V.

Grundzüge einer allgemeinen axonometrischen Theorie der darstellenden Perspective.

Von

GUIDO HAUCK,

Professor an der Oberrealschule und Hilfslehrer an der Universität zu Tübingen.

(Hierzu Taf. II, Fig. 1—7.)

Definiren wir die Axonometrie allgemein als Methode, welche lehrt, perspectivische Bilder von Objecten, die durch die rechtwinkligen Coordinaten ihrer Punkte gegeben sind, dadurch zu verfertigen, dass die projicirenden Parallelepipeda der einzelnen Objectpunkte abgebildet werden, so müssen wir die Vaterschaft dieser Disciplin Desargues zuerkennen. Seine „*Méthode universelle de mettre en perspective les objets donnés réellement ou en devis etc.*" (*Paris* 1636)* behandelt die Centralperspective in dem genannten Sinne und stellt damit die Grundzüge der axonometrischen Methode fest. Die eigentliche Carrière der Axonometrie knüpft sich jedoch erst an die Namen Weisbach und Pohlke. Erst durch die Einführung der rationalen Verhältnisse der Einheiten der Massstäbe** und die Aufstellung und Verwerthung des Pohlke'schen Satzes*** hat die an und für sich alte Methode die Leichtigkeit und Handlichkeit erlangt, die eben das Charakteristische der modernen Axonometrie ausmacht. Beide Errungenschaften erstrecken sich nun aber blos auf die Parallelperspective. Wir hatten bisher in der Centralper-

---

* Vergl. *Oeuvres de Desargues réunies et analysées par M. Poudra. Paris 1864. T. 1, pag. 55—95.*

** Vergl. Weisbach, Die monodimetrische und anisometrische Projectionsmethode. In den polytechn. Mittheilungen von Volz und Karmarsch. Tübingen 1844. S. 125—140.

*** Vergl. Pohlke, Darstellende Geometrie, I. Abthlg., 3. Aufl. Berlin 1872. S. 112—115 — Ferner: Schwarz, Elementarer Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes der Axonometrie. In Crelle's Journal Bd. 63, S. 309—314.

spective weder ein Analogon für die rationalen Verhältnisse der Massstäbe, noch für den Pohlke'schen Satz. So kam es, dass trotz Desargues' Anregung die moderne Axonometrie die Centralperspective ganz ausserhalb ihres Bereichs liess. — Eine leidige Folge hiervon war, dass sich für die Centralperspective und Parallelperspective zwei von Grund aus verschiedene Behandlungsweisen ausbildeten, welche beide Perspectiven als ihrem Wesen nach heterogen erscheinen lassen, während doch in Wahrheit die eine nur ein Specialfall der andern ist.

In einer im verflossenen Sommersemester an hiesiger Hochschule von mir gehaltenen Vorlesung über Perspective suchte ich die oben angedeuteten Lücken auszufüllen durch Aufstellung einer allgemeinen axonometrischen Theorie und damit gleichzeitig einen einheitlichen Gesichtspunkt zu gewinnen, von dem aus sich das gesammte Gebiet der darstellenden Perspective (incl. Reliefperspective) behandeln lässt. Durch diese Theorie wird vor Allem zwischen der Centralperspective und Parallelperspective die gebührende enge Beziehung hergestellt, insofern sich sämmtliche axonometrischen Grundformeln der Parallelperspective unmittelbar aus denen der Centralperspective als einfache Modificationen ergeben. Durch die Constatirung der Thatsache, dass den bekannten axonometrischen Grundformeln der Parallelperspective auch eine Bedeutung in der Centralperspective zukommt,* gewinnen diese ein neues Interesse. Der Umstand ferner, dass die allgemein übliche Methode der Linearperspective sich aus unserer Theorie gleichsam spielend ergiebt,** lässt auch diese in einem neuen Lichte erscheinen.

Vorliegende Mittheilung ist ein Auszug aus der von mir in nächster Zeit beabsichtigten Publication meiner Vorlesungen. — Die Uebertragung der Theorie auf die Reliefperspective und die projectivische Collineation behalte ich einer spätern Mittheilung vor.

---

§ 1.
Exposition.

Gegeben sei irgend ein räumliches Object durch die auf ein rechtwinkliges Axencoordinatensystem o, xyz *** bezogenen Coordinaten seiner Punkte. Wir stellen uns die Aufgabe, dessen centralperspectivisches Bild zu construiren, wenn die relative Lage von Bildebene und Auge gegen das Object gegeben ist. Wir lösen diese Aufgabe dadurch, dass wir zunächst das Bild der drei Coordinatenaxen und dann für jeden einzelnen Objectpunkt das Bild seines projicirenden Parallelepipedons construiren.

---

* Vergl. z. B. Gleichungen 39) und 56).

** Vergl. S. 96, Zeile 19 flgg.

*** Mit Rücksicht auf Objecte aus der Natur denken wir uns die z-Axe vertical.

Das Bild der drei Coordinatenaxen sei der Dreistrahl ω, $\xi\eta\zeta$. (Fig. 1.) Derselbe ist bestimmt durch die drei Winkel $\xi\omega\eta$, $\eta\omega\zeta$, $\zeta\omega\xi$, die wir die scheinbaren Axenwinkel nennen und mit w_{12}, w_{23}, w_{31} bezeichnen.

Wir denken uns ferner die x-Coordinaten der einzelnen Punkte des Objects auf der x-Axe aufgetragen, sie seien $oX=x$, $oX'=x'$, $oX''=x''$ u. s. f. Die Bilder der Punkte X, X', ... seien Ξ, Ξ', ... Wir bezeichnen die Abscissen dieser Punkte $\omega\Xi$, $\omega\Xi'$, ... durch ξ, ξ', .. und nennen diese Grössen die reducirten x-Coordinaten.

Es bilden nun die Punkte X und Ξ zwei projectivische Punktreihen. Jedem Punkte der einen Reihe entspricht ein und nur ein Punkt der andern Reihe. Der analytische Ausdruck hierfür ist eine zwischen den Abscissen x und ξ zweier entsprechenden Punkte X und Ξ bestehende Gleichung, die sowohl nach x als nach ξ linear ist und deren Absolutglied $=0$ ist, weil für $x=0$ auch $\xi=0$ wird. Diese Gleichung sei

1) $$x\xi - f_1 x - g_1 \xi = 0.$$

Dann folgt aus ihr für ξ der Ausdruck

$$\xi = \frac{f_1 x}{x - g_1}.$$

Die geometrische Bedeutung der beiden Grössen f_1 und g_1 ergiebt sich leicht. Für $x=g_1$ wird $\xi=\infty$. Also ist g_1 die Abscisse desjenigen Punktes G_1 der Punktreihe X, welcher dem unendlich entfernten Punkte der Reihe Ξ entspricht. Andererseits zeigt die nach x aufgelöste Gleichung, dass f_1 die Abscisse desjenigen Punktes F_1 der Punktreihe Ξ ist, welcher dem unendlich entfernten Punkte der Reihe X entspricht. Wir nennen F_1 den Fluchtpunkt der ξ-Axe, G_1 den Gegenpunkt der x-Axe.*

Gleiches gilt für die zwei anderen Axen. Bezeichnen wir also die Fluchtpunkte der drei Axen mit F_1, F_2, F_3, und deren Abscissen mit f_1, f_2, f_3, ferner die drei Gegenpunkte mit G_1, G_2, G_3, und deren Abscissen mit g_1, g_2, g_3, so haben wir für die reducirten Coordinaten folgende Ausdrücke:

I. 2) $$\xi = \frac{f_1 x}{x - g_1}, \quad \eta = \frac{f_2 y}{y - g_2}, \quad \zeta = \frac{f_3 z}{z - g_3}.$$

Wir nennen die drei Grössen f_i die drei Fluchtstrecken, die drei Grössen g_i die drei Gegenstrecken. Fluchtstrecken und Gegenstrecken fassen wir zusammen unter dem gemeinsamen Namen: die sechs Reductionsconstanten.

* Gewöhnlich gebraucht man für die Punkte F und G eine und dieselbe Benennung. Die Einführung verschiedener Namen in der darstellenden Perspective erscheint gerechtfertigt als mit der Unterscheidung zwischen Originalfigur und Bildfigur correspondirend. Wir werden ebenso in der Reliefperspective unterscheiden zwischen „Fluchtebene" und „Gegenebene".

Vergegenwärtigen wir uns, dass die Bilder aller mit einer der drei Coordinatenaxen parallelen Geraden sich in dem zugehörigen Fluchtpunkte schneiden müssen, dass ferner die Verbindungslinien der drei Fluchtpunkte die Fluchtlinien der drei Coordinatenebenen sind, dass folglich z. B. alle mit der xy-Ebene parallelen Geraden ihre Fluchtpunkte in $F_1 F_2$ haben: so ist es leicht, vorausgesetzt, dass die sechs Reductionsconstanten bekannt seien, das Bild des projicirenden Parallelepipedons irgend eines Objectpunktes P und damit das Bild Π dieses Punktes aufzutragen. Es ist jedoch einleuchtend, dass es nicht nothwendig ist, das vollständige Bild des Parallelepipedons zu zeichnen, um Punkt Π zu erhalten. Es genügt die Zeichnung des in der xy-Ebene liegenden Rechtecks $XoYp$ und des Diagonalrechtecks $ZopP$. Man hat folgende Construction (Fig. 1):

Man trägt zuerst auf den scheinbaren Axen $\omega\xi$, $\omega\eta$, $\omega\zeta$ die Strecken $\omega F_1 = f_1$, $\omega F_2 = f_2$, $\omega F_3 = f_3$ ab und zieht $F_1 F_2$, bestimmt sodann die reducirten Coordinaten ξ, η, ζ des Punktes P nach den Gleichungen I und trägt dieselben auf den scheinbaren Axen in $\omega\Xi$, ωH, ωZ auf. Zieht man hierauf ΞF_2 und HF_1, die sich in π schneiden, so ist $\Xi\omega H\pi$ das Bild des Rechtecks $XoYp$. Man zieht nun $\omega\pi$, welche $F_1 F_2$ in D schneidet, dann ist D der Fluchtpunkt von $\omega\pi$. Zieht man daher schliesslich ZD und πF_3, die sich in Π schneiden, so ist $Z\omega\pi\Pi$ das Bild des Rechtecks $ZopP$, also Π das Bild des Punktes P.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass zur Erledigung der an die Spitze dieses Paragraphen gestellten Aufgabe blos erforderlich ist die Ermittelung der drei scheinbaren Axenwinkel und der sechs Reductionsconstanten. Wir fassen daher diese neun Grössen zusammen unter dem Namen: die neun axonometrischen Grundconstanten. — Die sechs Grössen, durch welche die Lage von Bildebene und Auge gegen das Object bestimmt ist, nennen wir die sechs Orientirungsconstanten. Unsere Aufgabe kommt hiernach darauf hinaus, die neun axonometrischen Grundconstanten auszudrücken als Functionen der sechs Orientirungsconstanten.

§ 2.

Berechnung der Grundconstanten.

Die Lage des Auges A gegen das Object sei gegeben durch seine auf das Object-Coordinatensystem bezogenen Coordinaten a_1, a_2, a_3. Die Bildebene schneide die drei Coordinatenaxen in den Punkten M_1, M_2, M_3, ihre Lage gegen das Object sei gegeben durch die drei Axenabschnitte $oM_1 = m_1$, $oM_2 = m_2$, $oM_3 = m_3$. — a_1, a_2, a_3, m_1, m_2, m_3 sind also unsere sechs Orientirungsconstanten.

Der „Centralstrahl“ AO schneide die Bildebene in ω. Dann ist ω das Bild des Coordinatenursprungs; ωM_1, ωM_2, ωM_3 sind die Bilder der drei Coordinatenaxen. Wir bezeichnen die drei Strecken ωM_i mit μ_i, ferner Ao mit r, $A\omega$ mit ϱ. — Legt man durch A eine Ebene parallel zur Bildebene, so schneidet diese die drei Axen in den drei Gegenpunkten G_1, G_2, G_3.

Die Gleichung dieser Parallelebene ist

$$3)\qquad \frac{x}{m_1}+\frac{y}{m_2}+\frac{z}{m_3}=\frac{a_1}{m_1}+\frac{a_2}{m_2}+\frac{a_3}{m_3}.$$

Führt man der Kürze halber die Bezeichnung ein

$$4)\qquad \varkappa=\frac{a_1}{m_1}+\frac{a_2}{m_2}+\frac{a_3}{m_3},$$

so erhält man aus Gleichung 3) für die drei Gegenstrecken die Werthe

$$5)\qquad g_i=\varkappa m_i.$$

Als geometrische Bedeutung der Hilfsgrösse $\varkappa$ folgt hieraus

$$6)\qquad \varkappa_i=\frac{g_i}{m_i}=\frac{r}{r-\varrho}.$$

Nach dieser Bemerkung haben die Coordinaten des Punktes ω die Werthe $\frac{a_1}{\varkappa}$, $\frac{a_2}{\varkappa}$, $\frac{a_3}{\varkappa}$, und daher erhält man für die Strecken ωM_i die Ausdrücke

$$7)\qquad \mu_i^2=\left(m_i-\frac{a_i}{\varkappa}\right)^2+\frac{a_k^2}{\varkappa^2}+\frac{a_l^2}{\varkappa^2}$$

oder, wenn man der Kürze halber die Bezeichnung einführt:

$$8)\qquad r^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2,$$

$$9)\qquad \mu_i^2=m_i^2-2\frac{m_i a_i}{\varkappa}+\frac{r^2}{\varkappa^2}.$$

Diese Werthe setzen uns nunmehr in den Stand, die drei Fluchtstrecken zu berechnen. Da nämlich z. B. Punkt M_1 den zwei Punktreihen X und Ξ entsprechend gemein ist, so hat man vermöge Gleichung I:

$$10)\qquad \mu_i=\frac{f_i m_i}{m_i-g_i}=\frac{f_i m_i}{m_i-\varkappa m_i},$$

woraus

$$11)\qquad f_i=(1-\varkappa)\mu_i.$$

Schliesslich ergeben sich die Werthe für die drei scheinbaren Axenwinkel aus den drei Dreiecken $M_i\omega M_k$:

$$12)\qquad \cos w_{ik}=\frac{\mu_i^2+\mu_k^2-m_i^2-m_k^2}{2\mu_i\mu_k}.$$

Für gewisse Zwecke* ist es vortheilhafter, statt der Grössen a_i und m_i andere Orientirungsconstanten zu benützen. Wir bezeichnen die Richtungswinkel des Centralstrahls (d. s. die Winkel, die der Centralstrahl mit den drei Coordinatenaxen macht) mit σ_1, σ_2, σ_3 und nehmen die vier Grössen r, σ_1, σ_2, σ_3 als Bestimmungsgrössen für die Lage des Auges. Wir bezeichnen ferner den Abstand der Bildebene vom Coordinatenursprung mit ε, die Richtungswinkel von ε mit τ_1, τ_2, τ_3, und nehmen die vier Grössen ε, τ_1, τ_2, τ_3 als Bestimmungsgrössen für die Lage der Bildebene. — Um die Grundconstanten auszudrücken in diesen neuen Orientirungsconstanten, wenden wir auf die obigen Gleichungen die Transformationsformeln

$$13)\qquad a_i = r\cos\sigma_i\,,$$

$$14)\qquad m_i = \frac{\varepsilon}{\cos\tau_i}$$

an und führen die Hilfsgrössen $\cos\varphi = \frac{\varepsilon}{r}\varkappa$ und $\nu_i = \frac{\mu_i}{\varepsilon}$ ein. Dabei bedeutet der Hilfswinkel φ den von ε und r eingeschlossenen Winkel. Man erhält auf diese Weise die Gleichungen in der rechten Columne der folgenden Zusammenstellung:

$$\text{II.}\quad \varkappa = \frac{a_1}{m_1} + \frac{a_2}{m_2} + \frac{a_3}{m_3}\,, \qquad \text{II}'.\quad \cos\varphi = \cos\sigma_1\cos\tau_1 + \cos\sigma_2\cos\tau_2 + \cos\sigma_3\cos\tau_3\,,$$

$$\text{III.}\quad \mu_i^2 = m_i^2 - 2\frac{m_i a_i}{\varkappa} + \frac{r^2}{\varkappa^2}\,, \qquad \text{III}'.\quad \nu_i^2 = \frac{1}{\cos^2\tau_i} - 2\frac{\cos\sigma_i}{\cos\tau_i\cos\varphi} + \frac{1}{\cos^2\varphi}\,,$$

$$\text{IV.}\quad g_i = \varkappa m_i\,, \qquad \text{IV}'.\quad g_i = r\frac{\cos\varphi}{\cos\tau_i}\,,$$

$$\text{V.}\quad f_i = (1-\varkappa)\mu_i\,, \qquad \text{V}'.\quad f_i = (\varepsilon - r\cos\varphi)\nu_i\,,$$

$$\text{VI.}\quad \cos w_{ik} = \frac{\mu_i^2 + \mu_k^2 - m_i^2 - m_k^2}{2\mu_i\mu_k}\,, \qquad \text{VI}'.\quad \cos w_{ik} = -\frac{\nu_i^2 + \nu_k^2 - \frac{1}{\cos^2\tau_i} - \frac{1}{\cos^2\tau_k}}{2\nu_i\nu_k}.$$

§ 3.

Praktisches Verfahren. Reductionsmassstäbe.

Gleichung V liefert für die drei Fluchtstrecken nur die absoluten Werthe. Bezüglich der Vorzeichen, d. h. der Richtungen, in welchen diese absoluten Werthe auf den scheinbaren Axen vom Punkte ω aus abzutragen sind, lässt sich leicht folgender Satz beweisen:

Liegen Coordinatenursprung und Bildebene auf einer und derselben Seite des Auges, so haben für jede der drei Coordinatenaxen die

---

* Vor Allem für den Fall, dass die Bildebene durch den Coordinatenursprung geht oder dass das Auge ins Unendliche fällt.

Abscissen von Fluchtpunkt und Gegenpunkt entgegengesetzte Vorzeichen. Liegt das Auge zwischen Coordinatenursprung und Bildebene, so haben sie gleiche Vorzeichen.

Im ersten Falle nennen wir das resultirende Bild ein directes, im letztern Falle ein inverses.*

Nach diesem Satze bestimmen sich die Vorzeichen der drei Grössen f_i aus denen der drei Grössen g_i. Für diese liefert Gleichung IV Zahlenwerth sammt Vorzeichen, und zwar lässt sich bezüglich letzterer vermöge Gleichung 6) folgender Satz aussprechen:

Die Abscissen der Gegenpunkte haben mit den entsprechenden Axenabschnitten gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen, je nachdem die Bildebene zwischen Auge und Coordinatenursprung oder hinter dem Coordinatenursprung liegt.

Bei der folgenden Darlegung des praktischen Verfahrens nehmen wir an, die Bildebene liege zwischen Auge und Coordinatenursprung, sie gehe im äussersten Falle durch den Coordinatenursprung; es sei also

$$15) \qquad r \geqq \varrho > 0.$$

Ferner nehmen wir an, das Auge liege in dem von den positiven Aesten der drei Coordinatenaxen gebildeten Octanten, das Object liege dagegen in dem Octanten $-x$, $-y$, $+z$.** Die Bildebene wählen wir so, dass m_1, m_2, m_3 positiv sind oder dass sie parallel mit einer dieser Annahme entsprechenden Ebene durch den Ursprung gehe. Bei Zugrundelegung dieser Annahmen sind g_1, g_2, g_3 positiv, f_1, f_2, f_3 negativ.

Nachdem die Grundconstanten aus den Gleichungen II—VI berechnet sind, ferner das scheinbare Axensystem vermittelst der Winkel w_{12}, w_{23}, w_{31} gezeichnet ist (Fig. 2) und auf den negativen Aesten der scheinbaren Axen die Strecken $\omega F_1 = f_1$, $\omega F_2 = f_2$, $\omega F_3 = f_3$ abgetragen sind, handelt es sich des Weitern darum, die reducirten Coordinaten ξ, η, ζ jedes einzelnen Objectpunktes zu bestimmen. Hierzu können die Gleichungen I benützt werden; ein graphisches Reductionsverfahren ist jedoch vorzuziehen.

Ein solches ergiebt sich aus dem bekannten Satze, dass zwei projectivische Punktreihen jederzeit, und zwar auf unendlich verschiedene Weise, in perspectivische Lage gebracht werden können; man hat sie nur so zu legen, dass irgend ein Paar entsprechender Punkte zusam-

---

* Die inversen Bilder bieten ein nicht geringeres Interesse als die directen, insofern sie identisch sind mit den von einer Sammellinse entworfenen reellen Bildern. (Auge im optischen Mittelpunkt der Linse.)

** Diese Annahme hat den Zweck, die Lage des Objects hinter der Bildebene zu ermöglichen, auch für den Fall, dass letztere durch den Coordinatenursprung geht. Eine gegebenen Falls nothwendige Transformation auf diesen Octanten bietet keine Schwierigkeit.

menfällt; das Projectionscentrum ergiebt sich alsdann als Schnitt der Verbindungslinien irgend zweier Punkte der einen Punktreihe mit den homologen Punkten der andern. Wir legen nun die zwei projectivischen Punktreihen X und Ξ so, dass die Punkte o und ω zusammenfallen, und benützen zur Bestimmung des Projectionscentrums einerseits den unendlich fernen Punkt der Reihe X und dessen homologen Punkt F_1 der Reihe Ξ, andererseits den unendlich fernen Punkt der Reihe Ξ und dessen homologen Punkt G_1 der Reihe X. — Es ergiebt sich hiernach folgendes praktische Reductionsverfahren:*

Ziehe durch einen Punkt o (Fig. 3) unter beliebigem Winkel zwei unbegrenzte Gerade $x'x$ und $\xi'\xi$, ox und $o\xi$ seien ihre positiven Aeste. Schneide auf $o\xi'$ eine Strecke $oF_1 = f_1$ ab, ziehe durch F_1 eine Parallele mit ox und mache auf ihr $F_1C_1 = g_1$. Um nun vermittelst dieses Apparates irgend ein x zu reduciren, mache auf $x'x$ eine Strecke $oX = x$, ziehe C_1X, welche $\xi'\xi$ in Ξ schneidet, so ist $o\Xi = \xi$.

Für die y- und z-Axe gilt genau dasselbe Verfahren. Es möge blos daran erinnert werden, dass nach der zu Grunde gelegten Annahme die x und y negativ, folglich auf den negativen Zweigen ox' und oy' aufzutragen sind, dass dagegen die z als positiv auf dem positiven Zweige oz aufzutragen sind.

Reductionsmassstäbe, von welchen die ξ, η, ζ direct abgenommen werden können, falls die x, y, z in Masszahlen gegeben sind, erhält man, wenn man auf $x'x$, $y'y$, $z'z$ von o aus den Originalmassstab aufträgt, von C_i aus durch die einzelnen Theilpunkte Strahlen zieht und deren Schnittpunkte mit $\xi'\xi$, $\eta'\eta$, $\zeta'\zeta$ markirt.

Es kann übrigens (Fig. 4) der Reductionsapparat auch der Hauptfigur selbst einverleibt werden. Um z. B. die x und y zu reduciren, ziehe man durch ω eine Parallele mit F_1F_2, trage auf ihr von ω aus nach beiden Seiten den Originalmassstab auf, mache auf F_1F_2 die Strecke $F_1C_1 = g_1$ und $F_2C_2 = g_2$, und ziehe von C_1 und C_2 Strahlen nach den einzelnen Theilpunkten des Originalmassstabes. Wir nennen bei diesem Verfahren die Punkte C_1 und C_2 die Theilungspunkte der ξ- und η-Axe.

Will man jedoch die Operation des Reducirens auf einem Nebenblatte ausführen, so gewährt eine Modification des Verfahrens bedeutende Vortheile. Man kann nämlich für alle drei Massstäbe einen und denselben Strahlenbüschel benützen und damit die drei Reductionsfiguren in eine einzige verschmelzen: Trägt man auf einer geraden Linie $L'L$ (Fig. 5) von einem Punkte o aus nach beiden Seiten den Originalmassstab auf, so kann die so entstehende Punktreihe jede von den drei Reihen X, Y, Z repräsentiren. Verbindet man jeden Theilpunkt mit einem ausserhalb

---

* Dasselbe kann übrigens auch aus den Reductionsformeln I abgeleitet werden.

$L'L$ beliebig gewählten Punkte C, so ist der so entstehende Strahlenbüschel perspectivisch zu der Punktreihe $L'L$ und daher projectivisch zu den drei Punktreihen Ξ, H, Z. Von diesen drei Punktreihen kann daher nach bekanntem Satze jede in perspectivische Lage zu dem Strahlenbüschel C gebracht werden, man hat sie nur so zu legen, dass drei ihrer Punkte in die ihnen entsprechenden Strahlen des Strahlenbüschels fallen. Als diese drei Punkte wählt man den Nullpunkt, den Fluchtpunkt und den unendlich fernen Punkt. — Aus dieser Erwägung ergiebt sich folgende Construction:

Auf einer Geraden $L'L$ trage von einem Punkte o aus nach beiden Seiten den Originalmassstab auf. Errichte auf $L'L$ in o eine Senkrechte und verbinde einen beliebigen Punkt C derselben mit sämmtlichen Theilpunkten der $L'L$. Schneide auf $L'L$ von o aus die Strecken $oG_1 = g_1$, $oG_2 = g_2$, $oG_3 = g_3$ ab, ziehe CG_1, CG_2, CG_3, schneide auf ihnen die Strecken $CU_1 = f_1$, $CU_2 = f_2$, $CU_3 = f_3$ ab, ziehe durch die drei Punkte U_1, U_2, U_3 Parallelen mit LL', welche die Co schneiden in ω_1, ω_2, ω_3, ziehe durch ω_1, ω_2, ω_3 Parallelen mit CG_1, CG_2, CG_3: so schneiden diese den Strahlenbüschel nach den drei Reductionsmassstäben Ξ, H, Z.

Der Vortheil dieser letztern Construction beruht hauptsächlich darin, dass man ein und dasselbe Netz zur Herstellung der Massstäbe für eine ganze Reihe von axonometrischen Grundconstanten-Systemen verwenden kann. (Ein solches Netz kann auch umgekehrt benützt werden, um aus dem Bilde die natürlichen Masse zu entnehmen.)

Kehren wir nunmehr zur Hauptconstruction (Fig. 2) zurück! Nachdem das scheinbare Axensystem construirt und sämmtliche Coordinaten reducirt sind, oder — um bildlich zu reden — nachdem das Baugerüste errichtet und die einzelnen Bausteine zugehauen sind, handelt es sich blos noch darum, dieselben zum Bau zusammenzufügen, — eine Operation, die in § 1 bereits besprochen wurde.

Sollten die Grenzen des Zeichnungsblattes der Construction Schwierigkeiten bereiten, so kann man sich dadurch helfen, dass man mit den in einem bestimmten Verhältnisse verjüngten Fluchtstrecken und reducirten Coordinaten die Construction am scheinbaren Axensystem ausführt; ist alsdann Π' das hierdurch gewonnene Bild von P, so verlängert man schliesslich $\omega\Pi'$ im richtigen Verhältniss nach Π. Selbstverständlich wird man in solchen Fällen auch die Reductionsmassstäbe in verjüngtem Massstabe zeichnen, um die verjüngten reducirten Coordinaten direct zu erhalten.*

* Den Ausführungen am Schlusse des § 5 zufolge wird dieses Verfahren häufig praktisch werden.

Soll das Bild einer durch ihre Gleichungen $\varphi(xyz) = 0$ und $\psi(xyz) = 0$ gegebenen Curve construirt werden, so construirt man die Bilder einzelner Punkte der Curve, indem man jedesmal eine Coordinate beliebig wählt und die zugehörigen zwei anderen aus den obigen zwei Gleichungen bestimmt. — Ist eine Fläche $F(xyz) = 0$ abzubilden, so construirt man das Bild der Berührungscurve des vom Auge an die Fläche gelegten Berührungskegels, welche bestimmt ist durch die zwei Gleichungen

$$F(xyz) = 0,$$

$$(x - a_1)\frac{\partial F}{\partial x} + (y - a_2)\frac{\partial F}{\partial y} + (z - a_3)\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

§ 4.

Elimination der Orientirungsconstanten.

Unsere neun Grundconstanten sind Functionen der sechs von einander unabhängigen Orientirungsconstanten. Diese Functionen sind in den Gleichungen IV—VI ausgedrückt. Eliminirt man nun aus diesen neun Gleichungen die sechs Orientirungsconstanten, so bleiben noch drei Beziehungen zwischen den neun Grundconstanten übrig. Eine derselben ist sofort ersichtlich, nämlich

VII. 16) $$w_{12} + w_{23} + w_{31} = 360^0.$$

Die zwei anderen ergeben sich aus den in VI enthaltenen drei Gleichungen, wenn man in dieselben die aus IV und V folgenden Werthe

17) $$m_i = \frac{g_i}{\varkappa} \text{ und } \mu_i = \frac{f_i}{1 - \varkappa}$$

einsetzt. Führt man die Bezeichnung ein:

18) $$\lambda = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = \frac{\varrho}{r},$$

so erhält man zunächst:

19) $$\cos w_{ik} = \frac{f_i^2 + f_k^2 - \lambda^2 (g_i^2 + g_k^2)}{2 f_i f_k}$$

oder

VIII. 20) $$\lambda^2 (g_i^2 + g_k^2) = f_i^2 + f_k^2 - 2 f_i f_k \cos w_{ik},$$

woraus schliesslich durch Elimination von λ^2 die gesuchten zwei Beziehungen folgen. Wir behalten jedoch die zweckmässigere Form VIII bei.

Diese Beziehungen lassen sich unmittelbar geometrisch deuten. Bezeichnen wir nämlich die Seiten des Gegenpunktendreiecks $G_1 G_2 G_3$ mit $\mathfrak{g}_{12}\ \mathfrak{g}_{23}\ \mathfrak{g}_{31}$ und die Seiten des Fluchtpunktendreiecks $F_1 F_2 F_3$ mit $\mathfrak{f}_{12}\ \mathfrak{f}_{23}\ \mathfrak{f}_{31}$, so ist:

21) $$\mathfrak{g}_{ik}^2 = g_i^2 + g_k^2,$$

22) $$\mathfrak{f}_{ik}^2 = f_i^2 + f_k^2 - 2 f_i f_k \cos w_{ik}.$$

Die in VIII enthaltenen drei Gleichungen sprechen also den Satz aus:

Gegenpunktendreieck und Fluchtpunktendreieck sind ähnlich.

Aus der geometrischen Bedeutung von λ (vergl. Gleichung 18) folgt ferner:

Das Fluchtpunktendreieck ist kleiner als das Gegenpunktendreieck, oder ihm congruent, oder grösser als dasselbe, je nachdem die Bildebene vor dem Coordinatenursprung liegt, oder durch denselben geht, oder hinter demselben liegt.

Unser Satz ergiebt sich übrigens auch direct aus der geometrischen Erwägung, dass drei durch das Auge mit den drei Coordinatenaxen gezogene Parallelen die Bildebene in den drei Fluchtpunkten F_1, F_2, F_3 schneiden, dass also die zwei Tetraeder $AF_1F_2F_3$ und $oM_1M_2M_3$ parallele Seitenflächen haben und folglich ähnlich sind. Ebenso sind die zwei Tetraeder $oG_1G_2G_3$ und $oM_1M_2M_3$ ähnlich. Hieraus folgt: Fluchtpunktendreieck und Gegenpunktendreieck sind beide dem Spurendreieck ähnlich.

Aus der Aehnlichkeit des Fluchtpunktendreiecks mit dem Spurendreieck folgt weiter der Satz:

Die Winkel des Fluchtpunktendreiecks sind sämmtlich spitz. Erreicht ein Winkel den Grenzwerth 90^0, so wird auch noch ein zweiter Winkel $= 90^0$, die dritte Ecke fällt ins Unendliche.

Ist nun die Aufgabe, überhaupt ein perspectivisch richtiges Bild eines gegebenen Objects zu fertigen, ohne dass die Lage von Bildebene und Auge ausdrücklich festgesetzt ist, so können die Werthe der neun Grundconstanten beliebig gewählt werden, doch so, dass sie die Gleichungen VII und VIII befriedigen.

Aus unserm obigen Satze ergiebt sich unmittelbar folgende graphische Bestimmung eines Grundconstantensystems:

Wähle die drei Gegenstrecken g_1, g_2, g_3 beliebig, construire aus je zweien derselben als Katheten rechtwinklige Dreiecke und construire aus den drei Hypotenusen $\mathfrak{g}_{12}$, $\mathfrak{g}_{23}$, $\mathfrak{g}_{31}$ als Seiten ein Dreieck $G_1G_2G_3$. Verbinde einen in der Ebene dieses Dreiecks beliebig liegenden Punkt ω mit den Ecken des Dreiecks, nehme die von den drei Verbindungslinien eingeschlossenen Winkel als scheinbare Axenwinkel und irgend drei den drei Verbindungslinien proportionirte Strecken als Fluchtstrecken.

Soll ein Grundconstantensystem mittels Rechnung aufgestellt werden, so wählt man sechs Grundconstanten beliebig und bestimmt die drei übrigen mittels der Gleichungen VII und VIII. Der Willkürlichkeit der Wahl jener sechs Grundconstanten sind jedoch gewisse Schranken gesetzt: die Wahl ist so zu treffen, dass man für die übrigen Grundconstanten und ferner für die Orientirungsconstanten, wenn diese in den sechs willkürlich gewählten Grundconstanten ausgedrückt werden, reelle Werthe erhält.

Ein Blick auf Gleichung VIII zeigt, dass es zweckmässig sein wird, in jedem Falle die drei Grössen f_i willkürlich zu wählen. Es wird sich daher vorzugsweise um folgende zwei Fälle handeln:

1. wir wählen f_1, f_2, f_3, w_{12}, w_{23}, λ willkürlich;
2. wir wählen f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3 willkürlich.

Die erste Annahme bietet keine Schwierigkeiten und führt unmittelbar zu folgendem Satze:

Zieht man (Fig. 6) in einer Ebene von einem Punkte ω aus unter beliebigen Winkeln gegeneinander drei Strecken von beliebiger Länge, jedoch so, dass das von den Endpunkten F_1, F_2, F_3 gebildete Dreieck spitzwinklig ist, so können die drei Strecken immer als das perspectivische Bild eines rechtwinkligen Axensystems und die drei Endpunkte als die Fluchtpunkte der drei Axen angesehen werden.

Die zugehörigen Gegenstrecken ergeben sich entweder durch Rechnung aus der Gleichung

$$23)\qquad \lambda^2 g_i^2 = f_i^2 + f_k f_l \cos w_{kl} - f_l f_i \cos w_{li} + f_i f_k \cos w_{ik}$$

$$24)\qquad = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{f}_{ik}^2 - \mathfrak{f}_{kl}^2 + \mathfrak{f}_{li}^2),$$

oder durch folgende aus dieser Gleichung abgeleitete Construction:

Beschreibe über den drei Seiten des Dreiecks $F_1 F_2 F_3$ nach aussen Halbkreise, welche von den Verlängerungen der drei Höhen $F_1 V_1$, $F_2 V_2$, $F_3 V_3$ des Dreiecks in $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ geschnitten werden. Verbinde diese drei Punkte mit den Ecken des Dreiecks: so sind je zwei von derselben Ecke ausgehende Verbindungslinien gleich. Nehme irgend drei diesen Verbindungslinien proportionirte Strecken als Gegenstrecken.*

Dem zweiten obengenannten Falle widmen wir als dem wichtigeren eine ausführlichere Besprechung.

§ 5.

Willkürliche Wahl der Reductionsconstanten.

Werden f_i und g_i willkürlich gewählt, so giebt uns Gleichung 19) die Werthe von $\cos w_{ik}$ ausgedrückt in f_i und g_i, wenn uns gelingt, λ^2 in f_i und g_i auszudrücken. Dies geschieht dadurch, dass man die Werthe der Cosinusse aus 19) in die aus VII) folgende Gleichung

$$25)\qquad \cos^2 w_{12} + \cos^2 w_{23} + \cos^2 w_{31} - 2 \cos w_{12} \cos w_{23} \cos w_{31} - 1 = 0$$

einsetzt. Man erhält alsdann für λ^2 die Gleichung:

$$\text{IX. } 26)\qquad A\lambda^4 - 2B\lambda^2 + C = 0,$$

wo die Coefficienten A, B, C folgende Werthe haben:

---

* Vergl. zu dieser Construction die Bemerkung S. 95 Z. 4.

$$A=(g_1^2+g_2^2)(g_2^2+g_3^2)(g_3^2+g_1^2),$$
$$B=f_1^2g_1^2(g_2^2+g_3^2)+f_2^2g_2^2(g_3^2+g_1^2)+f_3^2g_3^2(g_1^2+g_2^2),$$
$$C=g_1^2(f_2^2-f_3^2)^2+g_2^2(f_3^2-f_1^2)^2+g_3^2(f_1^2-f_2^2)^2.$$

Die Discriminante dieser Gleichung: $\Delta=B^2-AC$ lässt sich mit Benützung der in Gleichung 21) definirten Bezeichnungen $\mathfrak{g}_{12}$, $\mathfrak{g}_{23}$, $\mathfrak{g}_{31}$ auf folgende Form bringen:

$$27)\quad \Delta=(g_1^2g_2^2+g_2^2g_3^2+g_3^2g_1^2)(f_1\mathfrak{g}_{23}+f_2\mathfrak{g}_{31}+f_3\mathfrak{g}_{12})(f_1\mathfrak{g}_{23}+f_2\mathfrak{g}_{31}-f_3\mathfrak{g}_{12})$$
$$(f_1\mathfrak{g}_{23}-f_2\mathfrak{g}_{31}+f_3\mathfrak{g}_{12})(-f_1\mathfrak{g}_{23}+f_2\mathfrak{g}_{31}+f_3\mathfrak{g}_{12}).$$

Der Willkürlichkeit der Wahl der f_i und g_i sind somit folgende Schranken gesetzt:

$$\text{X. 28)}\qquad f_i\sqrt{g_k^2+g_l^2}+f_k\sqrt{g_l^2+g_i^2}>f_l\sqrt{g_i^2+g_k^2}.$$

Innerhalb dieser Schranken entsprechen aber jedem Werthsystem $f_1f_2f_3$, $g_1g_2g_3$ zwei Werthsysteme $w_{12}w_{23}w_{31}$, die sich aus der Gleichung

$$\text{XI. 29)}\qquad \cos w_{ik}=\frac{f_i^2+f_k^2-\lambda^2(g_i^2+g_k^2)}{2f_if_k}$$

ergeben, wenn in dieselbe die aus Gleichung IX folgenden zwei Werthe von λ^2 eingesetzt werden.

Da ein perspectivisches Bild dem Auge nur dann einen mit dem Original vollkommen übereinstimmenden Eindruck macht, wenn beim Betrachten Auge und Bildebene in die richtige Lage im Raum gebracht werden, so ist es von Wichtigkeit, die Orientirungsconstanten, welche diese Lage bestimmen, ebenfalls auszudrücken als Functionen von f_i und g_i. Man erhält aus den Gleichungen II bis V mit Benützung von 18) folgendes Formelnsystem:

$$\text{XII. 30)}\qquad m_i=(1-\lambda)g_i,$$

$$\text{XIII. 31)}\qquad a_i=\frac{\frac{1}{g_i^2}\left(\frac{f_k^2}{g_k^2}+\frac{f_l^2}{g_l^2}\right)+\left(\frac{1}{g_k^2}+\frac{1}{g_l^2}\right)\left(\lambda^2-\frac{f_i^2}{g_i^2}\right)}{2\lambda^2\frac{1}{g_i}\left(\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}\right)},$$

$$\text{XIV. 32)}\qquad \varepsilon^2=\frac{(1-\lambda)^2}{\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}},$$

$$\text{XV. 33)}\qquad \cos\tau_i=\frac{\frac{1}{g_i}}{\sqrt{\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}}},$$

$$\text{XVI. 34)}\qquad r^2=\frac{\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{f_1^2}{g_1^2}+\frac{f_2^2}{g_2^2}+\frac{f_3^2}{g_3^2}\right)-1}{\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}},$$

$$\text{XVII. 35)}\quad \cos\sigma_i = \frac{\frac{1}{g_i^2}\left(\frac{f_k^2}{g_k^2}+\frac{f_l^2}{g_l^2}\right)+\left(\frac{1}{g_k^2}+\frac{1}{g_l^2}\right)\left(\lambda^2-\frac{f_i^2}{g_i^2}\right)}{2\lambda\frac{1}{g_i}\sqrt{\left(\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}\right)\left(\frac{f_1^2}{g_1^2}+\frac{f_2^2}{g_2^2}+\frac{f_3^2}{g_3^2}-\lambda^2\right)}},$$

$$\text{XVIII. 36)}\quad tg\varphi = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{f_1^2}{g_1^2}+\frac{f_2^2}{g_2^2}+\frac{f_3^2}{g_3^2}\right)-2}.$$

Durch die seither von uns benützten Orientirungsconstanten wird sowohl Auge als Bildebene auf das Objectcoordinatensystem bezogen, wird also die relative Lage des Auges zur Bildebene nur mittelbar bestimmt. Es ist nun aber von besonderer Wichtigkeit, Auge und Bildebene in directe Beziehung zu setzen.

Eine ungefähre, *in praxi* häufig ausreichende Orientirung des Auges kann mittels des Tetraeders $AF_1F_2F_3$ geschehen, dessen Dreikant an der Spitze A ein Octant ist: Man construire in Gedanken über dem Fluchtpunktendreieck als Basis ein solches Tetraeder, bringe sodann die Bildebene in eine solche Lage, dass die Seitenkante AF_3 vertical steht, und bringe das Auge in den Punkt A.

Eine genauere Orientirung ist diejenige mittels Hauptpunkt (Fusspunkt der vom Auge auf die Bildebene gefällten Senkrechten) und Augdistanz (Abstand des Auges von der Bildebene). Bestimmt man die Lage des Hauptpunktes H in der Bildebene durch seine Entfernungen h_1, h_2, h_3 von den drei Fluchtpunkten, beziehungsweise durch die Verhältnisse dieser drei Entfernungen, und bezeichnet die Augdistanz AH mit d, so liefert das rechtwinklige Dreieck AHF_i, dessen Hypotenuse $AF_i = \lambda g_i$ und dessen Winkel $HAF_i = \tau_i$ ist, für h_i und d die Werthe:

$$\text{XIX. 37)}\quad h_i = \lambda g_i \sqrt{\frac{\frac{1}{g_k^2}+\frac{1}{g_l^2}}{\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}}} = \varrho g_i \sqrt{\frac{1}{g_k^2}+\frac{1}{g_l^2}},$$

wo ϱ ein unbestimmter Factor ist,

$$\text{XX. 38)}\quad d^2 = \frac{\lambda^2}{\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}}.$$

Die geometrische Interpretation von XIX liefert den (auch direct einleuchtenden) Satz:

Der Hauptpunkt ist identisch mit dem Schnittpunkte der Höhen des Fluchtpunktendreiecks.

Um die Bildebene in die richtige Lage im Raume zu bringen, bemerke man, dass F_1F_2 parallel M_1M_2, also horizontal ist. Man stelle daher die Bildebene so, dass F_1F_2 horizontal und der Horizontalneigungswinkel der Bildebene $= \tau_3$ ist.

Die fünf Grössen τ_3, h_1, h_2, h_3, d, deren Kenntniss nach dem Vorhergehenden zur Orientirung von Bildebene und Auge ausreichend ist, können sämmtlich auch auf graphischem Wege bestimmt werden. Man vergl. hierzu Fig. 6. In derselben können die drei rechtwinkligen Dreiecke $F_i F_k \mathfrak{A}_l$ als die Umklappungen der drei Seitenflächen des Tetraeders $A F_1 F_2 F_3$ angesehen werden. H ist der Hauptpunkt, $HF_i = h_i$. Construirt man ein rechtwinkliges Dreieck $H V_3 \mathfrak{A}_0$ aus $H V_3$ als Kathete und $V_3 \mathfrak{A}_3$ als Hypotenuse, so ist $H \mathfrak{A}_0$ gleich der Augdistanz und Winkel bei $V_3 = \tau_3$.

Bezüglich einer rationellen Wahl der f_i und g_i mögen schliesslich noch folgende Winke genügen. Ueber den Einfluss ihrer absoluten Grösse bei feststehenden Verhältnissen folgt aus unseren Gleichungen unmittelbar folgender Satz:

In jedem Grundconstantensystem können die Reductionsconstanten nach Belieben proportional vergrössert oder verkleinert werden. Eine solche Vergrösserung oder Verkleinerung geht Hand in Hand mit einer proportionalen Vergrösserung oder Verkleinerung der Augdistanz. Dagegen hat sie keine Einwirkung auf die scheinbaren Axenwinkel, auf den Winkel τ_3 und auf die Verhältnisse von h_1, h_2, h_3.

Bei der Wahl der absoluten Grösse der Reductionsconstanten beachte man, dass die Augdistanz den Minimalwerth von $2{,}5^{\mathrm{dm}}$ (Weite des deutlichen Sehens) nicht überschreiten sollte.

Was sodann den Einfluss der Verhältnisse der f_i und g_i anbelangt, so influiren die Grössen g_i vermöge ihrer Proportionalität mit den Axenabschnitten lediglich auf die Lage der Bildebene. Für die Wahl der Grössen f_i ist sodann die Lage des Auges, die sich in der relativen Lage des Punktes ω zum Hauptpunkte geltend macht, massgebend. Hat man sich also für die Verhältnisszahlen der g_i entschieden, so erfolgt die Wahl der f_i mit Zuratheziehung der Gleichung XIX.

Als Beispiel diene das folgende, nach diesen Regeln aufgestellte Grundconstantensystem:

$$\begin{array}{lll} g_1 = 4^{\mathrm{dm}}, & f_1 = -3^{\mathrm{dm}}, & w_{12} = 130^0\,36{,}5', \\ g_2 = 5^{\mathrm{dm}}, & f_2 = -4^{\mathrm{dm}}, & w_{23} = 111^0\,53{,}5', \\ g_3 = 10^{\mathrm{dm}}, & f_3 = -9^{\mathrm{dm}}, & w_{31} = 117^0\,30', \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \lambda^2 = 0{,}9908, & h_1 = 2{,}654^{\mathrm{dm}}, \\ \tau_3 = 72^0\,39', & h_2 = 3{,}995^{\mathrm{dm}}, \\ d = 2{,}968^{\mathrm{dm}}, & h_3 = 9{,}501^{\mathrm{dm}}. \end{array}$$

§ 6.

Specialfälle.

Es ist leicht, die im Vorangehenden aufgestellten allgemeinen Formeln und Constructionen für die verschiedenen Perspectivarten zu specialisiren. Hierüber mögen folgende Andeutungen genügen.

1. Fällt Punkt ω mit dem Hauptpunkte zusammen (also in den Schnittpunkt der Höhen des Fluchtpunktendreiecks), so haben wir den Specialfall der Orthogonalperspective (Centralstrahl senkrecht zur Bildebene). Zu den in VIII enthaltenen Gleichungen kommen alsdann noch zwei weitere Beziehungen zwischen den sechs Reductionsconstanten hinzu, die sich unmittelbar aus Gleichung XIX mit $f_i^2 = h_i^2$ ergeben. Vermöge dieser Beziehung geht Gleichung XI über in die folgende:

$$39)\quad \cos w_{ik} = -\frac{1}{2\frac{f_i}{g_i}\frac{f_k}{g_k}} \sqrt{\left(-\frac{f_i^2}{g_i^2}+\frac{f_k^2}{g_k^2}+\frac{f_l^2}{g_l^2}\right)\left(\frac{f_i^2}{g_i^2}-\frac{f_k^2}{g_k^2}+\frac{f_l^2}{g_l^2}\right)}.$$

2. Fällt die Ecke F_3 des Fluchtpunktendreiecks ins Unendliche, so werden die Winkel bei F_1 und F_2 je $=90^0$, und wir haben den Specialfall der malerischen Perspective (Bildebene vertical). f_3 und g_3 werden $=\infty$. Setzt man den Grenzwerth von $\frac{f_3}{g_3} = p$, so wird $\lambda = p$. Die Reductionsformel für die z-Coordinaten reducirt sich auf $\zeta = pz$. Die Gleichungen VIII gehen über in die folgenden:

$$40)\quad p^2(g_1^2+g_2^2) = f_1^2+f_2^2-2f_1f_2\cos w_{12},$$

$$41)\quad f_1\cos w_{31} = f_2\cos w_{23}.$$

Diesen Gleichungen zufolge modificirt sich die S. 91 besprochene graphische Bestimmung eines Grundconstantensystems folgendermassen (Fig. 7):

Wähle g_1, g_2, p beliebig. Construire ein rechtwinkliges Dreieck $\mathfrak{A}F_1F_2$ mit den im Verhältniss p verkürzten Strecken g_1 und g_2 als Katheten; F_1F_2 sei die Hypotenuse. Verbinde einen in der Ebene dieses Dreiecks beliebig liegenden Punkt ω mit F_1 und F_2 und ziehe $\omega\zeta$ senkrecht zu F_1F_2. Nehme die von $\omega\zeta$ und den Rückverlängerungen von ωF_1 und ωF_2 eingeschlossenen Winkel als scheinbare Axenwinkel und ωF_1 und ωF_2 als Fluchtstrecken. — Fällt man $\mathfrak{A}H \perp F_1F_2$, so ist H der Hauptpunkt, $\mathfrak{A}H$ die Augdistanz.

Wählt man den Punkt ω auf $\mathfrak{A}H$, so hat man den Specialfall der Escarpperspective* (die durch Centralstrahl und z-Axe gelegte Ebene senkrecht zur Bildebene). Fällt ω in den Punkt $\mathfrak{A}$, so wird die

* Ich habe hier die Namen der einzelnen Perspectivarten von der Parallelperspective herübergenommen und unterscheide dann z. B. „cavalière Centralperspective" und „cavalière Parallelperspective". Für die von mir „Escarpperspective" oder „escarpe Perspective" genannte Perspectivart existirte seither kein mir convenirender Name. — Der Name „Vogelperspective", der sonst wohl in den verschiedensten Bedeutungen gebraucht wird, erscheint mir zur Bezeichnung einer Perspectivart nicht geeignet, insofern er — ebenso wie sein Oppositum „Froschperspective" — der Ausdruck für einen disparaten, innerhalb jeder einzelnen Perspectivart möglichen, Begriff ist. — Leider herrscht bezüglich der Benennungen der einzelnen Perspectivarten eine grosse Uneinigkeit und Verwirrung und erscheint eine Verständigung in diesem Punkte höchst wünschenswerth.

Escarpperspective zur Militärperspective (Horizontalneigung des Centralstrahls $= 45^0$).

Fällt noch ein zweiter Eckpunkt des Fluchtpunktendreiecks, z. B. F_2, ins Unendliche, so haben wir den Specialfall der Cavalierperspective (Bildebene parallel der yz-Ebene). f_2 und g_2 werden $= \infty$ und $\frac{f_2}{g_2} = \frac{f_3}{g_3} = p$. Winkel w_{23} wird $= 90^0$. Die Wahl der übrigen Grundconstanten w_{12}, f_1, g_1, p ist vollkommen willkürlich.

§ 7.

Uebergang zur Parallelperspective.

Wird $r = \infty$, so werden f_i und $g_i = \infty$, ihre Verhältnisse haben jedoch endliche Werthe. Setzt man den Grenzwerth

$$42) \qquad \frac{f_i}{g_i} = p_i,$$

so gehen die Reductionsformeln I über in

$$\text{I}'.\ 43) \qquad \xi = p_1 x, \quad \eta = p_2 y, \quad \zeta = p_3 z$$

und ergeben sich aus den Gleichungen IV′ und V′ für p_i die Werthe:

$$\text{IV}''.\ 44) \qquad p_i = \nu_i \cos \tau_i .$$

Die Gleichungen II′, III′ und VI′ bleiben in Giltigkeit. — Man bemerke, dass ε ganz ausfällt.

Die Constructionen am scheinbaren Axensystem vereinfachen sich wie folgt: Schneide auf der ξ-Axe die Strecke $\omega\Xi = \xi$ ab, ziehe durch Ξ eine Parallele zur η-Axe und schneide auf ihr $\Xi\pi = \eta$ ab, ziehe endlich durch π eine Parallele zur ζ-Axe und mache auf ihr $\pi\Pi = \zeta$.

In dem Massstabnetze (Fig. 5) werden $\omega_i F_i$ sämmtlich parallel LL', ihre Abstände von C werden: $C\omega_i = p_i . Co$.

An Stelle unserer seitherigen Grössen f_i und g_i treten nunmehr in der Parallelperspective deren Verhältnisse $\frac{f_i}{g_i}$ und $\frac{g_i}{g_k}$. Die drei Verhältnisse $\frac{f_i}{g_i} = p_i$ sind die Reductionsconstanten der Parallelperspective. Die drei Verhältnisse $\frac{g_i}{g_k}$ spielen die Rolle von Hilfsgrössen, deren Beibehaltung bei der willkürlichen Wahl der Grundconstanten bedeutende Vortheile mit sich bringt. Um übrigens die Symmetrie unserer Formeln zu wahren, setzen wir

$$45) \qquad \frac{g_i}{g_k} = \frac{\gamma_i}{\gamma_k},$$

wo γ_1, γ_2, γ_3 endliche Grössen sein mögen.

Da nunmehr die neun Grössen p_1, p_2, p_3, $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, $\frac{\gamma_2}{\gamma_3}$, $\frac{\gamma_3}{\gamma_1}$, w_{12}, w_{23}, w_{31} Functionen der vier von einander unabhängigen Variabeln sind, welche die Richtung der Bildebene und der parallelen Sehstrahlen bestimmen, so bestehen fünf Relationen zwischen denselben. Von diesen ergeben sich zwei direct, nämlich die Winkelrelation VII und die Gleichung $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\frac{\gamma_2}{\gamma_3}\frac{\gamma_3}{\gamma_1}=1$. Die drei übrigen ergeben sich aus VIII, wenn man bemerkt, dass für $r=\infty$: $\lambda=1$ wird und wenn man an Stelle von f_i überall $\frac{f_i}{g_i}\,g_i=\frac{f_i}{g_i}\,\gamma_i$ einsetzt.* Man erhält alsdann die drei Gleichungen:

VIII'. 46) $\gamma_i^2+\gamma_k^2=p_i^2\gamma_i^2+p_k^2\gamma_k^2-2\,p_i p_k \gamma_i \gamma_k \cos w_{ik}$.

Wir dürfen nun vier Grundconstanten willkürlich wählen. Statt zwei Grössen p_i willkürlich zu wählen, können wir auch deren Verhältnisse — oder, wenn wir

47) $$p_i=\varrho\pi_i$$

setzen, die drei Grössen π_i beliebig nehmen. Dabei gewährt es bedeutende Vortheile, die π_i als rationale ganze Zahlen zu wählen. — Es sind nun folgende zwei Annahmen von besonderer Wichtigkeit:

1. wir wählen π_1, π_2, π_3, w_{12}, w_{23}, w_{31} (in Uebereinstimmung mit VII) willkürlich;
2. wir wählen π_1, π_2, π_3, γ_1, γ_2, γ_3 willkürlich.

Die erste Annahme ist für die allgemeine Parallelperspective die naturgemässeste und führt zu dem Pohlke'schen Theorem, sie bietet jedoch ungleich mehr Schwierigkeiten, als die zweite. Die zweite Annahme erledigt zwar wegen der Beibehaltung der Hilfsgrössen γ_i die allgemeine Parallelperspective nicht so direct wie die erste, erweist sich aber für die Anwendung auf Specialfälle ungleich fruchtbarer als jene. Sie erfordert nur eine einfache Modification unserer centralperspectivischen Resultate. Dieselbe besteht darin, dass man in den centralperspectivischen Formeln IX—XVIII

48) $$\lambda=1$$

setzt und die Substitution

49) $$f_i=\frac{f_i}{g_i}\,g_i=p_i\gamma_i=\varrho\pi_i\gamma_i$$

anbringt. Bei diesem Verfahren liefert zunächst Gleichung IX für ϱ^2 die Gleichung

IX'. 50) $$\mathfrak{C}\varrho^4-2\mathfrak{B}\varrho^2+\mathfrak{A}=0,$$

wo die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ folgende Werthe haben:

---

* Die Substitution von γ_i an Stelle von g_i ist erlaubt, da die Gleichungen nach g_i homogen sind.

$$\mathfrak{A} = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)(\gamma_2^2 + \gamma_3^2)(\gamma_3^2 + \gamma_1^2),$$
$$\mathfrak{B} = \pi_1^2 \gamma_1^4 (\gamma_2^2 + \gamma_3^2) + \pi_2^2 \gamma_2^4 (\gamma_3^2 + \gamma_1^2) + \pi_3^2 \gamma_3^4 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2),$$
$$\mathfrak{C} = \gamma_1^2 (\pi_2^2 \gamma_2^2 - \pi_3^2 \gamma_3^2)^2 + \gamma_2^2 (\pi_3^2 \gamma_3^2 - \pi_1^2 \gamma_1^2)^2 + \gamma_3^2 (\pi_1^2 \gamma_1^2 - \pi_2^2 \gamma_2^2)^2.$$

Die Untersuchung der Discriminante dieser Gleichung liefert die Bedingung:

$$\text{X}'.\ 51)\quad \pi_i \gamma_i \sqrt{\gamma_k^2 + \gamma_l^2} + \pi_k \gamma_k \sqrt{\gamma_l^2 + \gamma_i^2} > \pi_l \gamma_l \sqrt{\gamma_i^2 + \gamma_k^2}.$$

Des Weitern gehen die Gleichungen XI, XV, XVII, XVIII über in die folgenden:

$$\text{XI}'.\ 52)\quad \cos w_{ik} = \frac{p_i^2 \gamma_i^2 + p_k^2 \gamma_k^2 - (\gamma_i^2 + \gamma_k^2)}{2 p_i p_k \gamma_i \gamma_k} = \frac{\pi_i^2 \gamma_i^2 + \pi_k^2 \gamma_k^2 - \frac{1}{\varrho^2}(\gamma_i^2 + \gamma_k^2)}{2 \pi_i \pi_k \gamma_i \gamma},$$

$$\text{XV}'.\ 53)\quad \cos \tau_i = \frac{\frac{1}{\gamma_i}}{\sqrt{\frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{1}{\gamma_2^2} + \frac{1}{\gamma_3^2}}},$$

$$\text{XVII}'.\ 54)\quad \cos \sigma_i = \frac{\frac{1}{\gamma_i^2}(p_k^2 + p_l^2) + \left(\frac{1}{\gamma_k^2} + \frac{1}{\gamma_l^2}\right)(1 - p_i^2)}{2 \frac{1}{\gamma_i} \sqrt{\left(\frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{1}{\gamma_2^2} + \frac{1}{\gamma_3^2}\right)(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 1)}}$$
$$= \frac{\frac{1}{\gamma_i^2}(\pi_k^2 + \pi_l^2) + \left(\frac{1}{\gamma_k^2} + \frac{1}{\gamma_l^2}\right)\left(\frac{1}{\varrho^2} - \pi_i^2\right)}{2 \frac{1}{\varrho} \frac{1}{\gamma_i} \sqrt{\left(\frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{1}{\gamma_2^2} + \frac{1}{\gamma_3^2}\right)\left(\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2 - \frac{1}{\varrho^2}\right)}},$$

$$\text{XVIII}'.\ 55)\quad tg\,\varphi = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 2} = \sqrt{\varrho^2(\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2) - 2}.^*$$

Modificirt man die allgemeinen centralperspectivischen Formeln für die in § 6 angedeuteten Specialfälle und wendet alsdann auf die modificirten Formeln die Substitutionen 48) und 49) an, so resultiren die bekannten parallelperspectivischen Specialformeln. Z. B. ergeben sich aus 39) unmittelbar die Weisbach'schen Formeln:

$$56)\quad \cos w_{ik} = -\frac{1}{2 \pi_i \pi_k} \sqrt{(-\pi_i^2 + \pi_k^2 + \pi_l^2)(\pi_i^2 - \pi_k^2 + \pi_l^2)}.$$

---

* Gleichung XVIII' wurde schon von Pohlke gegeben. Vergl. Pohlke, Darst. Geom., 2. Aufl., S. 115.