Werk

Titel: Zeitschrift für Mathematik und Physik

Verlag: Teubner

Jahr: 1876

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 MATH I, 755:21

Werk Id: PPN599415665_0021

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN599415665_0021|LOG_0013

21/3.

Zeitschrift
für
Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl
und
Dr. M. Cantor.

21. Jahrgang. 2. Heft.

Mit 1 lithographirten Tafel.

Ausgegeben am 10. März 1876.

Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1876.

V.

Grundzüge einer allgemeinen axonometrischen Theorie der darstellenden Perspective.

Von

GUIDO HAUCK,

Professor an der Oberrealschule und Hilfslehrer an der Universität zu Tübingen.

(Hierzu Taf. II, Fig. 1—7.)

Definiren wir die Axonometrie allgemein als Methode, welche lehrt, perspectivische Bilder von Objecten, die durch die rechtwinkligen Coordinaten ihrer Punkte gegeben sind, dadurch zu verfertigen, dass die projicirenden Parallelepipeda der einzelnen Objectpunkte abgebildet werden, so müssen wir die Vaterschaft dieser Disciplin Desargues zuerkennen. Seine „*Méthode universelle de mettre en perspective les objets donnés réellement ou en devis etc.*" (*Paris* 1636)* behandelt die Centralperspective in dem genannten Sinne und stellt damit die Grundzüge der axonometrischen Methode fest. Die eigentliche Carrière der Axonometrie knüpft sich jedoch erst an die Namen Weisbach und Pohlke. Erst durch die Einführung der rationalen Verhältnisse der Einheiten der Massstäbe** und die Aufstellung und Verwerthung des Pohlke'schen Satzes*** hat die an und für sich alte Methode die Leichtigkeit und Handlichkeit erlangt, die eben das Charakteristische der modernen Axonometrie ausmacht. Beide Errungenschaften erstrecken sich nun aber blos auf die Parallelperspective. Wir hatten bisher in der Centralper-

---

* Vergl. *Oeuvres de Desargues réunies et analysées par M. Poudra. Paris 1864. T. 1, pag. 55—95.*

** Vergl. Weisbach, Die monodimetrische und anisometrische Projectionsmethode. In den polytechn. Mittheilungen von Volz und Karmarsch. Tübingen 1844. S. 125—140.

*** Vergl. Pohlke, Darstellende Geometrie, I. Abthlg., 3. Aufl. Berlin 1872. S. 112—115 — Ferner: Schwarz, Elementarer Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes der Axonometrie. In Crelle's Journal Bd. 63, S. 309—314.

spective weder ein Analogon für die rationalen Verhältnisse der Massstäbe, noch für den Pohlke'schen Satz. So kam es, dass trotz Desargues' Anregung die moderne Axonometrie die Centralperspective ganz ausserhalb ihres Bereichs liess. — Eine leidige Folge hiervon war, dass sich für die Centralperspective und Parallelperspective zwei von Grund aus verschiedene Behandlungsweisen ausbildeten, welche beide Perspectiven als ihrem Wesen nach heterogen erscheinen lassen, während doch in Wahrheit die eine nur ein Specialfall der andern ist.

In einer im verflossenen Sommersemester an hiesiger Hochschule von mir gehaltenen Vorlesung über Perspective suchte ich die oben angedeuteten Lücken auszufüllen durch Aufstellung einer allgemeinen axonometrischen Theorie und damit gleichzeitig einen einheitlichen Gesichtspunkt zu gewinnen, von dem aus sich das gesammte Gebiet der darstellenden Perspective (incl. Reliefperspective) behandeln lässt. Durch diese Theorie wird vor Allem zwischen der Centralperspective und Parallelperspective die gebührende enge Beziehung hergestellt, insofern sich sämmtliche axonometrischen Grundformeln der Parallelperspective unmittelbar aus denen der Centralperspective als einfache Modificationen ergeben. Durch die Constatirung der Thatsache, dass den bekannten axonometrischen Grundformeln der Parallelperspective auch eine Bedeutung in der Centralperspective zukommt,* gewinnen diese ein neues Interesse. Der Umstand ferner, dass die allgemein übliche Methode der Linearperspective sich aus unserer Theorie gleichsam spielend ergiebt,** lässt auch diese in einem neuen Lichte erscheinen.

Vorliegende Mittheilung ist ein Auszug aus der von mir in nächster Zeit beabsichtigten Publication meiner Vorlesungen. — Die Uebertragung der Theorie auf die Reliefperspective und die projectivische Collineation behalte ich einer spätern Mittheilung vor.

---

§ 1.
Exposition.

Gegeben sei irgend ein räumliches Object durch die auf ein rechtwinkliges Axencoordinatensystem o, xyz *** bezogenen Coordinaten seiner Punkte. Wir stellen uns die Aufgabe, dessen centralperspectivisches Bild zu construiren, wenn die relative Lage von Bildebene und Auge gegen das Object gegeben ist. Wir lösen diese Aufgabe dadurch, dass wir zunächst das Bild der drei Coordinatenaxen und dann für jeden einzelnen Objectpunkt das Bild seines projicirenden Parallelepipedons construiren.

---

* Vergl. z. B. Gleichungen 39) und 56).

** Vergl. S. 96, Zeile 19 flgg.

*** Mit Rücksicht auf Objecte aus der Natur denken wir uns die z-Axe vertical.

Das Bild der drei Coordinatenaxen sei der Dreistrahl ω, $\xi\eta\zeta$. (Fig. 1.) Derselbe ist bestimmt durch die drei Winkel $\xi\omega\eta$, $\eta\omega\zeta$, $\zeta\omega\xi$, die wir die scheinbaren Axenwinkel nennen und mit w_{12}, w_{23}, w_{31} bezeichnen.

Wir denken uns ferner die x-Coordinaten der einzelnen Punkte des Objects auf der x-Axe aufgetragen, sie seien $oX = x$, $oX' = x'$, $oX'' = x''$ u. s. f. Die Bilder der Punkte X, X', ... seien Ξ, Ξ', ... Wir bezeichnen die Abscissen dieser Punkte $\omega\Xi$, $\omega\Xi'$, ... durch ξ, ξ', .. und nennen diese Grössen die reducirten x-Coordinaten.

Es bilden nun die Punkte X und Ξ zwei projectivische Punktreihen. Jedem Punkte der einen Reihe entspricht ein und nur ein Punkt der andern Reihe. Der analytische Ausdruck hierfür ist eine zwischen den Abscissen x und ξ zweier entsprechenden Punkte X und Ξ bestehende Gleichung, die sowohl nach x als nach ξ linear ist und deren Absolutglied $= 0$ ist, weil für $x = 0$ auch $\xi = 0$ wird. Diese Gleichung sei

1) $$x\xi - f_1 x - g_1 \xi = 0.$$

Dann folgt aus ihr für ξ der Ausdruck

$$\xi = \frac{f_1 x}{x - g_1}.$$

Die geometrische Bedeutung der beiden Grössen f_1 und g_1 ergiebt sich leicht. Für $x = g_1$ wird $\xi = \infty$. Also ist g_1 die Abscisse desjenigen Punktes G_1 der Punktreihe X, welcher dem unendlich entfernten Punkte der Reihe Ξ entspricht. Andererseits zeigt die nach x aufgelöste Gleichung, dass f_1 die Abscisse desjenigen Punktes F_1 der Punktreihe Ξ ist, welcher dem unendlich entfernten Punkte der Reihe X entspricht. Wir nennen F_1 den Fluchtpunkt der ξ-Axe, G_1 den Gegenpunkt der x-Axe.*

Gleiches gilt für die zwei anderen Axen. Bezeichnen wir also die Fluchtpunkte der drei Axen mit F_1, F_2, F_3, und deren Abscissen mit f_1, f_2, f_3, ferner die drei Gegenpunkte mit G_1, G_2, G_3, und deren Abscissen mit g_1, g_2, g_3, so haben wir für die reducirten Coordinaten folgende Ausdrücke:

I. 2) $$\xi = \frac{f_1 x}{x - g_1}, \quad \eta = \frac{f_2 y}{y - g_2}, \quad \zeta = \frac{f_3 z}{z - g_3}.$$

Wir nennen die drei Grössen f_i die drei Fluchtstrecken, die drei Grössen g_i die drei Gegenstrecken. Fluchtstrecken und Gegenstrecken fassen wir zusammen unter dem gemeinsamen Namen: die sechs Reductionsconstanten.

---

* Gewöhnlich gebraucht man für die Punkte F und G eine und dieselbe Benennung. Die Einführung verschiedener Namen in der darstellenden Perspective erscheint gerechtfertigt als mit der Unterscheidung zwischen Originalfigur und Bildfigur correspondirend. Wir werden ebenso in der Reliefperspective unterscheiden zwischen „Fluchtebene“ und „Gegenebene“.

Vergegenwärtigen wir uns, dass die Bilder aller mit einer der drei Coordinatenaxen parallelen Geraden sich in dem zugehörigen Fluchtpunkte schneiden müssen, dass ferner die Verbindungslinien der drei Fluchtpunkte die Fluchtlinien der drei Coordinatenebenen sind, dass folglich z. B. alle mit der xy-Ebene parallelen Geraden ihre Fluchtpunkte in $F_1 F_2$ haben: so ist es leicht, vorausgesetzt, dass die sechs Reductionsconstanten bekannt seien, das Bild des projicirenden Parallelepipedons irgend eines Objectpunktes P und damit das Bild Π dieses Punktes aufzutragen. Es ist jedoch einleuchtend, dass es nicht nothwendig ist, das vollständige Bild des Parallelepipedons zu zeichnen, um Punkt Π zu erhalten. Es genügt die Zeichnung des in der xy-Ebene liegenden Rechtecks $XoYp$ und des Diagonalrechtecks $ZopP$. Man hat folgende Construction (Fig. 1):

Man trägt zuerst auf den scheinbaren Axen $\omega\xi$, $\omega\eta$, $\omega\zeta$ die Strecken $\omega F_1 = f_1$, $\omega F_2 = f_2$, $\omega F_3 = f_3$ ab und zieht $F_1 F_2$, bestimmt sodann die reducirten Coordinaten ξ, η, ζ des Punktes P nach den Gleichungen I und trägt dieselben auf den scheinbaren Axen in $\omega\Xi$, ωH, ωZ auf. Zieht man hierauf ΞF_2 und HF_1, die sich in π schneiden, so ist $\Xi\omega H\pi$ das Bild des Rechtecks $XoYp$. Man zieht nun $\omega\pi$, welche $F_1 F_2$ in D schneidet, dann ist D der Fluchtpunkt von $\omega\pi$. Zieht man daher schliesslich ZD und πF_3, die sich in Π schneiden, so ist $Z\omega\pi\Pi$ das Bild des Rechtecks $ZopP$, also Π das Bild des Punktes P.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass zur Erledigung der an die Spitze dieses Paragraphen gestellten Aufgabe blos erforderlich ist die Ermittelung der drei scheinbaren Axenwinkel und der sechs Reductionsconstanten. Wir fassen daher diese neun Grössen zusammen unter dem Namen: die neun axonometrischen Grundconstanten. — Die sechs Grössen, durch welche die Lage von Bildebene und Auge gegen das Object bestimmt ist, nennen wir die sechs Orientirungsconstanten. Unsere Aufgabe kommt hiernach darauf hinaus, die neun axonometrischen Grundconstanten auszudrücken als Functionen der sechs Orientirungsconstanten.

§ 2.

Berechnung der Grundconstanten.

Die Lage des Auges A gegen das Object sei gegeben durch seine auf das Object-Coordinatensystem bezogenen Coordinaten a_1, a_2, a_3. Die Bildebene schneide die drei Coordinatenaxen in den Punkten M_1, M_2, M_3, ihre Lage gegen das Object sei gegeben durch die drei Axenabschnitte $oM_1 = m_1$, $oM_2 = m_2$, $oM_3 = m_3$. — a_1, a_2, a_3, m_1, m_2, m_3 sind also unsere sechs Orientirungsconstanten.

Der „Centralstrahl" AO schneide die Bildebene in ω. Dann ist ω das Bild des Coordinatenursprungs; ωM_1, ωM_2, ωM_3 sind die Bilder der drei Coordinatenaxen. Wir bezeichnen die drei Strecken ωM_i mit μ_i, ferner Ao mit r, $A\omega$ mit ϱ. — Legt man durch A eine Ebene parallel zur Bildebene, so schneidet diese die drei Axen in den drei Gegenpunkten G_1, G_2, G_3.

Die Gleichung dieser Parallelebene ist

$$3)\qquad \frac{x}{m_1}+\frac{y}{m_2}+\frac{z}{m_3}=\frac{a_1}{m_1}+\frac{a_2}{m_2}+\frac{a_3}{m_3}.$$

Führt man der Kürze halber die Bezeichnung ein

$$4)\qquad \varkappa=\frac{a_1}{m_1}+\frac{a_2}{m_2}+\frac{a_3}{m_3},$$

so erhält man aus Gleichung 3) für die drei Gegenstrecken die Werthe

$$5)\qquad g_i=\varkappa m_i.$$

Als geometrische Bedeutung der Hilfsgrösse $\varkappa$ folgt hieraus

$$6)\qquad \varkappa_i=\frac{g_i}{m_i}=\frac{r}{r-\varrho}.$$

Nach dieser Bemerkung haben die Coordinaten des Punktes ω die Werthe $\frac{a_1}{\varkappa}$, $\frac{a_2}{\varkappa}$, $\frac{a_3}{\varkappa}$, und daher erhält man für die Strecken ωM_i die Ausdrücke

$$7)\qquad \mu_i^2=\left(m_i-\frac{a_i}{\varkappa}\right)^2+\frac{a_k^2}{\varkappa^2}+\frac{a_l^2}{\varkappa^2}$$

oder, wenn man der Kürze halber die Bezeichnung einführt:

$$8)\qquad r^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2,$$

$$9)\qquad \mu_i^2=m_i^2-2\frac{m_i a_i}{\varkappa}+\frac{r^2}{\varkappa^2}.$$

Diese Werthe setzen uns nunmehr in den Stand, die drei Fluchtstrecken zu berechnen. Da nämlich z. B. Punkt M_1 den zwei Punktreihen X und Ξ entsprechend gemein ist, so hat man vermöge Gleichung I:

$$10)\qquad \mu_i=\frac{f_i m_i}{m_i-g_i}=\frac{f_i m_i}{m_i-\varkappa m_i},$$

woraus

$$11)\qquad f_i=(1-\varkappa)\mu_i.$$

Schliesslich ergeben sich die Werthe für die drei scheinbaren Axenwinkel aus den drei Dreiecken $M_i\omega M_k$:

$$12)\qquad \cos w_{ik}=\frac{\mu_i^2+\mu_k^2-m_i^2-m_k^2}{2\mu_i\mu_k}.$$

Für gewisse Zwecke* ist es vortheilhafter, statt der Grössen a_i und m_i andere Orientirungsconstanten zu benützen. Wir bezeichnen die Richtungswinkel des Centralstrahls (d. s. die Winkel, die der Centralstrahl mit den drei Coordinatenaxen macht) mit σ_1, σ_2, σ_3 und nehmen die vier Grössen r, σ_1, σ_2, σ_3 als Bestimmungsgrössen für die Lage des Auges. Wir bezeichnen ferner den Abstand der Bildebene vom Coordinatenursprung mit ε, die Richtungswinkel von ε mit τ_1, τ_2, τ_3, und nehmen die vier Grössen ε, τ_1, τ_2, τ_3 als Bestimmungsgrössen für die Lage der Bildebene. — Um die Grundconstanten auszudrücken in diesen neuen Orientirungsconstanten, wenden wir auf die obigen Gleichungen die Transformationsformeln

$$a_i = r\cos\sigma_i, \tag{13}$$

$$m_i = \frac{\varepsilon}{\cos\tau_i} \tag{14}$$

an und führen die Hilfsgrössen $\cos\varphi = \frac{\varepsilon}{r}\varkappa$ und $\nu_i = \frac{\mu_i}{\varepsilon}$ ein. Dabei bedeutet der Hilfswinkel φ den von ε und r eingeschlossenen Winkel. Man erhält auf diese Weise die Gleichungen in der rechten Columne der folgenden Zusammenstellung:

II. $\varkappa = \frac{a_1}{m_1} + \frac{a_2}{m_2} + \frac{a_3}{m_3}$,	II′. $\cos\varphi = \cos\sigma_1\cos\tau_1 + \cos\sigma_2\cos\tau_2 + \cos\sigma_3\cos\tau_3$,
III. $\mu_i^2 = m_i^2 - 2\frac{m_i a_i}{\varkappa} + \frac{r^2}{\varkappa^2}$,	III′. $\nu_i^2 = \frac{1}{\cos^2\tau_i} - 2\frac{\cos\sigma_i}{\cos\tau_i\cos\varphi} + \frac{1}{\cos^2\varphi}$,
IV. $g_i = \varkappa m_i$,	IV′. $g_i = r\frac{\cos\varphi}{\cos\tau_i}$,
V. $f_i = (1-\varkappa)\mu_i$,	V′. $f_i = (\varepsilon - r\cos\varphi)\nu_i$,
VI. $\cos w_{ik} = \frac{\mu_i^2 + \mu_k^2 - m_i^2 - m_k^2}{2\mu_i\mu_k}$,	VI′. $\cos w_{ik} = -\frac{\nu_i^2 + \nu_k^2 - \frac{1}{\cos^2\tau_i} - \frac{1}{\cos^2\tau_k}}{2\nu_i\nu_k}$.

§ 3.

Praktisches Verfahren. Reductionsmassstäbe.

Gleichung V liefert für die drei Fluchtstrecken nur die absoluten Werthe. Bezüglich der Vorzeichen, d. h. der Richtungen, in welchen diese absoluten Werthe auf den scheinbaren Axen vom Punkte ω aus abzutragen sind, lässt sich leicht folgender Satz beweisen:

Liegen Coordinatenursprung und Bildebene auf einer und derselben Seite des Auges, so haben für jede der drei Coordinatenaxen die

* Vor Allem für den Fall, dass die Bildebene durch den Coordinatenursprung geht oder dass das Auge ins Unendliche fällt.

Abscissen von Fluchtpunkt und Gegenpunkt entgegengesetzte Vorzeichen. Liegt das Auge zwischen Coordinatenursprung und Bildebene, so haben sie gleiche Vorzeichen.

Im ersten Falle nennen wir das resultirende Bild ein directes, im letztern Falle ein inverses.*

Nach diesem Satze bestimmen sich die Vorzeichen der drei Grössen f_i aus denen der drei Grössen g_i. Für diese liefert Gleichung IV Zahlenwerth sammt Vorzeichen, und zwar lässt sich bezüglich letzterer vermöge Gleichung 6) folgender Satz aussprechen:

Die Abscissen der Gegenpunkte haben mit den entsprechenden Axenabschnitten gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen, je nachdem die Bildebene zwischen Auge und Coordinatenursprung oder hinter dem Coordinatenursprung liegt.

Bei der folgenden Darlegung des praktischen Verfahrens nehmen wir an, die Bildebene liege zwischen Auge und Coordinatenursprung, sie gehe im äussersten Falle durch den Coordinatenursprung; es sei also

15) $$r \geqq \varrho > 0.$$

Ferner nehmen wir an, das Auge liege in dem von den positiven Aesten der drei Coordinatenaxen gebildeten Octanten, das Object liege dagegen in dem Octanten $-x$, $-y$, $+z$.** Die Bildebene wählen wir so, dass m_1, m_2, m_3 positiv sind oder dass sie parallel mit einer dieser Annahme entsprechenden Ebene durch den Ursprung gehe. Bei Zugrundelegung dieser Annahmen sind g_1, g_2, g_3 positiv, f_1, f_2, f_3 negativ.

Nachdem die Grundconstanten aus den Gleichungen II—VI berechnet sind, ferner das scheinbare Axensystem vermittelst der Winkel w_{12}, w_{23}, w_{31} gezeichnet ist (Fig. 2) und auf den negativen Aesten der scheinbaren Axen die Strecken $\omega F_1 = f_1$, $\omega F_2 = f_2$, $\omega F_3 = f_3$ abgetragen sind, handelt es sich des Weitern darum, die reducirten Coordinaten ξ, η, ζ jedes einzelnen Objectpunktes zu bestimmen. Hierzu können die Gleichungen I benützt werden; ein graphisches Reductionsverfahren ist jedoch vorzuziehen.

Ein solches ergiebt sich aus dem bekannten Satze, dass zwei projectivische Punktreihen jederzeit, und zwar auf unendlich verschiedene Weise, in perspectivische Lage gebracht werden können; man hat sie nur so zu legen, dass irgend ein Paar entsprechender Punkte zusam-

---

* Die inversen Bilder bieten ein nicht geringeres Interesse als die directen, insofern sie identisch sind mit den von einer Sammellinse entworfenen reellen Bildern. (Auge im optischen Mittelpunkt der Linse.)

** Diese Annahme hat den Zweck, die Lage des Objects hinter der Bildebene zu ermöglichen, auch für den Fall, dass letztere durch den Coordinatenursprung geht. Eine gegebenen Falls nothwendige Transformation auf diesen Octanten bietet keine Schwierigkeit.

menfällt; das Projectionscentrum ergiebt sich alsdann als Schnitt der Verbindungslinien irgend zweier Punkte der einen Punktreihe mit den homologen Punkten der andern. Wir legen nun die zwei projectivischen Punktreihen X und Ξ so, dass die Punkte o und ω zusammenfallen, und benützen zur Bestimmung des Projectionscentrums einerseits den unendlich fernen Punkt der Reihe X und dessen homologen Punkt F_1 der Reihe Ξ, andererseits den unendlich fernen Punkt der Reihe Ξ und dessen homologen Punkt G_1 der Reihe X. — Es ergiebt sich hiernach folgendes praktische Reductionsverfahren:*

Ziehe durch einen Punkt o (Fig. 3) unter beliebigem Winkel zwei unbegrenzte Gerade $x'x$ und $\xi'\xi$, ox und $o\xi$ seien ihre positiven Aeste. Schneide auf $o\xi'$ eine Strecke $oF_1 = f_1$ ab, ziehe durch F_1 eine Parallele mit ox und mache auf ihr $F_1 C_1 = g_1$. Um nun vermittelst dieses Apparates irgend ein x zu reduciren, mache auf $x'x$ eine Strecke $oX = x$, ziehe $C_1 X$, welche $\xi'\xi$ in Ξ schneidet, so ist $o\Xi = \xi$.

Für die y- und z-Axe gilt genau dasselbe Verfahren. Es möge blos daran erinnert werden, dass nach der zu Grunde gelegten Annahme die x und y negativ, folglich auf den negativen Zweigen ox' und oy' aufzutragen sind, dass dagegen die z als positiv auf dem positiven Zweige oz aufzutragen sind.

Reductionsmassstäbe, von welchen die ξ, η, ζ direct abgenommen werden können, falls die x, y, z in Masszahlen gegeben sind, erhält man, wenn man auf $x'x$, $y'y$, $z'z$ von o aus den Originalmassstab aufträgt, von C_i aus durch die einzelnen Theilpunkte Strahlen zieht und deren Schnittpunkte mit $\xi'\xi$, $\eta'\eta$, $\zeta'\zeta$ markirt.

Es kann übrigens (Fig. 4) der Reductionsapparat auch der Hauptfigur selbst einverleibt werden. Um z. B. die x und y zu reduciren, ziehe man durch ω eine Parallele mit $F_1 F_2$, trage auf ihr von ω aus nach beiden Seiten den Originalmassstab auf, mache auf $F_1 F_2$ die Strecke $F_1 C_1 = g_1$ und $F_2 C_2 = g_2$, und ziehe von C_1 und C_2 Strahlen nach den einzelnen Theilpunkten des Originalmassstabes. Wir nennen bei diesem Verfahren die Punkte C_1 und C_2 die Theilungspunkte der ξ- und η-Axe.

Will man jedoch die Operation des Reducirens auf einem Nebenblatte ausführen, so gewährt eine Modification des Verfahrens bedeutende Vortheile. Man kann nämlich für alle drei Massstäbe einen und denselben Strahlenbüschel benützen und damit die drei Reductionsfiguren in eine einzige verschmelzen: Trägt man auf einer geraden Linie $L'L$ (Fig. 5) von einem Punkte o aus nach beiden Seiten den Originalmassstab auf, so kann die so entstehende Punktreihe jede von den drei Reihen X, Y, Z repräsentiren. Verbindet man jeden Theilpunkt mit einem ausserhalb

---

* Dasselbe kann übrigens auch aus den Reductionsformeln I abgeleitet werden.

$L'L$ beliebig gewählten Punkte C, so ist der so entstehende Strahlenbüschel perspectivisch zu der Punktreihe $L'L$ und daher projectivisch zu den drei Punktreihen Ξ, H, Z. Von diesen drei Punktreihen kann daher nach bekanntem Satze jede in perspectivische Lage zu dem Strahlenbüschel C gebracht werden, man hat sie nur so zu legen, dass drei ihrer Punkte in die ihnen entsprechenden Strahlen des Strahlenbüschels fallen. Als diese drei Punkte wählt man den Nullpunkt, den Fluchtpunkt und den unendlich fernen Punkt. — Aus dieser Erwägung ergiebt sich folgende Construction:

Auf einer Geraden $L'L$ trage von einem Punkte o aus nach beiden Seiten den Originalmassstab auf. Errichte auf $L'L$ in o eine Senkrechte und verbinde einen beliebigen Punkt C derselben mit sämmtlichen Theilpunkten der $L'L$. Schneide auf $L'L$ von o aus die Strecken $oG_1 = g_1$, $oG_2 = g_2$, $oG_3 = g_3$ ab, ziehe CG_1, CG_2, CG_3, schneide auf ihnen die Strecken $CU_1 = f_1$, $CU_2 = f_2$, $CU_3 = f_3$ ab, ziehe durch die drei Punkte U_1, U_2, U_3 Parallelen mit LL', welche die Co schneiden in ω_1, ω_2, ω_3, ziehe durch ω_1, ω_2, ω_3 Parallelen mit CG_1, CG_2, CG_3: so schneiden diese den Strahlenbüschel nach den drei Reductionsmassstäben Ξ, H, Z.

Der Vortheil dieser letztern Construction beruht hauptsächlich darin, dass man ein und dasselbe Netz zur Herstellung der Massstäbe für eine ganze Reihe von axonometrischen Grundconstanten-Systemen verwenden kann. (Ein solches Netz kann auch umgekehrt benützt werden, um aus dem Bilde die natürlichen Masse zu entnehmen.)

Kehren wir nunmehr zur Hauptconstruction (Fig. 2) zurück! Nachdem das scheinbare Axensystem construirt und sämmtliche Coordinaten reducirt sind, oder — um bildlich zu reden — nachdem das Baugerüste errichtet und die einzelnen Bausteine zugehauen sind, handelt es sich blos noch darum, dieselben zum Bau zusammenzufügen, — eine Operation, die in § 1 bereits besprochen wurde.

Sollten die Grenzen des Zeichnungsblattes der Construction Schwierigkeiten bereiten, so kann man sich dadurch helfen, dass man mit den in einem bestimmten Verhältnisse verjüngten Fluchtstrecken und reducirten Coordinaten die Construction am scheinbaren Axensystem ausführt; ist alsdann Π' das hierdurch gewonnene Bild von P, so verlängert man schliesslich $\omega\Pi'$ im richtigen Verhältniss nach Π. Selbstverständlich wird man in solchen Fällen auch die Reductionsmassstäbe in verjüngtem Massstabe zeichnen, um die verjüngten reducirten Coordinaten direct zu erhalten.*

* Den Ausführungen am Schlusse des § 5 zufolge wird dieses Verfahren häufig praktisch werden.

Soll das Bild einer durch ihre Gleichungen $\varphi(xyz)=0$ und $\psi(xyz)=0$ gegebenen Curve construirt werden, so construirt man die Bilder einzelner Punkte der Curve, indem man jedesmal eine Coordinate beliebig wählt und die zugehörigen zwei anderen aus den obigen zwei Gleichungen bestimmt. — Ist eine Fläche $F(xyz)=0$ abzubilden, so construirt man das Bild der Berührungscurve des vom Auge an die Fläche gelegten Berührungskegels, welche bestimmt ist durch die zwei Gleichungen

$$F(xyz)=0,$$
$$(x-a_1)\frac{\partial F}{\partial x}+(y-a_2)\frac{\partial F}{\partial y}+(z-a_3)\frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

§ 4.

Elimination der Orientirungsconstanten.

Unsere neun Grundconstanten sind Functionen der sechs von einander unabhängigen Orientirungsconstanten. Diese Functionen sind in den Gleichungen IV—VI ausgedrückt. Eliminirt man nun aus diesen neun Gleichungen die sechs Orientirungsconstanten, so bleiben noch drei Beziehungen zwischen den neun Grundconstanten übrig. Eine derselben ist sofort ersichtlich, nämlich

VII. 16) $$w_{12}+w_{23}+w_{31}=360^0.$$

Die zwei anderen ergeben sich aus den in VI enthaltenen drei Gleichungen, wenn man in dieselben die aus IV und V folgenden Werthe

17) $$m_i=\frac{g_i}{\varkappa} \text{ und } \mu_i=\frac{f_i}{1-\varkappa}$$

einsetzt. Führt man die Bezeichnung ein:

18) $$\lambda=\frac{\varkappa-1}{\varkappa}=\frac{\varrho}{r},$$

so erhält man zunächst:

19) $$\cos w_{ik}=\frac{f_i^2+f_k^2-\lambda^2(g_i^2+g_k^2)}{2f_if_k}$$

oder

VIII. 20) $$\lambda^2(g_i^2+g_k^2)=f_i^2+f_k^2-2f_if_k\cos w_{ik},$$

woraus schliesslich durch Elimination von λ^2 die gesuchten zwei Beziehungen folgen. Wir behalten jedoch die zweckmässigere Form VIII bei.

Diese Beziehungen lassen sich unmittelbar geometrisch deuten. Bezeichnen wir nämlich die Seiten des Gegenpunktendreiecks $G_1G_2G_3$ mit $\mathfrak{g}_{12}\,\mathfrak{g}_{23}\,\mathfrak{g}_{31}$ und die Seiten des Fluchtpunktendreiecks $F_1F_2F_3$ mit $\mathfrak{f}_{12}\,\mathfrak{f}_{23}\,\mathfrak{f}_{31}$, so ist:

21) $$\mathfrak{g}_{ik}^2=g_i^2+g_k^2,$$
22) $$\mathfrak{f}_{ik}^2=f_i^2+f_k^2-2f_if_k\cos w_{ik}.$$

Die in VIII enthaltenen drei Gleichungen sprechen also den Satz aus:

Gegenpunktendreieck und Fluchtpunktendreieck sind ähnlich.

Aus der geometrischen Bedeutung von λ (vergl. Gleichung 18) folgt ferner:

Das Fluchtpunktendreieck ist kleiner als das Gegenpunktendreieck, oder ihm congruent, oder grösser als dasselbe, je nachdem die Bildebene vor dem Coordinatenursprung liegt, oder durch denselben geht, oder hinter demselben liegt.

Unser Satz ergiebt sich übrigens auch direct aus der geometrischen Erwägung, dass drei durch das Auge mit den drei Coordinatenaxen gezogene Parallelen die Bildebene in den drei Fluchtpunkten F_1, F_2, F_3 schneiden, dass also die zwei Tetraeder $A F_1 F_2 F_3$ und $o M_1 M_2 M_3$ parallele Seitenflächen haben und folglich ähnlich sind. Ebenso sind die zwei Tetraeder $o G_1 G_2 G_3$ und $o M_1 M_2 M_3$ ähnlich. Hieraus folgt: Fluchtpunktendreieck und Gegenpunktendreieck sind beide dem Spurendreieck ähnlich.

Aus der Aehnlichkeit des Fluchtpunktendreiecks mit dem Spurendreieck folgt weiter der Satz:

Die Winkel des Fluchtpunktendreiecks sind sämmtlich spitz. Erreicht ein Winkel den Grenzwerth 90^0, so wird auch noch ein zweiter Winkel $= 90^0$, die dritte Ecke fällt ins Unendliche.

Ist nun die Aufgabe, überhaupt ein perspectivisch richtiges Bild eines gegebenen Objects zu fertigen, ohne dass die Lage von Bildebene und Auge ausdrücklich festgesetzt ist, so können die Werthe der neun Grundconstanten beliebig gewählt werden, doch so, dass sie die Gleichungen VII und VIII befriedigen.

Aus unserm obigen Satze ergiebt sich unmittelbar folgende graphische Bestimmung eines Grundconstantensystems:

Wähle die drei Gegenstrecken g_1, g_2, g_3 beliebig, construire aus je zweien derselben als Katheten rechtwinklige Dreiecke und construire aus den drei Hypotenusen $\mathfrak{g}_{12}$, $\mathfrak{g}_{23}$, $\mathfrak{g}_{31}$ als Seiten ein Dreieck $G_1 G_2 G_3$. Verbinde einen in der Ebene dieses Dreiecks beliebig liegenden Punkt ω mit den Ecken des Dreiecks, nehme die von den drei Verbindungslinien eingeschlossenen Winkel als scheinbare Axenwinkel und irgend drei den drei Verbindungslinien proportionirte Strecken als Fluchtstrecken.

Soll ein Grundconstantensystem mittels Rechnung aufgestellt werden, so wählt man sechs Grundconstanten beliebig und bestimmt die drei übrigen mittels der Gleichungen VII und VIII. Der Willkürlichkeit der Wahl jener sechs Grundconstanten sind jedoch gewisse Schranken gesetzt: die Wahl ist so zu treffen, dass man für die übrigen Grundconstanten und ferner für die Orientirungsconstanten, wenn diese in den sechs willkürlich gewählten Grundconstanten ausgedrückt werden, reelle Werthe erhält.

Ein Blick auf Gleichung VIII zeigt, dass es zweckmässig sein wird, in jedem Falle die drei Grössen f_i willkürlich zu wählen. Es wird sich daher vorzugsweise um folgende zwei Fälle handeln:

1. wir wählen f_1, f_2, f_3, w_{12}, w_{23}, λ willkürlich;
2. wir wählen f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3 willkürlich.

Die erste Annahme bietet keine Schwierigkeiten und führt unmittelbar zu folgendem Satze:

Zieht man (Fig. 6) in einer Ebene von einem Punkte ω aus unter beliebigen Winkeln gegeneinander drei Strecken von beliebiger Länge, jedoch so, dass das von den Endpunkten F_1, F_2, F_3 gebildete Dreieck spitzwinklig ist, so können die drei Strecken immer als das perspectivische Bild eines rechtwinkligen Axensystems und die drei Endpunkte als die Fluchtpunkte der drei Axen angesehen werden.

Die zugehörigen Gegenstrecken ergeben sich entweder durch Rechnung aus der Gleichung

$$23)\qquad \lambda^2 g_i^2 = f_i^2 + f_k f_l \cos w_{kl} - f_l f_i \cos w_{li} + f_i f_k \cos w_{ik}$$

$$24)\qquad = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{f}_{ik}^2 - \mathfrak{f}_{kl}^2 + \mathfrak{f}_{li}^2),$$

oder durch folgende aus dieser Gleichung abgeleitete Construction:

Beschreibe über den drei Seiten des Dreiecks $F_1 F_2 F_3$ nach aussen Halbkreise, welche von den Verlängerungen der drei Höhen $F_1 V_1$, $F_2 V_2$, $F_3 V_3$ des Dreiecks in $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ geschnitten werden. Verbinde diese drei Punkte mit den Ecken des Dreiecks: so sind je zwei von derselben Ecke ausgehende Verbindungslinien gleich. Nehme irgend drei diesen Verbindungslinien proportionirte Strecken als Gegenstrecken.*

Dem zweiten obengenannten Falle widmen wir als dem wichtigeren eine ausführlichere Besprechung.

§ 5.

Willkürliche Wahl der Reductionsconstanten.

Werden f_i und g_i willkürlich gewählt, so giebt uns Gleichung 19) die Werthe von $\cos w_{ik}$ ausgedrückt in f_i und g_i, wenn uns gelingt, λ^2 in f_i und g_i auszudrücken. Dies geschieht dadurch, dass man die Werthe der Cosinusse aus 19) in die aus VII) folgende Gleichung

$$25)\qquad \cos^2 w_{12} + \cos^2 w_{23} + \cos^2 w_{31} - 2 \cos w_{12} \cos w_{23} \cos w_{31} - 1 = 0$$

einsetzt. Man erhält alsdann für λ^2 die Gleichung:

$$\text{IX. } 26)\qquad A\lambda^4 - 2B\lambda^2 + C = 0,$$

wo die Coefficienten A, B, C folgende Werthe haben:

---

* Vergl. zu dieser Construction die Bemerkung S. 95 Z. 4.

$$A=(g_1^2+g_2^2)(g_2^2+g_3^2)(g_3^2+g_1^2),$$
$$B=f_1^2g_1^2(g_2^2+g_3^2)+f_2^2g_2^2(g_3^2+g_1^2)+f_3^2g_3^2(g_1^2+g_2^2),$$
$$C=g_1^2(f_2^2-f_3^2)^2+g_2^2(f_3^2-f_1^2)^2+g_3^2(f_1^2-f_2^2)^2.$$

Die Discriminante dieser Gleichung: $\varDelta=B^2-AC$ lässt sich mit Benützung der in Gleichung 21) definirten Bezeichnungen $\mathfrak{g}_{12}$, $\mathfrak{g}_{23}$, $\mathfrak{g}_{31}$ auf folgende Form bringen:

$$27)\quad \varDelta=(g_1^2g_2^2+g_2^2g_3^2+g_3^2g_1^2)(f_1\mathfrak{g}_{23}+f_2\mathfrak{g}_{31}+f_3\mathfrak{g}_{12})(f_1\mathfrak{g}_{23}+f_2\mathfrak{g}_{31}-f_3\mathfrak{g}_{12})$$
$$(f_1\mathfrak{g}_{23}-f_2\mathfrak{g}_{31}+f_3\mathfrak{g}_{12})(-f_1\mathfrak{g}_{23}+f_2\mathfrak{g}_{31}+f_3\mathfrak{g}_{12}).$$

Der Willkürlichkeit der Wahl der f_i und g_i sind somit folgende Schranken gesetzt:

$$\text{X. } 28)\qquad f_i\sqrt{g_k^2+g_l^2}+f_k\sqrt{g_l^2+g_i^2}>f_l\sqrt{g_i^2+g_k^2}.$$

Innerhalb dieser Schranken entsprechen aber jedem Werthsystem $f_1f_2f_3$, $g_1g_2g_3$ zwei Werthsysteme $w_{12}w_{23}w_{31}$, die sich aus der Gleichung

$$\text{XI. } 29)\qquad \cos w_{ik}=\frac{f_i^2+f_k^2-\lambda^2(g_i^2+g_k^2)}{2f_if_k}$$

ergeben, wenn in dieselbe die aus Gleichung IX folgenden zwei Werthe von λ^2 eingesetzt werden.

Da ein perspectivisches Bild dem Auge nur dann einen mit dem Original vollkommen übereinstimmenden Eindruck macht, wenn beim Betrachten Auge und Bildebene in die richtige Lage im Raum gebracht werden, so ist es von Wichtigkeit, die Orientirungsconstanten, welche diese Lage bestimmen, ebenfalls auszudrücken als Functionen von f_i und g_i. Man erhält aus den Gleichungen II bis V mit Benützung von 18) folgendes Formelnsystem:

$$\text{XII. } 30)\qquad m_i=(1-\lambda)g_i,$$

$$\text{XIII. } 31)\qquad a_i=\frac{\frac{1}{g_i^2}\left(\frac{f_k^2}{g_k^2}+\frac{f_l^2}{g_l^2}\right)+\left(\frac{1}{g_k^2}+\frac{1}{g_l^2}\right)\left(\lambda^2-\frac{f_i^2}{g_i^2}\right)}{2\lambda^2\frac{1}{g_i}\left(\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}\right)},$$

$$\text{XIV. } 32)\qquad \varepsilon^2=\frac{(1-\lambda)^2}{\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}},$$

$$\text{XV. } 33)\qquad \cos\tau_i=\frac{\frac{1}{g_i}}{\sqrt{\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}}},$$

$$\text{XVI. } 34)\qquad r^2=\frac{\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{f_1^2}{g_1^2}+\frac{f_2^2}{g_2^2}+\frac{f_3^2}{g_3^2}\right)-1}{\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}},$$

$$\text{XVII. 35)}\quad \cos\sigma_i = \frac{\frac{1}{g_i^2}\left(\frac{f_k^2}{g_k^2}+\frac{f_l^2}{g_l^2}\right)+\left(\frac{1}{g_k^2}+\frac{1}{g_l^2}\right)\left(\lambda^2-\frac{f_i^2}{g_i^2}\right)}{2\lambda\frac{1}{g_i}\sqrt{\left(\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}\right)\left(\frac{f_1^2}{g_1^2}+\frac{f_2^2}{g_2^2}+\frac{f_3^2}{g_3^2}-\lambda^2\right)}},$$

$$\text{XVIII. 36)}\quad tg\varphi = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{f_1^2}{g_1^2}+\frac{f_2^2}{g_2^2}+\frac{f_3^2}{g_3^2}\right)-2}.$$

Durch die seither von uns benützten Orientirungsconstanten wird sowohl Auge als Bildebene auf das Objectcoordinatensystem bezogen, wird also die relative Lage des Auges zur Bildebene nur mittelbar bestimmt. Es ist nun aber von besonderer Wichtigkeit, Auge und Bildebene in directe Beziehung zu setzen.

Eine ungefähre, *in praxi* häufig ausreichende Orientirung des Auges kann mittels des Tetraeders $AF_1F_2F_3$ geschehen, dessen Dreikant an der Spitze A ein Octant ist: Man construire in Gedanken über dem Fluchtpunktendreieck als Basis ein solches Tetraeder, bringe sodann die Bildebene in eine solche Lage, dass die Seitenkante AF_3 vertical steht, und bringe das Auge in den Punkt A.

Eine genauere Orientirung ist diejenige mittels Hauptpunkt (Fusspunkt der vom Auge auf die Bildebene gefällten Senkrechten) und Augdistanz (Abstand des Auges von der Bildebene). Bestimmt man die Lage des Hauptpunktes H in der Bildebene durch seine Entfernungen h_1, h_2, h_3 von den drei Fluchtpunkten, beziehungsweise durch die Verhältnisse dieser drei Entfernungen, und bezeichnet die Augdistanz AH mit d, so liefert das rechtwinklige Dreieck AHF_i, dessen Hypotenuse $AF_i = \lambda g_i$ und dessen Winkel $HAF_i = \tau_i$ ist, für h_i und d die Werthe:

$$\text{XIX. 37)}\quad h_i = \lambda g_i \sqrt{\frac{\frac{1}{g_k^2}+\frac{1}{g_l^2}}{\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}}} = \varrho g_i \sqrt{\frac{1}{g_k^2}+\frac{1}{g_l^2}},$$

wo ϱ ein unbestimmter Factor ist,

$$\text{XX. 38)}\quad d^2 = \frac{\lambda^2}{\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}}.$$

Die geometrische Interpretation von XIX liefert den (auch direct einleuchtenden) Satz:

Der Hauptpunkt ist identisch mit dem Schnittpunkte der Höhen des Fluchtpunktendreiecks.

Um die Bildebene in die richtige Lage im Raume zu bringen, bemerke man, dass F_1F_2 parallel M_1M_2, also horizontal ist. Man stelle daher die Bildebene so, dass F_1F_2 horizontal und der Horizontalneigungswinkel der Bildebene $= \tau_3$ ist.

Die fünf Grössen τ_3, h_1, h_2, h_3, d, deren Kenntniss nach dem Vorhergehenden zur Orientirung von Bildebene und Auge ausreichend ist, können sämmtlich auch auf graphischem Wege bestimmt werden. Man vergl. hierzu Fig. 6. In derselben können die drei rechtwinkligen Dreiecke $F_i F_k \mathfrak{A}_l$ als die Umklappungen der drei Seitenflächen des Tetraeders $A F_1 F_2 F_3$ angesehen werden. H ist der Hauptpunkt, $HF_i = h_i$. Construirt man ein rechtwinkliges Dreieck $H V_3 \mathfrak{A}_0$ aus $H V_3$ als Kathete und $V_3 \mathfrak{A}_3$ als Hypotenuse, so ist $H \mathfrak{A}_0$ gleich der Augdistanz und Winkel bei $V_3 = \tau_3$.

Bezüglich einer rationellen Wahl der f_i und g_i mögen schliesslich noch folgende Winke genügen. Ueber den Einfluss ihrer absoluten Grösse bei feststehenden Verhältnissen folgt aus unseren Gleichungen unmittelbar folgender Satz:

In jedem Grundconstantensystem können die Reductionsconstanten nach Belieben proportional vergrössert oder verkleinert werden. Eine solche Vergrösserung oder Verkleinerung geht Hand in Hand mit einer proportionalen Vergrösserung oder Verkleinerung der Augdistanz. Dagegen hat sie keine Einwirkung auf die scheinbaren Axenwinkel, auf den Winkel τ_3 und auf die Verhältnisse von h_1, h_2, h_3.

Bei der Wahl der absoluten Grösse der Reductionsconstanten beachte man, dass die Augdistanz den Minimalwerth von $2{,}5^{\mathrm{dm}}$ (Weite des deutlichen Sehens) nicht überschreiten sollte.

Was sodann den Einfluss der Verhältnisse der f_i und g_i anbelangt, so influiren die Grössen g_i vermöge ihrer Proportionalität mit den Axenabschnitten lediglich auf die Lage der Bildebene. Für die Wahl der Grössen f_i ist sodann die Lage des Auges, die sich in der relativen Lage des Punktes ω zum Hauptpunkte geltend macht, massgebend. Hat man sich also für die Verhältnisszahlen der g_i entschieden, so erfolgt die Wahl der f_i mit Zuratheziehung der Gleichung XIX.

Als Beispiel diene das folgende, nach diesen Regeln aufgestellte Grundconstantensystem:

$$g_1 = 4^{\mathrm{dm}}, \quad f_1 = -3^{\mathrm{dm}}, \quad w_{12} = 130^0\,36{,}5',$$
$$g_2 = 5^{\mathrm{dm}}, \quad f_2 = -4^{\mathrm{dm}}, \quad w_{23} = 111^0\,53{,}5',$$
$$g_3 = 10^{\mathrm{dm}}, \quad f_3 = -9^{\mathrm{dm}}, \quad w_{31} = 117^0\,30',$$
$$\lambda^2 = 0{,}9908, \quad h_1 = 2{,}654^{\mathrm{dm}},$$
$$\tau_3 = 72^0\,39', \quad h_2 = 3{,}995^{\mathrm{dm}},$$
$$d = 2{,}968^{\mathrm{dm}}, \quad h_3 = 9{,}501^{\mathrm{dm}}.$$

§ 6.

Specialfälle.

Es ist leicht, die im Vorangehenden aufgestellten allgemeinen Formeln und Constructionen für die verschiedenen Perspectivarten zu specialisiren. Hierüber mögen folgende Andeutungen genügen.

1. Fällt Punkt ω mit dem Hauptpunkte zusammen (also in den Schnittpunkt der Höhen des Fluchtpunktendreiecks), so haben wir den Specialfall der Orthogonalperspective (Centralstrahl senkrecht zur Bildebene). Zu den in VIII enthaltenen Gleichungen kommen alsdann noch zwei weitere Beziehungen zwischen den sechs Reductionsconstanten hinzu, die sich unmittelbar aus Gleichung XIX mit $f_i^2 = h_i^2$ ergeben. Vermöge dieser Beziehung geht Gleichung XI über in die folgende:

$$39)\quad \cos w_{ik} = -\frac{1}{2\frac{f_i}{g_i}\frac{f_k}{g_k}}\sqrt{\left(-\frac{f_i^2}{g_i^2}+\frac{f_k^2}{g_k^2}+\frac{f_l^2}{g_l^2}\right)\left(\frac{f_i^2}{g_i^2}-\frac{f_k^2}{g_k^2}+\frac{f_l^2}{g_l^2}\right)}.$$

2. Fällt die Ecke F_3 des Fluchtpunktendreiecks ins Unendliche, so werden die Winkel bei F_1 und F_2 je $=90^0$, und wir haben den Specialfall der malerischen Perspective (Bildebene vertical). f_3 und g_3 werden $=\infty$. Setzt man den Grenzwerth von $\frac{f_3}{g_3}=p$, so wird $\lambda = p$. Die Reductionsformel für die z-Coordinaten reducirt sich auf $\zeta = pz$. Die Gleichungen VIII gehen über in die folgenden:

$$40)\quad p^2(g_1^2+g_2^2) = f_1^2+f_2^2-2f_1f_2\cos w_{12},$$

$$41)\quad f_1\cos w_{31} = f_2 \cos w_{23}.$$

Diesen Gleichungen zufolge modificirt sich die S. 91 besprochene graphische Bestimmung eines Grundconstantensystems folgendermassen (Fig. 7):

Wähle g_1, g_2, p beliebig. Construire ein rechtwinkliges Dreieck $\mathfrak{A}F_1F_2$ mit den im Verhältniss p verkürzten Strecken g_1 und g_2 als Katheten; F_1F_2 sei die Hypotenuse. Verbinde einen in der Ebene dieses Dreiecks beliebig liegenden Punkt ω mit F_1 und F_2 und ziehe $\omega\zeta$ senkrecht zu F_1F_2. Nehme die von $\omega\zeta$ und den Rückverlängerungen von ωF_1 und ωF_2 eingeschlossenen Winkel als scheinbare Axenwinkel und ωF_1 und ωF_2 als Fluchtstrecken. — Fällt man $\mathfrak{A}H \perp F_1F_2$, so ist H der Hauptpunkt, $\mathfrak{A}H$ die Augdistanz.

Wählt man den Punkt ω auf $\mathfrak{A}H$, so hat man den Specialfall der Escarpperspective* (die durch Centralstrahl und z-Axe gelegte Ebene senkrecht zur Bildebene). Fällt ω in den Punkt $\mathfrak{A}$, so wird die

* Ich habe hier die Namen der einzelnen Perspectivarten von der Parallelperspective herübergenommen und unterscheide dann z. B. „cavalière Centralperspective“ und „cavalière Parallelperspective“. Für die von mir „Escarpperspective“ oder „escarpe Perspective“ genannte Perspectivart existirte seither kein mir convenirender Name. — Der Name „Vogelperspective“, der sonst wohl in den verschiedensten Bedeutungen gebraucht wird, erscheint mir zur Bezeichnung einer Perspectivart nicht geeignet, insofern er — ebenso wie sein Oppositum „Froschperspective“ — der Ausdruck für einen disparaten, innerhalb jeder einzelnen Perspectivart möglichen, Begriff ist. — Leider herrscht bezüglich der Benennungen der einzelnen Perspectivarten eine grosse Uneinigkeit und Verwirrung und erscheint eine Verständigung in diesem Punkte höchst wünschenswerth.

Escarpperspective zur Militärperspective (Horizontalneigung des Centralstrahls $= 45^0$).

Fällt noch ein zweiter Eckpunkt des Fluchtpunktendreiecks, z. B. F_2, ins Unendliche, so haben wir den Specialfall der Cavalierperspective (Bildebene parallel der yz-Ebene). f_2 und g_2 werden $= \infty$ und $\frac{f_2}{g_2} = \frac{f_3}{g_3} = p$. Winkel w_{23} wird $= 90^0$. Die Wahl der übrigen Grundconstanten w_{12}, f_1, g_1, p ist vollkommen willkürlich.

§ 7.

Uebergang zur Parallelperspective.

Wird $r = \infty$, so werden f_i und $g_i = \infty$, ihre Verhältnisse haben jedoch endliche Werthe. Setzt man den Grenzwerth

42) $$\frac{f_i}{g_i} = p_i,$$

so gehen die Reductionsformeln I über in

I'. 43) $$\xi = p_1 x, \quad \eta = p_2 y, \quad \zeta = p_3 z$$

und ergeben sich aus den Gleichungen IV' und V' für p_i die Werthe:

IV''. 44) $$p_i = \nu_i \cos \tau_i .$$

Die Gleichungen II', III' und VI' bleiben in Giltigkeit. — Man bemerke, dass ε ganz ausfällt.

Die Constructionen am scheinbaren Axensystem vereinfachen sich wie folgt: Schneide auf der ξ-Axe die Strecke $\omega \Xi = \xi$ ab, ziehe durch Ξ eine Parallele zur η-Axe und schneide auf ihr $\Xi \pi = \eta$ ab, ziehe endlich durch π eine Parallele zur ζ-Axe und mache auf ihr $\pi \Pi = \zeta$.

In dem Massstabnetze (Fig. 5) werden $\omega_i F_i$ sämmtlich parallel LL', ihre Abstände von C werden: $C\omega_i = p_i . Co$.

An Stelle unserer seitherigen Grössen f_i und g_i treten nunmehr in der Parallelperspective deren Verhältnisse $\frac{f_i}{g_i}$ und $\frac{g_i}{g_k}$. Die drei Verhältnisse $\frac{f_i}{g_i} = p_i$ sind die Reductionsconstanten der Parallelperspective. Die drei Verhältnisse $\frac{g_i}{g_k}$ spielen die Rolle von Hilfsgrössen, deren Beibehaltung bei der willkürlichen Wahl der Grundconstanten bedeutende Vortheile mit sich bringt. Um übrigens die Symmetrie unserer Formeln zu wahren, setzen wir

45) $$\frac{g_i}{g_k} = \frac{\gamma_i}{\gamma_k},$$

wo γ_1, γ_2, γ_3 endliche Grössen sein mögen.

Da nunmehr die neun Grössen p_1, p_2, p_3, $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, $\frac{\gamma_2}{\gamma_3}$, $\frac{\gamma_3}{\gamma_1}$, w_{12}, w_{23}, w_{31} Functionen der vier von einander unabhängigen Variabeln sind, welche die Richtung der Bildebene und der parallelen Sehstrahlen bestimmen, so bestehen fünf Relationen zwischen denselben. Von diesen ergeben sich zwei direct, nämlich die Winkelrelation VII und die Gleichung $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\frac{\gamma_2}{\gamma_3}\frac{\gamma_3}{\gamma_1}=1$. Die drei übrigen ergeben sich aus VIII, wenn man bemerkt, dass für $r=\infty$: $\lambda=1$ wird und wenn man an Stelle von f_i überall $\frac{f_i}{g_i}\, g_i=\frac{f_i}{g_i}\,\gamma_i$ einsetzt.* Man erhält alsdann die drei Gleichungen:

VIII'. 46) $\gamma_i^2+\gamma_k^2=p_i^2\gamma_i^2+p_k^2\gamma_k^2-2\,p_i p_k \gamma_i \gamma_k \cos w_{ik}$.

Wir dürfen nun vier Grundconstanten willkürlich wählen. Statt zwei Grössen p_i willkürlich zu wählen, können wir auch deren Verhältnisse — oder, wenn wir

47) $$p_i=\varrho\pi_i$$

setzen, die drei Grössen π_i beliebig nehmen. Dabei gewährt es bedeutende Vortheile, die π_i als rationale ganze Zahlen zu wählen. — Es sind nun folgende zwei Annahmen von besonderer Wichtigkeit:

1. wir wählen π_1, π_2, π_3, w_{12}, w_{23}, w_{31} (in Uebereinstimmung mit VII) willkürlich;
2. wir wählen π_1, π_2, π_3, γ_1, γ_2, γ_3 willkürlich.

Die erste Annahme ist für die allgemeine Parallelperspective die naturgemässeste und führt zu dem Pohlke'schen Theorem, sie bietet jedoch ungleich mehr Schwierigkeiten, als die zweite. Die zweite Annahme erledigt zwar wegen der Beibehaltung der Hilfsgrössen γ_i die allgemeine Parallelperspective nicht so direct wie die erste, erweist sich aber für die Anwendung auf Specialfälle ungleich fruchtbarer als jene. Sie erfordert nur eine einfache Modification unserer centralperspectivischen Resultate. Dieselbe besteht darin, dass man in den centralperspectivischen Formeln IX—XVIII

48) $$\lambda=1$$

setzt und die Substitution

49) $$f_i=\frac{f_i}{g_i}\,g_i=p_i\gamma_i=\varrho\,\pi_i\gamma_i$$

anbringt. Bei diesem Verfahren liefert zunächst Gleichung IX für ϱ^2 die Gleichung

IX'. 50) $$\mathfrak{C}\varrho^4-2\mathfrak{B}\varrho^2+\mathfrak{A}=0,$$

wo die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ folgende Werthe haben:

---

* Die Substitution von γ_i an Stelle von g_i ist erlaubt, da die Gleichungen nach g_i homogen sind.

$$\mathfrak{A} = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)(\gamma_2^2 + \gamma_3^2)(\gamma_3^2 + \gamma_1^2),$$
$$\mathfrak{B} = \pi_1^2 \gamma_1^4 (\gamma_2^2 + \gamma_3^2) + \pi_2^2 \gamma_2^4 (\gamma_3^2 + \gamma_1^2) + \pi_3^2 \gamma_3^4 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2),$$
$$\mathfrak{C} = \gamma_1^2 (\pi_2^2 \gamma_2^2 - \pi_3^2 \gamma_3^2)^2 + \gamma_2^2 (\pi_3^2 \gamma_3^2 - \pi_1^2 \gamma_1^2)^2 + \gamma_3^2 (\pi_1^2 \gamma_1^2 - \pi_2^2 \gamma_2^2)^2.$$

Die Untersuchung der Discriminante dieser Gleichung liefert die Bedingung:

X′. 51) $$\pi_i \gamma_i \sqrt{\gamma_k^2 + \gamma_l^2} + \pi_k \gamma_k \sqrt{\gamma_l^2 + \gamma_i^2} > \pi_l \gamma_l \sqrt{\gamma_i^2 + \gamma_k^2}.$$

Des Weitern gehen die Gleichungen XI, XV, XVII, XVIII über in die folgenden:

XI′. 52) $$\cos w_{ik} = \frac{p_i^2 \gamma_i^2 + p_k^2 \gamma_k^2 - (\gamma_i^2 + \gamma_k^2)}{2 p_i p_k \gamma_i \gamma_k} = \frac{\pi_i^2 \gamma_i^2 + \pi_k^2 \gamma_k^2 - \frac{1}{\varrho^2} (\gamma_i^2 + \gamma_k^2)}{2 \pi_i \pi_k \gamma_i \gamma},$$

XV′. 53) $$\cos \tau_i = \frac{\frac{1}{\gamma_i}}{\sqrt{\frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{1}{\gamma_2^2} + \frac{1}{\gamma_3^2}}},$$

XVII′. 54) $$\cos \sigma_t = \frac{\frac{1}{\gamma_i^2} (p_k^2 + p_l^2) + \left(\frac{1}{\gamma_k^2} + \frac{1}{\gamma_l^2}\right)(1 - p_i^2)}{2 \frac{1}{\gamma_i} \sqrt{\left(\frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{1}{\gamma_2^2} + \frac{1}{\gamma_3^2}\right)(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 1)}}$$
$$= \frac{\frac{1}{\gamma_i^2} (\pi_k^2 + \pi_l^2) + \left(\frac{1}{\gamma_k^2} + \frac{1}{\gamma_l^2}\right)\left(\frac{1}{\varrho^2} - \pi_i^2\right)}{2 \frac{1}{\varrho} \frac{1}{\gamma_i} \sqrt{\left(\frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{1}{\gamma_2^2} + \frac{1}{\gamma_3^2}\right)\left(\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2 - \frac{1}{\varrho^2}\right)}},$$

XVIII′. 55) $$tg\, \varphi = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 2} = \sqrt{\varrho^2 (\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2) - 2}.*$$

Modificirt man die allgemeinen centralperspectivischen Formeln für die in § 6 angedeuteten Specialfälle und wendet alsdann auf die modificirten Formeln die Substitutionen 48) und 49) an, so resultiren die bekannten parallelperspectivischen Specialformeln. Z. B. ergeben sich aus 39) unmittelbar die Weisbach'schen Formeln:

56) $$\cos w_{ik} = -\frac{1}{2 \pi_i \pi_k} \sqrt{(-\pi_i^2 + \pi_k^2 + \pi_l^2)(\pi_i^2 - \pi_k^2 + \pi_l^2)}.$$

---

* Gleichung XVIII′ wurde schon von Pohlke gegeben. Vergl. Pohlke, Darst. Geom., 2. Aufl., S. 115.

VI.

Ein Fall, in welchem die Differentialgleichung $x(1-x)(1-kx)y''' + (u+vx+wkx^2)y'' + (\tau + w'kx)y' + w''ky = 0$ integrirt werden kann.

Von

J. Thomae,

Professor an der Universität Freiburg.

Die sieben Constante enthaltende Differentialgleichung

1) $x(1-x)(1-kx)y''' + (u+vx+wkx^2)y'' + (\tau + w'kx)y' + w''ky = 0$

ist in zwei Fällen integrirt worden, in denen die Constanten nur zwei Bedingungen unterworfen sind. Erstens in dem Falle, in welchem dieselbe den mit allgemeinem Zeiger gebildeten (Liouville'schen Differentialquotienten des Ausdrucks

$$X_{\lambda,\mu,\nu} = x^{\lambda}(1-x)^{\mu}(1-kx)^{\nu}$$

zum Integral hat, der von den Herren Pochhammer und Hossenfelder behandelt ist. Aus dem einfachen Ausdrucke

$$y = \frac{d^{\xi} x^{\lambda}(1-x)^{\mu}(1-kx)^{\nu}}{dx^{\xi}}$$

(in dem ξ jedwede auch complexe Zahl bedeuten kann), der in diesem Falle ein Integral der Gleichung 1) bildet, kann man leicht einige Relationen zwischen contiguen Functionen herleiten. Z. B. dadurch, dass man die Identität

$$x^{\lambda}(1-x)^{\mu}(1-kx)^{\nu} - x \,.\, x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu}(1-kx)^{\nu} = 0$$

ξmal differenzirt, erhält man die Gleichung

$$\frac{d^{\xi} X_{\lambda,\mu,\nu}}{dx^{\xi}} - x\frac{d^{\xi} X_{\lambda-1,\mu,\nu}}{dx^{\xi}} - \xi\frac{d^{\xi-1} X_{\lambda,\mu,\nu}}{dx^{\xi-1}} = 0.$$

Die Lösungen der Differentialgleichung lassen sich in diesem Falle durch bestimmte Integrale ausdrücken.

Weiter ist die Gleichung 1) in dem Falle integrirt worden, in welchem $k=1$ und $u+v+w=0$ oder $k=\infty$, $v=qk$, $\tau=q'k$ ist. Die

Lösungen lassen sich in diesem Falle durch bestimmte Doppelintegrale ausdrücken. Ich habe in den Leipziger Annalen, Bd. II S. 437, gezeigt, dass in diesem Falle zwischen je vier contiguen Functionen eine lineare homogene Relation mit ganzen Coefficienten (ähnlich wie bei der Gauss'schen Reihe zwischen je drei contiguen Functionen) stattfindet.

Beide Fälle lassen eine Verallgemeinerung zu, ohne dass die Integrabilität geschädigt wird.

Im ersten Falle nämlich sind die Exponenten der Anfangsglieder der drei nach absteigenden Potenzen von x geordneten Reihen, welche particuläre Lösungen und zusammen die vollständige Lösung der Differentialgleichung sind, β, β', $\beta'+1$, worin β und β' willkürlich sind. Wenn aber diese Exponenten β, β', $\beta'+n$ sind, und wenn n eine ganze Zahl bedeutet, und wenn die Reihen keine logarithmischen Terme enthalten, so ist die Differentialgleichung noch integrabel.* Aehnlich ist die Verallgemeinerung, die der zweite Fall zulässt. Im Folgenden wird noch ein Fall der Integrabilität hinzugefügt, nämlich der, in welchem die Gleichung 1) eine Gauss'sche Reihe und natürlich ihre gesammte Fortsetzung als particuläres Integral enthält. Da man alsdann zwei particuläre Lösungen der Gleichung 1) besitzt, so folgt aus allgemeinen Sätzen der Theorie der Differentialgleichungen, dass man die Gleichung 1) vollständig integriren könne, und es kann daher ein besonderer Werth auf die Integration an sich nicht gelegt werden. Allein da sich dieser specielle Fall zum allgemeinen gerade so verhält, wie die specielle Gauss'sche Reihe $F(1, b, c, x)$ zur allgemeinen $F(a, b, c, x)$, und da sich die Eigenschaften der allgemeinen in denen der speciellen fast ungetrübt abspiegeln, so scheint es keine überflüssige Arbeit zu sein, die Integrale der Gleichung 1) für den besprochenen beschränkten Fall zusammenzustellen, was hier im Art. II geschieht. Vielleicht dass einiges Licht aus diesen Formeln auf die Eigenschaften der Integrale der allgemeinen Gleichung 1) fällt.

Wendet man auf die drei erwähnten Fälle der Integrabilität die Methode der Differentiation mit beliebigem Zeiger an, so bleiben die beschränkenden Bedingungen unberührt und es werden daher die Resultate durch diese Methode nicht verallgemeinert.

Einiges über die allgemeine Differentialgleichung 1) und die Bezeichnung ihrer Integrale wird in Art. I vorausgeschickt. Der Untersuchung des Zusammenhanges der Zweige der behandelten Function werde ich eine Fortsetzung dieses Aufsatzes später widmen.

---

* Man gelangt nämlich durch $(-\beta')$-malige Differentiation zu der von mir in dieser Zeitschrift, Bd. XIX S. 273, behandelten Differentialgleichung.

I.

Das Interesse, welches die Differentialgleichung 1) bietet, besteht hauptsächlich darin, dass sie für $\omega''=0$, $y''=\eta$ in die Gleichung

$$2)\quad x(1-x)(1-kx)\,\eta''+(u+vx+wkx^2)\,\eta'+(\tau+w'kx)\,\eta=0$$

übergeht, welche die natürlichste Verallgemeinerung der die Gauss-schen Reihen definirenden Differentialgleichung [die für $k=0$ aus 2) entspringt] ist. Die Integration der letzten Gleichung würde die der Gleichung 1) in unmittelbarem Gefolge haben, wenn man auf das Integral derselben die Methode der Differentiation mit beliebigem Zeiger anwendete.* Allein wir besitzen ebenso wenig Mittel, die Gleichung 2) zu integriren, als deren vorhanden sind, das Integral der Gleichung 1) aufzustellen, und es scheint gerathen, die Untersuchung der Gleichung 1) vor der der Gleichung 2) in die Hand zu nehmen, obgleich jene einfacher scheint, weil eine nicht unwichtige Eigenschaft, die den Integralen von 1) zukommt, denen der speciellen Gleichung 2) abgeht, nämlich die weiter unten durch die Gleichung 3) ausgesprochene Eigenschaft, dass ihre Lösungen zugleich Lösungen einer Recursionsformel sind.

Integrirt man eine Differentialgleichung durch eine nach Potenzen von $x-a$ geordnete Reihe, deren Exponenten um eine Einheit aufsteigen, so soll diese Reihe ein Integral im Punkte a genannt werden; wenn hingegen die Exponenten um eine Einheit abnehmen, so soll die Reihe ein Integral im Punkte ∞ genannt werden, was auch a sein mag.

Die Differentialgleichung 1) besitzt nun drei particuläre Integrale im Punkte Null. Zwei davon sind einändrig und ihre Entwickelung kann mit der 0^{ten} Potenz von x beginnen. Sie sollen mit $Q^{0,0}(x)$, $Q^{0,0'}(x)$ bezeichnet werden, und es darf

$$Q^{0,0}(x)\,Q^{0,0'}(0)-Q^{0,0'}(x)\,Q^{0,0}(0)$$

nicht identisch Null sein, wenn die Integrale voneinander unabhängig sein sollen. Das dritte particuläre Integral beginnt mit der $\alpha=(2-u)^{\text{ten}}$ Potenz von x und soll mit $Q^{0,\alpha}(x)$ bezeichnet werden. Ebenso giebt es je drei particuläre Integrale im Punkte 1 und im Punkte $1:k$. Zwei der ersten sind einändrig und ihre Entwickelung kann mit der 0^{ten} Potenz von $1-x$ beginnen. Sie sollen mit $Q^{1,0}(x)$, $Q^{1,0'}(x)$ bezeichnet werden. Die Entwickelung des dritten beginnt mit der γ^{ten} Potenz, wenn γ durch die Gleichung

$$v=\gamma+\alpha-4-k(\gamma+w-2)$$

bestimmt ist. Es werde mit $Q^{1,\gamma}(x)$ bezeichnet. Die drei Integrale im Punkte $1:k$ werden in analoger Weise mit $Q^{1:k,0}(x)$, $Q^{1:k,0'}(x)$, $Q^{1:k,\delta}(x)$

* Man vergl. Göttinger Nachrichten von 1874, S. 249.

bezeichnet, und es wird δ, der niedrigste Exponent der Entwickelung des nicht einändrigen Integrals, nach Potenzen von $(1-kx)$ durch die Gleichung

$$v = -\delta - w + 2 + k(\delta + \alpha - 4)$$

bestimmt. Integrirt man endlich die Differentialgleichung 1) durch Reihen, welche nach absteigenden Potenzen von $x-a$ geordnet sind, so findet man drei particuläre Integrale im Punkte ∞, deren höchste Exponenten bez. β, β', β'' sind. Die Integrale selbst mögen mit $Q^{\infty,\beta}(x)$, $Q^{\infty,\beta'}(x)$, $Q^{\infty,\beta''}(x)$ bezeichnet werden. Die Grössen β, β', β'' ergeben sich aus den Gleichungen

$$w = \beta + \beta' + \beta'' + 3, \quad w' = \beta\beta' + \beta'\beta'' + \beta''\beta + \beta + \beta' + \beta'' + 1, \quad w'' = \beta\beta'\beta''.$$

Zwischen den Grössen α, β, β', β'', γ, δ, welche die Exponenten der Gleichung 1) oder die Exponenten der particulären Integrale in den Punkten 0, ∞, 1, $1:k$ heissen, besteht die Gleichung

$$\alpha + \beta + \beta' + \beta'' + \gamma + \delta = 3.$$

Durch die Exponenten und die Grösse k sind die Coefficienten in 1) nicht alle bestimmt, sondern die Gleichung hängt noch von einer willkürlichen Grösse τ ab; wir wollen deshalb das allgemeine Integral mit

$$Q\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & k \\ \gamma, & \beta', & \tau \\ \delta, & \beta'', & x\end{pmatrix}$$

bezeichnen, wenn eine Angabe der Exponenten und der Grösse τ nöthig ist, sonst nur mit $Q(x)$.

Differenziren wir die Gleichung 1) $n$mal, so resultirt

$$3)\quad \begin{aligned} x(1-x)(1-kx)\,y'''_n + (u_n + v_n x + w_n k x^2)\,y''_n \\ + (\tau_n + w_n k x)\,y'_n + w''_n k y_n = 0, \end{aligned}$$

worin

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y_n, \quad \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = y_{n+1} \text{ etc.},$$

$$u_n = u + n, \quad v_n = v - 2n(1+k), \quad w_n = w + 3n,$$

$$\tau_n = \tau + uv - n(n-1)(1+k), \quad w'_n = w' + 2nw + 3n(n-1),$$

$$w''_n = w'' + nw' + n(n-1)w + n(n-1)(n-2) = (\beta+n)(\beta'+n)(\beta''+n)$$

zu setzen ist. Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist

$$y_n = Q_n(x) = Q\begin{pmatrix}\alpha-n, & \beta+n, & k \\ \gamma-n, & \beta'+n, & \tau + vn - n(n-1)(1+k) \\ \delta-n, & \beta''+n, & x\end{pmatrix},$$

worin

$$\begin{aligned} v &= -\delta - \beta - \beta' - \beta'' - 1 + k(\delta + \alpha - 4) = \gamma + \alpha - 4 - k(\gamma + \beta + \beta' + \beta'' + 1) \\ &= \quad \gamma + \alpha - 4 \quad + k(\delta + \alpha - 4) = \gamma + \alpha - 4 + k(\delta + \alpha - 4) \end{aligned}$$

ist. Lässt man hierin für n jedwede Zahl zu, so kann man eine der Grössen $\alpha - n$, $\gamma - n$, $\delta - n$ der Null gleich machen, für welchen Fall das Integral Q im Allgemeinen logarithmische Bestandtheile erhalten wird, oder man kann eine der Grössen $\beta+n$, $\beta'+n$, $\beta''+n$ gleich Null machen, in welchem Falle die Gleichung 1) die Form 2) in Bezug auf $y'=\eta$ annimmt, weil dann w'' gleich Null wird.* Endlich kann man auch noch die Grösse τ_n der Null gleich machen, wodurch jedoch die Integration ebenso wenig erleichtert wird.

Da der Differentialquotient einer Function Q wieder eine Function Q mit abgeänderten Exponenten und abgeändertem τ ist, so kann man die Gleichung 3) als eine Recursionsformel ansehen, welche zur Definition der Function Q ebenso tauglich und daher für sie beinahe ebenso wichtig ist, als die Differentialgleichung. Oder man kann sie auch als eine Relation zwischen contiguen Functionen ansehen, wenn dieser Begriff in demselben Sinne wie bei der Gauss'schen Reihe gefasst wird. Setzt man für y_n, y'_n, y''_n, y'''_n bez. einen einzelnen Zweig der Functionen $Q_n(x)$, $Q_{n+1}(x)$, $Q_{n+2}(x)$, $Q_{n+3}(x)$ in 3) ein, so muss man noch auf den constanten Factor achten, welchen man den Zweigen der Function zuertheilen muss. Genügt $Q_n(x)$ der Gleichung 3) nur als einer Differentialgleichung, so könnte jeder Lösung ein willkürlicher Factor beigelegt werden. Aber nicht jede Lösung der Differentialgleichung ist eine Lösung der Recursionsformel, sondern nur eine solche, in der $\frac{d\,Q_n(x)}{dx}=Q_{n+1}(x)$ ist, d. h. eine Lösung, in welcher durch Verwandlung von n in $n+1$ aus Q_n die Grösse $\frac{d\,Q_n(x)}{dx}$ hervorgeht. Setzt man für $Q_n(x)$ irgend einen der mehrändrigen Zweige $Q_n^{0,\,\alpha-n}(x)$, $Q_n^{\infty,\,\beta+n}(x)$, $Q_n^{\infty,\,\beta'+n}(x)$, ... $Q_n^{1:k,\,\delta-n}(x)$, so wird die Gleichung 3) als Recursionsformel erfüllt, wenn man annimmt, dass

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x=0} x^{-\alpha}\, Q^{0,\alpha}(x) = K_{0,\alpha} : \Pi(\alpha), \qquad \lim_{x=1} \Pi(\gamma)\,(1-x)^{-\gamma}\, Q^{1,\gamma}(x) = e^{\gamma i\pi} K_{1+\gamma},\\
&\qquad \lim_{x=1:k} \Pi(\delta)\,(1-kx)^{-\delta}\, k^{\delta}\, Q^{1:k,\,\delta}(x) = e^{\delta i\pi} K_{1:k,\,\delta},\\
4)\qquad &\qquad\quad \lim_{x=\infty} x^{\beta}\, Q^{\infty,\beta}(x) = \beta^{\beta i\pi}\,\Pi(\beta-1)\, K_{\infty,\beta},\\
&\qquad\quad \lim_{x=\infty} x^{\beta'}\, Q^{\infty,\beta'}(x) = \beta^{\beta' i\pi}\,\Pi(\beta'-1)\, K_{\infty,\beta'},\\
&\qquad\quad \lim_{x=\infty} x^{\beta''}\, Q^{\infty,\beta''}(x) = \beta^{\beta'' i\pi}\,\Pi(\beta''-1)\, K_{\infty,\beta''}
\end{aligned}
$$

sei, und wenn $K_{0,\alpha}$, ... $K_{\infty,\beta''}$ solche Functionen der Exponenten und von τ sind, dass sie ungeändert bleiben, wenn α, γ, δ in $\alpha-n$, $\gamma-n$,

* Eine Untersuchung des Integrals der Gleichung 2) ist von Herrn A. Schondorf in einem Aufsatze „Ueber eine Minimalfläche", Göttingen 1868, angestellt. Durch einen Irrthum (S. 49) in der Constantenabzählung gelangt Herr Schondorf zu dem unrichtigen Resultate, dass das Integral durch die Exponenten und k bis auf zwei willkürliche Constante bestimmt sei.

$\delta - n$ und β, β', β'' in $\beta+n$, $\beta'+n$, $\beta''+n$ und τ in τ_n für ein ganzes n übergehen. Diese Annahme soll fernerhin immer gemacht werden und die K sollen sämmtlich gleich Eins gesetzt werden.

Will man aber die in den Punkten 0, 1, $1:k$ einändrigen Integrale $Q_n^{0,0}(x)$, $Q_n^{0,0'}(x)$, $Q_n^{1,0}(x)$, ... in 3) einsetzen, so ist zu beachten, dass jede von diesen Functionen als Lösung der Differentialgleichung zwei willkürliche Constante enthält, nämlich $Q_n(0)$ und $Q'_n(0)$ oder $Q_n(1)$ und $Q'_n(1)$, oder $Q_n(1:k)$ und $Q'_n(1:k)$ (wenn der an Q oben angehängte Strich die einmalige Differentiation nach x andeutet). Damit diese Functionen aber zugleich Lösungen der Recursionsformel seien, müssen die willkürlichen Constanten so bestimmt werden, dass die Gleichungen

5a) $$Q_{n+2}(0)\,u_n + Q_{n+1}(0)\,\tau_n + Q_n(0)\,w''_n k = 0,$$

5b) $$Q_{n+2}(1)\,(u_n+v_n+kw_n) + Q_{n+1}(1)\,(\tau_n+w'_n k) + Q_n(1)\,w''_n k = 0,$$

5c) $$Q_{n+2}(1:k)\,(u_n k+v_n+w_n) + Q_{n+1}(1:k)\,(\tau_n+w'_n k) + Q_n(1:k)\,w''_n k^2 = 0$$

befriedigt sind. Die Constanten der Zweige $Q_n^{0,0}(x)$, $Q_n^{0,0'}(x)$ sollen deshalb fernerhin so bestimmt werden, dass $Q_0^{0,0}(0)$ und $Q_0^{0,0'}(0)$ zwei voneinander unabhängige Lösungen der Gleichung 5a) sind. Der Coefficient von x in diesen Zweigen ist dann durch die Bedingung bestimmt, dass er bez. gleich $Q_{n+1}^{0,0}(0)$, $Q_{n+1}^{0,0'}(0)$ sein muss. Ebenso sollen $Q_n^{1,0}(1)$, $Q_n^{1,0'}(1)$ zwei unabhängige Lösungen von 5b), $Q_n^{1:k,0}(1:k)$, $Q_n^{1:k,0'}(1:k)$ zwei unabhängige Lösungen von 5c) sein. Dadurch sind diese Zweige bis auf einen willkürlichen Factor, der ungeändert bleibt, wenn n in $n+1$ übergeht, bestimmt. Setzen wir daher

$$Q^{0,0}(x) = \begin{pmatrix}0, & 1\\ 0, & 0\end{pmatrix} Q^{1,0}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1\\ 0, & 0'\end{pmatrix} Q^{1,0'}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1\\ 0, & \gamma\end{pmatrix} Q^{1,\gamma}(x)$$

6a) $$= \begin{pmatrix}0, & 1:k\\ 0, & 0\end{pmatrix} Q^{1:k,0}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1:k\\ 0, & 0'\end{pmatrix} Q^{1:k,0'}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1:k\\ 0, & \delta\end{pmatrix} Q^{1:k,\delta}(x)$$

$$= \begin{pmatrix}0, & \infty\\ 0, & \beta\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta}(x) + \begin{pmatrix}0, & \infty\\ 0, & \beta'\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta'}(x) + \begin{pmatrix}0, & \infty\\ 0, & \beta''\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta''}(x),$$

$$Q^{0,0'}(x) = \begin{pmatrix}0, & 1\\ 0', & 0\end{pmatrix} Q^{1,0}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1\\ 0', & 0'\end{pmatrix} Q^{1,0'}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1\\ 0', & \gamma\end{pmatrix} Q^{1,\gamma}(x)$$

6b) $$= \begin{pmatrix}0, & 1:k\\ 0', & 0\end{pmatrix} Q^{1:k,0}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1:k\\ 0', & 0'\end{pmatrix} Q^{1:k,0'}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1:k\\ 0', & \delta\end{pmatrix} Q^{1:k,\delta}(x)$$

$$= \begin{pmatrix}0, & \infty\\ 0', & \beta\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta}(x) + \begin{pmatrix}0, & \infty\\ 0', & \beta'\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta'}(x) + \begin{pmatrix}0, & \infty\\ 0', & \beta''\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta''}(x),$$

$$Q^{0,\alpha}(x) = \begin{pmatrix}0, & 1\\ \alpha, & 0\end{pmatrix} Q^{1,0}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1\\ \alpha, & 0'\end{pmatrix} Q^{1,0'}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1\\ \alpha, & \gamma\end{pmatrix} Q^{1,\gamma}(x)$$

6c) $$= \begin{pmatrix}0, & 1:k\\ \alpha, & 0\end{pmatrix} Q^{1:k,0}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1:k\\ \alpha, & 0'\end{pmatrix} Q^{1:k,0'}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1:k\\ \alpha, & \delta\end{pmatrix} Q^{1:k,\delta}(x)$$

$$= \begin{pmatrix}0, & \infty\\ \alpha, & \beta\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta}(x) + \begin{pmatrix}0, & \infty\\ \alpha, & \beta'\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta'}(x) + \begin{pmatrix}0, & \infty\\ \alpha, & \beta''\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta''}(x),$$

so müssen die Coefficienten $\begin{pmatrix}0, & 1\\ 0, & 0\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}0, & \infty\\ \alpha, & \beta''\end{pmatrix}$ nicht blos unabhängig von x sein, sondern auch ungeändert bleiben, wenn α, γ, δ in $\alpha - n$, $\beta - n$, $\delta - n$, wenn β, β', β'' in $\beta + n$, $\beta' + n$, $\beta'' + n$, und wenn τ in τ_n für ein ganzzahliges n übergehen.

Man kann in der Gleichung 1) für die Unabhängige durch einige Substitutionen neue Veränderliche einführen, durch welche die Form dieser Gleichung nicht wesentlich geändert wird. Setzt man nämlich

$$x = x_1 : k, \qquad x_1 = kx, \qquad dx = dx_1 : k,$$

$$x = [1-(1-k)x_2] : k, \quad x_2 = (1-kx) : (1-k), \quad dx = \left(1-\frac{1}{k}\right) dx_2,$$

$$x = 1 - \left(1-\frac{1}{k}\right) x_3, \quad x_3 = (1-x) : \left(1-\frac{1}{k}\right), \quad dx = -\left(1-\frac{1}{k}\right) dx_3,$$

so erhält man die drei Differentialgleichungen

$$\text{7 a)} \quad x_1(1-x_1)\left(1-\frac{1}{k}x_1\right)\frac{d^3y}{dx_1^3} + \left(u + \frac{v}{k}x_1 + \frac{w}{k}x_1^2\right)\frac{d^2y}{dx_1^2} + \left(\frac{\tau}{k} + \frac{w'}{k}x_1\right)\frac{dy}{dx_1} + \frac{w''}{k}y = 0,$$

$$\text{7 b)} \quad x_2(1-x_2)[1-(1-k)x_2]\frac{d^3y}{dx_2^3} + \left[\frac{uk+v+w}{1-k} - (u+2w)x_2 + w(1-k)x_2^2\right]\frac{d^2y}{dx_2^2} + [-(\tau+w') + w'(1-k)x_2]\frac{dy}{dx_2} + w''(1-k)y = 0,$$

$$\text{7 c)} \quad x_3(1-x_3)\left[1-\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]x_3\frac{d^3y}{dx_3^3} + \left[\frac{u+v+wk}{k-1} - \left(\frac{v}{k}+2w\right)x_3 + w\left(1-\frac{1}{k}\right)x_3^2\right]\frac{d^2y}{dx_3^2} + \left[-\left(\frac{\tau}{k}+w'\right) + w'\left(1-\frac{1}{k}\right)x_3\right]\frac{dy}{dx_3} + w''\left(1-\frac{1}{k}\right)y = 0.$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$\text{8)} \quad Q\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & k\\ \gamma, & \beta', & \tau\\ \delta, & \beta'', & x\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & 1:k\\ \delta, & \beta', & \tau:k\\ \gamma, & \beta'', & xk\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}\delta, & \beta, & 1-k\\ \gamma, & \beta', & -(\tau+w)\\ \alpha, & \beta'', & \dfrac{1-kx}{1-k}\end{pmatrix}$$

$$= Q\begin{pmatrix}\gamma, & \beta, & 1-\dfrac{1}{k}\\ \delta, & \beta', & -\left(\dfrac{\tau}{k}+w'\right)\\ \alpha, & \beta'', & \dfrac{k(1-x)}{1-k}\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}\delta, & \beta, & 1:(1-k)\\ \alpha, & \beta', & (k-1)(\tau+w')\\ \gamma, & \beta'', & 1-kx\end{pmatrix}$$

$$= Q\begin{pmatrix}\gamma, & \beta, & k:(k-1)\\ \alpha, & \beta', & (\tau+w'k):(1-k)\\ \delta, & \beta'', & 1-x\end{pmatrix}.$$

Die beiden letzten Gleichungen sind durch Anwendung der ersten auf die zweite und dritte erhalten. Dass die Grössen β, β', β'' in einer Q-Function unter sich vertauscht werden können, ohne dass sie sich ändert, ist evident.

Will man die Gleichung 1) mittels der Methode der unbestimmten Coefficienten integriren, so bringt man dieselbe durch die Substitution

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{d\,lg x},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{d\,lg x^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{d\,lg x},$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}\frac{d^3y}{d\,lg x_3}-\frac{3}{x^3}\frac{d^2y}{d\,lg x^2}+\frac{2}{x^3}\frac{dy}{d\,lg x}$$

mit Vortheil auf die Form

$$9)\quad \begin{aligned}(1-x)(1-kx)\frac{d^3y}{d\,lg x^3}&+[u-3+(v+3+3k)x+(\beta+\beta'+\beta'')kx^2]\frac{d^2y}{d\,lg x^2}\\ &+[2-u+(\tau-v-2-2k)x+(\beta\beta'+\beta'\beta''+\beta''\beta)kx^2]\frac{dy}{d\,lg x}\\ &+\beta\beta'\beta''kx^2y=0\end{aligned}$$

oder, wenn man die Gleichung 7c) transformirt, diese auf die Form

$$9\text{a})\quad \begin{aligned}&(1-x_3)\left[1-\left(1-\frac{1}{k}\right)x_3\right]\frac{d^3y}{d\,lg x_3{}^3}+\beta\beta'\beta''\left(1-\frac{1}{k}\right)x_3{}^2y\\ &+\Big[-\gamma-1+\Big(\gamma+\delta-1-\left(1-\frac{1}{k}\right)(\delta+\beta+\beta'+\beta''-2)\Big)x_3\\ &\qquad+(\beta+\beta'+\beta'')\left(1-\frac{1}{k}\right)x_3{}^2\Big]\frac{d^2y}{d\,lg x_3{}^2}\\ &+\Big[\gamma-x_3\left(\frac{\tau}{k}+\beta\beta'+(2-\alpha)(\beta+\beta')+\gamma-\frac{\gamma+\alpha-2}{h}\right)\\ &\qquad+(\beta\beta'+\beta'\beta''+\beta''\beta)\left(1-\frac{1}{k}\right)x_3{}^2\Big]\frac{dy}{d\,lg x_3}=0.\end{aligned}$$

Setzt man in 9) die nach auf- oder absteigenden Potenzen von x geordnete Reihe

$$\Sigma a_n x^n$$

für y ein, so findet man, dass a_n die Recursionsformel

$$10)\quad \begin{aligned}&a_{n+2}(n+2)^3+(u-3)(n+2)^2+(2-u)(n+2)\\ &-a_{n+1}[(n+1)^3(1+k)-(v+3+3k)(n+1)^2+(v+2+2k-\tau)(n+1)]\\ &+a_nk(n+\beta)(n+\beta')(n+\beta'')=0\end{aligned}$$

oder, wenn man mit dem Euler'schen Integral $\Pi(n)$ multiplicirt, die Recursionsformel

$$10\text{a})\quad \begin{aligned}&[(a_{n+2}\Pi(n+2)(n+2-\alpha)]+[a_n\Pi(n)]k(n+\beta)(n+\beta')(n+\beta'')\\ &-[a_{n+1}\Pi(n+1)][(n+1)^2(1+k)-(v+3+3k)(n+1)\\ &\qquad\qquad-\tau+v+2+2k]=0\end{aligned}$$

befriedigen muss. Diese Gleichung stimmt genau mit 5a) überein, wenn man dort $a_n\Pi(n)$ für $Q_n(0)$ setzt.

Setzt man ebenso die Reihe

$$\Sigma c_n x_3^n$$

in 9a) ein, so ergiebt sich für c_n die Recursionsformel

10b)
$$\begin{aligned}&[c_{n+2}\,\Pi(n+2)](n+2-\gamma)+[c_n\,\Pi(n)]\left(1-\frac{1}{k}\right)(n+\beta)(n+\beta')(n+\beta'')\\&-[c_{n+1}\,\Pi(n+1)]\Big[(n+1)^2\left(1+1-\frac{1}{k}\right)\\&\qquad-\left(\gamma+\delta-1+\left(1-\frac{1}{k}\right)(\alpha+\gamma-1)\right)(n+1)\\&\qquad+\frac{\tau+2-\alpha-\gamma}{k}+(2-\alpha)(\beta+\beta')+\gamma\Big]=0.\end{aligned}$$

Soviel über die allgemeine Function.

II.

Wir wenden uns nun zu einem speciellen Falle, in welchem die Recursionsformeln 10) und 10a) vollständig integrirt werden können, nämlich wenn die Constanten in denselben die beiden Bedingungen erfüllen

11)
$$\alpha+\beta''=2$$

und

$$(\alpha-1)^2(1+k)-(v+3+3k)(\alpha-1)+v-\tau+2+2k=0$$

oder

11a)
$$\tau=(\alpha-2)[(\gamma+\beta+\beta')k+1-\gamma],$$

in welchem Falle 10a) die Form annimmt

12)
$$\begin{aligned}&a_{n+2}\,\Pi(n+2)-a_{n+1}\,\Pi(n+1)\,[(n+1)(1+k)+(\beta+\beta'+\gamma-1)k-\gamma]\\&\qquad+a_n\,\Pi(n)\,k\,(n+\beta)(n+\beta')=0\end{aligned}$$

oder

12a)
$$\begin{aligned}&\frac{a_{n+2}\,\Pi(n+2)}{\Pi(n+\beta+1)}(n+\beta+1)-\frac{a_{n+1}\,\Pi(n+1)}{\Pi(n+\beta)}\,[(n+\beta+1)(1+k)\\&\qquad\qquad+k(\gamma+\beta'-1)-\gamma-\beta]\\&\qquad+\frac{a_n\,\Pi(n)}{\Pi(n+\beta-1)}\,k\,(n+\beta')=0.\end{aligned}$$

Auf dieselbe Recursionsformel führt aber die Integration der Differentialgleichung

13)
$$\begin{aligned}&(1-x)(1-kx)\frac{d^2y}{d\,lg\,x^2}-[1+((\beta+\beta'+\gamma-1)k-\gamma)x-(\beta+\beta')kx^2]\frac{dy}{d\,lg\,x}\\&\qquad+k\beta\beta'x^2y=0,\end{aligned}$$

mithin sind ihre Integrale zugleich Integrale der Gleichung 1), wenn deren Constante durch die Gleichungen 11) und 11a) beschränkt sind. Die allgemeine Lösung der Gleichung 13) ist in Riemann's Bezeichnung

14)
$$y=P\begin{pmatrix}1, & \infty, & 1:k, & \\ \gamma, & \beta, & \delta, & x\\ 0, & \beta', & 0, & \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\gamma, & \beta, & \delta, & \dfrac{k(1-x)}{k-1}\\ 0, & \beta', & 0, & \end{pmatrix}.$$

Zwei allgemeine Lösungen der Recursionsformel 12) sind*

15)
$$a_n = \frac{A\,\Pi(n+\beta-1)}{\Pi(n)}\int_0^1 s^{n+\beta'-1}(1-s)^{-\delta-\beta'}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\gamma-\beta'} ds$$
$$+\frac{A'\Pi(n+\beta-1)}{\Pi(n)}\,k^n\int_0^1 s^{n+\beta'-1}(1-s)^{-\gamma-\beta'}(1-ks)^{-\delta-\beta'} ds,$$

15 a)
$$a_n = \frac{B\,\Pi(-n-1)}{\Pi(-n-\beta)}\int_0^1 s^{-n-\beta}(1-s)^{-\delta-\beta'}(1-ks)^{-\gamma-\beta'} ds$$
$$+\frac{B'\Pi(-n-1)}{\Pi(-n-\beta)}\,k^n\int_0^1 s^{-n-\beta}(1-s)^{-\gamma-\beta'}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\delta-\beta'} ds,$$

worin A, A' Constante oder vielmehr periodische Functionen bedeuten, die ungeändert bleiben, wenn man n um eine ganze Zahl ändert. Die hier vorkommenden bestimmten Integrale sollen der Reihe nach mit $J^{n+\beta'-1}\left(\frac{1}{k}\right)$, $H^{n+\beta'-1}(k)$, $J^{-n-\beta}(k)$, $H^{-n-\beta}\left(\frac{1}{k}\right)$ zur Abkürzung bezeichnet werden. In den Integralen soll für negative reelle k der Factor $(1-ks)^{-\gamma-\beta'}$ oder $(1-ks)^{-\delta-\beta'}$, wenn die Exponenten reell sind, reell genommen werden, ebenso $\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\delta-\beta'}$ und $\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\gamma-\beta'}$. Für andere Werthe von k sind die Werthe dieser Factoren durch stetige Fortsetzung, nicht über eine von 0 über 1 nach ∞ gezogene gerade Linie hinweg, in der ganzen k-Ebene bestimmt Was die Brauchbarkeit dieser Integrale betrifft, so ist sie nur dadurch beschränkt, dass $n+\beta'-1$, $-\gamma-\beta'$, $-n-\beta$, $-\delta-\beta'$ nicht ganze negative Zahlen sein dürfen, wenn man die bestimmten Integrale in der Weise definirt, wie ich es in dieser Zeitschrift XIV, S. 52, gethan habe.

Es ist nöthig, die Determinanten

$$\begin{vmatrix} J^{n+\beta'-1}\left(\frac{1}{k}\right), & k^{n+\beta'-1}H^{n+\beta'-1}(k) \\ J^{n+\beta'}\left(\frac{1}{k}\right), & k^{n+\beta'}H^{n+\beta'}(k) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} J^{-n-\beta}(k), & k^{n+\beta}H^{-n-\beta}\left(\frac{1}{k}\right) \\ J^{-n-\beta-1}(k), & k^{n+\beta+1}H^{-n-\beta-1}\left(\frac{1}{k}\right) \end{vmatrix}$$

einfacher ausdrücken, was durch zwei verschiedene Methoden geschehen kann. Die erste dieser Determinanten soll mit Δ_n, die zweite mit D_n bezeichnet werden. Es sind $J^{n+\beta'-1}\left(\frac{1}{k}\right)$, $k^{n+\beta'-1}H^{n+\beta'-1}(k)$ Lösungen der Recursionsformel

* Man vergl. Bd. XIV dieser Zeitschrift, S. 350 flgg.

$$l_{n+2}(n+\beta-1)-l_{n+1}[n+\beta+1)(1+k)+k(\gamma+\beta'-1)-\gamma-\beta] \\ +l_n k(n+\beta')=0,$$

woraus folgt*

$$\varDelta_n:\varDelta_{n+1}=n+\beta+1:k(n+\beta'),\quad \varDelta_n k(n+\beta')-\varDelta_{n+1}(n+\beta+1)=0.$$

Die Lösung dieser Recursionsformol ist

$$\varDelta_n=\frac{\varphi(n)\,k^n\,\Pi(n+\beta'-1)}{\Pi(n+\beta)},$$

worin $\varphi(n)$ eine periodische Function von n ist. Hieraus ergiebt sich, wenn m eine ganze Zahl ist,

$$\varphi(n+m)=\frac{\Pi(n+m+\beta).\varDelta_{n+m}}{k^{n+m}\,\Pi(n+m+\beta'-1)}=\varphi(n),$$

$$\frac{\varphi(n)\,\Pi(n+m-\delta)\,\Pi(n+m-\gamma)}{\Pi(-\gamma-\beta')\,\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(n+m+\beta)\,\Pi(n+m+\beta'-1)}=$$

$$\begin{vmatrix} F\left(\gamma+\beta',\, n+m+\beta',\, n+m-\delta+1,\, \dfrac{1}{k}\right), & k^{\beta'-1}F(\delta+\beta',\, n+m+\beta',\, n+m-\gamma+1,\, k) \\ \dfrac{n+m+\beta'}{n+m-\delta+1}F\left(\gamma+\beta',\, n+m+\beta'+1,\, n+m-\delta+2,\, \dfrac{1}{k}\right), & \dfrac{k^{\beta'}(n+m+\beta')}{n+m-\gamma+1}F(\delta+\beta',\, n+m+\beta'+1,\, n+m-\gamma+2,\, k) \end{vmatrix}.$$

Will man nun zur Auswerthung dieser Determinante die Gauss'schen Reihen benutzen, so muss man für einen Augenblick k auf Werthe beschränken, deren absoluter Betrag 1 ist, also auf eine Linie. Wenn dann noch der reelle Theil von β grösser als der von β' vorausgesetzt wird, so convergiren alle vorkommenden Reihen, was auch m oder n sein mag. Gehen wir nun mit m zur Grenze Unendlich über, so erhalten wir

$$\varphi(n)=\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')\begin{vmatrix}\left(1-\dfrac{1}{k}\right)^{-\gamma-\beta'}, & k^{\beta'-1}(1-k)^{-\delta-\beta'} \\ \left(1-\dfrac{1}{k}\right)^{-\gamma-\beta'}, & k^{\beta'}(1-k)^{-\delta-\beta'}\end{vmatrix}$$

$$=-(-1)^{-\gamma-\beta'}\,\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')\,k^{\gamma+\beta+\beta'-1}(1-k)^{\beta-\beta'},$$

also ist

$$\varDelta_n=-\frac{(-1)^{-\gamma-\beta'}\,k^{n+\gamma+2\beta'-1}\,(1-k)^{\beta-\beta'}\,\Pi(n+\beta'-1)\,\Pi(-\gamma-\beta')\,\Pi(-\delta-\beta')}{\Pi(n+\beta)}.$$

Um den Werth von $(-1)^{-\gamma-\beta'}$ zu finden, setzen wir in dem ursprünglichen Ausdrucke für $\varDelta_n$ durch bestimmte Integrale einen sehr kleinen, negativ reellen Werth für k. Dann nehmen die Integrale $H^{n+\beta'-1}(k)$, $H^{n+\beta'}(k)$ für verschwindende k bez. die Grenzwerthe

$$\frac{\Pi(n+\beta'-1)\,\Pi(-\gamma-\beta')}{\Pi(n-\gamma)},\quad \frac{\Pi(n+\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')}{\Pi(n-\gamma+1)}$$

---

* Man vergl. meine Antrittsschrift: „Ueber eine Function, welche einer linearen Differential- und Differenzengleichung vierter Ordnung Genüge leistet", Halle bei L. Nebert, 1875.

an. Ferner nehmen $k^{-\gamma-\beta'} J^{n+\beta'-1}\left(\frac{1}{k}\right)$, $k^{-\gamma-\beta'} J^{n+\beta'}\left(\frac{1}{k}\right)$ bez. die Grenzwerthe an

$$\frac{e^{-(\gamma+\beta')i\pi}\,\Pi(n-\gamma-1)\,\Pi(-\delta-\beta')}{\Pi(n+\beta-1)},\quad \frac{e^{-(\gamma+\beta')i\pi}\,\Pi(n-\gamma)\,\Pi(-\delta-\beta')}{\Pi(n+\beta)},$$

also ist für ein verschwindendes k

$$\frac{(-1)(-1)^{-\gamma-\beta'}\,\Pi(n+\beta'-1)\,\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')}{\Pi(n+\beta)}$$

$$=\begin{vmatrix} \dfrac{e^{-(\gamma+\beta')i\pi}\,\Pi(n-\gamma+1)\,\Pi(-\delta-\beta')}{\Pi(n+\beta-1)}, & \dfrac{\Pi(n+\beta'-1)\,\Pi(-\gamma-\beta')}{\Pi(n-\gamma)} \\ \dfrac{e^{-(\gamma+\beta')i\pi}\,\Pi(n-\gamma)\,\Pi(-\delta-\beta')}{\Pi(n+\beta)}, & \dfrac{k\,\Pi(n+\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')}{\Pi(n-\gamma+1)} \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{e^{-(\gamma+\beta')i\pi}\,\Pi(n+\beta'-1)\,\Pi(-\gamma-\beta')\,\Pi(-\delta-\beta')}{\Pi(n+\beta)}$$

und demnach

$$(-1)^{-\gamma-\beta'}=e^{-(\gamma+\beta')i\pi}.$$

So ist endlich

$$16)\quad \Delta_n=-\frac{e^{-(\gamma+\beta')i\pi}\,k^{n+\gamma+\beta'+\beta'-1}\,(1-k)^{\beta-\beta'}\,\Pi(n+\beta'-1)\,\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')}{\Pi(n+\beta)}.$$

Hieraus geht D_n hervor, wenn man $-n-\beta-\beta'$ statt n, $\frac{1}{k}$ statt k setzt und das Vorzeichen umkehrt, so dass sich ergiebt

$$17)\quad D_n=\frac{e^{-(\delta+\beta')i\pi}\,k^{n-\gamma}\,(1-k)^{\beta-\beta'}\,\Pi(-n-\beta-1)\,\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')}{\Pi(-n-\beta')}.$$

Ein anderes Mittel zur Auswerthung dieser Determinanten hat man noch, wenn man die Integrale als Lösungen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung ansieht.

Soll nun in dem Integrale $y=\Sigma a_n x^n$ die Entwickelung aufsteigend mit der α^{ten} Potenz beginnen, so kann a_α, der Coefficient von x^α, willkürlich gewählt werden, weil für $n=\alpha$ der Coefficient von x^α in der die Bedingung 12) liefernden Gleichung von selbst verschwindet. Der Coefficient von $a_{\alpha+1}$ aber muss so bestimmt werden, dass

$$a_{\alpha+1}\,\Pi(\alpha+1)-a_\alpha\,\Pi(\alpha)\,[\alpha-\gamma+(\beta+\beta'+\alpha+\gamma-1)k]$$

verschwindet, was dann stattfindet, wenn man in 15) die Constanten A, A' so bestimmt, dass $a_{\alpha-1}$ verschwindet, also dann, wenn man

$$18)\quad a_n=\frac{e^{(\gamma+\beta')i\pi}\,\Pi(n+\beta-1)\,k^{2-\alpha-\gamma-\beta'-\beta'}(1-k)^{\beta'-\beta}}{\Pi(\alpha+\beta'-2)\,\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')\,\Pi(n)}\begin{vmatrix} J^{n+\beta'-1}\left(\frac{1}{k}\right), & k^{n+\beta'-1}\,H^{n+\beta'-1}(k) \\ J^{\alpha+\beta'-2}\left(\frac{1}{k}\right), & k^{\alpha+\beta'-2}\,H^{\alpha+\beta'-2}(k) \end{vmatrix}$$

setzt. Dann ist a_α gleich Eins, dividirt durch $\Pi(\alpha)$. Hieraus ergiebt sich nun für $Q^{0,\alpha}(x)$ die Darstellung

19) $$x^{-\alpha} . Q^{0,\alpha}(x) = \frac{\left\{\begin{array}{l} \int_0^1 s^{\alpha+\beta'-2}(1-s)^{-\gamma-\beta'}(1-ks)^{-\delta-\beta'} ds \int_0^1 s^{\alpha+\beta'-1}(1-s)^{-\delta-\beta'}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\gamma-\beta'} F(1,\alpha+\beta,\alpha+1,xs)\, ds \\ -k\int_0^1 s^{\alpha+\beta'-2}(1-s)^{-\delta-\beta'}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\gamma-\beta'} ds \int_0^1 s^{\alpha+\beta'-1}(1-s)^{-\gamma-\beta'}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\delta-\beta'} F(1,\alpha+\beta,\alpha+1,kxs)\, ds \end{array}\right\}}{e^{-(\gamma+\beta')i\pi} k^{\gamma+\beta'}(1-k)^{\beta-\beta'} \Pi(\alpha+\beta'-2)\,\Pi(-\gamma-\beta')\,\Pi(-\delta-\beta') : \Pi(\alpha+\beta-1)}.$$

Einfacher gestalten sich die Integrale $Q^{0,0}(x)$, $Q^{0,0'}(x)$, weil jede der beiden Lösungen der Recursionsformel 12), die unter 15) verzeichnet sind, die Eigenschaft hat, für $n=-1$ zu verschwinden. So hat man

19a) $$Q^{0,0}(x) = \Pi(\beta-1)\int_0^1 s^{\beta'-1}(1-s)^{-\delta-\beta'}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\gamma-\beta'}(1-xs)^{-\beta}\, ds,$$

19b) $$Q^{0,0'}(x) = \Pi(\beta-1)\, k^{\beta'-1}\int_0^1 s^{\beta'-1}(1-s)^{-\gamma-\beta'}(1-ks)^{-\delta-\beta'}(1-xks)^{-\beta}\, ds.$$

Differenzirt man diese Ausdrücke nach x, so erhält man dasselbe, als wenn man α, γ, δ in $\alpha-1$, $\gamma-1$, $\delta-1$ und β, β', β'' in $\beta+1$, $\beta'+1$, $\beta''+1$ verwandelt; der n^{te} Differentialquotient $Q_n(x)$ aber genügt der Recursionsformel 10a), wenn man $Q_n(x)$ für $a_n \Pi(n)$ setzt, so dass also die Constanten in diesen Zweigen den früheren Bestimmungen gemäss sind.

Integrirt man die Differentialgleichung durch absteigende Reihen, so beginnt die Entwickelung des einen Integrals mit der $-\beta''^{\text{ten}}$ Potenz, und man muss die Coefficienten B, B' in 15a) so einrichten, dass $a_{-\beta''+1}$ verschwindet. Demnach hat man für a_n zu setzen

20) $$a_n = \frac{e^{(\delta+\beta'+\beta'')i\pi} k^{1+\beta''+\gamma}(1-k)^{\beta'-\beta}\,\Pi(\beta''-\beta)\,\Pi(-n-1)}{\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')\,\Pi(-n-\beta)} \times \begin{vmatrix} J^{-n-\beta}(k), & k^{n+\beta} H^{-n-\beta}\left(\frac{1}{k}\right) \\ J^{\beta''-\beta-1}(k), & k^{\beta-\beta''+1} H^{\beta''-\beta-1}\left(\frac{1}{k}\right) \end{vmatrix}.$$

Hieraus entspringt für $Q^{\infty,\beta''}(x)$ die Darstellung

21) $$Q^{\infty,\beta''}(x) = \frac{\left\{\begin{array}{l} k^{\beta+1} H^{\beta''-\beta-1}\left(\frac{1}{k}\right)\int_0^1 s^{-\beta''-\beta}(1-s)^{\delta-\beta'}(1-ks)^{-\gamma-\beta'} F\left(1,\beta'',\beta''-\beta+1,\frac{s}{x}\right) ds \\ -k^{\beta} J^{\beta''-\beta-1}(k)\int_0^1 s^{\beta''-\beta}(1-s)^{-\gamma-\beta''}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\delta-\beta'} F\left(1,\beta'',\beta''-\beta+1,\frac{s}{kx}\right) ds \end{array}\right\}}{x^{\beta''} e^{-(\delta+\beta'+\beta'')i\pi} k^{-\gamma-1}(1-k)^{\beta-\beta'}\,\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta') : \Pi(\beta''-1)}.$$

Die beiden anderen zum Punkte ∞ gehörigen Zweige $Q^{\infty,\beta}(x)$, $Q^{\infty,\beta'}(x)$ sind Gauss'sche Reihen. Nämlich

$$21\text{a)}\quad Q^{\infty,\beta}(x) = \Pi(\beta-1)(1-x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma+\beta, \beta-\beta'+1, \frac{k-1}{k(1-x)}\right),$$

$$21\text{b)}\quad Q^{\infty,\beta'}(x) = \Pi(\beta'-1)(1-x)^{-\beta'} F\left(\beta', \gamma+\beta', \beta'-\beta+1, \frac{k-1}{k(1-x)}\right).$$

Um die Function Q nach Potenzen von $1-x$ zu entwickeln, kann man

$$y = \Sigma c_n \frac{(1-x)^n k^n}{(k-1)^n} = \Sigma c_n x_3^{\,n}$$

setzen und erhält so für c_n die Recursionsformel 10b), welche infolge der Bedingungen 11) und 11a) die Gestalt annimmt

$$22)\quad \begin{aligned} &c_{n+2}\,\Pi(n+2)(n+2-\gamma) + c_n\,\Pi(n)\left(1-\frac{1}{k}\right)(n+2-\alpha)(n+\beta)(n+\beta') \\ &- c_{n+1}\,\Pi(n+1)\Big[\left(1+1-\frac{1}{k}\right)(n+1)^2 - \Big\{\delta+\gamma-1 \\ &\quad + (\alpha+\gamma-1)\left(1-\frac{1}{k}\right)\Big\}(n+1) + \beta\beta' + \left(1-\frac{1}{k}\right)\gamma(\alpha-1)\Big] = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung besitzt die particuläre Lösung

$$23)\quad c_n = \frac{\Pi(n+\beta-1)\,\Pi(n+\beta'-1)}{\Pi(n)\,\Pi(n-\gamma)}.$$

Kennt man aber von einer Recursionsformel zweiter Ordnung

$$24)\quad \varphi a_{n+2} + \psi a_{n+1} + \chi a_n = 0$$

eine Lösung a'_n, so erhält man leicht die zweite durch eine einfache Summation, wenn man $a_n = a'_n \varrho_n$ setzt. Durch Combination der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi a'_{n+2}\varrho_{n+2} + \psi a'_{n+1}\varrho_{n+1} + \chi a'_n \varrho_n &= 0, \\ \varphi a'_{n+2}\varrho_{n+1} + \psi a'_{n+1}\varrho_{n+1} + \chi a'_n \varrho_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

erhält man die neue

$$\varphi a'_{n+2}(\varrho_{n+2} - \varrho_{n+1}) - \chi a'_n(\varrho_{n+1} - \varrho_n) = 0,$$

die in Bezug auf die Differenz $\varrho_{n+1} - \varrho_n = \varDelta\varrho_n$ linear ist. Hat man hieraus $\varDelta\varrho_n$ gefunden, so ist dann die Lösung von 24)

$$a_n = a'_n\, \Sigma\, \varDelta\varrho_n.$$

Im vorliegenden Falle ist von der Recursionsformel zweiter Ordnung 22) die particuläre Lösung

$$c'_n = \frac{\Pi(n+\beta-1)\,\Pi(n+\beta'-1)}{\Pi(n)\,\Pi(n-\gamma)}$$

bekannt und man hat, wenn das Integral gleich $c'_n \varrho_n$ gesetzt wird, für $\Delta \varrho_n$ die Gleichung

$$(n+\beta+1)(n+\beta'+1)\,\Delta \varrho_{n+1} - \left(1-\frac{1}{k}\right)(n+2-\alpha)(n+1-\gamma)\,\Delta \varrho_n = 0,$$

woraus folgt

$$\Delta \varrho_n = \left(1-\frac{1}{k}\right)^n \frac{\Pi(n-\gamma)\,\Pi(n+1-\alpha)}{\Pi(n+\beta)\,\Pi(n+\beta')}$$

und hieraus

$$25)\quad \varrho_n = \left(1-\frac{1}{k}\right)^n \int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{ds\, d\sigma\, s^{n-\gamma}(1-s)^{\gamma+\beta-1}\,\sigma^{n+1-\alpha}(1-\sigma)^{\alpha+\beta'-1}}{1-\left(1-\frac{1}{k}\right)s\sigma},$$

also

$$26)\quad c_n = c'_n \varrho_n =$$

$$\frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)^n \Pi(n+\beta-1)\,\Pi(n+\beta'-1)}{\Pi(n)\,\Pi(n-\gamma)} \int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{ds\, d\sigma\, s^{n-\gamma}\,\sigma^{n+1-\alpha}(1-s)^{\gamma+\beta-1}(1-\sigma)^{\alpha+\beta'-1}}{1-\left(1-\frac{1}{k}\right)s\sigma}.$$

Somit findet man für die drei Zweige der Function Q im Punkte Eins die Ausdrücke

$$27)\quad Q^{1,0}(x) = \frac{\Pi(\beta-1)\,\Pi(\beta'-1)}{e^{\gamma i\pi}\,\Pi(-\gamma)} \int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{ds\, d\sigma\, s^{-\gamma}\sigma^{1-\alpha} F[\beta, \beta', 1-\gamma, (1-x)s\sigma]}{\left[1-\left(1-\frac{1}{k}\right)s\sigma\right](1-s)^{\delta+\beta'}(1-\sigma)^{1-\alpha-\beta'}},$$

$$27\,\mathrm{a})\quad Q^{1,0'}(x) = \left(\frac{1}{k}-1\right)^{\gamma} \int_0^1 \frac{s^{\beta-1}(1-s)^{-\gamma-\beta}\left(1-\frac{k(1-x)}{k-1}s\right)^{-\beta'} ds}{\Pi(-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')},$$

$$27\,\mathrm{b})\quad Q^{1,\gamma}(x) = (x-1)^{\gamma} \int_0^1 \frac{s^{-\beta'-\delta}(1-s)^{-\beta}\left(1-\frac{k(1-x)}{k-1}s\right)^{-\gamma-\beta'} ds}{\Pi(-\beta)\,\Pi(-\delta-\beta')}.$$

Im Punkte $1:k$ hat man die drei Ausdrücke

$$28)\quad Q^{1:k,0}(x) = \frac{\Pi(\beta-1)\,\Pi(\beta'-1)}{e^{\delta i\pi}\,\Pi(-\delta)} \int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{ds\, d\sigma\, s^{-\delta}\sigma^{1-\alpha} F[\beta, \beta', 1-\delta, (1-kx)s\sigma]}{[1-(1-k)s\sigma](1-s)^{\gamma+\beta'}(1-\sigma)^{1-\alpha-\beta'}},$$

$$28\text{a)}\quad Q^{1:k,0'}(x)=(k-1)^{\delta}\int_0^1 \frac{s^{\beta-1}(1-s)^{-\delta-\beta}\left(1-\frac{1-kx}{1-k}\,s\right)^{-\beta'}}{\Pi(-\beta')\,\Pi(-\delta-\beta)},$$

$$28\text{b)}\quad Q^{1:k,\delta}(x)=\left(\frac{kx-1}{k}\right)^{\delta}\int_0^1 \frac{s^{-\beta'-\gamma}(1-s)^{-\beta}\left(1-\frac{1-x}{1-k}\,s\right)^{-\delta-\beta'}ds}{\Pi(-\beta)\,\Pi(-\gamma-\beta')}.$$

Hiermit ist für jeden Zweig in den Punkten 0, ∞, 1, $1:k$ wenigstens eine Form der Darstellung aufgestellt. Es lassen dieselben, wie man leicht sieht, eine grosse Menge anderer Formen zu, von denen man einige durch blosse Buchstabenvertauschungen, nämlich durch Vertauschung von β und β' erhalten kann. Dann müssen jedoch bei einigen die constanten Factoren neu bestimmt werden, wenn sie den für sie festgestellten Bedingungen gemäss sein sollen.

VII.

Ueber die Grundhypothese der Molecularmechanik.

Von

W. Gosiewski

in Warschau.

In der bisherigen Behandlung von Problemen der Molecularmechanik nimmt man, von der Atomtheorie ausgehend, an, dass das Differenziiren und Integriren über den vom Körper erfüllten Raum zulässig sei, ohne aber im Voraus zu entscheiden, ob ein derartiges Verfahren nicht mit dem Wesen der Theorie in directem Widerspruch stehe.

Zur Beseitigung dieser Unklarheit liesse sich folgende Frage stellen: Welchen Bedingungen muss ein Körper, als System materieller Punkte betrachtet, genügen, damit bei der Bestimmung der Gleichgewichts- oder Bewegungsgleichungen es möglich wäre, über den von ihm erfüllten Raum zu differenziiren und zu integriren oder, was auf dasselbe hinauskommt, damit es möglich wäre, ihn durch eine continuirliche Materie zu ersetzen?

Die Resultate der Lösung dieser Frage, die den Inhalt der vorliegenden Schrift bilden, dürften bei Aufstellung von Hypothesen über die Structur der Materie, sobald nur das Differenziiren und Integriren über den von ihr eingenommenen Raum zugelassen wird, nicht unberücksichtigt bleiben. Hieraus dürfte auch der Titel, den ich meiner Arbeit gegeben, motivirt erscheinen.

Das bekannte d'Alembert'sche Princip, nach welchem man jederzeit von den Gleichgewichtsgleichungen zu denen der Bewegung übergehen kann, erlaubt uns, diese Untersuchung auf den Fall des Gleichgewichts zu beschränken.

---

§ 1.

Denken wir uns einen continuirlichen und starren Körper mit der Oberfläche ω und einer Dichtigkeit ϱ. Beziehen wir diesen Körper auf ein im Raume unveränderliches rechtwinkliges Coordinatensystem, und es seien x, y, z die Coordinaten eines seiner Punkte M. Es seien X_0, Y_0, Z_0 die auf dieselben Axen bezogenen Componenten der auf die Masseneinheit des Elements $\varrho\, dx\, dy\, dz$ wirkenden Kräfte. Es werde ferner angenommen, dass ϱ und X_0, Y_0, Z_0 continuirliche Functionen von x, y, z sind. Schliesslich mögen noch auf die Oberfläche des Körpers Druckkräfte wirken, deren Componenten für die Einheit des Flächenelements $d\omega$ X, Y, Z seien.

Befinden sich nun diese sämmtlichen Kräfte im Gleichgewicht, so muss in diesem Falle die Summe ihrer virtuellen Momente $=0$ sein. Wenn wir also die Projectionen der virtuellen Verschiebungen im Punkte M durch δx, δy, δz bezeichnen, so liesse sich obige Bedingung in folgender Weise darstellen:

$$1)\iiint dx\, dy\, dz\, \varrho(X_0\,\delta x + Y_0\,\delta y + Z_0\,\delta z) + \int d\omega\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = 0,$$

wo sich das erste Integral über das ganze Volumen, das zweite über die ganze Oberfläche des Körpers erstreckt.

Die hier vorkommenden Grössen δx, δy, δz sind nicht willkürlich, sondern müssen den Gleichungen, die aus den Bedingungen der Continuirlichkeit und der Starrheit folgen, genügen. Um diese Gleichungen zu erhalten, bemerken wir, dass der Punkt $M(x, y, z)$ dem Elemente $\varrho\, dx\, dy\, dz$ angehört, und nehmen wir in diesem Elemente noch zwei andere Punkte α und β, deren Coordinaten wir bezüglich durch x', y' z' und x'', y'', z'' bezeichnen wollen. Der gegenseitige Abstand dieser zwei Punkte sei r; es ist dann

$$r = \{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z'-z'')^2\}^{1/2}.$$

Setzen wir ferner

$$x'-x'' = ar, \quad y'-y'' = br, \quad z'-z'' = cr,$$

wo die Grössen a, b, c der Gleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

genügen müssen.

Wäre nicht der Abstand r unveränderlich, so würde er wegen der virtuellen Verschiebungen folgende Aenderung erleiden müssen:

$$\delta r = a\,\delta(x'-x'') + b\,\delta(y'-y'') + c\,\delta(z'-z'').$$

Da die Punkte α und β dem Punkte M unendlich nahe sind, so ist wegen der vorausgesetzten Continuität

$$\delta(x'-x'') = r\left(a\frac{d\,\delta x}{dx} + b\frac{d\,\delta x}{dy} + c\frac{d\,\delta x}{dz}\right),$$

$$\delta(y'-y'') = r\left(a\frac{d\,\delta y}{dx} + b\frac{d\,\delta y}{dy} + c\frac{d\,\delta y}{dz}\right),$$

$$\delta(z'-z'') = r\left(a\frac{d\,\delta z}{dx} + b\frac{d\,\delta z}{dy} + c\frac{d\,\delta z}{dz}\right).$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichungen nimmt der obige Werth von δr folgende Form an:

$$
2)\quad \begin{aligned}
\delta r = r \Big\{ & a^2 \frac{d\,\delta x}{dx} + b^2 \frac{d\,\delta y}{dy} + c^2 \frac{d\,\delta z}{dz} + bc\left(\frac{d\,\delta y}{dz} + \frac{d\,\delta z}{dy}\right) \\
& + ca\left(\frac{d\,\delta z}{dx} + \frac{d\,\delta x}{dz}\right) + ab\left(\frac{d\,\delta x}{dy} + \frac{d\,\delta y}{dx}\right)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Die Grössen $\frac{d\,\delta x}{dx}, \ldots \frac{d\,\delta y}{dz}, \frac{d\,\delta z}{dy}, \ldots$ sind nur von den Coordinaten des Punktes M abhängig und enthalten keine der Grössen r, a, b, c.

Da das Element starr ist, so muss für alle Werthe der Grössen r, a, b, c, welche die Länge und die Richtung des Linearelements in der Nähe des Punktes M bestimmen, die Grösse δr der Null gleich sein. Dies kann aber nur stattfinden, wenn folgende Gleichungen bestehen:

$$
3)\quad \left\{\begin{array}{ccc}
\frac{d\,\delta x}{dx} = 0, & \frac{d\,\delta y}{dy} = 0, & \frac{d\,\delta z}{dz} = 0, \\
\frac{d\,\delta y}{dz} + \frac{d\,\delta z}{dy} = 0, & \frac{d\,\delta z}{dx} + \frac{d\,\delta x}{dz} = 0, & \frac{d\,\delta x}{dy} + \frac{d\,\delta y}{dx} = 0.
\end{array}\right.
$$

Man sieht also zunächst, dass zur Bestimmung der Starrheit eines unendlich kleinen Elements sechs Gleichungen 3) erforderlich sind.

Wollten wir also die Zahl n der materiellen Punkte eines unendlich kleinen Systems bestimmen, welches unserem Elemente entspricht, so würden wir $n = 4$ finden, denn die Anzahl der Starrheitsbedingungen eines Systems von n Punkten ist $3n - 6$, und in unserm Falle ist $3n - 6 = 6$, also $n = 4$.

Hieraus folgt offenbar, dass, damit ein als System materieller Punkte gedachter Körper durch eine continuirliche Materie ersetzt werden könne, ein unendlich kleines Element dieser Materie einem unendlich kleinen, aus vier materiellen Punkten bestehenden System im Körper entsprechen muss.

Ein solches System nenne ich Molecul, jeden seiner vier Punkte Atom;* ϱ nehme ich als Dichtigkeit und $dx\,dy\,dz$ als Volumen des Moleculs an, da diese Grössen der Dichtigkeit und dem Volumen des das Molecul ersetzenden Elements gleich sind.

Die obige Beweisführung ist giltig für Elemente von beliebiger Gestalt; der Einfachheit wegen habe ich das Element als rechtwinklig betrachtet, also sein Volumen gleich $dx\,dy\,dz$ angenommen.

---

* Obige Bezeichnungen habe ich gewählt auf Grund einer gewissen Analogie mit der chemischen Theorie über die Structur der Gase, nach welcher ein Molecul eines einfachen Gases als aus vier Atomen bestehend angenommen wird.

§ 2.

Die Gleichungen 3) sind Starrheitsbedingungen eines continuirlichen Körpers in dem Punkte M; wenn aber dieser Körper nur eine aus den wie oben definirten Moleculen bestehende Materie ersetzt, so darf man diese Bedingungen durch sechs Gleichungen von der Form

$$\delta r = 0$$

darstellen, die die Unveränderlichkeit der sechs gegenseitigen Abstände r der vier, das Molecul in diesem Punkte bildenden Atome bestimmen

Wir multipliciren jede dieser Gleichungen mit einem noch zu bestimmenden Factor $\lambda\, dx\, dy\, dz$; es ergiebt sich durch Addition dieser Gleichungen

$$dx\, dy\, dz\, \Sigma\lambda\, \delta r = 0,$$

wo $\Sigma\lambda\,\delta r$ die Summe der sechs Glieder $\lambda\,\delta r$ darstellt.

Addiren wir zu der linken Seite der Gleichung 1) das über das ganze Volumen ausgedehnte Integral

$$\iiint dx\, dy\, dz\, \Sigma\lambda\, \delta r,$$

so erhalten wir eine neue Gleichung

$$4)\quad \left\{\begin{aligned} &\iiint dx\, dy\, dz\, \varrho (X_0\, \delta x + Y_0\, \delta y + Z_0\, \delta z) + \iiint dx\, dy\, dz\, \Sigma\lambda\, \delta r \\ &\qquad + \int d\omega\, (X\, \delta x + Y\, \delta y + Z\, \delta z) = 0, \end{aligned}\right.$$

die für alle Werthe der Grössen δx, δy, δz stattfindet und die Bedingungen des Gleichgewichts in jedem Punkte eines solchen starren Körpers ausdrückt, welcher durch eine continuirliche Materie ersetzt werden kann.

Führt man in $\Sigma\lambda\,\delta r$ statt δr den Werth 2) ein und bemerkt noch, dass die Grössen $\frac{d\,\delta x}{dx}, \ldots \frac{d\,\delta y}{dz} + \frac{d\,\delta z}{dy}, \ldots$ denselben Werth für alle Glieder der Summe Σ besitzen, so findet man ohne Schwierigkeit

$$dx\, dy\, dz\, \Sigma\lambda\, \delta r = dx\, dy\, dz \left\{\begin{aligned} &N_1 \frac{d\,\delta x}{dx} + T_1\left(\frac{d\,\delta y}{dz} + \frac{d\,\delta z}{dy}\right) \\ &+ N_2 \frac{d\,\delta y}{dy} + T_2\left(\frac{d\,\delta z}{dx} + \frac{d\,\delta x}{dz}\right) \\ &+ N_3 \frac{d\,\delta x}{dz} + T_3\left(\frac{d\,\delta z}{dy} + \frac{d\,\delta y}{dx}\right) \end{aligned}\right\},$$

wo die Grössen N_i und T_i folgende Werthe haben:

$$5)\quad \left\{\begin{aligned} N_1 &= \Sigma\lambda\, r a^2, & T_1 &= \Sigma\lambda\, r b c, \\ N_2 &= \Sigma\lambda\, r b^2, & T_2 &= \Sigma\lambda\, r c a, \\ N_3 &= \Sigma\lambda\, r c^2, & T_3 &= \Sigma\lambda\, r a b. \end{aligned}\right.$$

Wir integriren die beiden Seiten dieser Gleichung, indem wir das Integral über das ganze Volumen des Körpers erstrecken und auf der rechten Seite die theilweise Integration anwenden. Auf diese Weise gelangen wir zu folgender Gleichung:

$$\iiint dx\,dy\,dz\,\Sigma\lambda\,\delta r$$

$$= -\iiint dx\,dy\,dz \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}\right)\delta x \\ +&\left(\frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}\right)\delta y \\ +&\left(\frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}\right)\delta z \end{aligned} \right\}$$

$$+\int d\omega \left\{ \begin{aligned} &(m_1 N_1 + m_2 T_3 + m_3 T_2)\,\delta x \\ +&(m_1 T_3 + m_2 N_2 + m_3 T_1)\,\delta y \\ +&(m_1 T_2 + m_2 T_1 + m_3 N_3)\,\delta z \end{aligned} \right\},$$

wo die Grössen m_i die Cosinusse der Winkel bedeuten, welche die äussere Normale zur Oberfläche des Körpers mit den Coordinatenaxen bildet.

Führt man den Werth der ersten Seite dieser Gleichung in die Gleichung 4) ein und bemerkt, dass diese letztere für alle Werthe der Grössen δx, δy, δz bestehen soll, so erhält man aus ihr folgende neue Gleichungen:

$$6)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz} &= \varrho X_0, \\ \frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz} &= \varrho Y_0, \\ \frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz} &= \varrho Z_0, \end{aligned} \right.$$

$$7)\quad \left\{ \begin{aligned} m_1 N_1 + m_2 T_3 + m_3 T_2 + X &= 0, \\ m_1 T_3 + m_2 N_2 + m_3 T_1 + Y &= 0, \\ m_1 T_2 + m_2 T_1 + m_3 N_3 + Z &= 0. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen 6) gelten als Gleichgewichtsbedingungen für jeden Punkt im Innern des Körpers, die Gleichungen 7) als Gleichgewichtsbedingungen für jeden Punkt seiner Oberfläche.

Aehnliche Gleichungen erhält man, wie bekannt, in der Elasticitätstheorie, und zwar auf einem andern Wege. Dort werden auch die geometrischen Eigenschaften der Functionen N_i, T_i untersucht, die wir hier als bekannt übergehen. Wir erwähnen nur, dass die Werthe dieser Grössen im Punkte M gleich sind den Componenten der Druckkräfte, die auf die Flächeneinheit der drei ebenen, in diesem Punkte sich rechtwinklig schneidenden Elemente wirken, dass sie also die Parameter des von Lamé sogenannten Elasticitätsellipsoids sind.

§ 3.

Es ist leicht zu ersehen, dass die Grössen $\lambda\,dx\,dy\,dz$ die Intensität der zwischen je zwei Atomen eines Moleculs wirkenden Kräfte ausdrücken. Diese Kräfte hindern die gegenseitige Annäherung und Entfernung der Atome, was nothwendigerweise unter der Wirkung äusserer Kräfte geschehen müsste, wenn die Atome frei wären. Deshalb werden wir diese Kräfte Starrheitskräfte des Moleculs nennen.

Wenn je zwei Atome des Moleculs sich zu nähern streben, dann wird die Starrheitskraft abstossend, welche wir in diesem Falle als positiv betrachten wollen; im entgegengesetzten Falle wäre dieselbe somit als negativ anzunehmen.

Bezeichnen wir durch m, m', m'', m''' die Massen der das Molecul bildenden Atome, durch $\Sigma m = \varrho\, dx\, dy\, dz$ die Masse des Moleculs selbst, durch φ die der Kraft $\lambda\, dx\, dy\, dz$ entsprechende relative Beschleunigung der zwei Atome m und m', so ist

$$8)\qquad \lambda\, dx\, dy\, dz = \frac{m m' \varphi}{m + m'}.$$

Die Massen der Atome kann man in Theilen der Moleculmasse auf folgende Weise ausdrücken:

$$m = \varepsilon \varrho\, dx\, dy\, dz, \quad m' = \varepsilon' \varrho\, dx\, dy\, dz, \ldots,$$

wo ε, ε', ... positive echte Brüche sind, die der Bedingung

$$\Sigma \varepsilon = 1$$

genügen.

Führt man diese Bezeichnungen in die Gleichung 8) ein, so erhält man

$$\lambda = \frac{\varepsilon \varepsilon' \varrho \varphi}{\varepsilon + \varepsilon'}.$$

Die Druckkräfte N_i, T_i 5) sind lineare Functionen der Grössen λr oder eigentlich ihrer Grenzen, $lim(\lambda r)$, welchen die Grössen sich nähern, wenn das continuirliche Element unbegrenzt abnimmt; und da dieselben Druckkräfte den Gleichungen 6) und 7) genügen, so müssen die genannten Grenzen von Null verschiedene Werthe besitzen.

Nehmen wir also an, dass

$$9)\qquad lim(\lambda r) = \frac{\varepsilon \varepsilon' \varrho}{\varepsilon + \varepsilon'}, \quad lim(\varphi r) = \frac{\varepsilon \varepsilon' \varrho \psi}{\varepsilon + \varepsilon'},$$

so finden wir aus 8)

$$10)\qquad \lambda\, dx\, dy\, dz = \frac{m m'}{m + m'} \frac{\psi}{r},$$

wo $\psi = lim(\varphi r)$ ist.

Der Ausdruck 10) bezieht sich auf das Molecul, welches wir hinfort durch das Symbol

$$(m, r) = (\varepsilon \varrho\, dx\, dy\, dz, r)$$

bezeichnen wollen, und dessen Dichtigkeit nach der Definition ϱ und dessen Volumen $dx\, dy\, dz$ ist.

Ein diesem Molecul ähnliches System kann man durch das Symbol

$$\left(\frac{m}{kl^3}, \frac{r}{l}\right) = \left(\varepsilon \frac{\varrho}{k} \frac{dx}{l} \frac{dy}{l} \frac{dz}{l}, \frac{r}{l}\right)$$

darstellen, indem man unter kl^3 das Verhältniss der einander entsprechenden Massen und unter l das Verhältniss der geometrischen Aehnlichkeit versteht. Die Dichtigkeit dieses Systems ist $\frac{\varrho}{k}$, das Volumen aber $\frac{dx}{l}\,\frac{dy}{l}\,\frac{dz}{l}$.

Nimmt man an, dass diese Dichtigkeit und dieses Volumen gleich 1 sind, d. i.

$$\frac{\varrho}{k} = 1, \quad \frac{dx}{l}\,\frac{dy}{l}\,\frac{dz}{l} = 1,$$

und schreibt man

$$\frac{r}{l} = R,$$

so erhält man ein neues System mit dem Symbol

$$(\varepsilon, R),$$

welches ich Moleculeinheit nennen will.

Das Molecul (m, r) und seine Einheit (ε, R) sind ähnliche Systeme: das erste ein unendlich kleines, das zweite ein endliches System. Das Verhältniss ihrer Massen ist $kl^3 = \varrho\, dx\, dy\, dz = \Sigma m$, und das Verhältniss ihrer geometrischen Aehnlichkeit ist $l = (dx\, dy\, dz)^{1/3} = \left(\frac{\Sigma m}{\varrho}\right)^{1/3}$.

Hieraus folgen die Gleichungen

$$11) \qquad m = \varepsilon \Sigma m, \ldots; \quad r = R\left(\frac{\Sigma m}{\varrho}\right)^{1/3}, \ldots,$$

welche die Relationen zwischen den Atomsmassen und Atomsabständen des Moleculs einerseits, und den Punktmassen und Punktabständen seiner Einheit andererseits darstellen.

Um die entsprechenden Relationen zwischen den Starrheitskräften des Moleculs und jenen seiner Einheit zu finden, bemerken wir, dass die Grösse ψ, da sie dem $lim(\varphi r)$ gleich ist, denselben Werth für alle der Moleculeinheit ähnliche Systeme behält, also der Ausdruck

$$\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}\,\frac{\psi}{R},$$

den man durch Ersetzung der Massen m durch ε und des Abstandes r durch R aus 10) erhält, die Intensität der Starrheitskraft der Moleculeinheit darstellt.

Berücksichtigt man also in Gleichung 10) die Gleichungen 11), d. h. setzt man

$$12) \qquad \lambda\, dx\, dy\, dz = (\Sigma m)\left(\frac{\varrho}{\Sigma m}\right)^{1/3} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}\,\frac{\psi}{R},$$

so ergiebt sich, dass man die Intensität der Starrheitskraft des Moleculs (m, r) erhält, wenn man die Starrheitskraft seiner Einheit mit dem Factor $(\Sigma m)\left(\frac{\varrho}{\Sigma m}\right)^{1/3}$ multiplicirt.

Es hängen also die Intensitäten der Starrheitskräfte eines Moleculs von den Grössen ψ ab, die zu seiner Einheit gehören und unbestimmte Werthe besitzen. Um uns von dieser Unbestimmtheit zu überzeugen, ersetzen wir in den Gleichungen 5) die Grössen λr durch ihre Grenzwerthe 9). Dann erhalten wir sechs lineare Gleichungen, aus welchen jede der sechs Grössen ψ als lineare Functionen der sechs Grössen N_i, T_i sich bestimmen lässt. Da aber die Werthe der letzten Grössen im Punkte M nur den drei Gleichungen 6) genügen, so bleiben sie und folglich die Grössen ψ unbestimmt.

§ 4.

Die Zahl der Starrheitskräfte eines aus n materiellen Punkten bestehenden starren Systems ist gleich der Zahl der Starrheitsbedingungen, also $= 3n - 6$.* Die Zahl der inneren Kräfte eines freien Systems ist gleich $\frac{n(n-1)}{2}$; wenn also die Zahl der Starrheitskräfte eines starren Systems und die der inneren eines freien gleich sein sollen, so muss die Zahl n der Gleichung

$$3n - 6 = \frac{n(n-1)}{2}$$

genügen. Diese Gleichung hat zwei Lösungen: $n = 3$ und $n = 4$. Fügt man noch den evidenten Fall $n = 2$ hinzu, so sieht man, dass nur in den besprochenen drei Fällen die Zahl der Starrheitskräfte gleich ist der Zahl der inneren Kräfte, und dass der Uebergang von dem starren zu dem freien System gleichbedeutend ist mit der Vertauschung der Starrheitskräfte und der inneren Kräfte.

Der Umstand also, dass jedes Molecul ein aus vier Atomen bestehendes System ist, erlaubt uns, die Starrheitskräfte dieses Moleculs durch innere Kräfte zu ersetzen und demnach die oben gefundenen Resultate auch in dem Falle anzuwenden, in welchem die Atomabstände veränderlich sind.

Die inneren Kräfte des Moleculs nennen wir Atomkräfte.

Das Gesetz der Intensität der Atomkräfte ist in der Formel 12) enthalten, wo jedoch die Grösse ψ nicht unbestimmt ist, wie im Falle

---

* Aus der Mechanik ist bekannt, dass bei Aufstellung der Gleichgewichts- oder Bewegungsgleichungen für jeden Punkt eines unveränderlichen Systems von n materiellen Punkten in diese Gleichungen soviel unbestimmte Grössen einzuführen sind, als Gleichungen erforderlich zur analytischen Bestimmung der Unveränderlichkeit des Systems, d. h. $3n - 6$. Ich erlaube mir, diese Grössen „Starrheitskräfte“ zu nennen, namentlich weil ich dasselbe schon früher für das Molecul gethan habe, welches in dieser Beziehung als besonderer Fall eines solchen Systems anzusehen ist.

der Starrheit, sondern im Gegentheil bestimmte Werthe annimmt, welche für verschiedene Körper verschiedene sind.

Die Bestimmung des Werthes von ψ für vollkommene Gase, unzusammendrückbare Flüssigkeiten und feste elastische Körper bietet keine Schwierigkeit dar. Wir übergehen jedoch diese Entwickelung in vorliegender Arbeit und beschränken uns auf die Untersuchung eines sehr allgemeinen und wichtigen Falles, aus welchem erhellen wird, dass das Gesetz der atomischen Wirkungen von dem Gesetze der Massenwirkung aus endlicher Entfernung wesentlich verschieden ist.

Das letztgenannte Gesetz kann man auf die Moleculeinheit, wie auf ein endliches System anwenden. Wir setzen daher voraus, wie es allgemein angenommen wird, dass jede zwei Punkte dieses Systems in der Richtung ihrer Verbindungsgeraden aufeinander wirken, und zwar mit einer Kraft, deren Stärke proportional ist dem Producte ihrer Massen und irgend einer Function ihrer Entfernung, d. h. wir nehmen an, dass zwei Punkte mit den Massen ε und ε', deren gegenseitiger Abstand gleich R ist, mit der Kraft $\varepsilon\varepsilon' F(R)$ aufeinander wirken. Wir wollen nun die Grösse der Atomkraft für entsprechende Massen m und m' im Molecul (m, r) bestimmen.

Die Aufgabe löst sich einfach, wenn man in der Formel 12) den Factor $\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}\,\frac{\psi}{R}$ durch den jetzt für ihn angenommenen Werth $\varepsilon\varepsilon'(FR)$ ersetzt und noch dabei die Gleichungen 11) berücksichtigt. Als Resultat finden wir den Ausdruck

$$\frac{m m'}{\Sigma m}\left(\frac{\varrho}{\Sigma m}\right)^{1/3} F\left\{\left(\frac{\varrho}{\Sigma m}\right)^{1/3} r\right\},$$

welcher die allgemeine Form der Atomkräfte des Moleculs (m, r) darstellt in der Voraussetzung, dass die allgemeine Form für die Intensität der inneren Kräfte seiner Einheit (ε, R) in der Formel $\varepsilon\varepsilon' F(R)$ enthalten ist, die wegen der Bedingung $\Sigma\varepsilon = 1$ mit dem Ausdrucke

$$\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\Sigma\varepsilon} F(R)$$

äquivalent ist.

Der Vergleich der Formeln

$$\frac{m m'}{\Sigma m}\left(\frac{\varrho}{\Sigma m}\right)^{1/3} F\left\{\left(\frac{\varrho}{\Sigma m}\right)^{1/3} r\right\} \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\Sigma\varepsilon} F(R)$$

zeigt genügend, worin der Unterschied zwischen den Gesetzen der atomischen Wirkungen und der Massenwirkungen in endlicher Entfernung besteht. Dieser Unterschied verschwindet nur in einem einzigen Falle, wenn nämlich $F(R) = \frac{k}{R}$ ist, wo k eine Constante bedeutet;*

---

* Dieser Fall entspricht den permanenten Gasen, wenn k positiv ist.

denn dann nehmen die beiden Ausdrücke folgende entsprechenden Gestalten an:

$$\frac{mm'}{\Sigma m} \frac{k}{r} \text{ und } \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\Sigma \varepsilon} \frac{k}{R}$$

und werden miteinander ganz übereinstimmend.

Fasst man aber die allgemeinen Resultate der vorigen Betrachtungen kurz zusammen, ohne willkürliche Hypothesen über die inneren Kräfte der Moleculeinheit einzuführen, so gelangt man zum folgenden Satze:

Soll es bei der Bestimmung der Gleichgewichts- oder Bewegungsgleichungen eines als materielles Punktsystem betrachteten Körpers zulässig sein, denselben durch eine continuirliche Materie zu ersetzen, muss dieser Körper folgenden Bedingungen genügen: 1. der Körper muss ein aus einer unendlichen Anzahl Atome (materieller Punkte) bestehendes System sein und diese Atome müssen so gelagert sein, dass das möglich kleinste Volumen des Körpers, d. h. ein Molecul, nicht weniger und nicht mehr als vier Atome enthalte; 2. nur Atome, welche ein und dasselbe Molecul bilden, können aufeinander anziehend, resp. abstossend wirken, und zwar in den Richtungen ihrer Verbindungsgeraden mit Kräften, deren Intensitäten die Formel

$$(\Sigma m)\left(\frac{\varrho}{\Sigma m}\right)^{1/3} f$$

darstellt, wo f die Intensitäten der entsprechenden Kräfte in der Moleculeinheit bezeichnet.

Wir haben unsere Frage in der Voraussetzung behandelt, dass die Grundhypothesen der Euklidischen Geometrie auch für das unendlich Kleine gelten, d. h. dass die Ebenheit des Raumes auch in unendlich kleinen Theilen stattfindet. Aus den Untersuchungen Riemann's ist aber bekannt, dass diese Voraussetzung für das unendlich Kleine ungenügend oder zu beschränkt ist; um also unsere Aufgabe in völliger Allgemeinheit lösen zu können, müsste man sie in der Voraussetzung behandeln, dass der Raum im unendlich Kleinen nicht mehr eben ist. Doch bis jetzt ist, wie mir scheint, eine solche Behandlung dieser Frage den gegenwärtigen Hilfsmitteln der Analysis wenig zugänglich. Die Resultate aber, die wir in der speciellen Voraussetzung erhalten haben, richten schon unser Augenmerk auf jene allgemeinen Resultate und rechtfertigen den Gedanken, dass die Ideen des genannten grossen Forschers ganz besonders im Gebiete der Molecularmechanik ihre Anwendung finden könnten.

Kleinere Mittheilungen.

V. Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers einer endlichen Zahl von Beobachtungen.

S. 145 flg. des XX. Jahrgangs dieser Zeitschrift gab ich einige Bemerkungen über die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers, wenn die Zahl der Beobachtungen endlich ist. Diese Bemerkungen hat Herr Helmert S. 300 flg. einer strengen Kritik unterzogen, welche erst jetzt nach langer Abwesenheit von mir gelesen wurde.

Ich stimme Herrn Helmert gleich zu, dass ich mich bei der Berechnung des mittlern Werthes von ω^3 geirrt habe. Die richtige Berechnung des mittlern Werthes einer ungeraden Potenz von ω würde, glaube ich, nicht sehr einfach sein. Für die vierte Potenz von ω ist diese Berechnung leicht genug, aber sie führt nicht zu einem brauchbaren Ausdrucke, weil dieser mittlere Werth von ω^4 auf ziemlich complicirte Weise von der Anzahl der Beobachtungen abhängig ist. Nur wundert es mich, dass ich für den mittlern Werth von ω^3, bei dessen Ableitung von mir, wie Herr Helmert richtig bemerkt, irrigerweise sowohl die negativen als die positiven Werthe von ω berücksichtigt sind, nicht Null bekommen habe. Wem dies zuzuschreiben sei, ist mir nicht deutlich. Es kann unmöglich davon herrühren, dass vielleicht der Behauptung Helmert's gemäss für gleichgrosse positive und negative Werthe von ω die Wahrscheinlichkeit nicht dieselbe sei. Denn bei der Berechnung von $\overline{\omega^3}$ führen wir für die Mittelwerthe der verschiedenen σ_m die S_m ein, und dabei setzen wir gerade voraus, die positiven und negativen ω seien gleich wahrscheinlich. Der einzige Grund für die Abweichung von der von mir berechneten $\overline{\omega^3}$ von Null kann in der Art der Berechnung gelegen sein. Aber ist diese Berechnungsweise fehlerhaft, dann büsst der berechnete Werth von $\overline{\omega^2}$ auch viel von dem bis jetzt darein gesetzten Zutrauen ein, denn diese Grösse wird auf dieselbe Weise berechnet wie $\overline{\omega^3}$. Die Sache ist mir noch nicht ganz klar.

Zweitens muss ich auch gestehen, dass die Gauss'sche Ableitung des wahrscheinlichen Fehlers des aus der Summe der m^{ten} Potenzen der bei den Beobachtungen gemachten Fehler berechneten Werthes des wahrscheinlichen Fehlers des Resultates der Beobachtungen vollständiger und weniger willkürlich ist, als ich meinte. Dass ich dies gemeint habe, ist nicht so sehr befremdend, wenn man erwägt, dass ich hauptsächlich die unvollständigen Beweise bei Sawitsch und Helmert im Auge hatte. Weil nun Gauss den Beweis der von ihm benützten Sätze unterdrückt und die Laplace'schen Betrachtungen, worauf sich die Gauss'sche Ableitung stützt, mir damals nicht bekannt waren, konnte ich leicht der Meinung verfallen, auch bei Gauss sei die Beweisführung unvollständig. Nachdem ich jetzt die Laplace'schen Betrachtungen kennen gelernt habe, denke ich über den Gauss'schen Beweis viel günstiger.

Durch diese beiden Irrthümer ist aber der Zweck meiner Bemerkungen nicht ganz verfehlt. Denn dieser Zweck war erstens der, zu warnen gegen die Unvollständigkeit der Beweise des hier besprochenen Satzes in vielen Lehrbüchern, wie in denen von Sawitsch und Helmert. Denn auch die Weise, wie bei Helmert dieser Satz behandelt wird, kann ich nicht von Unvollständigkeit freisprechen. Wenn Herr Helmert den langen, von Gauss unterdrückten Beweis nicht geben wollte, weil es in den Gang seines Buches nicht passte, warum hat er dann den Satz über die Genauigkeit der verschiedenen Berechnungsweisen von μ nicht lieber ganz unterdrückt? Das wäre weit besser gewesen, als dafür einen unvollständigen Beweis zu geben. — Zweitens war mein Zweck, zu zeigen, dass man zur Feststellung des Satzes, dass der wahrscheinlichste Werth des wahrscheinlichen Fehlers aus den Fehlerquadraten gefunden wird — und nur das Feststellen dieses Satzes, nicht das Finden der numerischen Genauigkeitswerthe der auf verschiedene Weisen berechneten wahrscheinlichen Fehler hat für die Lehrbücher Wichtigkeit — gar nicht die zweite Gauss'sche Beweisführung braucht, weil der Beweis, den ich den ersten Gauss'schen Beweis genannt habe, dann vollkommen genügt und so einfach ist, dass er leicht in den Lehrbüchern Aufnahme finden kann.

Was zuletzt die Grenzen von ω^2 betrifft, so bleibe ich der Meinung, dass Herr Helmert diese nicht richtig angiebt. Eine grosse Anzahl möglicher Werthe von ω^2 fällt ausser den von Herrn Helmert angegebenen Grenzen, und darunter selbst der nach mir wahrscheinlichste Werth. Dass dieser meist wahrscheinliche Werth von ω^2 Null ist, weil der wahrscheinlichste Werth von σ_m mit S_m übereinstimmt — ich betrachte hier natürlich allein wahre Beobachtungsfehler —, ist von Herrn Helmert nicht widerlegt, wenigstens nicht für den von mir betrachteten Fall, wenn die Zahl der Beobachtungen ziemlich gross ist. Für diesen Fall befolgen, wie Laplace gezeigt hat, die ω das Gauss'sche Fehler-gesetz, und auch Herr Helmert meint, dass dies dann nahe richtig ist. Auch nur für diesen Fall gelten die Betrachtungen von Laplace und Gauss, und nur auf diesen Fall hätte Herr Helmert in seiner Kritik sich beschränken müssen, soll das von ihm Behauptete wahr bleiben, dass Gauss sich bei seinen Betrachtungen streng von den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat leiten lassen.

Mit Verlangen sehe ich dem angekündigten grösseren Aufsatze entgegen, worin Herr Helmert für den Fall einer kleineren Zahl von Beobachtungen das Wahrscheinlichkeitsgesetz der ω ableiten wird. Denn auch die Behandlung dieses Falles hat grosse Wichtigkeit.

Groningen, September 1875. R. A. Mees.

VI. Zur elementaren Behandlung der Cycloiden.

(Hierzu Taf. II, Fig. 8—10.)

Satz 1. Der Flächeninhalt der Cycloide ist $3r^2\pi$, der der verlängerten oder verkürzten Cycloide ist $r\pi(r+2\varrho)$, wenn r der Radius des erzeugenden, ϱ Radius des Wälzungskreises ist.

Denkt man sich die Bewegung des wälzenden Kreises zerlegt in die Rotation um den Mittelpunkt und die horizontale Verschiebung, so gelangt man (Fig. 8) zu folgender Construction der Cycloide: Man mache $DL = \widehat{DA}$, $EK = \widehat{EA}$, $FM = \widehat{FA}$ u. s. w. Dann bilden die Endpunkte der Horizontalen eine Cycloide. — Legt man dieselben Horizontalen in denselben Höhen an die Gerade A_1C_1 an, so entsteht eine Curve $A_1L_1K_1M_1B_1$, die von oben gesehen ebenso erscheint, wie von unten. Es ist also leicht zu zeigen, dass die Segmente $A_1L_1K_1$ und $B_1M_1K_1$ congruent, dass also die Fläche $A_1L_1K_1M_1B_1C_1$ und das Dreieck $A_1B_1C_1$ inhaltsgleich sind, d. h. $= r^2\pi$. Nach dem Cavalerischen Princip sind aber auch die Flächen $ALKMBCE$ und $A_1L_1K_1M_1B_1C_1E_1$ inhaltsgleich. Nun ist Rechteck + Halbkreis $= 2r^2\pi + \frac{r^2\pi}{2}$; die genannte Fläche abgezogen, giebt für die halbe Cycloidenfläche $\frac{3r^2\pi}{2}$, für die ganze $3r^2\pi$.

Trägt man bei der Construction an den Bogen $\frac{r\pi}{n}$ nicht $\frac{r\pi}{n}$, sondern $\frac{\varrho\pi}{n}$ als Horizontale an, so entsteht eine verlängerte oder verkürzte Cycloide, deren Wälzungskreis ϱ, deren erzeugender Kreis r zum Radius hat. Die Ermittelung des Flächeninhalts ist ähnlich, wie vorher. Rechteck + Halbkreis $= 2r\varrho\pi + \frac{r^2\pi}{2}$; die entsprechende Fläche (jetzt

$r\varrho\pi$) abgezogen, giebt $r\varrho\pi+\frac{r^2\pi}{2}$ für die halbe, $r\pi(r+2\varrho)$ für die ganze Cycloide. Analog ist die Inhaltsbestimmung für die Epi- und Hypocycloide.

Satz 2. Die Normale der Cycloide geht stets durch den augenblicklichen Berührungspunkt des Kreises. (Fig. 9.)

Beweis. Ist B der die Cycloide erzeugende Punkt und rollt der Kreis um die kleine Strecke AE vorwärts, so bewegt sich B erstens um die gleichgrosse Strecke BG, zweitens um den gleichgrossen Bogen BF, d. h. in der Richtung BH, wo bei zunehmender Kleinheit BH die Diagonale eines Rhombus ist. BH wird Tangente der Cycloide, und diese halbirt also den Winkel FBG oder LBD. Derselbe wird aber auch durch CB halbirt, denn $\angle\alpha=\alpha_2=\alpha_1$. Folglich: die Tangente der Cycloide geht durch C, folglich die Normale durch den Berührungspunkt A.

Zieht man HE bis zum Durchschnitt mit BA, so erhält man den Durchschnitt μ zweier benachbarter Normalen, und eine Grenzbetrachtung zeigt, dass $B\mu=2.BA$ ist. Einfacher ergiebt sich dies aus folgender Ueberlegung.

Ueber $AB=r\pi$ (Fig. 10) errichte man Rechtecke von der Höhe $2r$ nach oben und unten. Rollt oben der Kreis von A nach B, so entsteht die Cycloide $\widehat{AC}$; rollt er unten von D nach K, so entsteht die congruente Curve $\widehat{DA}$. F sei Berührungspunkt der Kreise. Macht man Bogen $FH=AF$, so ist HF Normale und gleichzeitig Bogen $\widehat{HE}=FB$. HF verlängert schneidet aber unten Bogen $\widehat{GJ}=\widehat{HE}$ ab, es ist also auch $DG=\widehat{GJ}$. Folglich ist J ein Punkt der Cycloide DA, GJ Normale und HJ Tangente derselben. Dies gilt von jeder Normale der oberen Curve. Hieraus folgt:

Satz 3. Die Evolvente und Evolute der halben Cycloide sind der letzteren congruent. Inwiefern J sich als Krümmungsmittelpunkt betrachten lässt, ist nun leicht durch elementare Entwickelungen nachzuweisen. Satz 3 lässt sich auch mit Hilfe der Gegencycloide beweisen.

NB. Complicirtere Versuche, Satz 2 elementar zu entwickeln, finden sich bei Zehme (Die Cycloiden, Iserlohn und Elberfeld 1854) und Weissenborn (Die cyclischen Curven, Eisenach 1856).

Rollt der Kreis nicht auf der Geraden, sondern auf einem andern Kreise, sei es aussen oder innen, so lässt sich eine kleine Wälzungsstrecke als Gerade betrachten. Satz 2 gilt also auch von der Epi- und Hypocycloide. Dass die Evoluten und Evolventen der letzteren ihnen selbst ähnlich sind, ergiebt sich ähnlich, wie bei Satz 3, durch eine elementare Betrachtung. (Vergl. Herbst-Programm 1875 der Gewerbeschule zu Hagen.)

Dr. G. Holzmüller.
Director der Gewerbeschule zu Hagen.

VII. Bestimmung der Anzahl der Doppeltangenten ebener Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind.

Im 63. Bande des Crelle-Borchardt'schen Journals hat Clebsch die in der Ueberschrift bezeichnete Anzahl, die in den Plücker'schen Formeln *a posteriori* bekannt war, durch ein eigenthümliches directes Verfahren gefunden. Dasselbe findet sich dargelegt auf S. 53 und 54 der citirten Abhandlung und lässt theoretisch gewiss Nichts zu wünschen übrig. Wer aber einmal versucht hat, nach dem von Clebsch vorgeschriebenen Verfahren die Rechnung durchzuführen, d. h. die Endgleichung, welche die Doppeltangenten liefert, wirklich aufzustellen, wird der grossen Weitläufigkeit der durchzumachenden Operationen wegen jedenfalls den Wunsch nach einem einfacheren Verfahren berechtigt finden. In dem nach Clebsch zu bildenden Eliminationsresultate erscheinen nämlich Factoren von nicht geringerem als dem $5(n-2)^2-4(n-2)(n-3) = (n-2)(n+2)^{\text{ten}}$ Grade, die der Frage fremd sind. Es ist mir gelungen, die fragliche Endgleichung sofort von allen fremden Factoren frei darzustellen, und die dabei befolgte Methode bildet den Gegenstand der folgenden kleinen Abhandlung.

Ich werde mich in der folgenden Darlegung der Bezeichnungen $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$, $\vartheta(\lambda)$ für ganze Functionen n^{ten} Grades des Parameters λ bedienen. Möge die Curve gegeben sein durch die ihre Cartesischen Coordinaten x, y bestimmenden Relationen

$$1)\qquad x=\frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)},\quad y=\frac{\vartheta(\lambda)}{\psi(\lambda)}.$$

Dann schreibt sich die Gleichung der Tangente, welche die Curve in dem Punkte, welcher dem Parameter λ entspricht, berührt, als Determinante

$$2)\qquad \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ \varphi(\lambda), & \vartheta(\lambda), & \psi(\lambda) \\ \varphi'(\lambda), & \vartheta'(\lambda), & \psi'(\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Ich verzichte darauf, dieselbe durch Einführung von $\frac{\lambda}{\mu}$ an Stelle von λ homogen zu machen, indem die dadurch erreichte grössere Symmetrie nicht bedeutend genug erscheint, auf andere Vortheile, welche die Beibehaltung eines Parameters bietet, zu verzichten.

Die im Punkte λ — wenn wir uns kurz so ausdrücken dürfen — berührende Tangente 2) wird nun die Curve in weiteren $n-2$ Punkten ν treffen, welche durch die Gleichung gefunden werden:

$$3)\qquad \begin{vmatrix} \varphi(\nu), & \vartheta(\nu), & \psi(\nu) \\ \varphi(\lambda), & \vartheta(\lambda), & \psi(\lambda) \\ \varphi'(\lambda), & \vartheta'(\lambda), & \psi'(\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Dieselbe ist scheinbar vom Grade n in Bezug auf ν; allein es lässt sich der Factor $(\nu-\lambda)^2$ abtrennen und die alsdann resultirende Gleichung ist weiter zu untersuchen. Soll dieselbe die Tangente im Punkte λ als Doppeltangente charakterisiren, so muss sie zwei gleiche Wurzeln besitzen, es muss also ihre Discriminante verschwinden.

Zunächst haben wir also den Factor $(\nu-\lambda)^2$ abzuscheiden. Es ist, wie man leicht bestätigt:

$$\frac{\varphi(\nu)-\varphi(\lambda)-(\nu-\lambda)\,\varphi'(\lambda)}{(\nu-\lambda)^2} = a_n\,.\,\nu^{n-2}+(a_{n-1}+2a_n\lambda)\,\nu^{n-3}+\ldots$$
$$+a_2+2a_3\lambda+3a_4\lambda^2+\ldots+(n-1)\,a_n\lambda^{n-2},$$

wenn

$$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\ldots+a_n\lambda^n.$$

Wir setzen ferner

$$\begin{aligned}\varphi_0&=a_0,\\ \varphi_1&=a_0+a_1\lambda,\\ \varphi_2&=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2,\\ \varphi_m&=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\ldots+a_m\lambda^m.\end{aligned}$$

Dann kann man nach dem Vorigen schreiben

$$4)\quad \frac{\varphi(\nu)-\varphi(\lambda)-(\nu-\lambda)\,\varphi'(\lambda)}{(\nu-\lambda)^2}=\nu^{n-2}.\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\varphi-\varphi_{n-1}}{\lambda^{n-1}}\right)$$
$$+\nu^{n-3}.\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\varphi-\varphi_{n-2}}{\lambda^{n-2}}\right)+\ldots+\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\varphi-\varphi_1}{\lambda}\right).$$

Der Kürze wegen sind die Argumente λ in $\varphi(\lambda)$ weggelassen.

Subtrahiren wir also in 3) die zweite und die mit $(\nu-\lambda)$ multiplicirte dritte Horizontalreihe von der ersten, so wird die erste durch $(\nu-\lambda)^2$ theilbar und der Quotient sind Glieder, die aus der rechten Seite von 4) durch Ersetzung des Charakters φ durch φ, ϑ, ψ hervorgehen. Ordnen wir jetzt nach Potenzen von ν an, so zerfällt 3) in eine Summe von Determinanten, deren erste Verticalzeile die Glieder enthält:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\varphi-\varphi_m}{\lambda^m}\right),\quad \varphi,\quad \varphi',\quad m=(1,2,\ldots n-1),$$

während die zwei folgenden analog gebildete Ausdrücke für ϑ und ψ sind. Diese Zeile verwandelt sich durch Subtraction des mit λ^m multiplicirten Gliedes von dem letzten in

$$\frac{\varphi'-\varphi'_m}{\lambda^m}-m\,\frac{\varphi-\varphi_m}{\lambda^{m+1}},\quad \varphi,\quad \varphi'_m+m\,\frac{\varphi-\varphi_m}{\lambda}$$

und durch Subtraction des mit $\frac{\lambda}{m}$ multiplicirten dritten Gliedes vom zweiten

$$\frac{\varphi'-\varphi'_m}{\lambda^m}-m\,\frac{\varphi-\varphi_m}{\lambda^m},\quad \varphi_m-\frac{\lambda}{m}\,\varphi'_m,\quad \varphi'_m+m\,\frac{\varphi-\varphi_m}{\lambda}.$$

Jetzt multipliciren wir das erste Glied mit $\frac{m}{n-m}\lambda^m$ und subtrahiren es vom dritten, dann wird das dritte Glied

$$\varphi'_m + \frac{m}{n-m}\lambda^{m-1}\left\{(n-m)\frac{\varphi-\varphi_m}{\lambda^m} - \lambda\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\varphi-\varphi_m}{\lambda^m}\right)\right\}.$$

Demnach haben die drei Glieder die Dimensionen

$$n-m-1, \quad m-1, \quad (n-m-1)+(m-1).$$

Die Summe dieser Zahlen ist $2n-4$ und man erkennt, dass jede der betrachteten Partialdeterminanten eine ganze Function $2n-4^{\text{ten}}$ Grades in λ ist.

Demnach haben wir das Resultat gefunden: Man ist im Stande, die Gleichung $n-2^{\text{ten}}$ Grades, welche wir suchen, in einer Weise darzustellen, dass ihre Coefficienten ganze Functionen $2n-4^{\text{ter}}$ Ordnung in λ sind. Daraus folgt unmittelbar das gesuchte Endresultat. Denn die Discriminante einer Gleichung $n-2^{\text{ten}}$ Grades ist eine homogene Function $2(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ihrer Coefficienten, steigt also in Bezug auf λ zum Grade $(2n-4).2.(n-3) = 4(n-2)(n-3)$. Mithin ist die Gleichung, welche die Parameter der Berührungspunkte der Doppeltangenten liefert, vom Grade $4(n-2)(n-3)$ und die Anzahl der Doppeltangenten selbst $2(n-2)(n-3)$.

Der Fall, wo die Curve Rückkehrpunkte besitzt, ist im Vorhergehenden nicht berücksichtigt. Derselbe bietet indess keine weiteren Schwierigkeiten dar.

Betrachtet man die allgemeine, hierher gehörige Curve vierter Ordnung und bezeichnet

$$\varphi(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^4,$$
$$\vartheta(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + b_3\lambda^3 + b_4\lambda^4,$$
$$\psi(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3 + c_4\lambda^4,$$

ferner die dreigliedrigen zehn Determinanten, welche man aus den 15 Grössen a, b, c bilden kann, in der Weise, dass z. B.

$$A_{01} = \Sigma \pm a_2 b_3 c_4, \quad A_{02} = \Sigma \pm a_1 b_3 c_4$$

gesetzt wird, so lautet die Gleichung achten Grades, welche die Parameter der Doppeltangenten liefert:

$$\begin{aligned} 4[\lambda^4 A_{01} + 2\lambda^3 A_{02} + \lambda^2(A_{03} + 3A_{12}) + 2\lambda A_{13} + A_{23}] \\ [\lambda^4 A_{12} + 2\lambda^3 A_{13} + \lambda^2(A_{14} + 3A_{23}) + 2\lambda A_{24} + A_{34}] \\ - [\lambda^4 A_{02} + 2\lambda^3(A_{12} + A_{03}) + \lambda^2(A_{04} + 4A_{13}) + 2\lambda(A_{14} + A_{23}) + A_{24}]^2 = 0. \end{aligned}$$

Für die Lemniscate hat man

$$\varphi(\lambda) = \lambda^4 - 1,$$
$$\vartheta(\lambda) = 2\lambda(\lambda^2 - 1),$$
$$\psi(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^2 + 1.$$

Daraus folgt die Gleichung, welche ν liefert:

$$\nu^2(3\lambda^4 + 6\lambda^2 - 1) + 8\lambda\nu(\lambda^2 - 1) + \lambda^4 - 6\lambda^2 - 3 = 0,$$

und die Discriminante, welche für die Doppeltangenten verschwindet:

$$(3\lambda^4+6\lambda^2-1)(\lambda^4-6\lambda^2-3)-16\lambda^2(\lambda^2-1)^2=0,$$

oder entwickelt

$$3\lambda^8-28\lambda^6-14\lambda^4-28\lambda^2+3=0.$$

Die Lemniscate besitzt demnach vier Doppeltangenten, die wir mit römischen Ziffern bezeichnen wollen. Die nebenstehenden Werthe werden von λ in den Berührungspunkten angenommen.

I)	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$,	$\sqrt{2}-\sqrt{3}$;
II)	$-\sqrt{2}-\sqrt{3}$,	$-\sqrt{2}-\sqrt{3}$;
III)	$\frac{1}{3}(\sqrt{3}+\sqrt{6}\,i)$,	$-\frac{1}{3}(\sqrt{3}+\sqrt{6}\,i)$;
IV)	$\frac{1}{3}(\sqrt{3}-\sqrt{6}\,i)$,	$-\frac{1}{3}(\sqrt{3}-\sqrt{6}\,i)$.

Die zwei reellen Doppeltangenten gehen bekanntlich der X-Axe parallel. Die vier Berührungspunkte haben die vier Werthe, welche sich aus

$$y=\frac{\sqrt{2}}{4},\quad x=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

durch verschiedene Zeichencombination ergeben. Die imaginären Doppeltangenten gehen der Y-Axe parallel.

Münster. Dr. K. Schwering.

VIII. Bemerkung zu der Curve $\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=1$.

Dass algebraische Curven angegeben werden können, deren Sectoren mit Hilfe der cyclischen und elliptischen Functionen in analoger Weise verglichen werden, wie es nach der berühmten Entdeckung von Gauss rücksichtlich der Bögen des Kreises und der Lemniscate geschehen kann, ist eine so naheliegende Sache, dass unzweifelhaft die desfallsigen Untersuchungen schon öfter angestellt und derartige Curven angegeben worden sind. Vielleicht ist die Bemerkung von Interesse, dass die Curve

$$x^4+y^4=r^4$$

und ebenso natürlich

$$\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=1,$$

die dem Kreise und der Ellipse verwandt zu sein scheinen, in diese Kathegorie gehören. Denn wendet man Polarcoordinaten r und φ an, so überzeugt man sich durch die Annahme $z=\frac{a}{b}\,tg\,\varphi$ alsbald, dass der Sector u durch das elliptische Integral erster Gattung gegeben wird:

$$u=\tfrac{1}{2}ab\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{1+z^4}},$$

dessen Perioden ein rationales Verhältniss besitzen. Die Quadrate der Coordinaten x, y drücken sich sehr einfach durch ϑ-Quotienten von $\frac{2u}{ab}$ aus.

Münster. Dr. K. Schwering.

IX. Zur Construction einer unimodularen Determinante.

Hermite hat in einer Abhandlung „*Sur une question relative à la théorie des nombres*“ (Liouville's Journal Bd. XIV, S. 21) folgendes Problem behandelt:

Es seien $a_{k,0}$ $(h = 0, 1, \ldots n)$ $n+1$ ganze, positive oder negative Zahlen, deren grösster gemeinsamer Theiler die Einheit ist; es sollen die $n(n+1)$ ganzen Zahlen $a_{i,k}$ so bestimmt werden $(i = 0, 1, \ldots n;$ $k = 1, 2, \ldots n)$, dass

$$\Sigma \pm a_{0,0} a_{1,1} \ldots a_{n,n} = \pm 1$$

werde, d. h. man soll eine unimodulare Determinante von gegebener erster Colonne construiren.

Hermite giebt dazu folgendes Verfahren an.

Ist π_k der grösste gemeinsame Theiler zwischen $a_{k,0}$ und π_{k-1} $(k = 1, 2, \ldots n$, wobei π_0 gleich $a_{0,0}$ genommen wird, und $\pi_n = 1$ werden muss), so mögen zunächst die Grössen η_k und η'_k ganzzahlig aus den Gleichungen

$$\eta_0 a_{1,0} - \eta_1 a_{0.0} = \pi_1,$$
$$\eta'_k a_{k,0} - \eta_k \pi_{k-1} = \pi_k, \quad k = 2, 3, \ldots n$$

bestimmt werden. Wählt man nun die ganzzahligen Grössen $\nu_{i,k}$ $(i = 1, 2, \ldots n;$ $k = 1, 2, \ldots n)$ derart, dass sie der einzigen Bedingung

$$\Sigma \pm \nu_{1,1} \nu_{2,2} \ldots \nu_{n,n} = \pm 1$$

genügen, nimmt man ferner die Grössen $M_{n,i}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ willkürlich, aber ganzzahlig, und bestimmt die Grössen $M_{k,i}$ successive aus den Gleichungen

$$M_{k-1,i} = \eta'_k \nu_{k,i} + M_{k,i} \frac{\pi_{k-1}}{\pi_k}, \quad k = n, n-1, \ldots 3, 2;$$

dann werden durch

$$\left.\begin{aligned} a_{0,i} &= \eta_0 \nu_{1,i} + M_{1,i} \frac{a_{0,0}}{\pi_1} \\ a_{k,i} &= \eta_k \nu_{k,i} + M_{k,i} \frac{a_{k,0}}{\pi_k} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} i &= 1, 2, \ldots n, \\ k &= 1, 2, \ldots n \end{aligned}$$

die Elemente der verlangten unimodularen Determinante geliefert.

Es giebt nun, wie ich hier darlegen will, zur Lösung des Problems eine wesentlich andere Methode, die mir vor der eben entwickelten Vorzüge zu haben scheint. Ich muss zu diesem Zwecke einige Resultate vorausschicken, welche ich in einer Untersuchung über die Formen, in denen die Auflösungen einer unbestimmten Gleichung des ersten Grades enthalten sind, früher gewann (d. Zeitschr. Bd. XIX, S. 53); dort ist allerdings nur auf ganze positive Werthe für die Unbekannten Bezug genommen, jedoch werden die betreffenden Resultate durch Zulassung negativer Werthe nicht weiter gestört. Die Sätze sind folgende:

Löst man die unbestimmte Gleichung

$$1)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} A_k x_k = M$$

nach der Euler'schen Methode auf, so werden alle Unbekannten schliesslich dargestellt durch

$$2)\qquad x_k = M_k + \sum_{i=1}^{i=n-1} a_{k,i}\, t_i, \quad k = 1, 2, \ldots n,$$

wo die Grössen t_i willkürliche ganze Zahlen sind; das System 2) wurde eine Form für die Gleichung 1) genannt, und es ward nachgewiesen, dass das Euler'sche Verfahren stets eine allgemeine, d. h. alle möglichen Lösungen umfassende Form liefert. Eine solche allgemeine Form hat die Eigenschaft, dass, wenn die Determinante

$$3)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_{1,1} & \ldots & a_{1,n-1} \\ a_2 & a_{2,1} & \ldots & a_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n,1} & \ldots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} = D$$

mit willkürlicher erster Colonne gebildet wird, und wenn man den Coefficienten von a_p in D durch α_p bezeichnet, immer

$$4)\qquad \begin{array}{l} \alpha_p = + A_p \\ \text{oder } \alpha_p = - A_p, \end{array} \quad p = 1, 2, \ldots n$$

ist. Der zweite Fall kann ausgeschlossen werden, da man eventuell durch Vertauschung von t_i mit t_k auf den ersten zurückkommt.

Hiermit ist nun folgender Weg zur Lösung des oben bezeichneten Problems gegeben.

Es seien die gegebenen Elemente der ersten Colonne durch A_k ($k = 1, 2, \ldots n$), die gesuchten der übrigen Colonnen durch $d_{i,k}$ ($i = 1, 2, \ldots n$; $k = 2, 3 \ldots n-1$) bezeichnet, so dass zu bestimmen ist

$$5)\qquad E = \begin{vmatrix} A_1 & d_{1,1} & \ldots & d_{1,n-1} \\ A_2 & d_{2,1} & \ldots & d_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n & d_{n,1} & \ldots & d_{n,n-1} \end{vmatrix} = +1.$$

Löst man dann nach dem Euler'schen Verfahren die Gleichung

$$6)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} A_k x_k = +1$$

und heisst die gewonnene Form

$$7)\qquad x_k = \mu_k + \sum_{i=1}^{i=n-1} a_{k,i} t_i, \quad k = 1, 2, \ldots n,$$

wobei also stets

$$8)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} A_k \mu_k = +1,$$

und construirt man endlich die Determinante

$$9)\qquad D' = \begin{vmatrix} \mu_1 & a_{1,1} & \ldots & a_{1,n-1} \\ \mu_2 & a_{2,1} & \ldots & a_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_n & a_{n,1} & \ldots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

und deren Reciprocaldeterminante E', so ist E' die gesuchte Determinante E. Der Coefficient von μ_k in D' ist nämlich nach 4) nichts Anderes als A_k; ferner wird, wegen 8), $D' = +1$, also auch $E' = +1$. Wird der Coefficient von $a_{i,k}$ in D' durch $\alpha_{i,k}$ bezeichnet, so hat man

$$10)\qquad d_{i,k} = \alpha_{i,k}.$$

Eine Ersetzung der Grössen μ_k durch eine andere Lösung der Gleichung 6) bringt eine neue Determinante E'' zum Vorschein, die indessen aus der früheren E' durch Subtraction einzelner Colonnen von anderen ebenfalls gefunden wird, so dass E' und E'' nicht als wesentlich verschieden anzusehen sind. Eine neue unimodulare Determinante, welche nicht direct aus E' ablesbar ist, erhält man erst, wenn man die Grössen t_i in 7) durch eine unimodulare Substitution transformirt, d. h. wenn man setzt

$$11)\qquad t_k = \sum_{h=1}^{h=n-1} b_{k,h} s_h, \quad k = 1, 2, \ldots (n-1),$$

mit der einen Bedingung, dass

$$12)\qquad \Sigma \pm b_{1,1} b_{2,2} \ldots b_{n-1,n-1} = +1,$$

und der andern, dass, wenn die Form 7) dadurch übergeht in

$$13)\qquad x_k = \mu_k + \sum_{i=1}^{i=n-1} c_{k,i} s_i, \quad k = 1, 2, \ldots n,$$

$$14)\qquad c_{k,i} = \sum_{h=1}^{h=n-1} a_{k,h} b_{h,i}, \quad \begin{matrix} k = 1, 2, \ldots n, \\ i = 1, 2, \ldots (n-1), \end{matrix}$$

nicht etwa 7) und 13) identisch werden.

E''' wird dann sofort als Reciprocale von

$$15)\qquad D''' = \begin{vmatrix} \mu_1 & c_{1,2} & \ldots & c_{1,n-1} \\ \mu_2 & c_{2,2} & \ldots & c_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_n & c_{n,2} & \ldots & c_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

gewonnen. Wesentlich verschiedene Determinanten E existiren also unendlich viele, falls $n > 2$.

Dorpat. Prof. K. WEIHRAUCH.

X. Ueber die einem Dreieck eingeschriebene und die umschriebene Ellipse.

Dem Euler'schen Problem, um ein Dreieck die kleinste Ellipse zu beschreiben, steht das Problem zur Seite, in ein Dreieck die grösste Ellipse einzuschreiben. Beide Probleme sind in den *Annales de Gergonne*, *tôme IV*, von Herrn Berard gelöst und Liouville hat im 7. Bande der ersten Serie seines Journals eine kurze, rein geometrische Lösung des Euler'schen Problems gegeben. Man kann beide Probleme gleichzeitig lösen nach der Methode, welche Gauss (Bd. IV, S. 388) angewendet hat, um die grösste Ellipse in ein Viereck einzuschreiben, wobei nur seine Ausdrücke geometrisch interpretirt zu werden brauchen. Vom Gebrauch der Infinitesimalrechnung kann dabei abgesehen werden, wenn man die Sätze als bekannt voraussetzt, dass bei allen Dreiecken mit vorgegebenem Umfang das gleichseitige das grösste ist, und dass hieran Nichts geändert wird, wenn der Inhalt noch durch das Product der drei Seiten dividirt wird, welche Sätze sich elementar beweisen lassen. Da es vielleicht Manchem nicht unwillkommen ist, den Ausdruck des Flächeninhalts einer Ellipse durch die drei Dreiecke, welche durch den Mittelpunkt der Ellipse und drei Punkte oder drei Tangenten derselben bestimmt sind, zur Hand zu haben (auf welchen Ausdrücken die Lösung beruht), so mag die Lösung des obengenannten Problems hier folgen.

Nennen wir das Euler'sche das zweite und das andere das erste Problem, so verstehen wir unter p, p', p'' die Entfernungen des Mittelpunktes der eingeschriebenen Ellipse von den Dreiecksseiten im ersten Problem, die reciproken Werthe der Entfernungen des Mittelpunktes der umschriebenen Ellipse von den Ecken des Dreiecks im zweiten Problem. Im ersten Problem sind a, b die Halbaxen der Ellipse, im zweiten die reciproken Werthe der Halbaxen. In beiden Problemen sind α, α', α'' die Winkel, welche die Linien, die zu p, p', p'' gehören, bez. mit der zu a gehörenden Axe machen, und in beiden Problemen ist

$$\varphi = \alpha'' - \alpha', \quad \varphi' = \alpha - \alpha'' + 2\pi, \quad \varphi'' = \alpha' - \alpha,$$

d. h. φ, φ', φ'' sind die zwischen p', p''; p'', p; p, p' bez. gelegenen Winkel.

Nun gelten für beide Probleme folgende Formeln und Rechnungen:

$$p^2 = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha, \quad p'^2 = a^2 \cos^2\alpha' + b^2 \sin^2\alpha', \quad p''^2 = a^2 \cos^2\alpha'' + b^2 \sin^2\alpha''$$

oder, wenn $a^2 + b^2 = \sigma$, $a^2 - b^2 = \delta$ zur Abkürzung gesetzt wird:

$$1)\quad \sigma + \delta \cos 2\alpha = 2p^2, \quad \sigma + \delta \cos 2\alpha' = 2p'^2, \quad \sigma + \delta \cos 2\alpha'' = 2p''^2.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen bez. mit

$$\sin 2(\alpha'' - \alpha') = \sin 2\varphi, \quad \sin 2(\alpha - \alpha'') = \sin 2\varphi', \quad \sin 2(\alpha' - \alpha) = \sin 2\varphi''$$

und addirt, so folgt

$$2)\quad p^2 \sin\varphi \cos\varphi + p'^2 \sin\varphi' \cos\varphi' + p''^2 \sin\varphi'' \cos\varphi'' = -\sigma \sin\varphi \sin\varphi' \sin\varphi''.$$

Durch Subtraction je zweier der unter 1) verzeichneten Gleichungen erhält man weiter $\delta(\cos 2\alpha - \cos 2\alpha') = 2(p^2 - p'^2)$ etc. oder

$$3)\quad \begin{gathered} \delta \sin\varphi \sin(\alpha' + \alpha'') = p''^2 - p'^2, \quad \delta \sin\varphi' \sin(\alpha'' + \alpha) = p^2 - p''^2, \\ \delta \sin\varphi'' \sin(\alpha + \alpha') = p'^2 - p^2. \end{gathered}$$

Hieraus folgt durch Erheben auf das Quadrat

$$3\mathrm{a})\quad \begin{gathered} \delta - \delta \cos 2(\alpha' + \alpha'') = \frac{2(p'' - p'^2)^2}{\sin^2\varphi}, \quad \delta - \delta \cos 2(\alpha'' + \alpha) = \frac{2(p^2 - p''^2)}{\sin^2\varphi'}, \\ \delta - \delta \cos 2(\alpha + \alpha') = \frac{2(p'^2 - p^2)^2}{\sin^2\varphi''}. \end{gathered}$$

Multiplicirt man die unter 3a) verzeichneten Gleichungen bez. mit

$$\begin{gathered} -\sin 2\varphi = \sin 2(\alpha + \alpha' - \alpha'' - \alpha), \quad -\sin 2\varphi' = \sin 2(\alpha' + \alpha'' - \alpha - \alpha'), \\ -\sin 2\varphi'' = \sin 2(\alpha'' + \alpha - \alpha' - \alpha'') \end{gathered}$$

und addirt, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} \delta^2 (\sin 2\varphi + \sin 2\varphi' + \sin 2\varphi'') &= -4\delta^2 \sin\varphi \sin\varphi' \sin\varphi'' \\ = 4(p''^2 - p'^2)^2 \operatorname{cotg}\varphi &+ 4(p^2 - p''^2)^2 \operatorname{cotg}\varphi' + 4(p'^2 - p^2)^2 \operatorname{cotg}\varphi'' \end{aligned}$$

oder, wenn man nach den Potenzen der p ordnet:

$$4)\quad \begin{aligned} &\delta^2 \sin^2\varphi \sin^2\varphi' \sin^2\varphi'' \\ &= p^4 \sin^2\varphi + p'^2 \sin^2\varphi' + p''^2 \sin^2\varphi'' + 2p'^2 p''^2 \cos\varphi \sin\varphi' \sin\varphi'' \\ &+ 2p''^2 p^2 \cos\varphi' \sin\varphi'' \sin\varphi + 2p^2 p'^2 \cos\varphi'' \sin\varphi \sin\varphi'. \end{aligned}$$

Zieht man von dieser Gleichung die unter 2) verzeichnete Gleichung, nachdem sie auf's Quadrat erhoben ist, ab, so erhält man endlich

$$5)\quad \begin{aligned} &(\sigma^2 - \delta^2) \sin^2\varphi \sin^2\varphi' \sin^2\varphi'' = 4a^2b^2 \sin^2\varphi \sin^2\varphi' \sin^2\varphi'' \\ &= -p^4 \sin^4\varphi - p'^4 \sin^4\varphi' - p''^4 \sin^4\varphi'' + 2p'^2 p''^2 \sin^2\varphi' \sin^2\varphi'' \\ &+ 2p''^2 p^2 \sin^2\varphi'' \sin^2\varphi + 2p^2 p'^2 \sin^2\varphi \sin^2\varphi'. \end{aligned}$$

Im ersten Problem seien nun die Dreiecksseiten, auf denen p, p', p'' Lothe sind, bez. t, t', t'', so ist $t : t' : t'' = \sin\varphi : \sin\varphi' : \sin\varphi''$. Ferner sei $\Delta = \frac{1}{2} p t$, $\Delta' = \frac{1}{2} p' t'$, $\Delta'' = \frac{1}{2} p'' t''$, $D = \Delta + \Delta' + \Delta'' = \frac{1}{2} t t' \sin\varphi'' = \frac{1}{2} t t'' \sin\varphi'$, so ergiebt sich aus 5)

$$\begin{aligned} &4a^2b^2t^2t't'' \sin\varphi' \sin\varphi'' = 16a^2b^2 . D^2 \\ &= -16\Delta^4 - 16\Delta'^4 - 16\Delta''^4 + 32\Delta^2\Delta'^2 + 32\Delta'^2\Delta''^2 + 32\Delta''^2\Delta^2 \\ &= 16D(\Delta + \Delta' - \Delta')(\Delta - \Delta' + \Delta'')(-\Delta + \Delta' + \Delta'') \end{aligned}$$

oder

$$6)\quad ab\pi = \frac{\pi . \sqrt{(\Delta + \Delta' + \Delta'')(\Delta + \Delta' - \Delta'')(\Delta - \Delta' + \Delta'')(-\Delta + \Delta' + \Delta'')}}{D}.$$

Im zweiten Problem setzen wir $\sin\varphi = \frac{1}{2} p' p'' \Delta$, $\sin\varphi' = \frac{1}{2} p'' p \Delta'$, $\sin\varphi'' = \frac{1}{2} p p' \Delta''$, so folgt aus 5)

$$a^2 b^2 \Delta^2 \Delta'^2 \Delta''^2 = -\Delta^4 - \Delta'^4 - \Delta''^4 + 2\Delta^2\Delta'^2 + 2\Delta'^2\Delta''^2 + 2\Delta''^2\Delta^2$$

oder

$$6\text{a)}\quad \frac{ab}{\pi} = \frac{\sqrt{(\Delta+\Delta'+\Delta'')(\Delta+\Delta'-\Delta'')(\Delta-\Delta'+\Delta'')(-\Delta+\Delta'+\Delta'')}}{\pi \Delta \Delta' \Delta''}.$$

Die unter 6) und 6a) stehenden Ausdrücke liefern den Flächeninhalt oder den reciproken Werth des Flächeninhalts bez. einer einem Dreieck mit dem Inhalt $\Delta + \Delta' + \Delta'' = D$ bez. eingeschriebenen und umschriebenen Ellipse durch die Dreiecke, welche durch den Mittelpunkt und die Seiten, bez. die Ecken des vorgegebenen Dreiecks bestimmt sind. Der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck ist genau so gebaut wie die Formel, welche den Inhalt eines Dreiecks aus den drei Seiten bestimmt, und man erkennt hieraus die Beziehung zu den am Eingange berührten Dreiecksproblemen. Dieser Flächeninhalt wird demnach ein Maximum, bez. Minimum, wenn $\Delta = \Delta' = \Delta'' = \frac{1}{3} D$, also der Mittelpunkt der Ellipse der Schwerpunkt des vorgegebenen Dreiecks ist.

Freiburg i. B. Prof. J. Thomae.

XI. Ueber Fusspunktscurven.

Die gewöhnliche Methode, zu einer gegebenen Curve die Fusspunktscurve von einem gegebenen Punkte (a, b) aus, d. h. den geometrischen Ort der Fusspunkte der von einem gegebenen Punkte auf die Tangenten einer gegebenen Curve gefällten Lothe zu bestimmen, ist die folgende.

Ist (ξ, η) ein beliebiger Punkt der gegebenen Curve $f(x, y) = 0$, so erhält man die Fusspunktscurve durch Elimination von ξ und η aus den drei Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} (x-\xi)\frac{\partial f}{\partial \xi} + (y-\eta)\frac{\partial f}{\partial \eta} &= 0, \\ (x-a)\frac{\partial f}{\partial \eta} - (y-b)\frac{\partial f}{\partial \xi} &= 0 \\ f(\xi, \eta) &= 0, \end{aligned}\right.$$

wo die erste Gleichung eine beliebige Tangente der gegebenen Curve, die zweite das vom Punkte (a, b) auf sie gefällte Loth darstellt.

Legt man aber die Gleichung der gegebenen Curve in Liniencoordinaten zu Grunde, so erhält man ganz allgemein die Gleichung der Fusspunktscurve, in Punktcoordinaten ausgedrückt, durch eine einfache Substitution, welche zugleich zeigt, von welchem Grade die Fusspunktscurve werden muss.

Ist nämlich

1) $$\varphi(u, v) = 0$$

die Gleichung der gegebenen Curve in Liniencoordinaten und sind (u, v) die Coordinaten einer beliebigen Tangente der Curve, (x, y) die Coordinaten des Fusspunktes des vom Punkte (a, b) auf diese Tangente gefällten Lothes, so hat man

2) $$ux + vy + 1 = 0,$$

3) $$u(y-b) - v(x-a) = 0,$$

und durch Elimination von u und v aus diesen drei Gleichungen erhält man die Gleichung der Fusspunktscurve in Punktcoordinaten.

Nun geben die Gleichungen 2) und 3)

4) $$u = -\frac{x-a}{x(x-a)+y(y-b)},$$

5) $$v = -\frac{y-b}{x(x-a)+y(y-b)},$$

und die Substitution dieser Werthe in Gleichung 1) giebt allgemein die Fusspunktscurve einer gegebenen Curve.

Da der gemeinschaftliche Nenner in 4) und 5) vom zweiten Grade in x und y ist, so giebt diese Substitution nach Durchmultiplication mit dem Nenner im Allgemeinen eine Curve vom $2k^{\text{ten}}$ Grade, wenn k der Grad der Curve $\varphi(u, v) = 0$ in Liniencoordinaten, d. h. die Classe der gegebenen Curve ist. Wir haben also den Satz:

Der Grad der Fusspunktscurve einer gegebenen Curve ist im Allgemeinen gleich der doppelten Classenzahl derselben.

Der Grad der Fusspunktscurve reducirt sich, wenn die ursprüngliche Curve parabolische Zweige hat.

Enthält nämlich die Gleichung der Curve $\varphi(u, v) = 0$ kein Absolutglied, d. h. berührt die Curve die unendlich ferne Gerade, so reducirt sich der Grad der Fusspunktscurve auf den $(2k-1)^{\text{ten}}$.

Enthält die Gleichung der Curve $\varphi(u, v) = 0$ weder ein Absolutglied, noch die Glieder ersten Grades, d. h. ist die unendlich ferne Gerade eine Wendetangente der Curve, so reducirt sich der Grad der Fusspunktscurve auf den $(2k-2)^{\text{ten}}$.

Allgemein ist r der Grad der niedersten Glieder in $\varphi(u, v) = 0$, d. h. findet zwischen der unendlich fernen Geraden und der Curve Berührung r^{ter} Ordnung statt, so reducirt sich der Grad der Fusspunktscurve auf den $(2k-r)^{\text{ten}}$.

Auch einige weitere allgemeine Eigenschaften der Fusspunktscurve lassen sich unmittelbar aus der Art und Weise, wie wir ihre Gleichung gefunden, gewinnen.

Wir können unbeschadet der Allgemeinheit den Punkt (a, b) in den Ursprung des Coordinatensystems verlegen, wenn wir uns nur unter $\varphi(u, v) = 0$ eine beliebige Curve k^{ter} Classe in beliebiger Lage zum Coordinatensystem denken; wir erhalten dann die Fusspunktscurve durch Substitution von

$$u = -\frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

in $\varphi(u, v) = 0$.

Ist nun

$$\varphi(u, v) \equiv (Au^k + Bu^{k-1}v + \ldots + Fv^k) + [\text{Glieder } (k-1)^{\text{ter}} \text{ Dimension in } u \text{ und } v]$$
$$+ \ldots + (Mu^2 + Nuv + Pv^2) + (Qu + Rv) + S = 0,$$

so ist die Fusspunktscurve

$$(-1)^k (Ax^k + Bx^{k-1}y + \ldots + Fy^k) + (-1)^{k-1} [\text{Glieder } (k-1)^{\text{ter}} \text{ Dimension in } x \text{ und } y] \cdot (x^2 + y^2)$$
$$+ \ldots + (Mx^2 + Nxy + Py^2)(x^2+y^2)^{k-2} - (Qx + Ry)(x^2+y^2)^{k-1}$$
$$+ S(x^2+y^2)^k = 0.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich unmittelbar folgende zwei Sätze:

1. Der Ursprung ist ein $k$facher Punkt der Fusspunktscurve, da die niedersten Glieder in der Gleichung derselben von der k^{ten} Dimension sind.
2. Ist S von Null verschieden, d. h. die Fusspunktscurve vom $2k^{\text{ten}}$ Grade, so hat dieselbe keine reellen Asymptoten, ist also ganz im Endlichen enthalten; oder auch: da die Asymptotenrichtungen gegeben sind durch
$$(x^2 + y^2)^k = 0,$$
geht die Curve $k$mal durch die imaginären Kreispunkte.

Ist $S = 0$, d. h. die Fusspunktscurve vom $(2k - 1)^{\text{ten}}$ Grade, so hat dieselbe eine reelle Asymptote, deren Richtung bestimmt ist durch

$$Qx + Ry = 0,$$

und geht ausserdem $(k-1)$-mal durch die imaginären Kreispunkte.

Ist $S = 0$, $Q = 0$ und $R = 0$, d. h. die Fusspunktscurve vom $(2k - 2)^{\text{ten}}$ Grade, so geht dieselbe $(k-2)$-mal durch die imaginären Kreispunkte und hat ausserdem zwei Asymptoten, deren Richtungen bestimmt sind durch

$$Mx^2 + Nxy + Py^2 = 0$$

u. s. f.

Stuttgart, October 1875.

C. Reuschle,
Professor am Polytechnikum.

XII. Ueber die Kriterien der Maxima und Minima bestimmter Integrale.

Herr Zmurko, ein galizischer Mathematiker, hat in der in Graz am 20. September 1875 stattgehabten Sitzung der Section für Mathematik und Astronomie der 48. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte einen Vortrag „Ueber die Unzulänglichkeit der bis jetzt bekannt gewordenen Kriterien des Grössten und Kleinsten bestimmter Integrale und ihre Vervollständigung" gehalten, welcher in Nr. 6 des Tageblattes der obgenannten Versammlung seinem wesentlichen Inhalte nach abgedruckt worden ist.

Die Pointe dieses Vortrags ist eine gewisse Umgestaltung der zweiten Variation eines zur Untersuchung vorgelegten $r$fachen Integrals

$$S=\int_{x'_1}^{x''_1}\int_{x'_2}^{x''_2}\cdots\int_{x'_r}^{x''_r} V\,dx_1\,dx_2\ldots dx_r,$$

in welchem V eine Function der zu bestimmenden Functionen $U_1, U_2, \ldots U_\mu$ von $x_1, x_2, \ldots x_r$ und der bezüglich bis zu den Rangzahlen $n_1, n_2, \ldots n_\mu$ ansteigenden partiellen Differentialquotienten dieser Functionen ist; überdies werden zwischen den genannten Grössen ν Bedingungsgleichungen

$$v_1=0,\ v_2=0, \ldots v_\nu=0$$

als vorgeschrieben angenommen.

Wird, unter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu$ unbestimmte Multiplicatoren verstanden,

$$V+\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_\nu V_\nu = W,$$

$$\int_{x'_1}^{x''_1}\cdots\int_{x'_r}^{x''_r} W\,dx_1\,dx_2\ldots dx_r = \mathfrak{S}$$

gesetzt und werden die Bedingungen, welche nothwendig und hinreichend sind, um die erste Variation $\delta\mathfrak{S}$ zum Verschwinden zu bringen, bereits verwirklicht gedacht, so besteht die erwähnte Umgestaltung der zweiten Variation von $\mathfrak{S}$ darin, dass einerseits der Verfasser allgemein

$$\delta U_m = \frac{\varrho\,\varepsilon}{(n_m)!}\left(\frac{\sin 2n\pi w}{2n\pi}\right)^{n_m}\psi_m$$

setzt, wo ϱ eine unendlich kleine, von $x_1, x_2, \ldots x_r$ unabhängige Grösse, n eine sehr grosse positive ganze Zahl und w den Ausdruck

$$w=\frac{x_1-x'_1}{x''_1-x'_1}+\frac{x_2-x'_2}{x''_2-x'_2}+\ldots+\frac{x_r-x'_r}{x''_r-x'_r}$$

bezeichnen, und sich andererseits auf folgenden merkwürdigen Hilfssatz stützt:

Die Function $\sin 2n\pi w$ als Factor eines unter dem $r$fachen Integrationszeichen stehenden Ausdruckes ist der Null gleich zu achten; dagegen kann unter denselben Umständen ein Factor $\cos 2n\pi w$ durch die Einheit ersetzt werden.

Durch Differentiation des für δU_m angenommenen Ausdruckes 1) findet der Verfasser

$$\delta \frac{\partial^{\alpha+\beta\cdots} U_m}{\partial x_1{}^\alpha \, \partial x_2{}^\beta \cdots}$$
$$= \varrho \, \xi \, \psi_m \left(\frac{\sin 2n\pi w}{2n\pi}\right)^{n_m-\alpha-\beta\cdots} \frac{(\cos 2n\pi w)^{\alpha+\beta\cdots}}{(n_m-\alpha-\beta\ldots)!} \frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots} w}{\partial x_1{}^\alpha \, \partial x_2{}^\alpha \cdots} + \varrho\sigma,$$

wo $\varrho\sigma$ den Inbegriff der mit einer höheren als der $(n_m-\alpha-\beta\ldots)^{\text{ten}}$ Potenz von $\sin 2n\pi w$ behafteten Glieder bezeichnen soll, entnimmt dieser Formel die Ausdrücke für die Variationen der verschiedenen Differentialquotienten von $U_1, U_2, \ldots U_m$, setzt dieselben in $\delta^2\mathfrak{S}$ ein, ersetzt hierauf kraft des obigen Hilfssatzes $\sin 2n\pi w$ in allen Gliedern, wo dieser Factor mit einem positiven Exponenten vorkommt, durch Null, $\cos 2n\pi w$ dagegen durch 1 und behält nach dieser Operation unter dem Integralzeichen eine einfache quadratische Form $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_\mu$ mit von $x_1, x_2, \ldots x_n$ abhängigen Coefficienten übrig, welche unter Zuziehung der ν Bedingungsgleichungen und der angenommenen Beziehung

$$1-\psi_1{}^2-\psi_2{}^2-\ldots-\psi_\mu{}^2=0$$

auf ihr Zeichen geprüft die entscheidenden Kriterien liefert.

Man stutzt unwillkürlich über die grosse Allgemeinheit des oben angeführten Hilfssatzes und es ist in der That sehr leicht zu sehen, dass nicht nur der vom Verfasser gegebene Beweis illusorisch, sondern auch der Satz selbst nicht richtig ist.

Der Beweis wird so geführt, dass das Integral

$$\int_{x'_1}^{x''_1} \cdots \int_{x'_r}^{x''_r} F(x_r, x_{r-1}, \ldots x_1)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_r$$

in folgender Weise in einen Summenausdruck umgewandelt wird. Zunächst wird das Integrationsintervall $x'_r \ldots x''_r$ in n gleiche Theile zerlegt und näherungsweise

$$\int_{x'_r}^{x''_r} F\, dx_r = \frac{x''_r - x'_r}{n} \sum_0^{n-1}{}_h \, F\left(x'_r + \frac{h}{n}(x''_r - x'_r), \ldots x_1\right)$$

gesetzt. Hierauf wird wieder das Intervall $x''_{r-1} - x'_{r-1}$ in n gleiche Elemente getheilt und die Integration in Bezug auf x_{r-1} näherungsweise durch eine Summe ersetzt und so fort für alle Veränderlichen bis zu x_1. Wenn nun F von der Form

$$(\sin 2n\pi w)^p (\cos 2n\pi w)^q \, \theta(x_1, x_2, \ldots x_r)$$

und p, q ganze nicht negative Zahlen sind, so ist in jedem Gliede des erhaltenen Summenausdruckes $2n\pi w$ ein Vielfaches von 2π und daher

$$\sin 2n\pi w = 0, \quad \cos 2n\pi w = 1.$$

Hieraus schliesst nun der Verfasser ohne Weiteres seinen Hilfssatz.

Dieser Beweis wäre im Allgemeinen stichhaltig, wenn das zu integrirende Element von n unabhängig wäre. Da aber ein Element von der Form

$$(\sin 2n\pi w)^p (\cos 2n\pi w)^q \theta(x_1, \ldots x_r)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_r$$

von der Zahl n abhängt, so ist der von dem Verfasser in der dargelegten Weise hergeleitete Summenausdruck durchaus kein Näherungswerth für das Integral und man müsste, um einen solchen zu erhalten, die bezüglichen Intervalle in eine Anzahl von Theilen zerlegen, welche gegen n beträchtlich gross sein müsste; bei der vom Verfasser gewählten Eintheilung kommt der Factor $(\sin 2n\pi w)^p (\cos 2n\pi w)^q$ gar nicht zur Entfaltung seiner Veränderlichkeit.

Dass der Satz selbst nicht richtig ist, beweisen nachfolgende, nach Belieben leicht zu vermehrende Beispiele, in welchen ich mich der Einfachheit wegen auf den Fall eines Doppelintegrals mit constanten Grenzen beschränkt und

$$x'_1 = a, \quad x''_1 = b, \quad x_1 = x,$$
$$x'_2 = g, \quad x''_2 = h, \quad x_2 = y$$

(wo also a, b, g, h constante Zahlen bezeichnen) gesetzt habe; man findet, wie gross auch n angenommen werde:

$$\int_a^b \int_g^h \sin^2 2n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} + \frac{y-g}{h-g}\right) dx\, dy = \tfrac{1}{2}(b-a)(g-h),$$

$$\int_a^b \int_g^h \cos^2 2n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} + \frac{y-g}{h-g}\right) dx\, dy = \tfrac{1}{2}(b-a)(g-h),$$

$$\int_a^b \int_g^h \cos 2n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} + \frac{y-g}{h-g}\right) dx\, dy = 0,$$

$$\int_a^b \int_g^h xy \cos 2n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} + \frac{y-g}{h-g}\right) dx\, dy = -\frac{(b-a)^2 (h-g)^2}{4n^2\pi^2}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Da hiernach die von dem Verfasser mittels des von ihm mit dem Namen Osculationsfactor belegten Factors in $2n\pi w$ bewirkte Umformung der zweiten Variation auf der Anwendung eines falschen Satzes beruht, so können weder diese Umformung, noch auch die daraus abgeleiteten Endkriterien als stichhaltig aufrechterhalten werden.

Krakau, 20. November 1875. MERTENS.

INHALT.

Berichtigung. Auf S. 28 d. 1. Heftes ist statt Dr. J. Kortewey zu lesen D. J. Korteweg.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.