VI.

Ein Fall, in welchem die Differentialgleichung $x(1-x)(1-kx)y'''+(u+vx+wkx^2)y''+(\tau+w'kx)y'+w''ky=0$ integrirt werden kann.

Von

J. Thomae,

Professor an der Universität Freiburg.

Die sieben Constante enthaltende Differentialgleichung

1) $x(1-x)(1-kx)y'''+(u+vx+wkx^2)y''+(\tau+w'kx)y'+w''ky=0$

ist in zwei Fällen integrirt worden, in denen die Constanten nur zwei Bedingungen unterworfen sind. Erstens in dem Falle, in welchem dieselbe den mit allgemeinem Zeiger gebildeten (Liouville'schen Differentialquotienten des Ausdrucks

$$X_{\lambda,\mu,\nu}=x^\lambda(1-x)^\mu(1-kx)^\nu$$

zum Integral hat, der von den Herren Pochhammer und Hossenfelder behandelt ist. Aus dem einfachen Ausdrucke

$$y=\frac{d^\xi x^\lambda(1-x)^\mu(1-kx)^\nu}{dx^\xi}$$

(in dem ξ jedwede auch complexe Zahl bedeuten kann), der in diesem Falle ein Integral der Gleichung 1) bildet, kann man leicht einige Relationen zwischen contiguen Functionen herleiten. Z. B. dadurch, dass man die Identität

$$x^\lambda(1-x)^\mu(1-kx)^\nu-x.x^{\lambda-1}(1-x)^\mu(1-kx)^\nu=0$$

ξmal differenzirt, erhält man die Gleichung

$$\frac{d^\xi X_{\lambda,\mu,\nu}}{dx^\xi}-x\frac{d^\xi X_{\lambda-1,\mu,\nu}}{dx^\xi}-\xi\frac{d^{\xi-1}X_{\lambda,\mu,\nu}}{dx^{\xi-1}}=0.$$

Die Lösungen der Differentialgleichung lassen sich in diesem Falle durch bestimmte Integrale ausdrücken.

Weiter ist die Gleichung 1) in dem Falle integrirt worden, in welchem $k=1$ und $u+v+w=0$ oder $k=\infty$, $v=qk$, $\tau=q'k$ ist. Die

Lösungen lassen sich in diesem Falle durch bestimmte Doppelintegrale ausdrücken. Ich habe in den Leipziger Annalen, Bd. II S. 437, gezeigt, dass in diesem Falle zwischen je vier contiguen Functionen eine lineare homogene Relation mit ganzen Coefficienten (ähnlich wie bei der Gauss'schen Reihe zwischen je drei contiguen Functionen) stattfindet.

Beide Fälle lassen eine Verallgemeinerung zu, ohne dass die Integrabilität geschädigt wird.

Im ersten Falle nämlich sind die Exponenten der Anfangsglieder der drei nach absteigenden Potenzen von x geordneten Reihen, welche particuläre Lösungen und zusammen die vollständige Lösung der Differentialgleichung sind, β, β', $\beta'+1$, worin β und β' willkürlich sind. Wenn aber diese Exponenten β, β', $\beta'+n$ sind, und wenn n eine ganze Zahl bedeutet, und wenn die Reihen keine logarithmischen Terme enthalten, so ist die Differentialgleichung noch integrabel.* Aehnlich ist die Verallgemeinerung, die der zweite Fall zulässt. Im Folgenden wird noch ein Fall der Integrabilität hinzugefügt, nämlich der, in welchem die Gleichung 1) eine Gauss'sche Reihe und natürlich ihre gesammte Fortsetzung als particuläres Integral enthält. Da man alsdann zwei particuläre Lösungen der Gleichung 1) besitzt, so folgt aus allgemeinen Sätzen der Theorie der Differentialgleichungen, dass man die Gleichung 1) vollständig integriren könne, und es kann daher ein besonderer Werth auf die Integration an sich nicht gelegt werden. Allein da sich dieser specielle Fall zum allgemeinen gerade so verhält, wie die specielle Gauss'sche Reihe $F(1, b, c, x)$ zur allgemeinen $F(a, b, c, x)$, und da sich die Eigenschaften der allgemeinen in denen der speciellen fast ungetrübt abspiegeln, so scheint es keine überflüssige Arbeit zu sein, die Integrale der Gleichung 1) für den besprochenen beschränkten Fall zusammenzustellen, was hier im Art. II geschieht. Vielleicht dass einiges Licht aus diesen Formeln auf die Eigenschaften der Integrale der allgemeinen Gleichung 1) fällt.

Wendet man auf die drei erwähnten Fälle der Integrabilität die Methode der Differentiation mit beliebigem Zeiger an, so bleiben die beschränkenden Bedingungen unberührt und es werden daher die Resultate durch diese Methode nicht verallgemeinert.

Einiges über die allgemeine Differentialgleichung 1) und die Bezeichnung ihrer Integrale wird in Art. I vorausgeschickt. Der Untersuchung des Zusammenhanges der Zweige der behandelten Function werde ich eine Fortsetzung dieses Aufsatzes später widmen.

---

* Man gelangt nämlich durch $(-\beta')$-malige Differentiation zu der von mir in dieser Zeitschrift, Bd. XIX S. 273, behandelten Differentialgleichung.

I.

Das Interesse, welches die Differentialgleichung 1) bietet, besteht hauptsächlich darin, dass sie für $\omega''=0$, $y''=\eta$ in die Gleichung

$$2)\quad x(1-x)(1-kx)\eta''+(u+vx+wkx^2)\eta'+(\tau+w'kx)\eta=0$$

übergeht, welche die natürlichste Verallgemeinerung der die Gauss-schen Reihen definirenden Differentialgleichung [die für $k=0$ aus 2) entspringt] ist. Die Integration der letzten Gleichung würde die der Gleichung 1) in unmittelbarem Gefolge haben, wenn man auf das Integral derselben die Methode der Differentiation mit beliebigem Zeiger anwendete.* Allein wir besitzen ebenso wenig Mittel, die Gleichung 2) zu integriren, als deren vorhanden sind, das Integral der Gleichung 1) aufzustellen, und es scheint gerathen, die Untersuchung der Gleichung 1) vor der der Gleichung 2) in die Hand zu nehmen, obgleich jene einfacher scheint, weil eine nicht unwichtige Eigenschaft, die den Integralen von 1) zukommt, denen der speciellen Gleichung 2) abgeht, nämlich die weiter unten durch die Gleichung 3) ausgesprochene Eigenschaft, dass ihre Lösungen zugleich Lösungen einer Recursionsformel sind.

Integrirt man eine Differentialgleichung durch eine nach Potenzen von $x-a$ geordnete Reihe, deren Exponenten um eine Einheit aufsteigen, so soll diese Reihe ein Integral im Punkte a genannt werden; wenn hingegen die Exponenten um eine Einheit abnehmen, so soll die Reihe ein Integral im Punkte ∞ genannt werden, was auch a sein mag.

Die Differentialgleichung 1) besitzt nun drei particuläre Integrale im Punkte Null. Zwei davon sind einändrig und ihre Entwickelung kann mit der 0^{ten} Potenz von x beginnen. Sie sollen mit $Q^{0,0}(x)$, $Q^{0,0'}(x)$ bezeichnet werden, und es darf

$$Q^{0,0}(x)\,Q^{0,0'}(0)-Q^{0,0'}(x)\,Q^{0,0}(0)$$

nicht identisch Null sein, wenn die Integrale voneinander unabhängig sein sollen. Das dritte particuläre Integral beginnt mit der $\alpha=(2-u)^{\text{ten}}$ Potenz von x und soll mit $Q^{0,\alpha}(x)$ bezeichnet werden. Ebenso giebt es je drei particuläre Integrale im Punkte 1 und im Punkte $1:k$. Zwei der ersten sind einändrig und ihre Entwickelung kann mit der 0^{ten} Potenz von $1-x$ beginnen. Sie sollen mit $Q^{1,0}(x)$, $Q^{1,0'}(x)$ bezeichnet werden. Die Entwickelung des dritten beginnt mit der γ^{ten} Potenz, wenn γ durch die Gleichung

$$v=\gamma+\alpha-4-k(\gamma+w-2)$$

bestimmt ist. Es werde mit $Q^{1,\gamma}(x)$ bezeichnet. Die drei Integrale im Punkte $1:k$ werden in analoger Weise mit $Q^{1:k,0}(x)$, $Q^{1:k,0'}(x)$, $Q^{1:k,\delta}(x)$

* Man vergl. Göttinger Nachrichten von 1874, S. 249.

bezeichnet, und es wird δ, der niedrigste Exponent der Entwickelung des nicht einändrigen Integrals, nach Potenzen von $(1-kx)$ durch die Gleichung

$$v = -\delta - w + 2 + k(\delta + \alpha - 4)$$

bestimmt. Integrirt man endlich die Differentialgleichung 1) durch Reihen, welche nach absteigenden Potenzen von $x-a$ geordnet sind, so findet man drei particuläre Integrale im Punkte ∞, deren höchste Exponenten bez. β, β', β'' sind. Die Integrale selbst mögen mit $Q^{\infty,\beta}(x)$, $Q^{\infty,\beta'}(x)$, $Q^{\infty,\beta''}(x)$ bezeichnet werden. Die Grössen β, β', β'' ergeben sich aus den Gleichungen

$$w = \beta + \beta' + \beta'' + 3, \quad w' = \beta\beta' + \beta'\beta'' + \beta''\beta + \beta + \beta' + \beta'' + 1, \quad w'' = \beta\beta'\beta''.$$

Zwischen den Grössen α, β, β', β'', γ, δ, welche die Exponenten der Gleichung 1) oder die Exponenten der particulären Integrale in den Punkten 0, ∞, 1, $1:k$ heissen, besteht die Gleichung

$$\alpha + \beta + \beta' + \beta'' + \gamma + \delta = 3.$$

Durch die Exponenten und die Grösse k sind die Coefficienten in 1) nicht alle bestimmt, sondern die Gleichung hängt noch von einer willkürlichen Grösse τ ab; wir wollen deshalb das allgemeine Integral mit

$$Q\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & k \\ \gamma, & \beta', & \tau \\ \delta, & \beta'', & x \end{pmatrix}$$

bezeichnen, wenn eine Angabe der Exponenten und der Grösse τ nöthig ist, sonst nur mit $Q(x)$.

Differenziren wir die Gleichung 1) $n$mal, so resultirt

$$3)\quad \begin{aligned} x(1-x)(1-kx)\,y'''_n &+ (u_n + v_n x + w_n k x^2)\,y''_n \\ &+ (\tau_n + w_n k x)\,y'_n + w''_n k y_n = 0, \end{aligned}$$

worin

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y_n, \quad \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = y_{n+1} \text{ etc.},$$

$$u_n = u + n, \quad v_n = v - 2n(1+k), \quad w_n = w + 3n,$$

$$\tau_n = \tau + uv - n(n-1)(1+k), \quad w'_n = w' + 2nw + 3n(n-1),$$

$$w''_n = w'' + nw' + n(n-1)w + n(n-1)(n-2) = (\beta+n)(\beta'+n)(\beta''+n)$$

zu setzen ist. Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist

$$y_n = Q_n(x) = Q\begin{pmatrix} \alpha-n, & \beta+n, & k \\ \gamma-n, & \beta'+n, & \tau+vn-n(n-1)(1+k) \\ \delta-n, & \beta''+n, & x \end{pmatrix},$$

worin

$$\begin{aligned} v &= -\delta - \beta - \beta' - \beta'' - 1 + k(\delta+\alpha-4) = \gamma + \alpha - 4 - k(\gamma+\beta+\beta'+\beta''+1) \\ &= \qquad \gamma + \alpha - 4 \qquad + k(\delta+\alpha-4) = \gamma + \alpha - 4 + k(\delta + \alpha - 4) \end{aligned}$$

ist. Lässt man hierin für n jedwede Zahl zu, so kann man eine der Grössen $\alpha - n$, $\gamma - n$, $\delta - n$ der Null gleich machen, für welchen Fall das Integral Q im Allgemeinen logarithmische Bestandtheile erhalten wird, oder man kann eine der Grössen $\beta+n$, $\beta'+n$, $\beta''+n$ gleich Null machen, in welchem Falle die Gleichung 1) die Form 2) in Bezug auf $y'=\eta$ annimmt, weil dann w'' gleich Null wird.* Endlich kann man auch noch die Grösse τ_n der Null gleich machen, wodurch jedoch die Integration ebenso wenig erleichtert wird.

Da der Differentialquotient einer Function Q wieder eine Function Q mit abgeänderten Exponenten und abgeändertem τ ist, so kann man die Gleichung 3) als eine Recursionsformel ansehen, welche zur Definition der Function Q ebenso tauglich und daher für sie beinahe ebenso wichtig ist, als die Differentialgleichung. Oder man kann sie auch als eine Relation zwischen contiguen Functionen ansehen, wenn dieser Begriff in demselben Sinne wie bei der Gauss'schen Reihe gefasst wird. Setzt man für y_n, y'_n, y''_n, y'''_n bez. einen einzelnen Zweig der Functionen $Q_n(x)$, $Q_{n+1}(x)$, $Q_{n+2}(x)$, $Q_{n+3}(x)$ in 3) ein, so muss man noch auf den constanten Factor achten, welchen man den Zweigen der Function zuertheilen muss. Genügt $Q_n(x)$ der Gleichung 3) nur als einer Differentialgleichung, so könnte jeder Lösung ein willkürlicher Factor beigelegt werden. Aber nicht jede Lösung der Differentialgleichung ist eine Lösung der Recursionsformel, sondern nur eine solche, in der $\dfrac{d\,Q_n(x)}{dx}=Q_{n+1}(x)$ ist, d. h. eine Lösung, in welcher durch Verwandlung von n in $n+1$ aus Q_n die Grösse $\dfrac{d\,Q_n(x)}{dx}$ hervorgeht. Setzt man für $Q_n(x)$ irgend einen der mehrändrigen Zweige $Q_n^{0,\alpha-n}(x)$, $Q_n^{\infty,\beta+n}(x)$, $Q_n^{\infty,\beta'+n}(x)$, ... $Q_n^{1:k,\delta-n}(x)$, so wird die Gleichung 3) als Recursionsformel erfüllt, wenn man annimmt, dass

$$\lim_{x=0} x^{-\alpha}\,Q^{0,\alpha}(x)=K_{0,\alpha}:\Pi(\alpha),\quad \lim_{x=1}\Pi(\gamma)\,(1-x)^{-\gamma}\,Q^{1,\gamma}(x)=e^{\gamma i\pi}K_{1+\gamma},$$

$$\lim_{x=1:k}\Pi(\delta)\,(1-kx)^{-\delta}\,k^{\delta}\,Q^{1:k,\delta}(x)=e^{\delta i\pi}K_{1:k,\delta},$$

$$\text{4)}\qquad \lim_{x=\infty} x^{\beta}\,Q^{\infty,\beta}(x)=\beta^{\beta i\pi}\,\Pi(\beta-1)\,K_{\infty,\beta},$$

$$\lim_{x=\infty} x^{\beta'}\,Q^{\infty,\beta'}(x)=\beta^{\beta' i\pi}\,\Pi(\beta'-1)\,K_{\infty,\beta'},$$

$$\lim_{x=\infty} x^{\beta''}\,Q^{\infty,\beta''}(x)=\beta^{\beta'' i\pi}\,\Pi(\beta''-1)\,K_{\infty,\beta''}$$

sei, und wenn $K_{0,\alpha}$, ... $K_{\infty,\beta''}$ solche Functionen der Exponenten und von τ sind, dass sie ungeändert bleiben, wenn α, γ, δ in $\alpha-n$, $\gamma-n$,

---

* Eine Untersuchung des Integrals der Gleichung 2) ist von Herrn A. Schondorf in einem Aufsatze „Ueber eine Minimalfläche", Göttingen 1868, angestellt. Durch einen Irrthum (S. 49) in der Constantenabzählung gelangt Herr Schondorf zu dem unrichtigen Resultate, dass das Integral durch die Exponenten und k bis auf zwei willkürliche Constante bestimmt sei.

$\delta - n$ und β, β', β'' in $\beta+n$, $\beta'+n$, $\beta''+n$ und τ in τ_n für ein ganzes n übergehen. Diese Annahme soll fernerhin immer gemacht werden und die K sollen sämmtlich gleich Eins gesetzt werden.

Will man aber die in den Punkten 0, 1, $1:k$ einändrigen Integrale $Q_n^{0,0}(x)$, $Q_n^{0,0'}(x)$, $Q_n^{1,0}(x)$, ... in 3) einsetzen, so ist zu beachten, dass jede von diesen Functionen als Lösung der Differentialgleichung zwei willkürliche Constante enthält, nämlich $Q_n(0)$ und $Q'_n(0)$ oder $Q_n(1)$ und $Q'_n(1)$, oder $Q_n(1:k)$ und $Q'_n(1:k)$ (wenn der an Q oben angehängte Strich die einmalige Differentiation nach x andeutet). Damit diese Functionen aber zugleich Lösungen der Recursionsformel seien, müssen die willkürlichen Constanten so bestimmt werden, dass die Gleichungen

5a) $$Q_{n+2}(0)\,u_n + Q_{n+1}(0)\,\tau_n + Q_n(0)\,w''_n k = 0,$$

5b) $$Q_{n+2}(1)\,(u_n+v_n+kw_n) + Q_{n+1}(1)\,(\tau_n+w'_n k) + Q_n(1)\,w''_n k = 0,$$

5c) $$Q_{n+2}(1:k)\,(u_n k+v_n+w_n) + Q_{n+1}(1:k)\,(\tau_n+w'_n k) + Q_n(1:k)\,w''_n k^2 = 0$$

befriedigt sind. Die Constanten der Zweige $Q_n^{0,0}(x)$, $Q_n^{0,0'}(x)$ sollen deshalb fernerhin so bestimmt werden, dass $Q_0^{0,0}(0)$ und $Q_0^{0,0'}(0)$ zwei voneinander unabhängige Lösungen der Gleichung 5a) sind. Der Coefficient von x in diesen Zweigen ist dann durch die Bedingung bestimmt, dass er bez. gleich $Q_{n+1}^{0,0}(0)$, $Q_{n+1}^{0,0'}(0)$ sein muss. Ebenso sollen $Q_n^{1,0}(1)$, $Q_n^{1,0'}(1)$ zwei unabhängige Lösungen von 5b), $Q_n^{1:k,0}(1:k)$, $Q_n^{1:k,0'}(1:k)$ zwei unabhängige Lösungen von 5c) sein. Dadurch sind diese Zweige bis auf einen willkürlichen Factor, der ungeändert bleibt, wenn n in $n+1$ übergeht, bestimmt. Setzen wir daher

$$Q^{0,0}(x) = \begin{pmatrix}0, & 1\\ 0, & 0\end{pmatrix} Q^{1,0}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1\\ 0, & 0'\end{pmatrix} Q^{1,0'}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1\\ 0, & \gamma\end{pmatrix} Q^{1,\gamma}(x)$$

6a) $$= \begin{pmatrix}0, & 1:k\\ 0, & 0\end{pmatrix} Q^{1:k,0}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1:k\\ 0, & 0'\end{pmatrix} Q^{1:k,0'}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1:k\\ 0, & \delta\end{pmatrix} Q^{1:k,\delta}(x)$$

$$= \begin{pmatrix}0, & \infty\\ 0, & \beta\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta}(x) + \begin{pmatrix}0, & \infty\\ 0, & \beta'\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta'}(x) + \begin{pmatrix}0, & \infty\\ 0, & \beta''\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta''}(x),$$

$$Q^{0,0'}(x) = \begin{pmatrix}0, & 1\\ 0', & 0\end{pmatrix} Q^{1,0}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1\\ 0', & 0'\end{pmatrix} Q^{1,0'}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1\\ 0', & \gamma\end{pmatrix} Q^{1,\gamma}(x)$$

6b) $$= \begin{pmatrix}0, & 1:k\\ 0', & 0\end{pmatrix} Q^{1:k,0}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1:k\\ 0', & 0'\end{pmatrix} Q^{1:k,0'}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1:k\\ 0', & \delta\end{pmatrix} Q^{1:k,\delta}(x)$$

$$= \begin{pmatrix}0, & \infty\\ 0', & \beta\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta}(x) + \begin{pmatrix}0, & \infty\\ 0', & \beta'\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta'}(x) + \begin{pmatrix}0, & \infty\\ 0', & \beta''\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta''}(x),$$

$$Q^{0,\alpha}(x) = \begin{pmatrix}0, & 1\\ \alpha, & 0\end{pmatrix} Q^{1,0}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1\\ \alpha, & 0'\end{pmatrix} Q^{1,0'}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1\\ \alpha, & \gamma\end{pmatrix} Q^{1,\gamma}(x)$$

6c) $$= \begin{pmatrix}0, & 1:k\\ \alpha, & 0\end{pmatrix} Q^{1:k,0}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1:k\\ \alpha, & 0'\end{pmatrix} Q^{1:k,0'}(x) + \begin{pmatrix}0, & 1:k\\ \alpha, & \delta\end{pmatrix} Q^{1:k,\delta}(x)$$

$$= \begin{pmatrix}0, & \infty\\ \alpha, & \beta\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta}(x) + \begin{pmatrix}0, & \infty\\ \alpha, & \beta'\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta'}(x) + \begin{pmatrix}0, & \infty\\ \alpha, & \beta''\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta''}(x),$$

so müssen die Coefficienten $\begin{pmatrix}0, & 1\\ 0, & 0\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}0, & \infty\\ \alpha, & \beta''\end{pmatrix}$ nicht blos unabhängig von x sein, sondern auch ungeändert bleiben, wenn α, γ, δ in $\alpha - n$, $\beta - n$, $\delta - n$, wenn β, β', β'' in $\beta + n$, $\beta' + n$, $\beta'' + n$, und wenn τ in τ_n für ein ganzzahliges n übergehen.

Man kann in der Gleichung 1) für die Unabhängige durch einige Substitutionen neue Veränderliche einführen, durch welche die Form dieser Gleichung nicht wesentlich geändert wird. Setzt man nämlich

$$x = x_1 : k, \qquad x_1 = kx, \qquad dx = dx_1 : k,$$

$$x = [1 - (1-k)x_2] : k, \quad x_2 = (1 - kx) : (1 - k), \quad dx = \left(1 - \frac{1}{k}\right) dx_2,$$

$$x = 1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right) x_3, \quad x_3 = (1 - x) : \left(1 - \frac{1}{k}\right), \quad dx = -\left(1 - \frac{1}{k}\right) dx_3,$$

so erhält man die drei Differentialgleichungen

$$\text{7a)} \quad x_1(1-x_1)\left(1 - \frac{1}{k} x_1\right)\frac{d^3y}{dx_1^3} + \left(u + \frac{v}{k} x_1 + \frac{w}{k} x_1^2\right)\frac{d^2y}{dx_1^2} + \left(\frac{\tau}{k} + \frac{w'}{k} x_1\right)\frac{dy}{dx_1} + \frac{w''}{k} y = 0,$$

$$\text{7b)} \quad x_2(1-x_2)[1-(1-k)x_2]\frac{d^3y}{dx_2^3} + \left[\frac{uk+v+w}{1-k} - (u+2w)x_2 + w(1-k)x_2^2\right]\frac{d^2y}{dx_2^2} + [-(\tau+w') + w'(1-k)x_2]\frac{dy}{dx_2} + w''(1-k)y = 0,$$

$$\text{7c)} \quad x_3(1-x_3)\left[1-\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]x_3\frac{d^3y}{dx_3^3} + \left[\frac{u+v+wk}{k-1} - \left(\frac{v}{k} + 2w\right)x_3 + w\left(1-\frac{1}{k}\right)x_3^2\right]\frac{d^2y}{dx_3^2} + \left[-\left(\frac{\tau}{k} + w'\right) + w'\left(1-\frac{1}{k}\right)x_3\right]\frac{dy}{dx_3} + w''\left(1-\frac{1}{k}\right)y = 0.$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$\text{8)} \quad Q\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & k\\ \gamma, & \beta', & \tau\\ \delta, & \beta'', & x\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & 1:k\\ \delta, & \beta', & \tau:k\\ \gamma, & \beta'', & xk\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}\delta, & \beta, & 1-k\\ \gamma, & \beta', & -(\tau+w)\\ \alpha, & \beta'', & \dfrac{1-kx}{1-k}\end{pmatrix}$$

$$= Q\begin{pmatrix}\gamma, & \beta, & 1-\dfrac{1}{k}\\ \delta, & \beta', & -\left(\dfrac{\tau}{k}+w'\right)\\ \alpha, & \beta'', & \dfrac{k(1-x)}{1-k}\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}\delta, & \beta, & 1:(1-k)\\ \alpha, & \beta', & (k-1)(\tau+w')\\ \gamma, & \beta'', & 1-kx\end{pmatrix}$$

$$= Q\begin{pmatrix}\gamma, & \beta, & k:(k-1)\\ \alpha, & \beta', & (\tau+w'k):(1-k)\\ \delta, & \beta'', & 1-x\end{pmatrix}.$$

Die beiden letzten Gleichungen sind durch Anwendung der ersten auf die zweite und dritte erhalten. Dass die Grössen β, β', β'' in einer Q-Function unter sich vertauscht werden können, ohne dass sie sich ändert, ist evident.

Will man die Gleichung 1) mittels der Methode der unbestimmten Coefficienten integriren, so bringt man dieselbe durch die Substitution

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{d\,lg\,x},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{d\,lg\,x^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{d\,lg\,x},$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}\frac{d^3y}{d\,lg\,x_3}-\frac{3}{x^3}\frac{d^2y}{d\,lg\,x^2}+\frac{2}{x^3}\frac{dy}{d\,lg\,x}$$

mit Vortheil auf die Form

$$\begin{aligned}&(1-x)(1-kx)\frac{d^3y}{d\,lg\,x^3}+[u-3+(v+3+3k)x+(\beta+\beta'+\beta'')kx^2]\frac{d^2y}{d\,lg\,x^2}\\ 9)\quad &+[2-u+(\tau-v-2-2k)x+(\beta\beta'+\beta'\beta''+\beta''\beta)kx^2]\frac{dy}{d\,lg\,x}\\ &+\beta\beta'\beta''kx^2y=0\end{aligned}$$

oder, wenn man die Gleichung 7c) transformirt, diese auf die Form

$$\begin{aligned}&(1-x_3)\left[1-\left(1-\frac{1}{k}\right)x_3\right]\frac{d^3y}{d\,lg\,x_3{}^3}+\beta\beta'\beta''\left(1-\frac{1}{k}\right)x_3{}^2y\\ &+\left[-\gamma-1+\left(\gamma+\delta-1-\left(1-\frac{1}{k}\right)(\delta+\beta+\beta'+\beta''-2)\right)x_3\right.\\ 9\,a)\quad &\left.+(\beta+\beta'+\beta'')\left(1-\frac{1}{k}\right)x_3{}^2\right]\frac{d^2y}{d\,lg\,x_3{}^2}\\ &+\left[\gamma-x_3\left(\frac{\tau}{k}+\beta\beta'+(2-\alpha)(\beta+\beta')+\gamma-\frac{\gamma+\alpha-2}{h}\right)\right.\\ &\left.+(\beta\beta'+\beta'\beta''+\beta''\beta)\left(1-\frac{1}{k}\right)x_3{}^2\right]\frac{dy}{d\,lg\,x_3}=0.\end{aligned}$$

Setzt man in 9) die nach auf- oder absteigenden Potenzen von x geordnete Reihe

$$\Sigma a_n x^n$$

für y ein, so findet man, dass a_n die Recursionsformel

$$\begin{aligned}&a_{n+2}(n+2)^3+(u-3)(n+2)^2+(2-u)(n+2)\\ 10)\quad &-a_{n+1}[(n+1)^3(1+k)-(v+3+3k)(n+1)^2+(v+2+2k-\tau)(n+1)]\\ &+a_nk(n+\beta)(n+\beta')(n+\beta'')=0\end{aligned}$$

oder, wenn man mit dem Euler'schen Integral $\Pi(n)$ multiplicirt, die Recursionsformel

$$\begin{aligned}&[(a_{n+2}\,\Pi(n+2)(n+2-\alpha)]+[a_n\,\Pi(n)]\,k(n+\beta)(n+\beta')(n+\beta'')\\ 10\,a)\quad &-[a_{n+1}\,\Pi(n+1)][(n+1)^2(1+k)-(v+3+3k)(n+1)\\ &\qquad -\tau+v+2+2k]=0\end{aligned}$$

befriedigen muss. Diese Gleichung stimmt genau mit 5a) überein, wenn man dort $a_n\,\Pi(n)$ für $Q_n(0)$ setzt.

Setzt man ebenso die Reihe

$$\Sigma c_n x_3^n$$

in 9a) ein, so ergiebt sich für c_n die Recursionsformel

$$\text{10b)}\quad \begin{aligned}&[c_{n+2}\Pi(n+2)](n+2-\gamma)+[c_n\Pi(n)]\left(1-\frac{1}{k}\right)(n+\beta)(n+\beta')(n+\beta'')\\ &-[c_{n+1}\Pi(n+1)]\Big[(n+1)^2\left(1+1-\frac{1}{k}\right)\\ &\qquad-\left(\gamma+\delta-1+\left(1-\frac{1}{k}\right)(\alpha+\gamma-1)\right)(n+1)\\ &\qquad+\frac{\tau+2-\alpha-\gamma}{k}+(2-\alpha)(\beta+\beta')+\gamma\Big]=0.\end{aligned}$$

Soviel über die allgemeine Function.

II.

Wir wenden uns nun zu einem speciellen Falle, in welchem die Recursionsformeln 10) und 10a) vollständig integrirt werden können, nämlich wenn die Constanten in denselben die beiden Bedingungen erfüllen

$$\text{11)}\quad \alpha+\beta''=2$$

und

$$(\alpha-1)^2(1+k)-(v+3+3k)(\alpha-1)+v-\tau+2+2k=0$$

oder

$$\text{11a)}\quad \tau=(\alpha-2)[(\gamma+\beta+\beta')k+1-\gamma],$$

in welchem Falle 10a) die Form annimmt

$$\text{12)}\quad \begin{aligned}&a_{n+2}\Pi(n+2)-a_{n+1}\Pi(n+1)[(n+1)(1+k)+(\beta+\beta'+\gamma-1)k-\gamma]\\ &\qquad+a_n\Pi(n)\,k\,(n+\beta)(n+\beta')=0\end{aligned}$$

oder

$$\text{12a)}\quad \begin{aligned}&\frac{a_{n+2}\Pi(n+2)}{\Pi(n+\beta+1)}(n+\beta+1)-\frac{a_{n+1}\Pi(n+1)}{\Pi(n+\beta)}[(n+\beta+1)(1+k)\\ &\qquad\qquad+k(\gamma+\beta'-1)-\gamma-\beta]\\ &\qquad+\frac{a_n\Pi(n)}{\Pi(n+\beta-1)}k(n+\beta')=0.\end{aligned}$$

Auf dieselbe Recursionsformel führt aber die Integration der Differentialgleichung

$$\text{13)}\quad \begin{aligned}&(1-x)(1-kx)\frac{d^2y}{d\,lg x^2}-[1+((\beta+\beta'+\gamma-1)k-\gamma)x-(\beta+\beta')kx^2]\frac{dy}{d\,lg x}\\ &\qquad+k\beta\beta'x^2y=0,\end{aligned}$$

mithin sind ihre Integrale zugleich Integrale der Gleichung 1), wenn deren Constante durch die Gleichungen 11) und 11a) beschränkt sind. Die allgemeine Lösung der Gleichung 13) ist in Riemann's Bezeichnung

$$\text{14)}\quad y=P\begin{pmatrix}1, & \infty, & 1:k, & \\ \gamma, & \beta, & \delta, & x\\ 0, & \beta', & 0, & \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\gamma, & \beta, & \delta, & \dfrac{k(1-x)}{k-1}\\ 0, & \beta', & 0, & \end{pmatrix}.$$

Zwei allgemeine Lösungen der Recursionsformel 12) sind*

15)
$$a_n = \frac{A\,\Pi(n+\beta-1)}{\Pi(n)} \int\limits_0^1 s^{n+\beta'-1}(1-s)^{-\delta-\beta'}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\gamma-\beta'} ds$$
$$+ \frac{A'\Pi(n+\beta-1)}{\Pi(n)} k^n \int\limits_0^1 s^{n+\beta'-1}(1-s)^{-\gamma-\beta'}(1-ks)^{-\delta-\beta'} ds,$$

15a)
$$a_n = \frac{B\,\Pi(-n-1)}{\Pi(-n-\beta)} \int\limits_0^1 s^{-n-\beta}(1-s)^{-\delta-\beta'}(1-ks)^{-\gamma-\beta'} ds$$
$$+ \frac{B'\Pi(-n-1)}{\Pi(-n-\beta)} k^n \int\limits_0^1 s^{-n-\beta}(1-s)^{-\gamma-\beta'}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\delta-\beta'} ds,$$

worin A, A' Constante oder vielmehr periodische Functionen bedeuten, die ungeändert bleiben, wenn man n um eine ganze Zahl ändert. Die hier vorkommenden bestimmten Integrale sollen der Reihe nach mit $J^{n+\beta'-1}\left(\frac{1}{k}\right)$, $H^{n+\beta'-1}(k)$, $J^{-n-\beta}(k)$, $H^{-n-\beta}\left(\frac{1}{k}\right)$ zur Abkürzung bezeichnet werden. In den Integralen soll für negative reelle k der Factor $(1-ks)^{-\gamma-\beta'}$ oder $(1-ks)^{-\delta-\beta'}$, wenn die Exponenten reell sind, reell genommen werden, ebenso $\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\delta-\beta'}$ und $\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\gamma-\beta'}$. Für andere Werthe von k sind die Werthe dieser Factoren durch stetige Fortsetzung, nicht über eine von 0 über 1 nach ∞ gezogene gerade Linie hinweg, in der ganzen k-Ebene bestimmt Was die Brauchbarkeit dieser Integrale betrifft, so ist sie nur dadurch beschränkt, dass $n+\beta'-1$, $-\gamma-\beta'$, $-n-\beta$, $-\delta-\beta'$ nicht ganze negative Zahlen sein dürfen, wenn man die bestimmten Integrale in der Weise definirt, wie ich es in dieser Zeitschrift XIV, S. 52, gethan habe.

Es ist nöthig, die Determinanten

$$\begin{vmatrix} J^{n+\beta'-1}\left(\frac{1}{k}\right), & k^{n+\beta'-1}H^{n+\beta'-1}(k) \\ J^{n+\beta'}\left(\frac{1}{k}\right), & k^{n+\beta'}H^{n+\beta'}(k) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} J^{-n-\beta}(k), & k^{n+\beta}H^{-n-\beta}\left(\frac{1}{k}\right) \\ J^{-n-\beta-1}(k), & k^{n+\beta+1}H^{-n-\beta-1}\left(\frac{1}{k}\right) \end{vmatrix}$$

einfacher ausdrücken, was durch zwei verschiedene Methoden geschehen kann. Die erste dieser Determinanten soll mit Δ_n, die zweite mit D_n bezeichnet werden. Es sind $J^{n+\beta'-1}\left(\frac{1}{k}\right)$, $k^{n+\beta'-1}H^{n+\beta'-1}(k)$ Lösungen der Recursionsformel

* Man vergl. Bd. XIV dieser Zeitschrift, S. 350 flgg.

$$l_{n+2}(n+\beta-1)-l_{n+1}[n+\beta+1)(1+k)+k(\gamma+\beta'-1)-\gamma-\beta] + l_n k(n+\beta')=0,$$

woraus folgt*

$$\varDelta_n : \varDelta_{n+1} = n+\beta+1 : k(n+\beta'), \quad \varDelta_n k(n+\beta')-\varDelta_{n+1}(n+\beta+1)=0.$$

Die Lösung dieser Recursionsformel ist

$$\varDelta_n = \frac{\varphi(n)\, k^n\, \Pi(n+\beta'-1)}{\Pi(n+\beta)},$$

worin $\varphi(n)$ eine periodische Function von n ist. Hieraus ergiebt sich, wenn m eine ganze Zahl ist,

$$\varphi(n+m) = \frac{\Pi(n+m+\beta)\,.\,\varDelta_{n+m}}{k^{n+m}\,\Pi(n+m+\beta'-1)} = \varphi(n),$$

$$\frac{\varphi(n)\,\Pi(n+m-\delta)\,\Pi(n+m-\gamma)}{\Pi(-\gamma-\beta')\,\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(n+m+\beta)\,\Pi(n+m+\beta'-1)} =$$

$$\begin{vmatrix} F\left(\gamma+\beta',\, n+m+\beta',\, n+m-\delta+1,\, \frac{1}{k}\right), & k^{\beta'-1} F(\delta+\beta',\, n+m+\beta',\, n+m-\gamma+1,\, k) \\ \frac{n+m+\beta'}{n+m-\delta+1} F\left(\gamma+\beta',\, n+m+\beta'+1,\, n+m-\delta+2,\, \frac{1}{k}\right), & \frac{k^{\beta'}(n+m+\beta')}{n+m-\gamma+1} F(\delta+\beta',\, n+m+\beta'+1,\, n+m-\gamma+2,\, k) \end{vmatrix}$$

Will man nun zur Auswerthung dieser Determinante die Gauss'schen Reihen benutzen, so muss man für einen Augenblick k auf Werthe beschränken, deren absoluter Betrag 1 ist, also auf eine Linie. Wenn dann noch der reelle Theil von β grösser als der von β' vorausgesetzt wird, so convergiren alle vorkommenden Reihen, was auch m oder n sein mag. Gehen wir nun mit m zur Grenze Unendlich über, so erhalten wir

$$\varphi(n) = \Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta') \begin{vmatrix} \left(1-\frac{1}{k}\right)^{-\gamma-\beta'}, & k^{\beta'-1}(1-k)^{-\delta-\beta'} \\ \left(1-\frac{1}{k}\right)^{-\gamma-\beta'}, & k^{\beta'}(1-k)^{-\delta-\beta'} \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)^{-\gamma-\beta'}\,\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')\,k^{\gamma+\beta+\beta'-1}(1-k)^{\beta-\gamma'},$$

also ist

$$\varDelta_n = -\frac{(-1)^{-\gamma-\beta'}\,k^{n+\gamma+2\beta'-1}\,(1-k)^{\beta-\beta'}\,\Pi(n+\beta'-1)\,\Pi(-\gamma-\beta')\,\Pi(-\delta-\beta')}{\Pi(n+\beta)}.$$

Um den Werth von $(-1)^{-\gamma-\beta'}$ zu finden, setzen wir in dem ursprünglichen Ausdrucke für $\varDelta_n$ durch bestimmte Integrale einen sehr kleinen, negativ reellen Werth für k. Dann nehmen die Integrale $H^{n+\beta'-1}(k)$, $H^{n+\beta'}(k)$ für verschwindende k bez. die Grenzwerthe

$$\frac{\Pi(n+\beta'-1)\,\Pi(-\gamma-\beta')}{\Pi(n-\gamma)}, \quad \frac{\Pi(n+\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')}{\Pi(n-\gamma+1)}$$

---

* Man vergl. meine Antrittsschrift: „Ueber eine Function, welche einer linearen Differential- und Differenzengleichung vierter Ordnung Genüge leistet", Halle bei L. Nebert, 1875.

an. Ferner nehmen $k^{-\gamma-\beta'} J^{n+\beta'-1}\left(\frac{1}{k}\right)$, $k^{-\gamma-\beta'} J^{n+\beta'}\left(\frac{1}{k}\right)$ bez. die Grenzwerthe an

$$\frac{e^{-(\gamma+\beta')i\pi}\,\Pi(n-\gamma-1)\,\Pi(-\delta-\beta')}{\Pi(n+\beta-1)},\quad \frac{e^{-(\gamma+\beta')i\pi}\,\Pi(n-\gamma)\,\Pi(-\delta-\beta')}{\Pi(n+\beta)},$$

also ist für ein verschwindendes k

$$\frac{(-1)(-1)^{-\gamma-\beta'}\,\Pi(n+\beta'-1)\,\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')}{\Pi(n+\beta)}$$

$$=\begin{vmatrix} \dfrac{e^{-(\gamma+\beta')i\pi}\,\Pi(n-\gamma+1)\,\Pi(-\delta-\beta')}{\Pi(n+\beta-1)}, & \dfrac{\Pi(n+\beta'-1)\,\Pi(-\gamma-\beta')}{\Pi(n-\gamma)} \\ \dfrac{e^{-(\gamma+\beta')i\pi}\,\Pi(n-\gamma)\,\Pi(-\delta-\beta')}{\Pi(n+\beta)}, & \dfrac{k\,\Pi(n+\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')}{\Pi(n-\gamma+1)} \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{e^{-(\gamma+\beta')i\pi}\,\Pi(n+\beta'-1)\,\Pi(-\gamma-\beta')\,\Pi(-\delta-\beta')}{\Pi(n+\beta)}$$

und demnach

$$(-1)^{-\gamma-\beta'}=e^{-(\gamma+\beta')i\pi}.$$

So ist endlich

$$16)\quad \Delta_n=-\frac{e^{-(\gamma+\beta')i\pi}\,k^{n+\gamma+\beta'+\beta'-1}\,(1-k)^{\beta-\beta'}\,\Pi(n+\beta'-1)\,\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')}{\Pi(n+\beta)}.$$

Hieraus geht D_n hervor, wenn man $-n-\beta-\beta'$ statt n, $\frac{1}{k}$ statt k setzt und das Vorzeichen umkehrt, so dass sich ergiebt

$$17)\quad D_n=\frac{e^{-(\delta+\beta')i\pi}\,k^{n-\gamma}\,(1-k)^{\beta-\beta'}\,\Pi(-n-\beta-1)\,\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')}{\Pi(-n-\beta')}.$$

Ein anderes Mittel zur Auswerthung dieser Determinanten hat man noch, wenn man die Integrale als Lösungen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung ansieht.

Soll nun in dem Integrale $y=\Sigma a_n x^n$ die Entwickelung aufsteigend mit der α^{ten} Potenz beginnen, so kann a_α, der Coefficient von x^α, willkürlich gewählt werden, weil für $n=\alpha$ der Coefficient von x^α in der die Bedingung 12) liefernden Gleichung von selbst verschwindet. Der Coefficient von $a_{\alpha+1}$ aber muss so bestimmt werden, dass

$$a_{\alpha+1}\,\Pi(\alpha+1)-a_\alpha\,\Pi(\alpha)\,[\alpha-\gamma+(\beta+\beta'+\alpha+\gamma-1)k]$$

verschwindet, was dann stattfindet, wenn man in 15) die Constanten A, A' so bestimmt, dass $a_{\alpha-1}$ verschwindet, also dann, wenn man

$$18)\quad a_n=\frac{e^{(\gamma+\beta')i\pi}\,\Pi(n+\beta-1)\,k^{2-\alpha-\gamma-\beta'-\beta'}(1-k)^{\beta'-\beta}}{\Pi(\alpha+\beta'-2)\,\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')\,\Pi(n)}\begin{vmatrix} J^{n+\beta'-1}\left(\frac{1}{k}\right), & k^{n+\beta'-1}\,H^{n+\beta'-1}(k) \\ J^{\alpha+\beta'-2}\left(\frac{1}{k}\right), & k^{\alpha+\beta'-2}\,H^{\alpha+\beta'-2}(k) \end{vmatrix}$$

setzt. Dann ist a_α gleich Eins, dividirt durch $\Pi(\alpha)$. Hieraus ergiebt sich nun für $Q^{0,\alpha}(x)$ die Darstellung

19) $$x^{-\alpha} . Q^{0,\alpha}(x) = \frac{\left\{\begin{array}{l} \int\limits_0^1 s^{\alpha+\beta'-2}(1-s)^{-\gamma-\beta'}(1-ks)^{-\delta-\beta'} ds \int\limits_0^1 s^{\alpha+\beta'-1}(1-s)^{-\delta-\beta'}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\gamma-\beta'} F(1, \alpha+\beta, \alpha+1, xs)\, ds \\ -k\int\limits_0^1 s^{\alpha+\beta'-2}(1-s)^{-\delta-\beta'}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\gamma-\beta'} ds \int\limits_0^1 s^{\alpha+\beta'-1}(1-s)^{-\gamma-\beta'}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\delta-\beta'} F(1, \alpha+\beta, \alpha+1, kxs)\, ds \end{array}\right\}}{e^{-(\gamma+\beta')i\pi} k^{\gamma+\beta'} (1-k)^{\beta-\beta'} \Pi(\alpha+\beta'-2)\, \Pi(-\gamma-\beta')\, \Pi(-\delta-\beta') : \Pi(\alpha+\beta-1)}.$$

Einfacher gestalten sich die Integrale $Q^{0,0}(x)$, $Q^{0,0'}(x)$, weil jede der beiden Lösungen der Recursionsformel 12), die unter 15) verzeichnet sind, die Eigenschaft hat, für $n = -1$ zu verschwinden. So hat man

19a) $$Q^{0,0}(x) = \Pi(\beta-1)\int\limits_0^1 s^{\beta'-1}(1-s)^{-\delta-\beta'}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\gamma-\beta'}(1-xs)^{-\beta}\, ds,$$

19b) $$Q^{0,0'}(x) = \Pi(\beta-1)\, k^{\beta'-1}\int\limits_0^1 s^{\beta'-1}(1-s)^{-\gamma-\beta'}(1-ks)^{-\delta-\beta'}(1-xks)^{-\beta}\, ds.$$

Differenzirt man diese Ausdrücke nach x, so erhält man dasselbe, als wenn man α, γ, δ in $\alpha-1$, $\gamma-1$, $\delta-1$ und β, β', β'' in $\beta+1$, $\beta'+1$, $\beta''+1$ verwandelt; der n^{te} Differentialquotient $Q_n(x)$ aber genügt der Recursionsformel 10a), wenn man $Q_n(x)$ für $a_n\, \Pi(n)$ setzt, so dass also die Constanten in diesen Zweigen den früheren Bestimmungen gemäss sind.

Integrirt man die Differentialgleichung durch absteigende Reihen, so beginnt die Entwickelung des einen Integrals mit der $-\beta''^{\text{ten}}$ Potenz, und man muss die Coefficienten B, B' in 15a) so einrichten, dass $a_{-\beta''+1}$ verschwindet. Demnach hat man für a_n zu setzen

20) $$a_n = \frac{e^{(\delta+\beta'+\beta'')i\pi} k^{1+\beta''+\gamma} (1-k)^{\beta'-\beta}\, \Pi(\beta''-\beta)\, \Pi(-n-1)}{\Pi(-\delta-\beta')\, \Pi(-\gamma-\beta')\, \Pi(-n-\beta)} \times \begin{vmatrix} J^{-n-\beta}(k), & k^{n+\beta} H^{-n-\beta}\left(\frac{1}{k}\right) \\ J^{\beta''-\beta-1}(k), & k^{\beta-\beta''+1} H^{\beta''-\beta-1}\left(\frac{1}{k}\right) \end{vmatrix}.$$

Hieraus entspringt für $Q^{\infty,\beta''}(x)$ die Darstellung

21) $$Q^{\infty,\beta''}(x) = \frac{\left\{\begin{array}{l} k^{\beta+1} H^{\beta''-\beta-1}\left(\frac{1}{k}\right)\int\limits_0^1 s^{\beta''-\beta}(1-s)^{-\delta-\beta'}(1-ks)^{-\gamma-\beta'} F\left(1, \beta'', \beta''-\beta+1, \frac{s}{x}\right) ds \\ -k^{\beta} J^{\beta''-\beta-1}(k)\int\limits_0^1 s^{\beta''-\beta}(1-s)^{-\gamma-\beta''}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\delta-\beta'} F\left(1, \beta'', \beta''-\beta+1, \frac{s}{kx}\right) ds \end{array}\right\}}{x^{\beta''} e^{-(\delta+\beta'+\beta'')i\pi} k^{-\gamma-1}(1-k)^{\beta-\beta'}\, \Pi(-\delta-\beta')\, \Pi(-\gamma-\beta') : \Pi(\beta''-1)}.$$

Die beiden anderen zum Punkte ∞ gehörigen Zweige $Q^{\infty,\beta}(x)$, $Q^{\infty,\beta'}(x)$ sind Gauss'sche Reihen. Nämlich

$$21\text{a})\quad Q^{\infty,\beta}(x) = \Pi(\beta-1)(1-x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma+\beta, \beta-\beta'+1, \frac{k-1}{k(1-x)}\right),$$

$$21\text{b})\quad Q^{\infty,\beta'}(x) = \Pi(\beta'-1)(1-x)^{-\beta'} F\left(\beta', \gamma+\beta', \beta'-\beta+1, \frac{k-1}{k(1-x)}\right).$$

Um die Function Q nach Potenzen von $1-x$ zu entwickeln, kann man

$$y = \Sigma c_n \frac{(1-x)^n k^n}{(k-1)^n} = \Sigma c_n x_3{}^n$$

setzen und erhält so für c_n die Recursionsformel 10b), welche infolge der Bedingungen 11) und 11a) die Gestalt annimmt

$$22)\quad \begin{aligned} &c_{n+2}\, \Pi(n+2)\,(n+2-\gamma) + c_n\, \Pi(n) \left(1-\frac{1}{k}\right)(n+2-\alpha)(n+\beta)(n+\beta') \\ &- c_{n+1}\, \Pi(n+1)\left[\left(1+1-\frac{1}{k}\right)(n+1)^2 - \left\{\delta+\gamma-1\right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + (\alpha+\gamma-1)\left(1-\frac{1}{k}\right)\right\}(n+1) + \beta\beta' + \left(1-\frac{1}{k}\right)\gamma(\alpha-1)\right] = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung besitzt die particuläre Lösung

$$23)\qquad c_n = \frac{\Pi(n+\beta-1)\,\Pi(n+\beta'-1)}{\Pi(n)\,\Pi(n-\gamma)}.$$

Kennt man aber von einer Recursionsformel zweiter Ordnung

$$24)\qquad \varphi a_{n+2} + \psi a_{n+1} + \chi a_n = 0$$

eine Lösung a'_n, so erhält man leicht die zweite durch eine einfache Summation, wenn man $a_n = a'_n \varrho_n$ setzt. Durch Combination der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi a'_{n+2}\varrho_{n+2} + \psi a'_{n+1}\varrho_{n+1} + \chi a'_n \varrho_n &= 0, \\ \varphi a'_{n+2}\varrho_{n+1} + \psi a'_{n+1}\varrho_{n+1} + \chi a'_n \varrho_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

erhält man die neue

$$\varphi a'_{n+2}(\varrho_{n+2} - \varrho_{n+1}) - \chi a'_n(\varrho_{n+1} - \varrho_n) = 0,$$

die in Bezug auf die Differenz $\varrho_{n+1} - \varrho_n = \Delta\varrho_n$ linear ist. Hat man hieraus $\Delta\varrho_n$ gefunden, so ist dann die Lösung von 24)

$$a_n = a'_n \Sigma \Delta\varrho_n.$$

Im vorliegenden Falle ist von der Recursionsformel zweiter Ordnung 22) die particuläre Lösung

$$c'_n = \frac{\Pi(n+\beta-1)\,\Pi(n+\beta'-1)}{\Pi(n)\,\Pi(n-\gamma)}$$

bekannt und man hat, wenn das Integral gleich $c'_n \varrho_n$ gesetzt wird, für $\Delta \varrho_n$ die Gleichung

$$(n+\beta+1)(n+\beta'+1)\,\Delta\varrho_{n+1} - \left(1-\frac{1}{k}\right)(n+2-\alpha)(n+1-\gamma)\,\Delta\varrho_n = 0,$$

woraus folgt

$$\Delta\varrho_n = \left(1-\frac{1}{k}\right)^n \frac{\Pi(n-\gamma)\,\Pi(n+1-\alpha)}{\Pi(n+\beta)\,\Pi(n+\beta')}$$

und hieraus

$$25)\qquad \varrho_n = \left(1-\frac{1}{k}\right)^n \int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{ds\,d\sigma\, s^{n-\gamma}(1-s)^{\gamma+\beta-1}\,\sigma^{n+1-\alpha}(1-\sigma)^{\alpha+\beta'-1}}{1-\left(1-\frac{1}{k}\right)s\sigma},$$

also

$$26)\qquad c_n = c'_n \varrho_n =$$

$$\frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)^n \Pi(n+\beta-1)\,\Pi(n+\beta'-1)}{\Pi(n)\,\Pi(n-\gamma)} \int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{ds\,d\sigma\, s^{n-\gamma}\,\sigma^{n+1-\alpha}(1-s)^{\gamma+\beta-1}(1-\sigma)^{\alpha+\beta'-1}}{1-\left(1-\frac{1}{k}\right)s\sigma}.$$

Somit findet man für die drei Zweige der Function Q im Punkte Eins die Ausdrücke

$$27)\qquad Q^{1,0}(x) = \frac{\Pi(\beta-1)\,\Pi(\beta'-1)}{e^{\gamma i\pi}\,\Pi(-\gamma)} \int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{ds\,d\sigma\, s^{-\gamma}\sigma^{1-\alpha} F[\beta,\beta',1-\gamma,(1-x)s\sigma]}{\left[1-\left(1-\frac{1}{k}\right)s\sigma\right](1-s)^{\delta+\beta'}(1-\sigma)^{1-\alpha-\beta'}},$$

$$27\text{a})\qquad Q^{1,0'}(x) = \left(\frac{1}{k}-1\right)^{\gamma} \int_0^1 \frac{s^{\beta-1}(1-s)^{-\gamma-\beta}\left(1-\frac{k(1-x)}{k-1}s\right)^{-\beta'} ds}{\Pi(-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')},$$

$$27\text{b})\qquad Q^{1,\gamma}(x) = (x-1)^{\gamma} \int_0^1 \frac{s^{-\beta'-\delta}(1-s)^{-\beta}\left(1-\frac{k(1-x)}{k-1}s\right)^{-\gamma-\beta'} ds}{\Pi(-\beta)\,\Pi(-\delta-\beta')}.$$

Im Punkte $1:k$ hat man die drei Ausdrücke

$$28)\qquad Q^{1:k,0}(x) = \frac{\Pi(\beta-1)\,\Pi(\beta'-1)}{e^{\delta i\pi}\,\Pi(-\delta)} \int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{ds\,d\sigma\, s^{-\delta}\sigma^{1-\alpha} F[\beta,\beta',1-\delta,(1-kx)s\sigma]}{[1-(1-k)s\sigma](1-s)^{\gamma+\beta'}(1-\sigma)^{1-\alpha-\beta'}},$$

$$28\text{a)}\quad Q^{1:k,0'}(x) = (k-1)^{\delta} \int_0^1 \frac{s^{\beta-1}(1-s)^{-\delta-\beta}\left(1-\frac{1-kx}{1-k}\,s\right)^{-\beta'}}{\Pi(-\beta')\,\Pi(-\delta-\beta)},$$

$$28\text{b)}\quad Q^{1:k,\delta}(x) = \left(\frac{kx-1}{k}\right)^{\delta} \int_0^1 \frac{s^{-\beta'-\gamma}(1-s)^{-\beta}\left(1-\frac{1-x}{1-k}\,s\right)^{-\delta-\beta'} ds}{\Pi(-\beta)\,\Pi(-\gamma-\beta')}.$$

Hiermit ist für jeden Zweig in den Punkten 0, ∞, 1, $1:k$ wenigstens eine Form der Darstellung aufgestellt. Es lassen dieselben, wie man leicht sieht, eine grosse Menge anderer Formen zu, von denen man einige durch blosse Buchstabenvertauschungen, nämlich durch Vertauschung von β und β' erhalten kann. Dann müssen jedoch bei einigen die constanten Factoren neu bestimmt werden, wenn sie den für sie festgestellten Bedingungen gemäss sein sollen.
