen von gegebenen Eigenschaften.

Eine im Punkte xyz einer Fläche auf letzterer errichtete Normale schneidet die Horizontalebene xy unter einem Neigungswinkel ν, welcher bekanntlich durch die Formel

$$1)\qquad cot^2\nu = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

bestimmt wird. Ist z eine explicite Function von x, y, und wird dem Winkel ν irgend ein constanter Werth ertheilt, so gilt die vorige Gleichung für die Horizontalprojectionen aller derjenigen Flächenpunkte, deren Normalen unter jenem constanten Winkel gegen den Horizont geneigt sind, d. h. die Gleichung 1) ist die Gleichung der Horizontalprojection der sogenannten Curve isokliner Normalen, welche jenem Winkel entspricht. Diese Betrachtung lässt sich auf folgende Weise umkehren. In der Gleichung

$$cot\,\nu = \psi(x, y)$$

bezeichne $\psi(x, y)$ eine gegebene Function von x und y; zu jedem constanten ν gehört dann die im Voraus bestimmte Curve, und die Aufgabe ist nun, die entsprechende Fläche zu finden. Mit anderen Worten, es handelt sich um die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$2)\qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = [\psi(x, y)]^2;$$

einige Bemerkungen hierüber sind vielleicht nicht überflüssig.

Der vorstehenden Gleichung genügt man zunächst durch die Annahme

$$3)\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \psi(x, y)\, cos\,\omega, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \psi(x, y)\, sin\,\omega,$$

worin ω einen unbekannten, von x und y unabhängigen Bogen bezeichnet. Differentiirt man die erste dieser Gleichungen nach y, die zweite nach x, so erhält man linker Hand dasselbe, mithin ist durch Vergleichung der rechten Seiten, wenn für $\psi(x, y)$ kurz ψ geschrieben wird,

$$4)\qquad cos\,\omega \,.\, \frac{\partial \omega}{\partial x} + sin\,\omega \,.\, \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial l\psi}{\partial y}\, cos\,\omega - \frac{\partial l\psi}{\partial x}\, sin\,\omega.$$

Diese lineare partielle Differentialgleichung lässt sich nach dem bekannten allgemeinen Verfahren auf die beiden simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückführen

$$cos\,\omega \,.\, dy - sin\,\omega \,.\, dx = 0,$$

$$cos\,\omega \,.\, d\omega - \left(\frac{\partial l\psi}{\partial y}\, cos\,\omega - \frac{\partial l\psi}{\partial x}\, sin\,\omega\right) dx = 0$$

oder

5) $$\frac{dy}{dx} = \tan\omega, \quad \frac{d\omega}{dx} = \frac{\partial l\psi}{\partial y} - \frac{\partial l\psi}{\partial x}\tan\omega.$$

Die Integrale derselben mögen sein

$$\varphi(x, y, \omega) = c, \quad \Phi(x, y, \omega) = C,$$

das allgemeine Integral von 4) ist dann

6) $$C = F(c) \text{ oder } \Phi(x, y, \omega) = F[\varphi(x, y, \omega)].$$

Hieraus ergeben sich ω, $\cos\omega$, $\sin\omega$, und dann ist nach Nr. 3)

7) $$z = \int\psi \,.\, \cos\omega\,\partial x = \int\psi \,.\, \sin\omega\,\partial y,$$

wobei sich die Integrationen partiell auf x, resp. y beziehen.

Ein Beispiel hierzu bietet die Annahme

$$\cot\nu = \frac{h}{Ax + By},$$

bei welcher [wie überhaupt im Falle $\cot\nu = f(Ax + By)$] die Horizontalprojectionen der Curven isokliner Normalen eine Schaar von parallelen Geraden bilden. Aus Nr. 4) wird dann

8) $$\cos\omega \,.\, \frac{\partial\omega}{\partial x} + \sin\omega \,.\, \frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{A\sin\omega - B\cos\omega}{Ax + By}$$

und die Gleichungen 5) sind

9) $$\frac{dy}{dx} = \tan\omega, \quad \frac{d\omega}{dx} = \frac{A\tan\omega - B}{Ax + By}.$$

Giebt man der zweiten Gleichung die Form

$$Ax + By = \frac{A\tan\omega - B}{\omega'},$$

differenzirt sie nach x und ersetzt linker Hand $\frac{dy}{dx}$ durch $\tan\omega$, so erhält man sehr einfach

$$\omega'' = \omega'^2 \tan\omega$$

und hieraus nacheinander

$$\omega' = \frac{1}{c \,.\, \cos\omega}, \quad \sin\omega = \frac{x + c_1}{c},$$

mithin nach der zweiten Gleichung in 9)

$$\frac{Ax + By}{A\sin\omega - B\cos\omega} = c.$$

Substituirt man diesen Werth in die vorhergehende Gleichung und setzt $c_1 = BC$, so wird

$$\frac{x\cos\omega + y\sin\omega}{A\sin\omega - B\cos\omega} = C.$$

Das Integral der partiellen Differentialgleichung 7) ist demnach

10) $$\frac{x\cos\omega + y\sin\omega}{A\sin\omega - B\cos\omega} = F\left(\frac{Ax + By}{A\sin\omega - B\cos\omega}\right).$$

Um für einen einfachen Fall die Rechnung völlig auszuführen, nehmen wir $F(u) = u$, $A = cos\gamma$, $B = sin\gamma$; die beiden Auflösungen der Gleichung

$$x\, cos\,\omega + y\, sin\,\omega = x\, cos\gamma + y\, sin\gamma$$

sind dann

$$\omega = \gamma \text{ und } \omega = 2\, arctan\,\frac{y}{x} - \gamma.$$

Die erste Auflösung liefert nach Nr. 3), wenn k_1 die Integrationsconstante bezeichnet,

$$z = \int \frac{h\, cos\gamma}{x\, cos\gamma + y\, sin\gamma}\,\partial x = hl\left(\frac{x\, cos\gamma + y\, sin\gamma}{k_1}\right)$$

oder in homogener Form

$$z = hl\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Die zweite Auflösung giebt

$$\begin{aligned} z &= \int \frac{h}{x\, cos\gamma + y\, sin\gamma} \cdot \frac{(x^2 - y^2)\, cos\gamma + 2xy\, sin\gamma}{x^2 + y^2}\,\partial x \\ &= hl\left[\frac{x^2 + y^2}{k_2(x\, cos\gamma + y\, sin\gamma)}\right] \end{aligned}$$

oder in homogener Form

$$z = hl\left(\frac{x^2 + y^2}{ax + by}\right).$$

Die anfängliche allgemeine Aufgabe lässt sich auch mit Hilfe von Cylindercoordinaten behandeln. Für $x = r\, cos\,\theta$, $y = r\, sin\,\theta$ geht nämlich die Gleichung 1) in die folgende über

$$cot^2 \nu = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2,$$

und wenn nun eine Gleichung von der Form

$$cot\,\nu = \psi(r, \theta)$$

gegeben ist, so handelt es sich, analog Nr. 2), um die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$11)\qquad \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = [\psi(r, \theta)]^2.$$

Aus dieser erhält man, wenn

$$12)\qquad \frac{\partial z}{\partial r} = \psi(r, \theta)\, cos\,\omega, \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = r\psi(r, \theta)\, sin\,\omega$$

gesetzt und im Uebrigen wie früher verfahren wird,

$$13)\qquad r\, cos\,\omega\,\frac{\partial \omega}{\partial r} + sin\,\omega\,\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{\partial l\psi}{\partial \theta}\, cos\,\omega - \left(r\,\frac{\partial l\psi}{\partial r} + 1\right) sin\,\omega.$$

Diese partielle Differentialgleichung zerfällt in die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$14)\qquad r\frac{d\theta}{dr}=\tan\omega,\quad r\frac{d\omega}{dr}=\frac{\partial l\psi}{\partial\theta}-\left(r\frac{\partial l\psi}{\partial r}+1\right)\tan\omega,$$

deren Integrale

$$\varphi(r,\theta,\omega)=c,\quad \Phi(r,\theta,\omega)=C$$

sein mögen. Das allgemeine Integral von Nr. 13) ist dann

$$15)\qquad C=F(c)\ \text{oder}\ \Phi(r,\theta,\omega)=F[\varphi(r,\theta,\omega)]$$

und schliesslich geben die Gleichungen 12)

$$16)\qquad z=\int\psi.\cos\omega\,\partial r=\int r\psi.\sin\omega\,\partial\theta.$$

Wenn ψ eine Function von r allein ist, so bilden die Horizontalprojectionen der Curven isokliner Normalen eine Schaar concentrischer Kreise, und die Gleichungen 13) und 14) werden dann weit einfacher. Z. B. für

$$\cot\nu=\frac{a}{r}$$

gehen die Gleichungen 14) über in

$$r\frac{d\theta}{dr}=\tan\omega,\quad r\frac{d\omega}{dr}=0;$$

die zweite liefert $\omega=c$ und nachher die erste

$$\theta=lr.\tan c-C\ \text{oder}\ lr.\tan\omega-\theta=C;$$

das Integral der partiellen Differentialgleichung

$$r\cos\omega\frac{\partial\omega}{\partial r}+\sin\omega\frac{\partial\omega}{\partial\theta}=0$$

ist daher

$$lr.\tan\omega-\theta=F(\omega).$$

Dem speciellen Falle $F(\omega)=lb.\tan\omega$ entspricht die Auflösung

$$\tan\omega=\frac{\theta}{l\left(\frac{r}{b}\right)},\quad z=\int\frac{a}{r}\cos\omega\,\partial r=a\sqrt{\left[l\left(\frac{r}{b}\right)\right]^2+\theta^2}.$$

Ein bemerkenswerthes Resultat giebt die Annahme

$$\cot\nu=\frac{r}{a}.$$

Die Gleichungen 14) sind dann

$$r\frac{d\theta}{dr}=\tan\omega,\quad r\frac{d\omega}{dr}=-2\tan\omega,$$

aus denen man zunächst $2\,d\theta+d\omega=0$ oder

$$2\theta+\omega=c$$

erhält und ausserdem durch Integration der zweiten Gleichung

$$r^2\sin\omega=C.$$

Das Integral der partiellen Differentialgleichung

$$r\cos\omega\frac{\partial\omega}{\partial r}+\sin\omega\frac{\partial\omega}{\partial\theta}=-2\sin\omega$$

ist hiernach

$$r^2\sin\omega=F(\omega+2\theta).$$

Die specielle Wahl $F(\omega+2\theta)=b^2\sin(\omega+2\theta)$ liefert

$$\tan\omega=\frac{b^2\sin 2\theta}{r^2-b^2\cos 2\theta},\quad z=\int\frac{r}{a}\cos\omega\,\partial r,$$

d. i.

$$z=\frac{\sqrt{r^4-2b^2r^2\cos 2\theta+b^4}}{2a}$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten

$$4a^2z^2=(x^2+y^2)^2-2b^2(x^2-y^2)+b^4.$$

Wie eine leichte Discussion zeigt, besteht jede der beiden Verticalspuren dieser Fläche aus zwei sich schneidenden Parabeln; die Horizontalschnitte sind Cassini'sche Curven, die für $z<\frac{b^2}{a}$ zwei geschlossene Blätter bilden, für $z=\frac{b^2}{a}$ in Lemniscaten übergehen und für $z>\frac{b^2}{a}$ zu Ovalfiguren werden; die Inflexionspunkte der letzteren haben die Lemniscate $r^2=-b^2\cos 2\theta$ zur Horizontalprojection.

SCHLÖMILCH.

III. Sätze über die Darstellbarkeit einer Zahl als Summe von Quadratzahlen.

In den folgenden Sätzen bedeuten λ, μ, ν die Null und alle ganzen Zahlen.

I. Die Zahlen von der Form

$$(8\lambda+7)4^\mu$$

sind diejenigen, welche sich nicht als Summe von weniger als vier Quadratzahlen darstellen lassen.

II. Die Zahlen von der Form

$$(4\lambda+3)2^\mu$$

und alle, welche durch Multiplication von je zwei solchen Zahlen, die relative Primzahlen sind, entstehen, sind diejenigen, welche sich nicht als Summe von weniger als drei Quadratzahlen darstellen lassen.

III. Die Zahlen von der Form

$$[4(\lambda^2+\nu^2+\nu)+1]2^\mu$$

sind diejenigen, welche sich als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen lassen.

IV. Multiplicirt man je n Zahlen von der Form

$$4(\lambda^2+\nu^2+\nu)+1,$$

die nicht alle einander gleich sind, untereinander und noch mit 2^{μ}, so erhält man diejenigen Zahlen, welche auf $n$fache Weise als Summe von zwei Quadratzahlen darstellbar sind.

V. Die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 2z^2$$

wird in ganzen Zahlen gelöst durch die Werthe

$$x = 2\lambda\mu + (\lambda^2 - \mu^2), \quad y = 2\lambda\mu - (\lambda^2 - \mu^2), \quad z = \lambda^2 + \mu^2.$$

Waren in Mecklenburg. V. Schlegel.

IV. Construction für die Krümmungsmittelpunkte von Ellipsen und Hyperbeln.

Es sei C der Mittelpunkt einer Ellipse, P ein Peripheriepunkt derselben, durch welchen eine Normale gelegt ist, die in M die grosse, in N die kleine Axe schneidet, und welche von der in C auf CP errichteten Senkrechten in Q getroffen wird; trägt man nun von M nach N hin die Strecke $MR = NQ$ ab, so ist R der zum Punkte P gehörende Krümmungsmittelpunkt.

Für die Hyperbel bleibt die Construction im Wesentlichen dieselbe; für die Parabel wird sie selbstverständlich illusorisch.

Die Aufsuchung des Beweises möge dem Leser überlassen bleiben, da dieselbe keine Schwierigkeiten darbietet.

Tarnowitz. Dr. Geisenheimer,
Bergschul-Director.

Cantor, Dr. **Moritz**, die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst. Eine historisch-mathematische Untersuchung. Mit 5 lithogr. Tafeln. gr. 8. geh. n. ℳ 6. —

Clebsch, **Alfred**, **Vorlesungen über Geometrie.** Bearbeitet und herausgegeben von Dr. Ferdinand Lindemann. Mit einem Vorwort von Felix Klein. Ersten Bandes erster Theil. gr. 8. geh. n. ℳ 11. 20.

Curtze, **Maximilian**, **Reliquiae Copernicanae.** Nach den Originalen in der Universitäts-Bibliothek zu Upsala. Mit einem Holzschnitt und einer lithographirten Tafel. gr. 8. geh. n. ℳ 1. 60.

Fiedler, Dr. **Wilh.**, Professor am eidgenöss. Polytechnikum zu Zürich, **die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage.** Für Vorlesungen an technischen Hochschulen und zum Selbststudium. Zweite Auflage. Mit 260 Holzschnitten und 12 lithogr. Tafeln. gr. 8. geh. n. ℳ 18. —

Gordan, Dr. **Paul**, ordentl. Professor der Mathematik an der Universität zu Erlangen, **über das Formensystem binärer Formen.** gr. 8. geh. n. ℳ 2. —

Hankel, **Herm.**, weil. Professor in Tübingen, **Vorlesungen über die Elemente der projectivischen Geometrie.** gr. 8. geh. n. ℳ 7. —

Müller, Dr. **Hubert**, Oberlehrer am kaiserl. Lyceum in Metz, **Leitfaden der ebenen Geometrie** mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule. Zweiter Theil: Die Kegelschnitte und die Elemente der neueren Geometrie. Mit vielen Figuren im Text. gr. 8. geh. n. ℳ 1. 60.

Narr, Dr. **F.**, Docent der Physik an der Universität München, **Einleitung in die theoretische Mechanik.** Mit 35 Figuren in Holzschnitt. gr. 8. geh. n. ℳ 6. —

Neumann, Dr. **Carl**, Professor an der Universität zu Leipzig. **Vorlesungen über die mechanische Theorie der Wärme.** gr. 8. Geh. n. ℳ 7. 20.

Schlegel, **Victor**, Oberlehrer am Gymnasium zu Waren, **die Elemente der modernen Geometrie und Algebra.** Nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre und mit Berücksichtigung verwandter Methoden dargestellt. gr. 8. geh. n. ℳ 7. —

Steiner's, **Jacob**, Vorlesungen über synthetische Geometrie. I. Theil. A. u. d. T.: **Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung.** Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Steiner's bearbeitet von Dr. C. F. Geiser, Professor am Polytechnikum zu Zürich. Zweite Auflage. gr. 8. geh. n. ℳ 6. —

Waltenhofen, **A. von**, k. k. ordentl. Professor der Physik an der deutschen technischen Hochschule zu Prag, **Grundriss der allgemeinen mechanischen Physik.** Die wichtigsten Lehrsätze der Mechanik fester, flüssiger und gasförmiger Körper, der mechanischen Wärmetheorie und der Potentialtheorie nebst einer mathematischen Einleitung. Für Studirende an Hochschulen und für Lehramtscandidaten. gr. 8. geh. n. ℳ 8. —

Wüllner, Dr. **Adolf**, Professor der Physik an der kgl. polytechnischen Schule zu Aachen. **Lehrbuch der Experimentalphysik.** Dritte vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. 4 Bände. gr. 8. geh. n. ℳ 41. —