Werk

Titel: Zeitschrift für Mathematik und Physik

Verlag: Teubner

Jahr: 1876

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 MATH I, 755:21

Werk Id: PPN599415665_0021

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN599415665_0021|LOG_0018

Kleinere Mittheilungen.

V. Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers einer endlichen Zahl von Beobachtungen.

S. 145 flg. des XX. Jahrgangs dieser Zeitschrift gab ich einige Bemerkungen über die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers, wenn die Zahl der Beobachtungen endlich ist. Diese Bemerkungen hat Herr Helmert S. 300 flg. einer strengen Kritik unterzogen, welche erst jetzt nach langer Abwesenheit von mir gelesen wurde.

Ich stimme Herrn Helmert gleich zu, dass ich mich bei der Berechnung des mittlern Werthes von ω^3 geirrt habe. Die richtige Berechnung des mittlern Werthes einer ungeraden Potenz von ω würde, glaube ich, nicht sehr einfach sein. Für die vierte Potenz von ω ist diese Berechnung leicht genug, aber sie führt nicht zu einem brauchbaren Ausdrucke, weil dieser mittlere Werth von ω^4 auf ziemlich complicirte Weise von der Anzahl der Beobachtungen abhängig ist. Nur wundert es mich, dass ich für den mittlern Werth von ω^3, bei dessen Ableitung von mir, wie Herr Helmert richtig bemerkt, irrigerweise sowohl die negativen als die positiven Werthe von ω berücksichtigt sind, nicht Null bekommen habe. Wem dies zuzuschreiben sei, ist mir nicht deutlich. Es kann unmöglich davon herrühren, dass vielleicht der Behauptung Helmert's gemäss für gleichgrosse positive und negative Werthe von ω die Wahrscheinlichkeit nicht dieselbe sei. Denn bei der Berechnung von $\overline{\omega^3}$ führen wir für die Mittelwerthe der verschiedenen σ_m die S_m ein, und dabei setzen wir gerade voraus, die positiven und negativen ω seien gleich wahrscheinlich. Der einzige Grund für die Abweichung von der von mir berechneten $\overline{\omega^3}$ von Null kann in der Art der Berechnung gelegen sein. Aber ist diese Berechnungsweise fehlerhaft, dann büsst der berechnete Werth von $\overline{\omega^2}$ auch viel von dem bis jetzt darein gesetzten Zutrauen ein, denn diese Grösse wird auf dieselbe Weise berechnet wie $\overline{\omega^3}$. Die Sache ist mir noch nicht ganz klar.

Zweitens muss ich auch gestehen, dass die Gauss'sche Ableitung des wahrscheinlichen Fehlers des aus der Summe der m^{ten} Potenzen der bei den Beobachtungen gemachten Fehler berechneten Werthes des wahrscheinlichen Fehlers des Resultates der Beobachtungen vollständiger und weniger willkürlich ist, als ich meinte. Dass ich dies gemeint habe, ist nicht so sehr befremdend, wenn man erwägt, dass ich hauptsächlich die unvollständigen Beweise bei Sawitsch und Helmert im Auge hatte. Weil nun Gauss den Beweis der von ihm benützten Sätze unterdrückt und die Laplace'schen Betrachtungen, worauf sich die Gauss'sche Ableitung stützt, mir damals nicht bekannt waren, konnte ich leicht der Meinung verfallen, auch bei Gauss sei die Beweisführung unvollständig. Nachdem ich jetzt die Laplace'schen Betrachtungen kennen gelernt habe, denke ich über den Gauss'schen Beweis viel günstiger.

Durch diese beiden Irrthümer ist aber der Zweck meiner Bemerkungen nicht ganz verfehlt. Denn dieser Zweck war erstens der, zu warnen gegen die Unvollständigkeit der Beweise des hier besprochenen Satzes in vielen Lehrbüchern, wie in denen von Sawitsch und Helmert. Denn auch die Weise, wie bei Helmert dieser Satz behandelt wird, kann ich nicht von Unvollständigkeit freisprechen. Wenn Herr Helmert den langen, von Gauss unterdrückten Beweis nicht geben wollte, weil es in den Gang seines Buches nicht passte, warum hat er dann den Satz über die Genauigkeit der verschiedenen Berechnungsweisen von μ nicht lieber ganz unterdrückt? Das wäre weit besser gewesen, als dafür einen unvollständigen Beweis zu geben. — Zweitens war mein Zweck, zu zeigen, dass man zur Feststellung des Satzes, dass der wahrscheinlichste Werth des wahrscheinlichen Fehlers aus den Fehlerquadraten gefunden wird — und nur das Feststellen dieses Satzes, nicht das Finden der numerischen Genauigkeitswerthe der auf verschiedene Weisen berechneten wahrscheinlichen Fehler hat für die Lehrbücher Wichtigkeit — gar nicht die zweite Gauss'sche Beweisführung braucht, weil der Beweis, den ich den ersten Gauss'schen Beweis genannt habe, dann vollkommen genügt und so einfach ist, dass er leicht in den Lehrbüchern Aufnahme finden kann.

Was zuletzt die Grenzen von ω^2 betrifft, so bleibe ich der Meinung, dass Herr Helmert diese nicht richtig angiebt. Eine grosse Anzahl möglicher Werthe von ω^2 fällt ausser den von Herrn Helmert angegebenen Grenzen, und darunter selbst der nach mir wahrscheinlichste Werth. Dass dieser meist wahrscheinliche Werth von ω^2 Null ist, weil der wahrscheinlichste Werth von σ_m mit S_m übereinstimmt — ich betrachte hier natürlich allein wahre Beobachtungsfehler —, ist von Herrn Helmert nicht widerlegt, wenigstens nicht für den von mir betrachteten Fall, wenn die Zahl der Beobachtungen ziemlich gross ist. Für diesen Fall befolgen, wie Laplace gezeigt hat, die ω das Gauss'sche Fehlergesetz, und auch Herr Helmert meint, dass dies dann nahe richtig ist. Auch nur für diesen Fall gelten die Betrachtungen von Laplace und Gauss, und nur auf diesen Fall hätte Herr Helmert in seiner Kritik sich beschränken müssen, soll das von ihm Behauptete wahr bleiben, dass Gauss sich bei seinen Betrachtungen streng von den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat leiten lassen.

Mit Verlangen sehe ich dem angekündigten grösseren Aufsatze entgegen, worin Herr Helmert für den Fall einer kleineren Zahl von Beobachtungen das Wahrscheinlichkeitsgesetz der ω ableiten wird. Denn auch die Behandlung dieses Falles hat grosse Wichtigkeit.

Groningen, September 1875. R. A. Mees.

VI. Zur elementaren Behandlung der Cycloiden.

(Hierzu Taf. II, Fig. 8—10.)

Satz 1. Der Flächeninhalt der Cycloide ist $3r^2\pi$, der der verlängerten oder verkürzten Cycloide ist $r\pi(r+2\varrho)$, wenn r der Radius des erzeugenden, ϱ Radius des Wälzungskreises ist.

Denkt man sich die Bewegung des wälzenden Kreises zerlegt in die Rotation um den Mittelpunkt und die horizontale Verschiebung, so gelangt man (Fig. 8) zu folgender Construction der Cycloide: Man mache $DL = \widehat{DA}$, $EK = \widehat{EA}$, $FM = \widehat{FA}$ u. s. w. Dann bilden die Endpunkte der Horizontalen eine Cycloide. — Legt man dieselben Horizontalen in denselben Höhen an die Gerade A_1C_1 an, so entsteht eine Curve $A_1L_1K_1M_1B_1$, die von oben gesehen ebenso erscheint, wie von unten. Es ist also leicht zu zeigen, dass die Segmente $A_1L_1K_1$ und $B_1M_1K_1$ congruent, dass also die Fläche $A_1L_1K_1M_1B_1C_1$ und das Dreieck $A_1B_1C_1$ inhaltsgleich sind, d. h. $= r^2\pi$. Nach dem Cavalerischen Princip sind aber auch die Flächen $ALKMBCE$ und $A_1L_1K_1M_1B_1C_1E_1$ inhaltsgleich. Nun ist Rechteck + Halbkreis $= 2r^2\pi + \frac{r^2\pi}{2}$; die genannte Fläche abgezogen, giebt für die halbe Cycloidenfläche $\frac{3r^2\pi}{2}$, für die ganze $3r^2\pi$.

Trägt man bei der Construction an den Bogen $\frac{r\pi}{n}$ nicht $\frac{r\pi}{n}$, sondern $\frac{\varrho\pi}{n}$ als Horizontale an, so entsteht eine verlängerte oder verkürzte Cycloide, deren Wälzungskreis ϱ, deren erzeugender Kreis r zum Radius hat. Die Ermittelung des Flächeninhalts ist ähnlich, wie vorher. Rechteck + Halbkreis $= 2r\varrho\pi + \frac{r^2\pi}{2}$; die entsprechende Fläche (jetzt

$r\varrho\pi$) abgezogen, giebt $r\varrho\pi+\frac{r^2\pi}{2}$ für die halbe, $r\pi(r+2\varrho)$ für die ganze Cycloide. Analog ist die Inhaltsbestimmung für die Epi- und Hypocycloide.

Satz 2. Die Normale der Cycloide geht stets durch den augenblicklichen Berührungspunkt des Kreises. (Fig. 9.)

Beweis. Ist B der die Cycloide erzeugende Punkt und rollt der Kreis um die kleine Strecke AE vorwärts, so bewegt sich B erstens um die gleichgrosse Strecke BG, zweitens um den gleichgrossen Bogen BF, d. h. in der Richtung BH, wo bei zunehmender Kleinheit BH die Diagonale eines Rhombus ist. BH wird Tangente der Cycloide, und diese halbirt also den Winkel FBG oder LBD. Derselbe wird aber auch durch CB halbirt, denn $\angle\alpha=\alpha_2=\alpha_1$. Folglich: die Tangente der Cycloide geht durch C, folglich die Normale durch den Berührungspunkt A.

Zieht man HE bis zum Durchschnitt mit BA, so erhält man den Durchschnitt μ zweier benachbarter Normalen, und eine Grenzbetrachtung zeigt, dass $B\mu=2.BA$ ist. Einfacher ergiebt sich dies aus folgender Ueberlegung.

Ueber $AB=r\pi$ (Fig. 10) errichte man Rechtecke von der Höhe $2r$ nach oben und unten. Rollt oben der Kreis von A nach B, so entsteht die Cycloide $\widehat{AC}$; rollt er unten von D nach K, so entsteht die congruente Curve $\widehat{DA}$. F sei Berührungspunkt der Kreise. Macht man Bogen $FH=AF$, so ist HF Normale und gleichzeitig Bogen $\widehat{HE}=FB$. HF verlängert schneidet aber unten Bogen $\widehat{GJ}=\widehat{HE}$ ab, es ist also auch $DG=\widehat{GJ}$. Folglich ist J ein Punkt der Cycloide DA, GJ Normale und HJ Tangente derselben. Dies gilt von jeder Normale der oberen Curve. Hieraus folgt:

Satz 3. Die Evolvente und Evolute der halben Cycloide sind der letzteren congruent. Inwiefern J sich als Krümmungsmittelpunkt betrachten lässt, ist nun leicht durch elementare Entwickelungen nachzuweisen. Satz 3 lässt sich auch mit Hilfe der Gegencycloide beweisen.

NB. Complicirtere Versuche, Satz 2 elementar zu entwickeln, finden sich bei Zehme (Die Cycloiden, Iserlohn und Elberfeld 1854) und Weissenborn (Die cyclischen Curven, Eisenach 1856).

Rollt der Kreis nicht auf der Geraden, sondern auf einem andern Kreise, sei es aussen oder innen, so lässt sich eine kleine Wälzungsstrecke als Gerade betrachten. Satz 2 gilt also auch von der Epi- und Hypocycloide. Dass die Evoluten und Evolventen der letzteren ihnen selbst ähnlich sind, ergiebt sich ähnlich, wie bei Satz 3, durch eine elementare Betrachtung. (Vergl. Herbst-Programm 1875 der Gewerbeschule zu Hagen.)

Dr. G. Holzmüller.
Director der Gewerbeschule zu Hagen.

VII. Bestimmung der Anzahl der Doppeltangenten ebener Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind.

Im 63. Bande des Crelle-Borchardt'schen Journals hat Clebsch die in der Ueberschrift bezeichnete Anzahl, die in den Plücker'schen Formeln *a posteriori* bekannt war, durch ein eigenthümliches directes Verfahren gefunden. Dasselbe findet sich dargelegt auf S. 53 und 54 der citirten Abhandlung und lässt theoretisch gewiss Nichts zu wünschen übrig. Wer aber einmal versucht hat, nach dem von Clebsch vorgeschriebenen Verfahren die Rechnung durchzuführen, d. h. die Endgleichung, welche die Doppeltangenten liefert, wirklich aufzustellen, wird der grossen Weitläufigkeit der durchzumachenden Operationen wegen jedenfalls den Wunsch nach einem einfacheren Verfahren berechtigt finden. In dem nach Clebsch zu bildenden Eliminationsresultate erscheinen nämlich Factoren von nicht geringerem als dem $5(n-2)^2-4(n-2)(n-3) = (n-2)(n+2)^{\text{ten}}$ Grade, die der Frage fremd sind. Es ist mir gelungen, die fragliche Endgleichung sofort von allen fremden Factoren frei darzustellen, und die dabei befolgte Methode bildet den Gegenstand der folgenden kleinen Abhandlung.

Ich werde mich in der folgenden Darlegung der Bezeichnungen $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$, $\vartheta(\lambda)$ für ganze Functionen n^{ten} Grades des Parameters λ bedienen. Möge die Curve gegeben sein durch die ihre Cartesischen Coordinaten x, y bestimmenden Relationen

$$1)\qquad x=\frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)},\quad y=\frac{\vartheta(\lambda)}{\psi(\lambda)}.$$

Dann schreibt sich die Gleichung der Tangente, welche die Curve in dem Punkte, welcher dem Parameter λ entspricht, berührt, als Determinante

$$2)\qquad \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ \varphi(\lambda), & \vartheta(\lambda), & \psi(\lambda) \\ \varphi'(\lambda), & \vartheta'(\lambda), & \psi'(\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Ich verzichte darauf, dieselbe durch Einführung von $\frac{\lambda}{\mu}$ an Stelle von λ homogen zu machen, indem die dadurch erreichte grössere Symmetrie nicht bedeutend genug erscheint, auf andere Vortheile, welche die Beibehaltung eines Parameters bietet, zu verzichten.

Die im Punkte λ — wenn wir uns kurz so ausdrücken dürfen — berührende Tangente 2) wird nun die Curve in weiteren $n-2$ Punkten ν treffen, welche durch die Gleichung gefunden werden:

$$3)\qquad \begin{vmatrix} \varphi(\nu), & \vartheta(\nu), & \psi(\nu) \\ \varphi(\lambda), & \vartheta(\lambda), & \psi(\lambda) \\ \varphi'(\lambda), & \vartheta'(\lambda), & \psi'(\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Dieselbe ist scheinbar vom Grade n in Bezug auf ν; allein es lässt sich der Factor $(\nu-\lambda)^2$ abtrennen und die alsdann resultirende Gleichung ist weiter zu untersuchen. Soll dieselbe die Tangente im Punkte λ als Doppeltangente charakterisiren, so muss sie zwei gleiche Wurzeln besitzen, es muss also ihre Discriminante verschwinden.

Zunächst haben wir also den Factor $(\nu-\lambda)^2$ abzuscheiden. Es ist, wie man leicht bestätigt:

$$\frac{\varphi(\nu)-\varphi(\lambda)-(\nu-\lambda)\,\varphi'(\lambda)}{(\nu-\lambda)^2}=a_n\,.\,\nu^{n-2}+(a_{n-1}+2\,a_n\lambda)\,\nu^{n-3}+\ldots$$
$$+a_2+2\,a_3\lambda+3\,a_4\lambda^2+\ldots+(n-1)\,a_n\lambda^{n-2},$$

wenn

$$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\ldots+a_n\lambda^n.$$

Wir setzen ferner

$$\begin{aligned}\varphi_0&=a_0,\\ \varphi_1&=a_0+a_1\lambda,\\ \varphi_2&=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2,\\ \varphi_m&=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\ldots+a_m\lambda^m.\end{aligned}$$

Dann kann man nach dem Vorigen schreiben

$$\frac{\varphi(\nu)-\varphi(\lambda)-(\nu-\lambda)\,\varphi'(\lambda)}{(\nu-\lambda)^2}=\nu^{n-2}.\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\varphi-\varphi_{n-1}}{\lambda^{n-1}}\right)\tag{4}$$
$$+\nu^{n-3}.\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\varphi-\varphi_{n-2}}{\lambda^{n-2}}\right)+\ldots+\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\varphi-\varphi_1}{\lambda}\right).$$

Der Kürze wegen sind die Argumente λ in $\varphi(\lambda)$ weggelassen.

Subtrahiren wir also in 3) die zweite und die mit $(\nu-\lambda)$ multiplicirte dritte Horizontalreihe von der ersten, so wird die erste durch $(\nu-\lambda)^2$ theilbar und der Quotient sind Glieder, die aus der rechten Seite von 4) durch Ersetzung des Charakters φ durch φ, ϑ, ψ hervorgehen. Ordnen wir jetzt nach Potenzen von ν an, so zerfällt 3) in eine Summe von Determinanten, deren erste Verticalzeile die Glieder enthält:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\varphi-\varphi_m}{\lambda^m}\right),\quad \varphi,\quad \varphi',\quad m=(1,2,\ldots n-1),$$

während die zwei folgenden analog gebildete Ausdrücke für ϑ und ψ sind. Diese Zeile verwandelt sich durch Subtraction des mit λ^m multiplicirten Gliedes von dem letzten in

$$\frac{\varphi'-\varphi'_m}{\lambda^m}-m\,\frac{\varphi-\varphi_m}{\lambda^{m+1}},\quad \varphi,\quad \varphi'_m+m\,\frac{\varphi-\varphi_m}{\lambda}$$

und durch Subtraction des mit $\frac{\lambda}{m}$ multiplicirten dritten Gliedes vom zweiten

$$\frac{\varphi'-\varphi'_m}{\lambda^m}-m\,\frac{\varphi-\varphi_m}{\lambda^m},\quad \varphi_m-\frac{\lambda}{m}\,\varphi'_m,\quad \varphi'_m+m\,\frac{\varphi-\varphi_m}{\lambda}.$$

Jetzt multipliciren wir das erste Glied mit $\frac{m}{n-m}\lambda^m$ und subtrahiren es vom dritten, dann wird das dritte Glied

$$\varphi'_m + \frac{m}{n-m}\lambda^{m-1}\left\{(n-m)\frac{\varphi-\varphi_m}{\lambda^m} - \lambda\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\varphi-\varphi_m}{\lambda^m}\right)\right\}.$$

Demnach haben die drei Glieder die Dimensionen

$$n-m-1,\quad m-1,\quad (n-m-1)+(m-1).$$

Die Summe dieser Zahlen ist $2n-4$ und man erkennt, dass jede der betrachteten Partialdeterminanten eine ganze Function $2n-4^{\text{ten}}$ Grades in λ ist.

Demnach haben wir das Resultat gefunden: Man ist im Stande, die Gleichung $n-2^{\text{ten}}$ Grades, welche wir suchen, in einer Weise darzustellen, dass ihre Coefficienten ganze Functionen $2n-4^{\text{ter}}$ Ordnung in λ sind. Daraus folgt unmittelbar das gesuchte Endresultat. Denn die Discriminante einer Gleichung $n-2^{\text{ten}}$ Grades ist eine homogene Function $2(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ihrer Coefficienten, steigt also in Bezug auf λ zum Grade $(2n-4).2.(n-3) = 4(n-2)(n-3)$. Mithin ist die Gleichung, welche die Parameter der Berührungspunkte der Doppeltangenten liefert, vom Grade $4(n-2)(n-3)$ und die Anzahl der Doppeltangenten selbst $2(n-2)(n-3)$.

Der Fall, wo die Curve Rückkehrpunkte besitzt, ist im Vorhergehenden nicht berücksichtigt. Derselbe bietet indess keine weiteren Schwierigkeiten dar.

Betrachtet man die allgemeine, hierher gehörige Curve vierter Ordnung und bezeichnet

$$\varphi(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^4,$$
$$\vartheta(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + b_3\lambda^3 + b_4\lambda^4,$$
$$\psi(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3 + c_4\lambda^4,$$

ferner die dreigliedrigen zehn Determinanten, welche man aus den 15 Grössen a, b, c bilden kann, in der Weise, dass z. B.

$$A_{01} = \Sigma \pm a_2 b_3 c_4,\quad A_{02} = \Sigma \pm a_1 b_3 c_4$$

gesetzt wird, so lautet die Gleichung achten Grades, welche die Parameter der Doppeltangenten liefert:

$$\begin{aligned}4[\lambda^4 A_{01} + 2\lambda^3 A_{02} + \lambda^2(A_{03} + 3A_{12}) + 2\lambda A_{13} + A_{23}]\\ [\lambda^4 A_{12} + 2\lambda^3 A_{13} + \lambda^2(A_{14} + 3A_{23}) + 2\lambda A_{24} + A_{34}]\\ -[\lambda^4 A_{02} + 2\lambda^3(A_{12} + A_{03}) + \lambda^2(A_{04} + 4A_{13}) + 2\lambda(A_{14} + A_{23}) + A_{24}]^2 = 0.\end{aligned}$$

Für die Lemniscate hat man

$$\varphi(\lambda) = \lambda^4 - 1,$$
$$\vartheta(\lambda) = 2\lambda(\lambda^2 - 1),$$
$$\psi(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^2 + 1.$$

Daraus folgt die Gleichung, welche ν liefert:

$$\nu^2(3\lambda^4 + 6\lambda^2 - 1) + 8\lambda\nu(\lambda^2 - 1) + \lambda^4 - 6\lambda^2 - 3 = 0,$$

und die Discriminante, welche für die Doppeltangenten verschwindet:

$$(3\lambda^4+6\lambda^2-1)(\lambda^4-6\lambda^2-3)-16\lambda^2(\lambda^2-1)^2=0,$$

oder entwickelt

$$3\lambda^8-28\lambda^6-14\lambda^4-28\lambda^2+3=0.$$

Die Lemniscate besitzt demnach vier Doppeltangenten, die wir mit römischen Ziffern bezeichnen wollen. Die nebenstehenden Werthe werden von λ in den Berührungspunkten angenommen.

I)	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$,	$\sqrt{2}-\sqrt{3}$;
II)	$-\sqrt{2}-\sqrt{3}$,	$-\sqrt{2}-\sqrt{3}$;
III)	$\frac{1}{3}(\sqrt{3}+\sqrt{6}i)$,	$-\frac{1}{3}(\sqrt{3}+\sqrt{6}i)$;
IV)	$\frac{1}{3}(\sqrt{3}-\sqrt{6}i)$,	$-\frac{1}{3}(\sqrt{3}-\sqrt{6}i)$.

Die zwei reellen Doppeltangenten gehen bekanntlich der X-Axe parallel. Die vier Berührungspunkte haben die vier Werthe, welche sich aus

$$y=\frac{\sqrt{2}}{4},\quad x=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

durch verschiedene Zeichencombination ergeben. Die imaginären Doppeltangenten gehen der Y-Axe parallel.

Münster. Dr. K. Schwering.

VIII. Bemerkung zu der Curve $\frac{x^4}{a^4}\cancel{=}\frac{y^4}{b^4}=1$. ⌐+

Dass algebraische Curven angegeben werden können, deren Sectoren mit Hilfe der cyclischen und elliptischen Functionen in analoger Weise verglichen werden, wie es nach der berühmten Entdeckung von Gauss rücksichtlich der Bögen des Kreises und der Lemniscate geschehen kann, ist eine so naheliegende Sache, dass unzweifelhaft die desfallsigen Untersuchungen schon öfter angestellt und derartige Curven angegeben worden sind. Vielleicht ist die Bemerkung von Interesse, dass die Curve

$$x^4+y^4=r^4$$

und ebenso natürlich

$$\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=1,$$

die dem Kreise und der Ellipse verwandt zu sein scheinen, in diese Kathegorie gehören. Denn wendet man Polarcoordinaten r und φ an, so überzeugt man sich durch die Annahme $z=\frac{a}{b}\,tg\,\varphi$ alsbald, dass der Sector u durch das elliptische Integral erster Gattung gegeben wird:

$$u=\tfrac{1}{2}ab\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{1+z^4}},$$

dessen Perioden ein rationales Verhältniss besitzen. Die Quadrate der Coordinaten x, y drücken sich sehr einfach durch ϑ-Quotienten von $\frac{2u}{ab}$ aus.

Münster. Dr. K. Schwering.

IX. Zur Construction einer unimodularen Determinante.

Hermite hat in einer Abhandlung „*Sur une question relative à la théorie des nombres*“ (Liouville's Journal Bd. XIV, S. 21) folgendes Problem behandelt:

Es seien $a_{k,0}$ $(h=0,1,\ldots n)$ $n+1$ ganze, positive oder negative Zahlen, deren grösster gemeinsamer Theiler die Einheit ist; es sollen die $n(n+1)$ ganzen Zahlen $a_{i,k}$ so bestimmt werden $(i=0,1,\ldots n;$ $k=1,2,\ldots n)$, dass

$$\Sigma \pm a_{0,0}a_{1,1}\ldots a_{n,n}=\pm 1$$

werde, d. h. man soll eine unimodulare Determinante von gegebener erster Colonne construiren.

Hermite giebt dazu folgendes Verfahren an.

Ist π_k der grösste gemeinsame Theiler zwischen $a_{k,0}$ und π_{k-1} $(k=1,2,\ldots n$, wobei π_0 gleich $a_{0,0}$ genommen wird, und $\pi_n=1$ werden muss), so mögen zunächst die Grössen η_k und η'_k ganzzahlig aus den Gleichungen

$$\eta_0 a_{1,0}-\eta_1 a_{0.0}=\pi_1,$$
$$\eta'_k a_{k,0}-\eta_k\pi_{k-1}=\pi_k,\quad k=2,3,\ldots n$$

bestimmt werden. Wählt man nun die ganzzahligen Grössen $\nu_{i,k}$ $(i=1,$ $2,\ldots n;$ $k=1,2,\ldots n)$ derart, dass sie der einzigen Bedingung

$$\Sigma \pm \nu_{1,1}\nu_{2,2}\ldots\nu_{n,n}=\pm 1$$

genügen, nimmt man ferner die Grössen $M_{n,i}$ $(i=1,2,\ldots n)$ willkürlich, aber ganzzahlig, und bestimmt die Grössen $M_{k,i}$ successive aus den Gleichungen

$$M_{k-1,i}=\eta'_k\nu_{k,i}+M_{k,i}\frac{\pi_{k-1}}{\pi_k},\quad k=n,n-1,\ldots 3,2;$$

dann werden durch

$$\left.\begin{aligned} a_{0,i}&=\eta_0\nu_{1,i}+M_{1,i}\frac{a_{0,0}}{\pi_1}\\ a_{k,i}&=\eta_k\nu_{k,i}+M_{k,i}\frac{a_{k,0}}{\pi_k}\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned} i&=1,2,\ldots n,\\ k&=1,2,\ldots n\end{aligned}$$

die Elemente der verlangten unimodularen Determinante geliefert.

Es giebt nun, wie ich hier darlegen will, zur Lösung des Problems eine wesentlich andere Methode, die mir vor der eben entwickelten Vorzüge zu haben scheint. Ich muss zu diesem Zwecke einige Resultate vorausschicken, welche ich in einer Untersuchung über die Formen, in denen die Auflösungen einer unbestimmten Gleichung des ersten Grades enthalten sind, früher gewann (d. Zeitschr. Bd. XIX, S. 53); dort ist allerdings nur auf ganze positive Werthe für die Unbekannten Bezug genommen, jedoch werden die betreffenden Resultate durch Zulassung negativer Werthe nicht weiter gestört. Die Sätze sind folgende:

Löst man die unbestimmte Gleichung

$$1)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} A_k x_k = M$$

nach der Euler'schen Methode auf, so werden alle Unbekannten schliesslich dargestellt durch

$$2)\qquad x_k = M_k + \sum_{i=1}^{i=n-1} a_{k,i}\, t_i, \quad k = 1, 2, \ldots n,$$

wo die Grössen t_i willkürliche ganze Zahlen sind; das System 2) wurde eine Form für die Gleichung 1) genannt, und es ward nachgewiesen, dass das Euler'sche Verfahren stets eine allgemeine, d. h. alle möglichen Lösungen umfassende Form liefert. Eine solche allgemeine Form hat die Eigenschaft, dass, wenn die Determinante

$$3)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_{1,1} & \ldots & a_{1,\,n-1} \\ a_2 & a_{2,1} & \ldots & a_{2,\,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n,1} & \ldots & a_{n,\,n-1} \end{vmatrix} = D$$

mit willkürlicher erster Colonne gebildet wird, und wenn man den Coefficienten von a_p in D durch α_p bezeichnet, immer

$$4)\qquad \begin{array}{r} \alpha_p = + A_p \\ \text{oder}\quad \alpha_p = - A_p, \end{array} \quad p = 1, 2, \ldots n$$

ist. Der zweite Fall kann ausgeschlossen werden, da man eventuell durch Vertauschung von t_i mit t_k auf den ersten zurückkommt.

Hiermit ist nun folgender Weg zur Lösung des oben bezeichneten Problems gegeben.

Es seien die gegebenen Elemente der ersten Colonne durch A_k $(k = 1, 2, \ldots n)$, die gesuchten der übrigen Colonnen durch $d_{i,k}$ $(i = 1, 2, \ldots n;\ k = 2, 3 \,.\,.\, n-1)$ bezeichnet, so dass zu bestimmen ist

$$5)\qquad E = \begin{vmatrix} A_1 & d_{1,1} & \ldots & d_{1,\,n-1} \\ A_2 & d_{2,1} & \ldots & d_{2,\,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n & d_{n,1} & \ldots & d_{n,\,n-1} \end{vmatrix} = + 1.$$

Löst man dann nach dem Euler'schen Verfahren die Gleichung

$$6)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} A_k x_k = + 1$$

und heisst die gewonnene Form

7) $$x_k = \mu_k + \sum_{i=1}^{i=n-1} a_{k,i} t_i, \quad k = 1, 2, \ldots n,$$

wobei also stets

8) $$\sum_{k=1}^{k=n} A_k \mu_k = +1,$$

und construirt man endlich die Determinante

9) $$D' = \begin{vmatrix} \mu_1 & a_{1,1} & \ldots & a_{1,n-1} \\ \mu_2 & a_{2,1} & \ldots & a_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_n & a_{n,1} & \ldots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

und deren Reciprocaldeterminante E', so ist E' die gesuchte Determinante E. Der Coefficient von μ_k in D' ist nämlich nach 4) nichts Anderes als A_k; ferner wird, wegen 8), $D' = +1$, also auch $E' = +1$. Wird der Coefficient von $a_{i,k}$ in D' durch $\alpha_{i,k}$ bezeichnet, so hat man

10) $$d_{i,k} = \alpha_{i,k}.$$

Eine Ersetzung der Grössen μ_k durch eine andere Lösung der Gleichung 6) bringt eine neue Determinante E'' zum Vorschein, die indessen aus der früheren E' durch Subtraction einzelner Colonnen von anderen ebenfalls gefunden wird, so dass E' und E'' nicht als wesentlich verschieden anzusehen sind. Eine neue unimodulare Determinante, welche nicht direct aus E' ablesbar ist, erhält man erst, wenn man die Grössen t_i in 7) durch eine unimodulare Substitution transformirt, d. h. wenn man setzt

11) $$t_k = \sum_{h=1}^{h=n-1} b_{k,h} s_h, \quad k = 1, 2, \ldots (n-1),$$

mit der einen Bedingung, dass

12) $$\Sigma \pm b_{1,1} b_{2,2} \ldots b_{n-1,n-1} = +1,$$

und der andern, dass, wenn die Form 7) dadurch übergeht in

13) $$x_k = \mu_k + \sum_{i=1}^{i=n-1} c_{k,i} s_i, \quad k = 1, 2, \ldots n,$$

14) $$c_{k,i} = \sum_{h=1}^{h=n-1} a_{k,h} b_{h,i}, \quad \begin{matrix} k = 1, 2, \ldots n, \\ i = 1, 2, \ldots (n-1), \end{matrix}$$

nicht etwa 7) und 13) identisch werden.

E''' wird dann sofort als Reciprocale von

15) $$D''' = \begin{vmatrix} \mu_1 & c_{1,2} & \ldots & c_{1,n-1} \\ \mu_2 & c_{2,2} & \ldots & c_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_n & c_{n,2} & \ldots & c_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

gewonnen. Wesentlich verschiedene Determinanten E existiren also unendlich viele, falls $n > 2$.

Dorpat. Prof. K. Weihrauch.

X. Ueber die einem Dreieck eingeschriebene und die umschriebene Ellipse.

Dem Euler'schen Problem, um ein Dreieck die kleinste Ellipse zu beschreiben, steht das Problem zur Seite, in ein Dreieck die grösste Ellipse einzuschreiben. Beide Probleme sind in den *Annales de Gergonne*, *tôme IV*, von Herrn Berard gelöst und Liouville hat im 7. Bande der ersten Serie seines Journals eine kurze, rein geometrische Lösung des Euler'schen Problems gegeben. Man kann beide Probleme gleichzeitig lösen nach der Methode, welche Gauss (Bd. IV, S. 388) angewendet hat, um die grösste Ellipse in ein Viereck einzuschreiben, wobei nur seine Ausdrücke geometrisch interpretirt zu werden brauchen. Vom Gebrauch der Infinitesimalrechnung kann dabei abgesehen werden, wenn man die Sätze als bekannt voraussetzt, dass bei allen Dreiecken mit vorgegebenem Umfang das gleichseitige das grösste ist, und dass hieran Nichts geändert wird, wenn der Inhalt noch durch das Product der drei Seiten dividirt wird, welche Sätze sich elementar beweisen lassen. Da es vielleicht Manchem nicht unwillkommen ist, den Ausdruck des Flächeninhalts einer Ellipse durch die drei Dreiecke, welche durch den Mittelpunkt der Ellipse und drei Punkte oder drei Tangenten derselben bestimmt sind, zur Hand zu haben (auf welchen Ausdrücken die Lösung beruht), so mag die Lösung des obengenannten Problems hier folgen.

Nennen wir das Euler'sche das zweite und das andere das erste Problem, so verstehen wir unter p, p', p'' die Entfernungen des Mittelpunktes der eingeschriebenen Ellipse von den Dreiecksseiten im ersten Problem, die reciproken Werthe der Entfernungen des Mittelpunktes der umschriebenen Ellipse von den Ecken des Dreiecks im zweiten Problem. Im ersten Problem sind a, b die Halbaxen der Ellipse, im zweiten die reciproken Werthe der Halbaxen. In beiden Problemen sind α, α', α'' die Winkel, welche die Linien, die zu p, p', p'' gehören, bez. mit der zu a gehörenden Axe machen, und in beiden Problemen ist

$$\varphi = \alpha'' - \alpha', \quad \varphi' = \alpha - \alpha'' + 2\pi, \quad \varphi'' = \alpha' - \alpha,$$

d. h. φ, φ', φ'' sind die zwischen p', p''; p'', p; p, p' bez. gelegenen Winkel.

Nun gelten für beide Probleme folgende Formeln und Rechnungen:

$$p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha, \quad p'^2 = a^2 \cos^2 \alpha' + b^2 \sin^2 \alpha', \quad p''^2 = a^2 \cos^2 \alpha'' + b^2 \sin^2 \alpha''$$

oder, wenn $a^2 + b^2 = \sigma$, $a^2 - b^2 = \delta$ zur Abkürzung gesetzt wird:

$$1)\quad \sigma+\delta\cos 2\alpha=2p^2,\quad \sigma+\delta\cos 2\alpha'=2p'^2,\quad \sigma+\delta\cos 2\alpha''=2p''^2.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen bez. mit

$$\sin 2(\alpha''-\alpha')=\sin 2\varphi,\quad \sin 2(\alpha-\alpha'')=\sin 2\varphi',\quad \sin 2(\alpha'-\alpha)=\sin 2\varphi''$$

und addirt, so folgt

$$2)\quad p^2\sin\varphi\cos\varphi+p'^2\sin\varphi'\cos\varphi'+p''^2\sin\varphi''\cos\varphi''=-\sigma\sin\varphi\sin\varphi'\sin\varphi''.$$

Durch Subtraction je zweier der unter 1) verzeichneten Gleichungen erhält man weiter $\delta(\cos 2\alpha-\cos 2\alpha')=2(p^2-p'^2)$ etc. oder

$$3)\quad \begin{gathered}\delta\sin\varphi\sin(\alpha'+\alpha'')=p''^2-p'^2,\quad \delta\sin\varphi'\sin(\alpha''+\alpha)=p^2-p''^2,\\ \delta\sin\varphi''\sin(\alpha+\alpha')=p'^2-p^2.\end{gathered}$$

Hieraus folgt durch Erheben auf das Quadrat

$$3a)\quad \begin{gathered}\delta-\delta\cos 2(\alpha'+\alpha'')=\frac{2(p''-p'^2)^2}{\sin^2\varphi},\quad \delta-\delta\cos 2(\alpha''+\alpha)=\frac{2(p^2-p''^2)}{\sin^2\varphi'},\\ \delta-\delta\cos 2(\alpha+\alpha')=\frac{2(p'^2-p^2)^2}{\sin^2\varphi''}.\end{gathered}$$

Multiplicirt man die unter 3a) verzeichneten Gleichungen bez. mit

$$\begin{gathered}-\sin 2\varphi=\sin 2(\alpha+\alpha'-\alpha''-\alpha),\quad -\sin 2\varphi'=\sin 2(\alpha'+\alpha''-\alpha-\alpha'),\\ -\sin 2\varphi''=\sin 2(\alpha''+\alpha-\alpha'-\alpha'')\end{gathered}$$

und addirt, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}\delta^2(\sin 2\varphi+\sin 2\varphi'+\sin 2\varphi'')&=-4\delta^2\sin\varphi\sin\varphi'\sin\varphi''\\ &=4(p''^2-p'^2)^2\cot g\,\varphi+4(p^2-p''^2)^2\cot g\,\varphi'+4(p'^2-p^2)^2\cot g\,\varphi''\end{aligned}$$

oder, wenn man nach den Potenzen der p ordnet:

$$4)\quad \begin{aligned}&\delta^2\sin^2\varphi\sin^2\varphi'\sin^2\varphi''\\ &=p^4\sin^2\varphi+p'^2\sin^2\varphi'+p''^2\sin^2\varphi''+2p'^2p''^2\cos\varphi\sin\varphi'\sin\varphi''\\ &\quad+2p''^2p^2\cos\varphi'\sin\varphi''\sin\varphi+2p^2p'^2\cos\varphi''\sin\varphi\sin\varphi'.\end{aligned}$$

Zieht man von dieser Gleichung die unter 2) verzeichnete Gleichung, nachdem sie auf's Quadrat erhoben ist, ab, so erhält man endlich

$$5)\quad \begin{aligned}&(\sigma^2-\delta^2)\sin^2\varphi\sin^2\varphi'\sin^2\varphi''=4a^2b^2\sin^2\varphi\sin^2\varphi'\sin^2\varphi''\\ &=-p^4\sin^4\varphi-p'^4\sin^4\varphi'-p''^4\sin^4\varphi''+2p'^2p''^2\sin^2\varphi'\sin^2\varphi''\\ &\quad+2p''^2p^2\sin^2\varphi''\sin^2\varphi+2p^2p'^2\sin^2\varphi\sin^2\varphi'.\end{aligned}$$

Im ersten Problem seien nun die Dreiecksseiten, auf denen p, p', p'' Lothe sind, bez. t, t', t'', so ist $t:t':t''=\sin\varphi:\sin\varphi':\sin\varphi''$. Ferner sei $\Delta=\frac{1}{2}pt$, $\Delta'=\frac{1}{2}p't'$, $\Delta''=\frac{1}{2}p''t''$, $D=\Delta+\Delta'+\Delta''=\frac{1}{2}tt'\sin\varphi''=\frac{1}{2}tt''\sin\varphi'$, so ergiebt sich aus 5)

$$\begin{aligned}&4a^2b^2t^2t't''\sin\varphi'\sin\varphi''=16a^2b^2.D^2\\ &=-16\Delta^4-16\Delta'^4-16\Delta''^4+32\Delta^2\Delta'^2+32\Delta'^2\Delta''^2+32\Delta''^2\Delta^2\\ &=16D(\Delta+\Delta'-\Delta')(\Delta-\Delta'+\Delta'')(-\Delta+\Delta'+\Delta'')\end{aligned}$$

oder

$$6)\quad ab\pi=\frac{\pi.\sqrt{(\Delta+\Delta'+\Delta'')(\Delta+\Delta'-\Delta'')(\Delta-\Delta'+\Delta'')(-\Delta+\Delta'+\Delta'')}}{D}.$$

Im zweiten Problem setzen wir $\sin\varphi = \frac{1}{2} p' p'' \Delta$, $\sin\varphi' = \frac{1}{2} p'' p \Delta'$, $\sin\varphi'' = \frac{1}{2} p p' \Delta''$, so folgt aus 5)

$$a^2 b^2 \Delta^2 \Delta'^2 \Delta''^2 = -\Delta^4 - \Delta'^4 - \Delta''^4 + 2\Delta^2\Delta'^2 + 2\Delta'^2\Delta''^2 + 2\Delta''^2\Delta^2$$

oder

$$\text{6a)} \quad \frac{ab}{\pi} = \frac{\sqrt{(\Delta+\Delta'+\Delta'')(\Delta+\Delta'-\Delta'')(\Delta-\Delta'+\Delta'')(-\Delta+\Delta'+\Delta'')}}{\pi \Delta \Delta' \Delta''}.$$

Die unter 6) und 6a) stehenden Ausdrücke liefern den Flächeninhalt oder den reciproken Werth des Flächeninhalts bez. einer einem Dreieck mit dem Inhalt $\Delta + \Delta' + \Delta'' = D$ bez. eingeschriebenen und umschriebenen Ellipse durch die Dreiecke, welche durch den Mittelpunkt und die Seiten, bez. die Ecken des vorgegebenen Dreiecks bestimmt sind. Der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck ist genau so gebaut wie die Formel, welche den Inhalt eines Dreiecks aus den drei Seiten bestimmt, und man erkennt hieraus die Beziehung zu den am Eingange berührten Dreiecksproblemen. Dieser Flächeninhalt wird demnach ein Maximum, bez. Minimum, wenn $\Delta = \Delta' = \Delta'' = \frac{1}{3} D$, also der Mittelpunkt der Ellipse der Schwerpunkt des vorgegebenen Dreiecks ist.

Freiburg i. B. Prof. J. Thomae.

XI. Ueber Fusspunktscurven.

Die gewöhnliche Methode, zu einer gegebenen Curve die Fusspunktscurve von einem gegebenen Punkte (a, b) aus, d. h. den geometrischen Ort der Fusspunkte der von einem gegebenen Punkte auf die Tangenten einer gegebenen Curve gefällten Lothe zu bestimmen, ist die folgende.

Ist (ξ, η) ein beliebiger Punkt der gegebenen Curve $f(x, y) = 0$, so erhält man die Fusspunktscurve durch Elimination von ξ und η aus den drei Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} (x-\xi)\frac{\partial f}{\partial \xi} + (y-\eta)\frac{\partial f}{\partial \eta} &= 0, \\ (x-a)\frac{\partial f}{\partial \eta} - (y-b)\frac{\partial f}{\partial \xi} &= 0 \\ f(\xi, \eta) &= 0, \end{aligned}\right.$$

wo die erste Gleichung eine beliebige Tangente der gegebenen Curve, die zweite das vom Punkte (a, b) auf sie gefällte Loth darstellt.

Legt man aber die Gleichung der gegebenen Curve in Liniencoordinaten zu Grunde, so erhält man ganz allgemein die Gleichung der Fusspunktscurve, in Punktcoordinaten ausgedrückt, durch eine einfache Substitution, welche zugleich zeigt, von welchem Grade die Fusspunktscurve werden muss.

Ist nämlich

1) $$\varphi(u, v) = 0$$

die Gleichung der gegebenen Curve in Liniencoordinaten und sind (u, v) die Coordinaten einer beliebigen Tangente der Curve, (x, y) die Coordinaten des Fusspunktes des vom Punkte (a, b) auf diese Tangente gefällten Lothes, so hat man

2) $$ux + vy + 1 = 0,$$

3) $$u(y-b) - v(x-a) = 0,$$

und durch Elimination von u und v aus diesen drei Gleichungen erhält man die Gleichung der Fusspunktscurve in Punktcoordinaten.

Nun geben die Gleichungen 2) und 3)

4) $$u = -\frac{x-a}{x(x-a)+y(y-b)},$$

5) $$v = -\frac{y-b}{x(x-a)+y(y-b)},$$

und die Substitution dieser Werthe in Gleichung 1) giebt allgemein die Fusspunktscurve einer gegebenen Curve.

Da der gemeinschaftliche Nenner in 4) und 5) vom zweiten Grade in x und y ist, so giebt diese Substitution nach Durchmultiplication mit dem Nenner im Allgemeinen eine Curve vom $2k^{\text{ten}}$ Grade, wenn k der Grad der Curve $\varphi(u, v) = 0$ in Liniencoordinaten, d. h. die Classe der gegebenen Curve ist. Wir haben also den Satz:

Der Grad der Fusspunktscurve einer gegebenen Curve ist im Allgemeinen gleich der doppelten Classenzahl derselben.

Der Grad der Fusspunktscurve reducirt sich, wenn die ursprüngliche Curve parabolische Zweige hat.

Enthält nämlich die Gleichung der Curve $\varphi(u, v) = 0$ kein Absolutglied, d. h. berührt die Curve die unendlich ferne Gerade, so reducirt sich der Grad der Fusspunktscurve auf den $(2k-1)^{\text{ten}}$.

Enthält die Gleichung der Curve $\varphi(u, v) = 0$ weder ein Absolutglied, noch die Glieder ersten Grades, d. h. ist die unendlich ferne Gerade eine Wendetangente der Curve, so reducirt sich der Grad der Fusspunktscurve auf den $(2k-2)^{\text{ten}}$.

Allgemein ist r der Grad der niedersten Glieder in $\varphi(u, v) = 0$, d. h. findet zwischen der unendlich fernen Geraden und der Curve Berührung r^{ter} Ordnung statt, so reducirt sich der Grad der Fusspunktscurve auf den $(2k-r)^{\text{ten}}$.

Auch einige weitere allgemeine Eigenschaften der Fusspunktscurve lassen sich unmittelbar aus der Art und Weise, wie wir ihre Gleichung gefunden, gewinnen.

Wir können unbeschadet der Allgemeinheit den Punkt (a, b) in den Ursprung des Coordinatensystems verlegen, wenn wir uns nur unter $\varphi(u, v) = 0$ eine beliebige Curve k^{ter} Classe in beliebiger Lage zum Coordinatensystem denken; wir erhalten dann die Fusspunktscurve durch Substitution von

$$u = -\frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

in $\varphi(u, v) = 0$.

Ist nun

$$\varphi(u, v) \equiv (Au^k + Bu^{k-1}v + \ldots + Fv^k) + [\text{Glieder } (k-1)^{\text{ter}} \text{ Dimension in } u \text{ und } v] + \ldots + (Mu^2 + Nuv + Pv^2) + (Qu + Rv) + S = 0,$$

so ist die Fusspunktscurve

$$(-1)^k (Ax^k + Bx^{k-1}y + \ldots + Fy^k) + (-1)^{k-1} [\text{Glieder } (k-1)^{\text{ter}} \text{ Dimension in } x \text{ und } y] . (x^2 + y^2) + \ldots + (Mx^2 + Nxy + Py^2)(x^2+y^2)^{k-2} - (Qx + Ry)(x^2+y^2)^{k-1} + S(x^2+y^2)^k = 0.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich unmittelbar folgende zwei Sätze:

1. Der Ursprung ist ein $k$facher Punkt der Fusspunktscurve, da die niedersten Glieder in der Gleichung derselben von der k^{ten} Dimension sind.
2. Ist S von Null verschieden, d. h. die Fusspunktscurve vom $2k^{\text{ten}}$ Grade, so hat dieselbe keine reellen Asymptoten, ist also ganz im Endlichen enthalten; oder auch: da die Asymptotenrichtungen gegeben sind durch
$$(x^2 + y^2)^k = 0,$$
geht die Curve $k$mal durch die imaginären Kreispunkte.

Ist $S = 0$, d. h. die Fusspunktscurve vom $(2k-1)^{\text{ten}}$ Grade, so hat dieselbe eine reelle Asymptote, deren Richtung bestimmt ist durch

$$Qx + Ry = 0,$$

und geht ausserdem $(k-1)$-mal durch die imaginären Kreispunkte.

Ist $S = 0$, $Q = 0$ und $R = 0$, d. h. die Fusspunktscurve vom $(2k-2)^{\text{ten}}$ Grade, so geht dieselbe $(k-2)$-mal durch die imaginären Kreispunkte und hat ausserdem zwei Asymptoten, deren Richtungen bestimmt sind durch

$$Mx^2 + Nxy + Py^2 = 0$$

u. s. f.

Stuttgart, October 1875.

C. Reuschle,
Professor am Polytechnikum.

XII. Ueber die Kriterien der Maxima und Minima bestimmter Integrale.

Herr Zmurko, ein galizischer Mathematiker, hat in der in Graz am 20. September 1875 stattgehabten Sitzung der Section für Mathematik und Astronomie der 48. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte einen Vortrag „Ueber die Unzulänglichkeit der bis jetzt bekannt gewordenen Kriterien des Grössten und Kleinsten bestimmter Integrale und ihre Vervollständigung“ gehalten, welcher in Nr. 6 des Tageblattes der obgenannten Versammlung seinem wesentlichen Inhalte nach abgedruckt worden ist.

Die Pointe dieses Vortrags ist eine gewisse Umgestaltung der zweiten Variation eines zur Untersuchung vorgelegten $r$fachen Integrals

$$S=\int_{x'_1}^{x''_1}\int_{x'_2}^{x''_2}\ldots\int_{x'_r}^{x''_r} V\,dx_1\,dx_2\ldots dx_r,$$

in welchem V eine Function der zu bestimmenden Functionen $U_1, U_2, \ldots U_\mu$ von $x_1, x_2, \ldots x_r$ und der bezüglich bis zu den Rangzahlen $n_1, n_2, \ldots n_\mu$ ansteigenden partiellen Differentialquotienten dieser Functionen ist; überdies werden zwischen den genannten Grössen ν Bedingungsgleichungen

$$v_1=0,\ v_2=0, \ldots v_\nu=0$$

als vorgeschrieben angenommen.

Wird, unter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu$ unbestimmte Multiplicatoren verstanden,

$$V+\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_\nu V_\nu = W,$$

$$\int_{x'_1}^{x''_1}\ldots\int_{x'_r}^{x''_r} W\,dx_1\,dx_2\ldots dx_r=\mathfrak{S}$$

gesetzt und werden die Bedingungen, welche nothwendig und hinreichend sind, um die erste Variation $\delta\mathfrak{S}$ zum Verschwinden zu bringen, bereits verwirklicht gedacht, so besteht die erwähnte Umgestaltung der zweiten Variation von $\mathfrak{S}$ darin, dass einerseits der Verfasser allgemein

$$\delta U_m=\frac{\varrho\,\varepsilon}{(n_m)!}\left(\frac{\sin 2n\pi w}{2n\pi}\right)^{n_m}\psi_m$$

setzt, wo ϱ eine unendlich kleine, von $x_1, x_2, \ldots x_r$ unabhängige Grösse, n eine sehr grosse positive ganze Zahl und w den Ausdruck

$$w=\frac{x_1-x'_1}{x''_1-x'_1}+\frac{x_2-x'_2}{x''_2-x'_2}+\ldots+\frac{x_r-x'_r}{x''_r-x'_r}$$

bezeichnen, und sich andererseits auf folgenden merkwürdigen Hilfssatz stützt:

Die Function $\sin 2n\pi w$ als Factor eines unter dem $r$fachen Integrationszeichen stehenden Ausdruckes ist der Null gleich zu achten; dagegen kann unter denselben Umständen ein Factor $\cos 2n\pi w$ durch die Einheit ersetzt werden.

Durch Differentiation des für δU_m angenommenen Ausdruckes 1) findet der Verfasser

$$\delta \frac{\partial^{\alpha+\beta\dots} U_m}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta \dots}$$
$$= \varrho \xi \psi_m \left(\frac{\sin 2n\pi w}{2n\pi}\right)^{n_m-\alpha-\beta\dots} \frac{(\cos 2n\pi w)^{\alpha+\beta\dots}}{(n_m-\alpha-\beta\dots)!} \frac{\partial^{\alpha+\beta+\dots} w}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\alpha \dots} + \varrho\sigma,$$

wo $\varrho\sigma$ den Inbegriff der mit einer höheren als der $(n_m-\alpha-\beta\dots)^{\text{ten}}$ Potenz von $\sin 2n\pi w$ behafteten Glieder bezeichnen soll, entnimmt dieser Formel die Ausdrücke für die Variationen der verschiedenen Differentialquotienten von $U_1, U_2, \dots U_m$, setzt dieselben in $\delta^2\mathfrak{S}$ ein, ersetzt hierauf kraft des obigen Hilfssatzes $\sin 2n\pi w$ in allen Gliedern, wo dieser Factor mit einem positiven Exponenten vorkommt, durch Null, $\cos 2n\pi w$ dagegen durch 1 und behält nach dieser Operation unter dem Integralzeichen eine einfache quadratische Form $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_\mu$ mit von $x_1, x_2, \dots x_n$ abhängigen Coefficienten übrig, welche unter Zuziehung der ν Bedingungsgleichungen und der angenommenen Beziehung

$$1-\psi_1^2-\psi_2^2-\dots-\psi_\mu^2=0$$

auf ihr Zeichen geprüft die entscheidenden Kriterien liefert.

Man stutzt unwillkürlich über die grosse Allgemeinheit des oben angeführten Hilfssatzes und es ist in der That sehr leicht zu sehen, dass nicht nur der vom Verfasser gegebene Beweis illusorisch, sondern auch der Satz selbst nicht richtig ist.

Der Beweis wird so geführt, dass das Integral

$$\int_{x'_1}^{x''_1} \dots \int_{x'_r}^{x''_r} F(x_r, x_{r-1}, \dots x_1)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_r$$

in folgender Weise in einen Summenausdruck umgewandelt wird. Zunächst wird das Integrationsintervall $x'_r \dots x''_r$ in n gleiche Theile zerlegt und näherungsweise

$$\int_{x'_r}^{x''_r} F\, dx_r = \frac{x''_r - x'_r}{n} \sum_0^{n-1}{}_h F\left(x'_r + \frac{h}{n}(x''_r - x'_r), \dots x_1\right)$$

gesetzt. Hierauf wird wieder das Intervall $x''_{r-1} - x'_{r-1}$ in n gleiche Elemente getheilt und die Integration in Bezug auf x_{r-1} näherungsweise durch eine Summe ersetzt und so fort für alle Veränderlichen bis zu x_1. Wenn nun F von der Form

$$(\sin 2n\pi w)^p (\cos 2n\pi w)^q\, \theta(x_1, x_2, \dots x_r)$$

und p, q ganze nicht negative Zahlen sind, so ist in jedem Gliede des erhaltenen Summenausdruckes $2n\pi w$ ein Vielfaches von 2π und daher

$$sin 2 n\pi w = 0, \quad cos 2 n\pi w = 1.$$

Hieraus schliesst nun der Verfasser ohne Weiteres seinen Hilfssatz.

Dieser Beweis wäre im Allgemeinen stichhaltig, wenn das zu integrirende Element von n unabhängig wäre. Da aber ein Element von der Form

$$(sin 2 n\pi w)^p (cos 2 n\pi w)^q \theta(x_1, \ldots x_r)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_r$$

von der Zahl n abhängt, so ist der von dem Verfasser in der dargelegten Weise hergeleitete Summenausdruck durchaus kein Näherungswerth für das Integral und man müsste, um einen solchen zu erhalten, die bezüglichen Intervalle in eine Anzahl von Theilen zerlegen, welche gegen n beträchtlich gross sein müsste; bei der vom Verfasser gewählten Eintheilung kommt der Factor $(sin 2 n\pi w)^p (cos 2 n\pi w)^q$ gar nicht zur Entfaltung seiner Veränderlichkeit.

Dass der Satz selbst nicht richtig ist, beweisen nachfolgende, nach Belieben leicht zu vermehrende Beispiele, in welchen ich mich der Einfachheit wegen auf den Fall eines Doppelintegrals mit constanten Grenzen beschränkt und

$$x'_1 = a, \quad x''_1 = b, \quad x_1 = x,$$
$$x'_2 = g, \quad x''_2 = h, \quad x_2 = y$$

(wo also a, b, g, h constante Zahlen bezeichnen) gesetzt habe; man findet, wie gross auch n angenommen werde:

$$\int_a^b\int_g^h sin^2 2 n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} + \frac{y-g}{h-g}\right) dx\, dy = \tfrac{1}{2}(b-a)(g-h),$$

$$\int_a^b\int_g^h cos^2 2 n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} + \frac{y-g}{h-g}\right) dx\, dy = \tfrac{1}{2}(b-a)(g-h),$$

$$\int_a^b\int_g^h cos 2 n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} + \frac{y-g}{h-g}\right) dx\, dy = 0,$$

$$\int_a^b\int_g^h xy\, cos 2 n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} + \frac{y-g}{h-g}\right) dx\, dy = -\frac{(b-a)^2 (h-g)^2}{4 n^2 \pi^2}$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

Da hiernach die von dem Verfasser mittels des von ihm mit dem Namen Osculationsfactor belegten Factors in $2 n\pi w$ bewirkte Umformung der zweiten Variation auf der Anwendung eines falschen Satzes beruht, so können weder diese Umformung, noch auch die daraus abgeleiteten Endkriterien als stichhaltig aufrechterhalten werden.

Krakau, 20. November 1875. MERTENS.