

Werk

Titel: Zeitschrift für Mathematik und Physik

Verlag: Teubner

Jahr: 1876

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 MATH I, 755:21

Werk Id: PPN599415665_0021

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN599415665_0021 | LOG_0017

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

VII.

Ueber die Grundhypothese der Molecularmechanik.

Von

W. GOSIEWSKI

in Warschau.

In der bisherigen Behandlung von Problemen der Molecularmechanik nimmt man, von der Atomtheorie ausgehend, an, dass das Differenzieren und Integriren über den vom Körper erfüllten Raum zulässig sei, ohne aber im Voraus zu entscheiden, ob ein derartiges Verfahren nicht mit dem Wesen der Theorie in directem Widerspruch stehe.

Zur Beseitigung dieser Unklarheit liesse sich folgende Frage stellen: Welchen Bedingungen muss ein Körper, als System materieller Punkte betrachtet, genügen, damit bei der Bestimmung der Gleichgewichts- oder Bewegungsgleichungen es möglich wäre, über den von ihm erfüllten Raum zu differenzieren und zu integriren oder, was auf dasselbe hinauskommt, damit es möglich wäre, ihn durch eine continuirliche Materie zu ersetzen?

Die Resultate der Lösung dieser Frage, die den Inhalt der vorliegenden Schrift bilden, dürften bei Aufstellung von Hypothesen über die Structur der Materie, sobald nur das Differenzieren und Integriren über den von ihr eingenommenen Raum zugelassen wird, nicht unberücksichtigt bleiben. Hieraus dürfte auch der Titel, den ich meiner Arbeit gegeben, motivirt erscheinen.

Das bekannte d'Alembert'sche Princip, nach welchem man jederzeit von den Gleichgewichtsgleichungen zu denen der Bewegung übergehen kann, erlaubt uns, diese Untersuchung auf den Fall des Gleichgewichts zu beschränken.

§ 1.

Denken wir uns einen continuirlichen und starren Körper mit der Oberfläche ω und einer Dichtigkeit ρ . Beziehen wir diesen Körper

auf ein im Raume unveränderliches rechtwinkliges Coordinatensystem, und es seien x, y, z die Coordinaten eines seiner Punkte M . Es seien X_0, Y_0, Z_0 die auf dieselben Axen bezogenen Componenten der auf die Masseneinheit des Elements $\rho dx dy dz$ wirkenden Kräfte. Es werde ferner angenommen, dass ρ und X_0, Y_0, Z_0 continuirliche Functionen von x, y, z sind. Schliesslich mögen noch auf die Oberfläche des Körpers Druckkräfte wirken, deren Componenten für die Einheit des Flächenelements $d\omega X, Y, Z$ seien.

Befinden sich nun diese sämtlichen Kräfte im Gleichgewicht, so muss in diesem Falle die Summe ihrer virtuellen Momente $= 0$ sein. Wenn wir also die Projectionen der virtuellen Verschiebungen im Punkte M durch $\delta x, \delta y, \delta z$ bezeichnen, so liesse sich obige Bedingung in folgender Weise darstellen:

$$1) \iiint dx dy dz \rho (X_0 \delta x + Y_0 \delta y + Z_0 \delta z) + \int d\omega (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = 0,$$

wo sich das erste Integral über das ganze Volumen, das zweite über die ganze Oberfläche des Körpers erstreckt.

Die hier vorkommenden Grössen $\delta x, \delta y, \delta z$ sind nicht willkürlich, sondern müssen den Gleichungen, die aus den Bedingungen der Continuirlichkeit und der Starrheit folgen, genügen. Um diese Gleichungen zu erhalten, bemerken wir, dass der Punkt $M(x, y, z)$ dem Elemente $\rho dx dy dz$ angehört, und nehmen wir in diesem Elemente noch zwei andere Punkte α und β , deren Coordinaten wir bezüglich durch x', y', z' und x'', y'', z'' bezeichnen wollen. Der gegenseitige Abstand dieser zwei Punkte sei r ; es ist dann

$$r = \{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2\}^{1/2}.$$

Setzen wir ferner

$$x' - x'' = ar, \quad y' - y'' = br, \quad z' - z'' = cr,$$

wo die Grössen a, b, c der Gleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

genügen müssen.

Wäre nicht der Abstand r unveränderlich, so würde er wegen der virtuellen Verschiebungen folgende Aenderung erleiden müssen:

$$\delta r = a \delta(x' - x'') + b \delta(y' - y'') + c \delta(z' - z'').$$

Da die Punkte α und β dem Punkte M unendlich nahe sind, so ist wegen der vorausgesetzten Continuität

$$\delta(x' - x'') = r \left(a \frac{d\delta x}{dx} + b \frac{d\delta x}{dy} + c \frac{d\delta x}{dz} \right),$$

$$\delta(y' - y'') = r \left(a \frac{d\delta y}{dx} + b \frac{d\delta y}{dy} + c \frac{d\delta y}{dz} \right),$$

$$\delta(z' - z'') = r \left(a \frac{d\delta z}{dx} + b \frac{d\delta z}{dy} + c \frac{d\delta z}{dz} \right).$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichungen nimmt der obige Werth von δr folgende Form an:

$$2) \quad \delta r = r \left\{ a^2 \frac{d\delta x}{dx} + b^2 \frac{d\delta y}{dy} + c^2 \frac{d\delta z}{dz} + bc \left(\frac{d\delta y}{dz} + \frac{d\delta z}{dy} \right) + ca \left(\frac{d\delta z}{dx} + \frac{d\delta x}{dz} \right) + ab \left(\frac{d\delta x}{dy} + \frac{d\delta y}{dx} \right) \right\}.$$

Die Grössen $\frac{d\delta x}{dx}$, \dots , $\frac{d\delta y}{dz}$, $\frac{d\delta z}{dy}$, \dots sind nur von den Coordinaten des Punktes M abhängig und enthalten keine der Grössen r , a , b , c .

Da das Element starr ist, so muss für alle Werthe der Grössen r , a , b , c , welche die Länge und die Richtung des Linearelements in der Nähe des Punktes M bestimmen, die Grösse δr der Null gleich sein. Dies kann aber nur stattfinden, wenn folgende Gleichungen bestehen:

$$3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\delta x}{dx} = 0, \quad \frac{d\delta y}{dy} = 0, \quad \frac{d\delta z}{dz} = 0, \\ \frac{d\delta y}{dz} + \frac{d\delta z}{dy} = 0, \quad \frac{d\delta z}{dx} + \frac{d\delta x}{dz} = 0, \quad \frac{d\delta x}{dy} + \frac{d\delta y}{dx} = 0. \end{array} \right.$$

Man sieht also zunächst, dass zur Bestimmung der Starrheit eines unendlich kleinen Elements sechs Gleichungen 3) erforderlich sind.

Wollten wir also die Zahl n der materiellen Punkte eines unendlich kleinen Systems bestimmen, welches unserem Elemente entspricht, so würden wir $n=4$ finden, denn die Anzahl der Starrheitsbedingungen eines Systems von n Punkten ist $3n-6$, und in unserm Falle ist $3n-6=6$, also $n=4$.

Hieraus folgt offenbar, dass, damit ein als System materieller Punkte gedachter Körper durch eine continuirliche Materie ersetzt werden könne, ein unendlich kleines Element dieser Materie einem unendlich kleinen, aus vier materiellen Punkten bestehenden System im Körper entsprechen muss.

Ein solches System nenne ich Molecul, jeden seiner vier Punkte Atom;* ρ nehme ich als Dichtigkeit und $dx dy dz$ als Volumen des Moleculs an, da diese Grössen der Dichtigkeit und dem Volumen des das Molecul ersetzenden Elements gleich sind.

Die obige Beweisführung ist gültig für Elemente von beliebiger Gestalt; der Einfachheit wegen habe ich das Element als rechtwinklig betrachtet, also sein Volumen gleich $dx dy dz$ angenommen.

* Obige Bezeichnungen habe ich gewählt auf Grund einer gewissen Analogie mit der chemischen Theorie über die Structur der Gase, nach welcher ein Molecul eines einfachen Gases als aus vier Atomen bestehend angenommen wird.

§ 2.

Die Gleichungen 3) sind Starrheitsbedingungen eines continuirlichen Körpers in dem Punkte M ; wenn aber dieser Körper nur eine aus den wie oben definirten Moleculen bestehende Materie ersetzt, so darf man diese Bedingungen durch sechs Gleichungen von der Form

$$\delta r = 0$$

darstellen, die die Unveränderlichkeit der sechs gegenseitigen Abstände r der vier, das Molecul in diesem Punkte bildenden Atome bestimmen

Wir multipliciren jede dieser Gleichungen mit einem noch zu bestimmenden Factor $\lambda dx dy dz$; es ergibt sich durch Addition dieser Gleichungen

$$dx dy dz \Sigma \lambda \delta r = 0,$$

wo $\Sigma \lambda \delta r$ die Summe der sechs Glieder $\lambda \delta r$ darstellt.

Addiren wir zu der linken Seite der Gleichung 1) das über das ganze Volumen ausgedehnte Integral

$$\iiint dx dy dz \Sigma \lambda \delta r,$$

so erhalten wir eine neue Gleichung

$$4) \left\{ \begin{aligned} &\iiint dx dy dz \rho (X_0 \delta x + Y_0 \delta y + Z_0 \delta z) + \iiint dx dy dz \Sigma \lambda \delta r \\ &+ \int d\omega (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = 0, \end{aligned} \right.$$

die für alle Werthe der Grössen $\delta x, \delta y, \delta z$ stattfindet und die Bedingungen des Gleichgewichts in jedem Punkte eines solchen starren Körpers ausdrückt, welcher durch eine continuirliche Materie ersetzt werden kann.

Führt man in $\Sigma \lambda \delta r$ statt δr den Werth 2) ein und bemerkt noch, dass die Grössen $\frac{d \delta x}{dx}, \dots, \frac{d \delta y}{dz} + \frac{d \delta z}{dy}, \dots$ denselben Werth für alle

Glieder der Summe Σ besitzen, so findet man ohne Schwierigkeit

$$dx dy dz \Sigma \lambda \delta r = dx dy dz \left\{ \begin{aligned} &N_1 \frac{d \delta x}{dx} + T_1 \left(\frac{d \delta y}{dz} + \frac{d \delta z}{dy} \right) \\ &+ N_2 \frac{d \delta y}{dy} + T_2 \left(\frac{d \delta z}{dx} + \frac{d \delta x}{dz} \right) \\ &+ N_3 \frac{d \delta x}{dz} + T_3 \left(\frac{d \delta z}{dy} + \frac{d \delta y}{dx} \right) \end{aligned} \right\},$$

wo die Grössen N_i und T_i folgende Werthe haben:

$$5) \left\{ \begin{aligned} N_1 &= \Sigma \lambda r a^2, & T_1 &= \Sigma \lambda r b c, \\ N_2 &= \Sigma \lambda r b^2, & T_2 &= \Sigma \lambda r c a, \\ N_3 &= \Sigma \lambda r c^2, & T_3 &= \Sigma \lambda r a b. \end{aligned} \right.$$

Wir integriren die beiden Seiten dieser Gleichung, indem wir das Integral über das ganze Volumen des Körpers erstrecken und auf der

rechten Seite die theilweise Integration anwenden. Auf diese Weise gelangen wir zu folgender Gleichung:

$$\begin{aligned} & \iiint dx dy dz \Sigma \lambda \delta r \\ = & - \iiint dx dy dz \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} \right) \delta x \\ & + \left(\frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} \right) \delta y \\ & + \left(\frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} \right) \delta z \end{aligned} \right\} \\ & + \int d\omega \left\{ \begin{aligned} & (m_1 N_1 + m_2 T_3 + m_3 T_2) \delta x \\ & + (m_1 T_3 + m_2 N_2 + m_3 T_1) \delta y \\ & + (m_1 T_2 + m_2 T_1 + m_3 N_3) \delta z \end{aligned} \right\}, \end{aligned}$$

wo die Grössen m_i die Cosinuse der Winkel bedeuten, welche die äussere Normale zur Oberfläche des Körpers mit den Coordinatenaxen bildet.

Führt man den Werth der ersten Seite dieser Gleichung in die Gleichung 4) ein und bemerkt, dass diese letztere für alle Werthe der Grössen δx , δy , δz bestehen soll, so erhält man aus ihr folgende neue Gleichungen:

$$6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} &= \rho X_0, \\ \frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} &= \rho Y_0, \\ \frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} &= \rho Z_0, \end{aligned} \right.$$

$$7) \quad \left\{ \begin{aligned} m_1 N_1 + m_2 T_3 + m_3 T_2 + X &= 0, \\ m_1 T_3 + m_2 N_2 + m_3 T_1 + Y &= 0, \\ m_1 T_2 + m_2 T_1 + m_3 N_3 + Z &= 0. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen 6) gelten als Gleichgewichtsbedingungen für jeden Punkt im Innern des Körpers, die Gleichungen 7) als Gleichgewichtsbedingungen für jeden Punkt seiner Oberfläche.

Aehnliche Gleichungen erhält man, wie bekannt, in der Elasticitätstheorie, und zwar auf einem andern Wege. Dort werden auch die geometrischen Eigenschaften der Functionen N_i , T_i untersucht, die wir hier als bekannt übergehen. Wir erwähnen nur, dass die Werthe dieser Grössen im Punkte M gleich sind den Componenten der Druckkräfte, die auf die Flächeneinheit der drei ebenen, in diesem Punkte sich rechtwinklig schneidenden Elemente wirken, dass sie also die Parameter des von Lamé sogenannten Elasticitätsellipsoids sind.

§ 3.

Es ist leicht zu ersehen, dass die Grössen $\lambda dx dy dz$ die Intensität der zwischen je zwei Atomen eines Moleculs wirkenden Kräfte aus-

drücken. Diese Kräfte hindern die gegenseitige Annäherung und Entfernung der Atome, was nothwendigerweise unter der Wirkung äusserer Kräfte geschehen müsste, wenn die Atome frei wären. Deshalb werden wir diese Kräfte Starrheitskräfte des Moleculs nennen.

Wenn je zwei Atome des Moleculs sich zu nähern streben, dann wird die Starrheitskraft abstossend, welche wir in diesem Falle als positiv betrachten wollen; im entgegengesetzten Falle wäre dieselbe somit als negativ anzunehmen.

Bezeichnen wir durch m, m', m'', m''' die Massen der das Molecul bildenden Atome, durch $\Sigma m = \rho dx dy dz$ die Masse des Moleculs selbst, durch φ die der Kraft $\lambda dx dy dz$ entsprechende relative Beschleunigung der zwei Atome m und m' , so ist

$$8) \quad \lambda dx dy dz = \frac{m m' \varphi}{m + m'}$$

Die Massen der Atome kann man in Theilen der Moleculmasse auf folgende Weise ausdrücken:

$$m = \varepsilon \rho dx dy dz, \quad m' = \varepsilon' \rho dx dy dz, \dots,$$

wo $\varepsilon, \varepsilon', \dots$ positive echte Brüche sind, die der Bedingung

$$\Sigma \varepsilon = 1$$

genügen.

Führt man diese Bezeichnungen in die Gleichung 8) ein, so erhält man

$$\lambda = \frac{\varepsilon \varepsilon' \rho \varphi}{\varepsilon + \varepsilon'}$$

Die Druckkräfte N_i, T_i 5) sind lineare Functionen der Grössen λr oder eigentlich ihrer Grenzen, $\lim(\lambda r)$, welchen die Grössen sich nähern, wenn das continuirliche Element unbegrenzt abnimmt; und da dieselben Druckkräfte den Gleichungen 6) und 7) genügen, so müssen die genannten Grenzen von Null verschiedene Werthe besitzen.

Nehmen wir also an, dass

$$9) \quad \lim(\lambda r) = \frac{\varepsilon \varepsilon' \rho}{\varepsilon + \varepsilon'}, \quad \lim(\varphi r) = \frac{\varepsilon \varepsilon' \rho \psi}{\varepsilon + \varepsilon'},$$

so finden wir aus 8)

$$10) \quad \lambda dx dy dz = \frac{m m'}{m + m'} \frac{\psi}{r},$$

wo $\psi = \lim(\varphi r)$ ist.

Der Ausdruck 10) bezieht sich auf das Molecul, welches wir hinfort durch das Symbol

$$(m, r) = (\varepsilon \rho dx dy dz, r)$$

bezeichnen wollen, und dessen Dichtigkeit nach der Definition ρ und dessen Volumen $dx dy dz$ ist.

Ein diesem Molecul ähnliches System kann man durch das Symbol

$$\left(\frac{m}{k l^3}, \frac{r}{l} \right) = \left(\varepsilon \frac{\rho}{k} \frac{dx}{l} \frac{dy}{l} \frac{dz}{l}, \frac{r}{l} \right)$$

darstellen, indem man unter kl^3 das Verhältniss der einander entsprechenden Massen und unter l das Verhältniss der geometrischen Aehnlichkeit versteht. Die Dichtigkeit dieses Systems ist $\frac{\rho}{k}$, das Volumen aber $\frac{dx}{l} \frac{dy}{l} \frac{dz}{l}$.

Nimmt man an, dass diese Dichtigkeit und dieses Volumen gleich 1 sind, d. i.

$$\frac{\rho}{k} = 1, \quad \frac{dx}{l} \frac{dy}{l} \frac{dz}{l} = 1,$$

und schreibt man

$$\frac{r}{l} = R,$$

so erhält man ein neues System mit dem Symbol

$$(\varepsilon, R),$$

welches ich Moleculeinheit nennen will.

Das Molecul (m, r) und seine Einheit (ε, R) sind ähnliche Systeme: das erste ein unendlich kleines, das zweite ein endliches System. Das Verhältniss ihrer Massen ist $kl^3 = \rho dx dy dz = \Sigma m$, und das Verhältniss ihrer geometrischen Aehnlichkeit ist $l = (dx dy dz)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{\Sigma m}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Hieraus folgen die Gleichungen

$$11) \quad m = \varepsilon \Sigma m, \dots; \quad r = R \left(\frac{\Sigma m}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}, \dots,$$

welche die Relationen zwischen den Atomsmassen und Atomsabständen des Moleculs einerseits, und den Punktmassen und Punktabständen seiner Einheit andererseits darstellen.

Um die entsprechenden Relationen zwischen den Starrheitskräften des Moleculs und jenen seiner Einheit zu finden, bemerken wir, dass die Grösse ψ , da sie dem $\lim(\varphi r)$ gleich ist, denselben Werth für alle der Moleculeinheit ähnliche Systeme behält, also der Ausdruck

$$\frac{\varepsilon \varepsilon' \psi}{\varepsilon + \varepsilon' R},$$

den man durch Ersetzung der Massen m durch ε und des Abstandes r durch R aus 10) erhält, die Intensität der Starrheitskraft der Moleculeinheit darstellt.

Berücksichtigt man also in Gleichung 10) die Gleichungen 11), d. h. setzt man

$$12) \quad \lambda dx dy dz = (\Sigma m) \left(\frac{\rho}{\Sigma m}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\varepsilon \varepsilon' \psi}{\varepsilon + \varepsilon' R},$$

so ergibt sich, dass man die Intensität der Starrheitskraft des Moleculs (m, r) erhält, wenn man die Starrheitskraft seiner Einheit mit dem Factor $(\Sigma m) \left(\frac{\rho}{\Sigma m}\right)^{\frac{1}{3}}$ multiplicirt.

Es hängen also die Intensitäten der Starrheitskräfte eines Moleculs von den Grössen ψ ab, die zu seiner Einheit gehören und unbestimmte Werthe besitzen. Um uns von dieser Unbestimmtheit zu überzeugen, ersetzen wir in den Gleichungen 5) die Grössen λr durch ihre Grenzwerte 9). Dann erhalten wir sechs lineare Gleichungen, aus welchen jede der sechs Grössen ψ als lineare Functionen der sechs Grössen N_i , T_i sich bestimmen lässt. Da aber die Werthe der letzten Grössen im Punkte M nur den drei Gleichungen 6) genügen, so bleiben sie und folglich die Grössen ψ unbestimmt.

§ 4.

Die Zahl der Starrheitskräfte eines aus n materiellen Punkten bestehenden starren Systems ist gleich der Zahl der Starrheitsbedingungen, also $= 3n - 6$.* Die Zahl der inneren Kräfte eines freien Systems ist gleich $\frac{n(n-1)}{2}$; wenn also die Zahl der Starrheitskräfte eines starren Systems und die der inneren eines freien gleich sein sollen, so muss die Zahl n der Gleichung

$$3n - 6 = \frac{n(n-1)}{2}$$

genügen. Diese Gleichung hat zwei Lösungen: $n=3$ und $n=4$. Fügt man noch den evidenten Fall $n=2$ hinzu, so sieht man, dass nur in den besprochenen drei Fällen die Zahl der Starrheitskräfte gleich ist der Zahl der inneren Kräfte, und dass der Uebergang von dem starren zu dem freien System gleichbedeutend ist mit der Vertauschung der Starrheitskräfte und der inneren Kräfte.

Der Umstand also, dass jedes Molecul ein aus vier Atomen bestehendes System ist, erlaubt uns, die Starrheitskräfte dieses Moleculs durch innere Kräfte zu ersetzen und demnach die oben gefundenen Resultate auch in dem Falle anzuwenden, in welchem die Atomabstände veränderlich sind.

Die inneren Kräfte des Moleculs nennen wir Atomkräfte.

Das Gesetz der Intensität der Atomkräfte ist in der Formel 12) enthalten, wo jedoch die Grösse ψ nicht unbestimmt ist, wie im Falle

* Aus der Mechanik ist bekannt, dass bei Aufstellung der Gleichgewichts- oder Bewegungsgleichungen für jeden Punkt eines unveränderlichen Systems von n materiellen Punkten in diese Gleichungen soviel unbestimmte Grössen einzuführen sind, als Gleichungen erforderlich zur analytischen Bestimmung der Unveränderlichkeit des Systems, d. h. $3n - 6$. Ich erlaube mir, diese Grössen „Starrheitskräfte“ zu nennen, namentlich weil ich dasselbe schon früher für das Molecul gethan habe, welches in dieser Beziehung als besonderer Fall eines solchen Systems anzusehen ist.

der Starrheit, sondern im Gegentheil bestimmte Werthe annimmt, welche für verschiedene Körper verschiedene sind.

Die Bestimmung des Werthes von ψ für vollkommene Gase, unzusammendrückbare Flüssigkeiten und feste elastische Körper bietet keine Schwierigkeit dar. Wir übergehen jedoch diese Entwicklung in vorliegender Arbeit und beschränken uns auf die Untersuchung eines sehr allgemeinen und wichtigen Falles, aus welchem erhellen wird, dass das Gesetz der atomischen Wirkungen von dem Gesetze der Massenwirkung aus endlicher Entfernung wesentlich verschieden ist.

Das letztgenannte Gesetz kann man auf die Moleculereinheit, wie auf ein endliches System anwenden. Wir setzen daher voraus, wie es allgemein angenommen wird, dass jede zwei Punkte dieses Systems in der Richtung ihrer Verbindungsgeraden aufeinander wirken, und zwar mit einer Kraft, deren Stärke proportional ist dem Producte ihrer Massen und irgend einer Function ihrer Entfernung, d. h. wir nehmen an, dass zwei Punkte mit den Massen ε und ε' , deren gegenseitiger Abstand gleich R ist, mit der Kraft $\varepsilon\varepsilon'F(R)$ aufeinander wirken. Wir wollen nun die Grösse der Atomkraft für entsprechende Massen m und m' im Molecul (m, r) bestimmen.

Die Aufgabe löst sich einfach, wenn man in der Formel 12) den Factor $\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'} \frac{\psi}{R}$ durch den jetzt für ihn angenommenen Werth $\varepsilon\varepsilon'(FR)$ ersetzt und noch dabei die Gleichungen 11) berücksichtigt. Als Resultat finden wir den Ausdruck

$$\frac{mm'}{\Sigma m} \left(\frac{\rho}{\Sigma m} \right)^{\frac{1}{3}} F \left\{ \left(\frac{\rho}{\Sigma m} \right)^{\frac{1}{3}} r \right\},$$

welcher die allgemeine Form der Atomkräfte des Moleculs (m, r) darstellt in der Voraussetzung, dass die allgemeine Form für die Intensität der inneren Kräfte seiner Einheit (ε, R) in der Formel $\varepsilon\varepsilon'F(R)$ enthalten ist, die wegen der Bedingung $\Sigma\varepsilon = 1$ mit dem Ausdrücke

$$\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\Sigma\varepsilon} F(R)$$

äquivalent ist.

Der Vergleich der Formeln

$$\frac{mm'}{\Sigma m} \left(\frac{\rho}{\Sigma m} \right)^{\frac{1}{3}} F \left\{ \left(\frac{\rho}{\Sigma m} \right)^{\frac{1}{3}} r \right\} \text{ und } \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\Sigma\varepsilon} F(R)$$

zeigt genügend, worin der Unterschied zwischen den Gesetzen der atomischen Wirkungen und der Massenwirkungen in endlicher Entfernung besteht. Dieser Unterschied verschwindet nur in einem einzigen Falle, wenn nämlich $F(R) = \frac{k}{R}$ ist, wo k eine Constante bedeutet;*

* Dieser Fall entspricht den permanenten Gasen, wenn k positiv ist.

denn dann nehmen die beiden Ausdrücke folgende entsprechenden Gestalten an:

$$\frac{mm' k}{\Sigma m r} \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon \varepsilon' k}{\Sigma \varepsilon R}$$

und werden miteinander ganz übereinstimmend.

Fasst man aber die allgemeinen Resultate der vorigen Betrachtungen kurz zusammen, ohne willkürliche Hypothesen über die inneren Kräfte der Moleculeinheit einzuführen, so gelangt man zum folgenden Satze:

Soll es bei der Bestimmung der Gleichgewichts- oder Bewegungsgleichungen eines als materielles Punktsystem betrachteten Körpers zulässig sein, denselben durch eine continuirliche Materie zu ersetzen, muss dieser Körper folgenden Bedingungen genügen: 1. der Körper muss ein aus einer unendlichen Anzahl Atome (materieller Punkte) bestehendes System sein und diese Atome müssen so gelagert sein, dass das möglich kleinste Volumen des Körpers, d. h. ein Molecul, nicht weniger und nicht mehr als vier Atome enthalte; 2. nur Atome, welche ein und dasselbe Molecul bilden, können aufeinander anziehend, resp. abstossend wirken, und zwar in den Richtungen ihrer Verbindungsgeraden mit Kräften, deren Intensitäten die Formel

$$(\Sigma m) \left(\frac{q}{\Sigma m} \right)^{\frac{2}{3}} f$$

darstellt, wo f die Intensitäten der entsprechenden Kräfte in der Moleculeinheit bezeichnet.

Wir haben unsere Frage in der Voraussetzung behandelt, dass die Grundhypothesen der Euklidischen Geometrie auch für das unendlich Kleine gelten, d. h. dass die Ebenheit des Raumes auch in unendlich kleinen Theilen stattfindet. Aus den Untersuchungen Riemann's ist aber bekannt, dass diese Voraussetzung für das unendlich Kleine ungenügend oder zu beschränkt ist; um also unsere Aufgabe in völliger Allgemeinheit lösen zu können, müsste man sie in der Voraussetzung behandeln, dass der Raum im unendlich Kleinen nicht mehr eben ist. Doch bis jetzt ist, wie mir scheint, eine solche Behandlung dieser Frage den gegenwärtigen Hilfsmitteln der Analysis wenig zugänglich. Die Resultate aber, die wir in der speciellen Voraussetzung erhalten haben, richten schon unser Augenmerk auf jene allgemeinen Resultate und rechtfertigen den Gedanken, dass die Ideen des genannten grossen Forschers ganz besonders im Gebiete der Molecularmechanik ihre Anwendung finden könnten.