

Werk

Titel: Zeitschrift für Mathematik und Physik

Verlag: Teubner

Jahr: 1876

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 MATH I, 755:21

Werk Id: PPN599415665_0021

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN599415665_0021|LOG_0020

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

23/5

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



21. Jahrgang. 3. Heft.

Mit 2 lithographirten Tafeln.

Ausgegeben am 20. Mai 1876.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1876.

Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Soeben sind erschienen:

Vorlesungen
über

Mathematische Physik.

Von

Dr. Gustav Kirchhoff,

Professor der Physik an der Universität zu Berlin.

Mechanik.

Dritte Lieferung. gr. 8. geh. Preis M. 4. —

Mit dieser Lieferung sind die

Vorlesungen über Mechanik

des berühmten Verfassers beendigt. Preis des ganzen Bandes M. 13. —

Vermischte Untersuchungen

zur

Geschichte

der mathematischen Wissenschaften.

Von

Dr. Siegmund Günther.

Mit in den Text gedruckten Holzschnitten und 4 lithogr. Tafeln.
gr. 8. geh. Preis M. 9. —

Verlag von Louis Nebert in Halle a. S.

(Durch jede Buchhandlung zu beziehen.)

Enneper, Prof. Dr. A., Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte.
Akademische Vorträge. Lex.-8^o. br. 16 M.

Thomae, Prof. Dr. J., Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung
der elliptischen und Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden.
gr. 4^o. br. 3 M.

Thomae, Prof. Dr. J., Abriss einer Theorie der complexen Functionen und
der Thetafunctionen einer Veränderlichen. 2. verm. Auflage. gr. 8^o.
br. 5 M. 25 Pf.

Thomae, Prof. Dr. J., Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale.
gr. 4^o. br. 2 M. 80 Pf.

Thomae, Prof. Dr. J., Ebene geometr. Gebilde I. und II. Ordn. vom Stand-
punkte der Geometrie der Lage betrachtet. gr. 4^o. br. 2 M. 25 Pf.

Thomae, Prof. Dr. J., Ueber eine Function, welche einer linearen Differen-
tial- und Differenzengleichung IV. Ordn. Genüge leistet. gr. 4^o. br.
1 M. 50 Pf.

Hochheim, Dr. A., Ueber die Differentialcurven der Kegelschnitte. gr. 8^o.
br. 3 M.

Hochheim, Dr. A., Ueber Pole und Polaren der parabol. Curven III. Ordn.
gr. 4^o. br. 1 M.

Dronke, Dr. A., Einleitung in die höhere Algebra. gr. 8. br. 4 M. 50 Pf.

Bette, Dr. W., Unterhaltungen über einige Capitel der Mécanique céleste
und der Kosmogonie. gr. 8^o. br. 2 M.

VIII.

Ueber die Bewegung eines Punktes auf einer Kugel unter Einwirkung von Kräften in einer Meridianebene mit dem Potential $Ax_1^2 + Bx_2^2 + Bx_3^2$.

Von

Dr. JOHANNES EDUARD BÖTTCHER,
Oberlehrer a. d. Realschule I. Ordn. in Leipzig.

(Hierzu Taf. III, Fig. 1 – 4.)

In der Vorlesung Winter 1869/70 des Herrn Geheimrath Professor Richelot über Dynamik wies an einer Stelle dieser mein auf's Tiefste verehrter Lehrer, der mittlerweile, nämlich am 1. April d. J., aus dem Leben geschieden ist, auf ein anziehendes analytisch-mechanisches Problem hin, das „ebenso verdiente durchgeführt zu werden — mit Hilfe der elliptischen Functionen — als das des sphärischen Pendels“. Es ist das in 3. genannte.* Zwar nicht dieses Problem in seiner Allgemeinheit, von welchem einen speciellen Fall C. G. J. Jacobi selbst behandelt hat (vgl. unter 4), sondern ein anderer besonderer Fall des in 3. genannten Problems bildet den Gegenstand vorliegender Arbeit.

Aus welchem Grunde ich deren ursprünglichen Titel: Ueber die Bewegung eines Punktes auf einer rotirenden homogenen Kugel, die ihn anzieht, abgeändert habe, findet in 5. sich angedeutet.

I. Die Aufgabe. Ihre Zurückführung auf Quadraturen.

1. Eine Gattung integrabler Probleme.

Verhältnissmässig gering ist die Anzahl derjenigen analytisch-mechanischen Probleme, die bisher auf Quadraturen sich haben zurückbringen lassen. Und unter ihnen wieder konnte die Mehrzahl nicht eher zum letzten Ziele hindurch geführt werden, nämlich zur Darstellung der Coordinaten durch die Zeit, als für die Integrale der nächsthöheren Stufe nach den logarithmischen und cyclometrischen das entscheidende Hilfsmittel dargeboten war in C. G. J. Jacobi's Θ -Functionen.

* Er brachte dasselbe auf Quadraturen und zeigte die eine Eigenschaft, die Vermeidung des Pols.

Auf eine umfassende Gattung integrabler Probleme ist von dem Ebengenannten hingewiesen worden.

Damit nämlich aus dem Gleichungs-Systeme für die Bewegung auf einer Oberfläche:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= X_1 + \lambda \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= X_2 + \lambda \frac{\partial L}{\partial x_2} \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} &= X_3 + \lambda \frac{\partial L}{\partial x_3} \end{aligned} \right\}$$

sich für den Ausdruck

$$dT = \Sigma X dx + \lambda dL$$

ein exactes Differential ergebe, ist auch ohne Annahme einer Kräftefunction die Bedingung nothwendig und hinreichend, dass

$$\begin{aligned} &\frac{dL}{dx_1} \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \right) \\ &+ \frac{dL}{dx_2} \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \right) \\ &+ \frac{dL}{dx_3} \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right) \equiv 0 \end{aligned}$$

sei. Diese Bedingung aber ist u. A. jederzeit dann identisch erfüllt, wenn die Fläche eine Rotationsfläche ist, und die Kräfte nur in der Meridianebene wirken:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1, \\ x_2 &= r \cos \varphi, \\ x_3 &= r \sin \varphi; \\ L &= L(x_1, r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0; \\ X_1 &= X_1(x_1, r), \\ X_2 &= R \cdot \frac{x_2}{r}, \\ X_3 &= R \cdot \frac{x_3}{r}; \quad R = R(x_1, r). \end{aligned}$$

Beim Einsetzen dieser Werthe ergibt sich das identische Verschwinden des obigen Ausdruckes. Man bekommt nun mit Hilfe der Lagrange-schen Transformation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x'_1 &= X_1 + \lambda \frac{\partial L}{\partial x_1}, \\ \frac{d}{dt} r' &= r \varphi' \varphi' + R + \lambda \frac{\partial L}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt} r^2 \varphi' &= 0; \end{aligned}$$

und indem man das sich bietende Flächenintegral

$$r^2 \varphi' = C_1^2$$

sofort weiter benutzt:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = X_1 + \lambda \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{C_1^4}{r^3} + R + \lambda \frac{\partial L}{\partial r} \end{cases}.$$

Diese Gleichungen aber lassen den Satz erkennen:

Jedes Problem, mit oder ohne Kräftefunction, bei welchem

die Fläche eine Rotationsfläche ist, und
die Kräfte nur in der Meridianebebene wirken,
ist integriabel.

Denn nach Einführung einer einzigen neuen Variablen ξ , welche die Bedingungsgleichung identisch erfüllt:

erhält man $x_1 = F_1(\xi)$, $r = F_2(\xi)$, $L(\xi) \equiv 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} d(x'_1 x'_1 + r' r') &= \left(X_1 + \lambda \frac{\partial L}{\partial x_1} \right) dx_1 \\ &\quad + \left(\frac{C_1^4}{r^3} + R + \lambda \frac{\partial L}{\partial r} \right) dr \\ &= \Xi d\xi, \\ \frac{1}{2} \frac{dx_1^2 + dr^2}{dt^2} &= \int \Xi d\xi. \end{aligned}$$

Und hierdurch ist die Aufgabe zurückgeführt auf eine

Quadratur für t und eine

Quadratur für φ . Es wird

$$\begin{aligned} t &= \int \sqrt{\frac{d\xi}{2 \int \Xi d\xi}}; \\ d\varphi &= \frac{C_1^2 dt}{r^2}; \\ \varphi &= \int \frac{C_1^2}{(F_2 \xi)^2} \sqrt{\frac{d\xi}{uts}}. \end{aligned}$$

2. Erweiterung.

Prof. Richelot fügt hinzu: Das Problem bleibe auch dann lösbar, wenn die gegebene Rotationsfläche nicht festliegt, sondern eine constante Rotationsgeschwindigkeit um die Rotationsaxe besitzt. Man habe dann* nur überall ein von der Centrifugalkraft herührendes Glied anzufügen, nämlich

* Nach Vorgange Jacobi's bei Gelegenheit der Anziehung nach festen Centren (Vorl. üb. Dynamik S. 223 flgg.).

$$\text{an Stelle von } R \dots R + \frac{v^2}{r} \text{ oder } R + r\omega^2$$

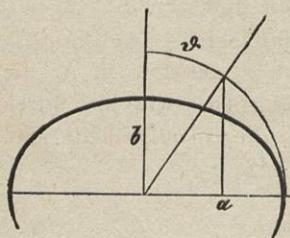
zu setzen, wo unter v die Linien-, unter ω die Winkelgeschwindigkeit verstanden ist, ohne dass an der Analysis etwas geändert werde.

3. Ein Einzelproblem dieser Gattung.

Als Beispiel führte Prof. Richelot folgendes Problem vor: Ein Punkt bewege sich auf der Oberfläche eines Rotationsellipsoides, ähnlich unserer Erde,

dasselbe rotire gleichförmig um die Axe,

und die wirkende Kraft sei eine Newton'sche Attraction des Ellipsoides selbst, also es sei



$$\text{die Fläche: } \frac{x_1^2}{b^2} + \frac{r^2}{a^2} - 1 = 0;$$

$$\text{die Kräfte: } X_1 = -mx_1,$$

$R = -nx$; diese vermehrt um $r\omega_1^2$: $R + r\omega^2 = r(-n + \omega^2)$ so dass eine Kräftefunction, die zur Lösbarkeit nicht erfordert würde, hier in der That vorhanden ist:

$$U = \frac{-mx_1^2}{2} + \frac{-n + \omega^2}{2} r^2;$$

und zur identischen Erfüllung der Bedingungsgleichung sei

$$x_1 = b \cos \vartheta$$

$$r = a \sin \vartheta.$$

Die Aufgabe führt zu dem Ergebnisse, dass, wenn

$$\sin^2 \vartheta \dots \xi$$

und eine zweite Integrationskonstante (die der lebendigen Kraft) C_2^2 genannt wird,

$$t = \int \frac{d\xi (b^2 - a^2 \xi + a^2)}{2\sqrt{b^2 - a^2} \sqrt{\left(\xi - \frac{a^2}{a^2 - b^2}\right)(1 - \xi) \left(-\frac{C_1^4}{a^2} + (-mb^2 + C_2^2)\xi + (-n + \omega^2 a^2 + mb^2)\xi^2\right)}}$$

Hierin sind die Fälle

$$b \leq a,$$

des abgeplatteten, des gestreckten Ellipsoides, zu unterscheiden.

Eine der wichtigsten allgemein gültigen Bemerkungen über dieses Integral ist die folgende. Da das Problem ein mechanisches ist, so darf t , die Zeit, niemals imaginär werden; demnach der Radicand der Wurzel im Nenner nie negativ. Nun aber würde für

$$\xi = 0$$

dieser Radicand $= -\frac{C_1^4}{a^2}$, also, von $C_1^2 = 0$ abgesehen, negativ werden.

Dies liefert ohne Weiteres den weittragenden Satz:

Das Mobil kann im Allgemeinen den Pol nicht erreichen.

4. Besondere Probleme, in dem genannten enthalten.

Man kann, um das erhaltene Integral, das elliptisch ist, zu vereinfachen, verschiedene beschränkende Annahmen machen. Nachstehende Tafel giebt Uebersicht darüber, welcher Stufe die dann sich bietenden Integrale angehören. Man bekommt bei der Bewegung

	auf Rotations- Ellipsoid	auf einer Kugel ($a=b$)
mit Meridiankräften X und R mit $r\omega^2$	elliptische	elliptische
" " " ohne "	elliptische	cyclometrische
ohne Meridiankräfte ($m=n=0$) mit $r\omega^2$	elliptische	elliptische
" " " ohne "	elliptische	cyclometrische

Integrale. Insbesondere liefert der Fall

$$\begin{aligned} m &= n = 0 \quad (\text{keine Attraction}) \text{ und} \\ \omega &= 0 \quad (\text{keine Rotation}) \end{aligned}$$

immer noch ein elliptisches Integral. Und zwar müssten u. A. die Formeln für die geodätische Linie sich ergeben, wie sie durch C. G. J. Jacobi hergeleitet und durch Prof. Luther mitgetheilt sind Creelle'sches Journal Bd LIII, S. 335 und S. 342.

5. Die zu behandelnde Aufgabe.

Ich stelle mir die Aufgabe: die Bewegung eines Punktes zu bestimmen auf der Oberfläche einer homogenen Kugel unter Einfluss einer Attraction der Kugel selbst und einer gleichförmigen Rotation, oder — ohne physikalische Deutung — die Bewegung dann zu bestimmen, wenn

die Fläche $L = 0 = x^2 + r^2 - a^2$,

$$\text{die Kräfte } X = -A \frac{x}{a},$$

$$R = -A \frac{r}{a} + r\omega^2$$

die Kräftefunction also

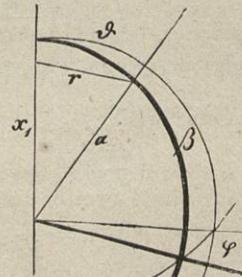
$$U = \frac{-A}{2a} x^2 + \frac{-A + a\omega^2}{2a} r^2$$

ist.

Hierin bedeutet a den Kugelradius; und wenn ferner als Aequator die Hauptkreisebene bezeichnet wird, zu welcher die Kraftkomponente $r\omega^2$ parallel gerichtet ist, so ist x der Abstand des Mobils von der Aequatorebene, r derjenige von der Axe oder der Parallelkreisradius.

Weiter giebt $-A$ diejenige Beschleunigung an, welche die Newton'sche Attraction für sich allein auf der Kugeloberfläche dem Mobil ertheilen würde.

Der physikalischen Deutung der obigen Gleichungen steht im Wege, dass bei Annahme einer Reibung zwischen dem Massenpunkte und



der Kugeloberfläche zu der Componente der Centrifugalkraft noch eine weitere Tangentialkraft hinzutreten würde; andererseits, wenn keine Reibung stattfindet, die rotirende Kugel überhaupt nur eine radial gerichtete Kraft auf das Mobil ausüben könnte und demnach unter demselben weggleiten würde. Daher bedeuten die obigen Gleichungen nichts Anderes, als diejenigen für die Bewegung eines Massenpunktes, der gezwungen ist, auf einer Kugeloberfläche zu bleiben und unter dem Einflusse einer Kräftefunction von der Form

$$Ax_1^2 + B(x_2^2 + x_3^2)$$

steht.

Die Bewegungsgleichungen werden nach dem Vorigen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\frac{x}{a} + \lambda\frac{x}{a}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{C_1^4}{r^3} - A\frac{r}{a} + \lambda\frac{x}{a},$$

worin unter C_1^2 die von der ersten Integration herrührende Flächen-constanten verstanden ist, und geben nach Einführung von

$$x = a \cos \vartheta$$

$$r = a \sin \vartheta$$

und Integration

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = -\frac{C_1^4}{a^4 \sin^2 \vartheta} - \frac{A}{a} + \omega^2 \sin^2 \vartheta + \frac{C_2^2}{a^2},$$

folglich, wenn wie vorher

$$\sin^2 \vartheta = \xi$$

gesetzt wird,

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = 4\omega^2(1-\xi)\left(-\frac{C_1^4}{a^4\omega^2} - \frac{Aa - C_2^2}{a^2\omega^2}\xi + \xi^2\right),$$

$$t = \frac{1}{2\omega} \int \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi} \sqrt{-\frac{C_1^4}{a^4\omega^2} - \frac{Aa - C_2^2}{a^2\omega^2}\xi + \xi^2}};$$

und da ferner

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C_1^2,$$

so wird

$$\varphi = \int \frac{C_1^2}{r^2} dt.$$

II. Allgemein giltige Bemerkungen. Zwei besondere Fälle.

Der allgemeinen Weiterbehandlung dieses Integrals mögen Bemerkungen, die schon vor der Reduction auf die Normalform sich darbieten, sowie um späterer Vergleichung willen die Durchführung zweier Grenzfälle vorangehen.

6. Erreichen des Pols. Gang auf Meridian; auf Parallelkreis.

Vor Allem ist auch für hier zu wiederholen, dass in

$$t = \frac{1}{2\omega} \int \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi} \sqrt{-\frac{C_1^4}{a^4\omega^2} - \frac{Aa - C_2^2}{a^2\omega^2} \xi + \xi^2}}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = 2\omega \cdot \sqrt{1-\xi} \sqrt{\dots},$$

der Radicand nie negativ werden darf, ξ also im Allgemeinen nicht = 0, so dass das Mobil

im Allgemeinen nicht in den Pol gelangt.
(Vergl. S. 148.)

Da der Radicand zwar nicht < 0 , wohl aber = 0 werden darf, so ist der einzige Fall, in welchem ein Verschwinden von ξ in der That möglich ist, der, dass gleichzeitig auch

$$C_1^2, \text{ d. i. } r^2 \frac{d\varphi}{dt} \\ \equiv r_0^2 \varphi'_0 = 0.$$

Dies kann auf zweierlei Weise geschehen.

Erstens, wenn $\varphi'_0 = 0$. Das bedeutet: Das Mobil kann den Pol in dem Falle erreichen, dass seine Geschwindigkeit zu Anfang (zu irgend einer Zeit) ganz in die Meridiane Ebene fiel.
Zweitens, wenn $r_0 = 0$, wenn das Mobil schon anfangs im Pole sich befand. Dieser Fall ist im vorigen enthalten; denn von dem Pole als Anfangsorte aus fällt eine jede Anfangsgeschwindigkeit in einen Meridian hinein.

Eine Bewegung ausschliesslich auf einem Meridiane, so dass

$$\frac{d\varphi}{dt} \equiv 0$$

bleibt, tritt immer dann und nur dann ein, wenn

$$\varphi'_0 = 0:$$

Wenn das Mobil zu irgend einer Zeit ein Stück längs eines Meridians gegangen ist, so verlässt es denselben nie wieder.

Es ist ferner zu fragen, unter welchen Umständen identisch

$$\frac{d\xi}{dt} = 0, \xi = \text{Const.}$$

sein, das Mobil also auf einem Parallelkreise umlaufen kann.
Dies findet nun statt,

erstens, wenn $\xi = \text{Const.} = 1$;

dazu ist erforderlich, dass

$$\xi_0 = 1 \text{ und}$$

$$\dot{\xi}_0 = 0,$$

oder dass das Mobil anfangs auf dem Aequator war und nur eine Geschwindigkeit in dessen Ebene besass. Also auch für den Aequator gilt der Satz:

Wenn das Mobil zu irgend einer Zeit ein Stück entlang desselben gegangen ist, so bleibt es in ihm, wie schon die symmetrische Lage der Halbkugeln an die Hand giebt. Es ist dann

$$\frac{d\varphi}{dt} = \text{Const.} = \varphi',$$

d. h. der Aequator wird gleichförmig durchlaufen (nicht so der Meridian [vergl. 7]).

Zweitens, wenn

$$\begin{aligned} \xi &= \text{Const.} = 0 \\ \text{und gleichzeitig} \quad C_1^2 &= 0 \end{aligned} \left. \right\},$$

also wenn

$\xi_0 = 0$, oder das Mobil anfangs im Pole sich befand, und $\xi_0 = 0$, wenn es keine meridionale, d. h. überhaupt keine Geschwindigkeit hatte. Es bleibt dann im Pole ruhend.

Dass dagegen die beiden Werthe von ξ , für welche außerdem noch der Radicand verschwindet, auf keine Parallelkreisbewegung führen, wird später sich zeigen.

Ebensowenig kann an anderem Orte als im Pole oder auf dem Aequator das Mobil ruhen. Denn während die blosse Attraktionskraft $\sqrt{X^2 + R^2}$ hier immer normal zur Fläche gerichtet ist, liefert die Beschleunigung $r\omega^2$ zwei Componenten, eine normale oder radiale, welche als Minderung des Druckes sich äussert, und eine längs des Meridians. Diese letztere

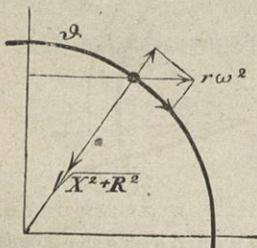
$$r\omega^2 \cos \vartheta,$$

welche für $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ oder $\vartheta = \frac{3\pi}{4}$ ihren höch-

sten Betrag erreicht, treibt das Mobil dem Aequator zu.

Somit ist gefunden worden:

1. Das Mobil kann im Pole ruhen;
2. " " " auf einem Meridiane gehen;
3. " " " sonst niemals in den Pol kommen;
4. " " " auf dem Aequator gehen (mit constanter Geschwindigkeit), insbesondere ruhen;
5. " " " nicht auf einem andern Parallelkreise gehen;



6. Das Mobil kann nicht an einem Orte ausser Pol oder Aequator ruhen.*

7. Andere Form der Gleichung. Erster specieller Fall: Bewegung auf Meridian.

Die beiden in die Gleichung für t eingegangenen Constanten, nämlich

die Flächenconstante C_1^2 und

die der lebendigen Kraft C_2^2

lassen sich durch andere, mit mechanischer Bedeutung, ersetzen. Es wird

$$C_1^2 = r_0^2 \varphi'_0 = a^2 \sin^2 \vartheta_0 \varphi'_0$$

$$C_2^2 = a^2 \vartheta'_0 \vartheta'_0 + \frac{C_1^4}{a^2 \sin^2 \vartheta_0} + A a - \omega^2 a^2 \sin^2 \vartheta_0$$

$$= a^2 \vartheta'_0 \vartheta'_0 + a^2 \sin^2 \vartheta_0 \varphi'_0 \varphi'_0 + A a - \omega^2 a^2 \sin^2 \vartheta_0.$$

Ihre Einsetzung liefert

$$\begin{aligned} \sin^2 \vartheta \left(\frac{d \vartheta}{dt} \right)^2 \\ = \omega^2 \left(-\frac{\varphi'_0 \varphi'_0 \sin^4 \vartheta_0}{\omega^2} + \frac{\vartheta'_0 \vartheta'_0 + (\varphi'_0 \varphi'_0 - \omega^2) \sin^2 \vartheta_0}{\omega^2} \sin^2 \vartheta + \sin^4 \vartheta \right). \end{aligned}$$

Hieraus ist die Constante A der Attraction ganz herausgegangen, wie nöthig. Denn die Resultante der anziehenden Kräfte X und R allein wird normal zur Oberfläche.

Gleicherweise ist die Gleichung von der Länge des Kugelradius unabhängig geworden.

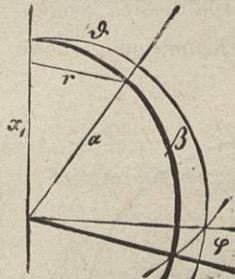
Führe ich nun ferner

$$\begin{array}{c|c} \sin \vartheta & \cos \beta \\ \sin^2 \vartheta \text{ oder } \cos^2 \beta & \xi \end{array}$$

ein, so wird

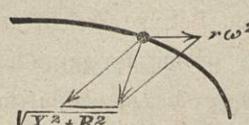
$$\left(\frac{d \xi}{dt} \right)^2 = 4 \omega^2 (1 - \xi) (P + Q \xi + \xi^2),$$

worin



* Für ein Rotationsellipsoid behalten Nr. 1 bis 4, Nr. 5 und 6 dagegen verlieren die Giltigkeit. Insbesondere ist beim Rotationsellipsoid die Resultante von X und R im Allgemeinen nicht normal zur Fläche gerichtet. Nimmt man vielmehr den Anfangsort beliebig, die Anfangsgeschwindigkeit = 0 und sieht (was wenigstens so lange statthaft ist, als das Mobil in relativer Ruhe bleibt) $r \omega^2$ als eine Centrifugalkraft an, herrührend von einer Rotation um die Axe: so kann es hier geschehen, dass die Resultante der Attraction und der Centrifugalkraft normal zur Fläche wird, die tangentiale Componente in der Meridianebene also null, so dass das Mobil keinen Antrieb nach dem Aequator hin erfährt.

Dies wird vor Allem dann der Fall sein, wenn die jetzt vorhandene constante Rotationsgeschwindigkeit dieselbe ist, wie die, unter deren Einflusse etwa das Ellipsoid früher (in flüssigem Zustande) seine Gestalt angenommen hat.



$$P \quad -\frac{\varphi'_0 \varphi'_0 \cos^4 \beta_0}{\varphi^2} \\ Q \quad \frac{\beta'_0 \beta'_0 + (\varphi'_0 \varphi'_0 - \omega^2) \cos \beta_0}{\omega^2}.$$

Der erste zu behandelnde Specialfall sei die als möglich erkannte Bewegung auf einem Meridiane; dann, wenn

$$\varphi'_0 = 0.$$

In diesem Falle wird

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = \beta'_0 \beta'_0 - \omega^2 (\sin^2 \beta - \sin^2 \beta_0),$$

und es ist zunächst zu entscheiden, ob das Mobil auf dem Meridiane hin- und herpendelt, oder rundumläuft. Dazu ist zu fragen, ob immer ein reeller Winkel

$$\beta_1 = \text{Max} \beta$$

sich angeben lasse. Nun kann der aus der Forderung

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = 0$$

sich ergebende Werth

$$\sin^2 \beta_1 = \frac{\beta'_0 \beta'_0}{\omega^2} + \sin^2 \beta_0$$

nie negativ, wohl aber ein unechter Bruch werden. Soll indess β_1 reell sein, so muss er

$$\leqq 1$$

bleiben, mithin

$$\frac{\beta'_0}{\cos \beta_0} \leqq \omega.$$

Behufs bequemerer Aussprache in Worten multipliire ich beiderseits mit r_0 , so findet sich

$$\beta'_0 \frac{r_0}{\cos \beta_0}$$

$$\text{oder } a \beta'_0 \leqq r_0 \omega,$$

und nimmt man für den Augenblick als Anfangsort den Punkt des Uebergangs über den Aequator, den einzigen, der auf alle Fälle erreicht wird, so geht die Ungleichung über in

$$a \cdot \beta'_0 \leqq a \omega \\ \beta'_0 \leqq \omega.$$

D. h.: das Mobil

oscillirt quer über den Aequator läuft rundum $\left\{ \begin{array}{l} \text{je nachdem die Winkelgeschwindigkeit beim Ueber-} \\ \text{schreiten des Aequators } \left\{ \begin{array}{l} < \\ > \end{array} \right. \end{array} \right\} \omega.$

8. Erster Specialfall. Fortsetzung.

Im Falle der Oscillation auf dem Meridiane nehme ich in der Gleichung

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = \beta'_0 \beta'_0 - \omega^2 (\sin^2 \beta - \sin^2 \beta_0) \\ = (\beta'_0 \beta'_0 + \omega^2 \sin^2 \beta_0) \left(1 - \frac{\omega^2}{\beta'_0 \beta'_0 + \omega^2 \sin^2 \beta_0} \sin^2 \beta\right)$$

die Substitution

$$\frac{\omega^2}{\beta'_0 \beta'_0 + \omega^2 \sin^2 \beta_0} = \frac{1}{k^2} (> 1)$$

vor und bekomme

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = k \omega^2 \left(1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \beta\right), \\ t = \int_0^{\beta} \frac{1}{k \omega} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \beta}},$$

wenn ich die Werthe

$$\frac{t \mid \beta}{0 \mid \beta_0 = 0}$$

zusammengehören lasse. Substituirt man nun
für $\sin^2 \beta \dots k^2 \sin^2 \gamma$,

so wird

$$d t^2 = \frac{1}{k^2 \omega^2} \cdot \frac{k^2 d\gamma^2}{1 - k^2 \sin^2 \gamma},$$

und da β und γ gleichzeitig verschwinden,

$$t = \frac{1}{\omega} \int_0^{\gamma} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}}, \\ \gamma = am \omega t, \\ \sin^2 \beta = k^2 \sin^2 am \omega t.$$

Da aber weiter

$$\beta_0 = 0, \\ k^2 \text{ od. } \frac{\beta'_0 \beta'_0 + \omega^2 \sin^2 \beta_0}{\omega^2} = \frac{\beta'_0 \beta'_0}{\omega^2} = \sin^2 \beta_1, \text{ so wird}$$

$$\sin^2 \beta = \sin^2 \beta_1 \cdot \sin^2 am \omega t \text{ mod } (k = \sin \beta_1).$$

Der Verlauf ist nun folgender. Bezeichnet man durch

$$\frac{T}{2}$$

eine halbe Schwingungsdauer, d. i. die Zeit der Bewegung vom Äquator bis zum Punkte weitesten Ausschlags, so gehören folgende Werthe zusammen:

t	0	$\frac{1}{2} T$	T	$\frac{3}{2} T$	$2 T$...
β	0	$+\beta_1$	0	$-\beta_1$	0	...
am	0	$am K$	$am 2 K$	$am 3 K$	$am 4 K$...

und es wird

$$K = \omega \frac{T}{2}, \quad T = \frac{2K}{\omega}.$$

Nehme ich z. B. $\beta'_0 = \omega \sqrt{\frac{1}{2}}$, also auch $k = \sin \beta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, daher $K = 1,854$, und stelle mir etwa unter ω eine Geschwindigkeit vor, mit welcher in n Secunden der Weg 2π durchlaufen würde, so ist $\omega = \frac{2\pi}{n}$, und

$$T = n \frac{2K}{2\pi} = 0,590 n;$$

nach soviel Secunden ist eine Schwingung von Wendekreis zu Wendekreis vollendet, und nach

$$2T = 1,180 n$$

Secunden ist das Mobil zum ersten Ausschlagspunkte zurückgekehrt.

9. Erster Specialfall. Fortsetzung.

Wenn dagegen, weil das Verhältniss

$$\frac{\beta'_0}{\omega} > 1$$

ist, ein Umlauf auf dem Meridiane stattfindet, so erlaubt die Gleichung

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 &= \beta'_0 \beta'_0 - \omega^2 (\sin^2 \beta - \sin^2 \beta_0) \\ &= (\beta'_0 \beta'_0 + \omega^2 \sin^2 \beta_0) \left(1 - \frac{\omega^2}{\beta'_0 \beta'_0 + \omega^2 \sin^2 \beta_0} \sin^2 \beta \right) \end{aligned}$$

jetzt ohne Weiteres die Setzung

$$\frac{\omega^2}{\beta'_0 \beta'_0 + \omega^2 \sin^2 \beta_0} = \lambda^2 (< 1),$$

oder wenn auch hier

$$\frac{0 \mid \beta}{t \mid \beta_0} = 0$$

angenommen wird,

$$\lambda = \frac{\omega}{\beta'_0} < 1.$$

Dann wird

$$\left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 = \frac{\omega^2}{\lambda^2} (1 - \lambda^2 \sin^2 \beta),$$

$$t = \frac{\lambda}{\omega} \int_0^\beta \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \beta}}$$

$$\beta = am \frac{\omega}{\lambda} t$$

$$= am \beta'_0 t \quad mod \left(\lambda = \frac{\omega}{\beta'_0} \right).$$

Verlauf. Der gefundene Werth der geographischen Breite theilt die Eigenschaften der Amplitude. Insbesondere wächst er beständig, indem der Differentialquotient $\mathcal{A}(\beta, \lambda)$ stets positiv bleibt. Heisst

$$2T$$

die Dauer von einem völligen Umlaufe, so wird für

$$\begin{array}{r} t \mid 0 \dots 2T \dots \\ \beta \mid 0 \dots am \beta'_0 (0 + 2T) \dots \\ \qquad\qquad\qquad = am (0 + 4A), \end{array}$$

also

$$\begin{aligned} 4A &= \beta'_0 \cdot 2T \\ 2T &= \frac{4A}{\beta'_0} = \frac{4A \cdot \lambda}{\omega} \end{aligned}$$

oder bei derselben Annahme über ω wie vorhin

$$= \frac{4A \cdot \lambda}{2\pi} n.$$

Sei z. B. $\beta'_0 = \omega \sqrt{2}$, so erfolgt jetzt das Wiedereintreffen in demselben Punkte schon nach

$$\begin{aligned} 2T &= \frac{4 \cdot 1,854 \cdot 0,707}{2\pi} n \\ &= 0,834 n \end{aligned}$$

Secunden.

Für

$$\beta_1, \text{ d. i. } \text{Max } \beta = \frac{\pi}{2}$$

wird

$$\beta'_0 = \omega.$$

Es fallen dann die beiden gefundenen Formeln zusammen und geben

$$\sin \beta = \sin am \omega t \text{ oder } \sin am \beta'_0 t \bmod \left(\frac{\omega}{\beta'_0} = 1 \right),$$

woraus

$$\begin{aligned} \beta &= am (\omega t, 1) \\ &= \arcsin \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{e^{\omega t} + e^{-\omega t}} \end{aligned}$$

folgt. In diesem Falle befindet sich das Mobil im Pole (den es nach unendlich langer Zeit erreicht) im Zustande labilen Gleichgewichtes: bei einem um verschwindend Weniges kleineren β'_0 würde es am Pole umkehren und oscilliren; bei einem noch so wenig grösseren β'_0 dagegen rundumlaufen.

Die beigegebene Curventafel zeigt für beide Fälle und den Grenzfall die Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Winkel, sowie die des Winkels von der Zeit.

10. Zweiter Specialfall: $\omega = 0$.

Wenn $\omega = 0$ ist, also einzig eine Anziehung mit normaler Richtung wirkt, so wird die Differentialgleichung für β

$$dt = \frac{1}{\varphi'_0 \cos \beta_1} \cdot \frac{\cos \beta \, d\beta}{\sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \beta_1}},$$

wo

$$\text{Max } \beta \mid \beta_1$$

gesetzt, und

$$\frac{t}{\beta} \mid \beta_0 = \beta_1$$

angenommen ist. Dann wird

$$t = \int_{\beta_1}^{\beta} \frac{1}{\varphi'_0 \cos^2 \beta_1} \left(\arcsin \frac{\sin \beta}{\sin \beta_1} - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sin \beta = \sin \beta_1 \cos (\varphi'_0 \cos \beta_1 t).$$

Ferner

$$d\varphi = \varphi'_0 \cos^2 \beta_1 \frac{dt}{\cos^2 \beta}$$

$$= - \frac{d \cdot \cos \beta_1 \operatorname{ctg} (\varphi'_0 \cos \beta_1 t)}{1 + \cos^2 \beta_1 \operatorname{ctg}^2 (\varphi'_0 \cos \beta_1 t)}$$

und, wenn auch

$$\frac{t \mid 0}{\varphi \mid \varphi_0 = 0}$$

genommen wird,

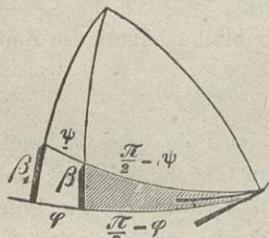
$$\varphi = \int_0^t \operatorname{arc} \operatorname{ctg} (\cos \beta_1 \operatorname{ctg} \varphi'_0 \cos \beta_1 t) dt$$

$$\operatorname{ctg} \varphi = \cos \beta_1 \operatorname{ctg} (\varphi'_0 \cos \beta_1 t).$$

Die gefundenen beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sin \beta_1 \cos (\varphi'_0 \cos \beta_1 t) \\ \operatorname{ctg} \varphi &= \cos \beta_1 \operatorname{ctg} (\varphi'_0 \cos \beta_1 t) \end{aligned}$$

sind aber Relationen für ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, in welchem



die eine Kathete $\frac{\pi}{2} - \varphi$,

die Hypotenuse $\frac{\pi}{2} - \varphi'_0 \cos \beta_1 t$,

der Zwischenwinkel β_1

beträgt. Dies gibt Bestätigung dafür, dass wie nötig, unter der gemachten Annahme das Mobil sich auf einem Hauptkreise, einer kürzesten sphärischen Linie, bewegt. Und wird dessen Bogen ψ genannt, so bestätigt sich weiter, dass

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi'_0 \cos \beta_1 t \\ &= \psi'_0 t \\ \psi' &= \psi'_0 = \text{Const.}, \end{aligned}$$

die Bewegung auf dem Hauptkreise somit eine gleichförmige ist

Fernerhin ist mit $\psi = \frac{\pi}{2}$ gleichzeitig $\varphi = \frac{\pi}{2}$, und wird, wie früher, die

Periode einer unveränderten Wiederkehr der Bewegung, die für $\psi = 2\pi$ eintritt, durch $2T$ bezeichnet, so wird

$$\text{für } t = \frac{T}{2} \quad \varphi = \frac{\Phi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

III. Allgemeine Wurzel-Discussion. Reduction auf die Normalform.

11. Wurzel-Discussion.

Indem ich zu dem allgemeinen Probleme mich wende, gilt es vor Allem, die Wurzelwerthe aufzusuchen, für welche in

$$t = + \frac{1}{2\omega} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi} \sqrt{P + Q\xi + \xi^2}}$$

der Radicand im Nenner verschwindet. Hierin war

$$\begin{array}{c|l} \xi & \cos^2 \beta \\ \hline P & -\frac{\varphi'_0 \varphi'_0 \cos^4 \beta_0}{\omega^2} \\ Q & \frac{\beta'_0 \beta'_0 + (\varphi'_0 \varphi'_0 - \omega^2) \cos^2 \beta_0}{\omega^2} \\ \hline \xi_0 & \text{noch willkürlich gelassen.} \end{array}$$

Jeder Wurzel von

$$\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = 4\omega^2 (1 - \xi) (P + Q\xi + \xi^2) = 0$$

entspricht ein $M_{ax}^{in} \xi$ (doch nicht nothwendig $M_{ax}^{in} \beta$). Da nach erreichtem $M_{ax} \xi$ $d\xi$ vom Positiven ins Negative übergeht, so muss bei einem jeden Wurzelwerthe die Quadratwurzel ihr Zeichen wechseln, damit $d\xi = \frac{d\xi}{\sqrt{ }} \sqrt{ } \xi$ jederzeit eine positive Grösse bleibe, denn die Zeit gilt als beständig wachsend.

Da ferner

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C_1^2}{r^2} = \frac{a^2 \cos^2 \beta_0 \varphi'_0}{a^2 \cos^2 \beta}$$

ist, so findet jedesmal zugleich

$$\text{mit } M_{ax}^{in} \xi \text{ ein } M_{in}^{ax} \frac{d\varphi}{dt}$$

statt. —

Als reelle Wurzel der Gleichung $\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = 0$ bietet sich zunächst

$\xi_3 = 1$ ($\beta = 0$, das Mobil auf dem Aequator).

Ob nun die beiden anderen, aus

$$P + Q\xi + \xi^2 = 0$$

sich ergebenden Wurzeln

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 - 4P}}{2}$$

gleichfalls reell sind, hängt davon ab, ob

$$Q^2 - 4P > 0$$

ist. Dies ist aber stets der Fall. Denn es ist sowohl Q^2 positiv, als $-4P$ positiv. Somit hat die Gleichung 3 reelle Wurzeln; und

es ist nur noch die Frage, ob beide letztgefundenen Wurzeln einen mechanischen Sinn haben, nämlich ob

$$0 < \xi_2 = \cos^2 \beta_2 < 1.$$

12. Wurzel-Discussion. Fortsetzung.

Die Frage, zwischen welchen Grenzen ξ sich bewegen darf, wenn $\eta = 4 \omega^2 (1 - \xi) (P + Q \xi + \xi^2) = pos.$

bleiben soll oder, was damit übereinkommt, die Frage nach der Lage der Wurzeln wird dadurch beantwortet, dass man das Vorzeichen von η für einzelne Werthe von ξ bestimmt. Es wird

für ξ | η

$= 0$	$4 \omega^2 P$ d. i. $-4 \varphi'_0 \varphi'_0 \cos^4 \beta_0 \dots neg.$; Ausnahme: $= 0$: 1. wenn $\varphi'_0 = 0$ — Umlauf auf Meridian; 2. wenn $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ — Anfangsort im Pole; (Fall Nr. 2 enthalten im vorigen.) Siehe früher.
$= \xi_3 = 1$	0
$= \cos^2 \beta_0$	$4 \omega^2 (1 - \cos^2 \beta_0) \left(\frac{\varphi'_0 \varphi'_0 \cos^4 \beta_0}{\omega^2} + \frac{\beta'_0 \beta'_0 + (\varphi'_0 \varphi'_0 - \omega^2) \cos^2 \beta_0}{\omega^2} \cos^2 \beta_0 + \cos^4 \beta_0 \right)$ d. i. $4 \sin^2 \beta_0 \cdot \beta'_0 \beta'_0 \cdot \cos^2 \beta_0 \dots pos.$ in allen Fällen.

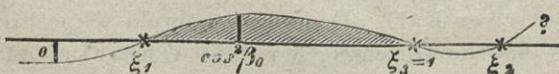
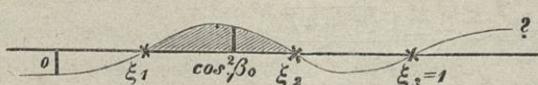
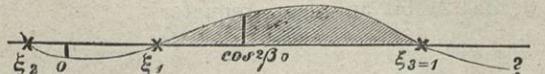
Hieraus folgt: Es gibt jederzeit eine Wurzel

$$\text{zwischen } \beta = \beta \text{ und } \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Demnach: Für jeden Anfangsort ausser dem Pole und jede andere Anfangsgeschwindigkeit als rein im Meridiane gilt, dass das Mobil nicht in den Pol kommen kann (vgl. 6.), sondern nach dem Pole zu eine grösste Ausweichung hat.

Es kann also z. B. auch nicht etwa ein spiraliger Aufstieg nach dem Pole in unendlich langer Zeit erfolgen.

Noch aber ist nicht vollständig entschieden, in welcher Reihe die drei reellen Wurzeln aufeinanderfolgen. Es sind drei Fälle denkbar:



Indessen die Untersuchung, ob auch die dritte Wurzel ξ_2 zwischen 0 und 1 liegen könne, wird dadurch entbehrlich, dass das Wurzelproduct $\xi_1 \xi_2$ dem Gliede ohne ξ in der Gleichung, nämlich P gleich sein

muss. Denn da dieses negativ und die erste Wurzel positiv ist, so muss

ξ_2 negativ

sein. — Damit stimmt überein, dass die η -Curve bei ihrer Ankunft in $\xi=1$ sinkend ist, indem

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\xi=1}, \text{ d. i. } & 4\omega^2(Q-P+2(1-Q)\xi-3\xi^2)_{\xi=1} \\ & = -4\omega^2(P+Q+1) \\ & = -4(-\varphi_0^2\cos^4\beta_0+\beta_0'^2+\varphi_0^2\cos^2\beta_0-\omega^2\cos^2\beta_0+\omega^2) \\ & = -4(\omega^2\sin^2\beta_0+\beta_0'^2+\varphi_0^2\cos^2\beta_0\sin^2\beta_0), \end{aligned}$$

also negativ ist. Demnach folgen die drei Wurzeln so:

Und daher ist das Mobil

gezwungen, auf einer

Zone zu bleiben,

deren Mittellinie

der Aequator ist.



13. Reduction auf die Normalform.

Das zu reducirende Integral ist nunmehr

$$t = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{4\omega^2(1-\xi)(P+Q\xi+\xi^2)}} = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{4\omega^2(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_1)(1-\xi)}},$$

wobei

$$\xi_2 < \xi_1 < \xi < \xi_3$$

$4\omega^2$ positiv.

Ich benutze eine Substitution zweiten Grades, und zwar werde

$$\text{der positive echte Bruch } \frac{1-\xi_1}{1-\xi_2} = k^2$$

gesetzt, und der gleichfalls positive echte

$$\frac{1-\xi_2 \cdot \xi - \xi_1}{1-\xi_1 \cdot \xi - \xi_2} = \sin^2 \sigma,$$

so dass

$$\xi = \frac{\xi_1(1-\xi_2) - \xi_2(1-\xi_1)\sin^2 \sigma}{(1-\xi_2) - (1-\xi_1)\sin^2 \sigma}$$

$$\cos^2 \sigma = \frac{\xi_1 - \xi_2}{1 - \xi_1} \cdot \frac{1 - \xi}{\xi - \xi_2}.$$

Damit wird

$$t = \int_{\xi_0}^{\xi} uts = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{\omega^2(1-\xi_2)\sqrt{1-k^2\sin^2 \sigma}}},$$

wobei die Werthe

$$\begin{array}{c|cc} \xi & \xi_1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

zusammengehören. — Bei dieser Reduction war

$$\xi_2 = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - 4P}}{2}$$

oder nach Einsetzung der Werthe von P und Q

$$\xi_1 = \frac{-\beta'_0{}^2 - (\varphi'_0{}^2 - \omega^2) \cos^2 \beta_0 \pm \sqrt{\beta'_0{}^4 + 2\beta'_0{}^2(\varphi'_0{}^2 - \omega^2) \cos^2 \beta_0 + (\varphi'_0{}^2 + \omega^2) \cos^4 \beta_0}}{2\omega^2}$$

$$\xi_2 = \frac{P - \beta'_0{}^2 - (\varphi'_0{}^2 - \omega^2) \cos^2 \beta_0 \mp \sqrt{\beta'_0{}^4 + 2\beta'_0{}^2(\varphi'_0{}^2 - \omega^2) \cos^2 \beta_0 + (\varphi'_0{}^2 + \omega^2) \cos^4 \beta_0}}{2\omega^2}$$

Das Vorzeichen der Quadratwurzel ist so zu wählen, dass der Werth ξ_1 positiv wird. Er muss dann von selbst zwischen 0 und 1 zu liegen kommen, während ξ_2 dann unter 0 fällt. (Dies wird sich dem nächst bestätigen.)

IV. Die geographische Breite β .

14. Wahl der unteren Grenze. Ausdruck für $\cos \beta$.

Nach dem Vorigen wird

$$\omega \sqrt{1 - \xi_2} t = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{A\sigma},$$

und nun werde die bisher willkürlich gelassene untere Grenze β_0 so bestimmt, dass die untere Grenze $\sigma_0 = 0$ werde:

$$\sin^2 \sigma_0 = 0 = \frac{1 - \xi_2}{1 - \xi_1} \cdot \frac{\xi_0 - \xi_1}{\xi_0 - \xi_2},$$

daraus folgt

$$\xi_0 = \xi_1, \quad \cos^2 \beta_0 = \cos^2 \beta_1;$$

d. h. der Beginn der Bewegung möge fortan in den Punkt höchster geographischer Breite verlegt sein. Dann wird

$$\omega \sqrt{1 - \xi_2} t = \int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{A\sigma}, \quad \sigma = am(\omega \sqrt{1 - \xi_2} t),$$

$$\xi = \cos^2 \beta = \frac{\xi_1(1 - \xi_2) - \xi_0(1 - \xi_1) \sin^2 am(\omega \sqrt{1 - \xi_2} t)}{(1 - \xi_2) - (1 - \xi_1) \sin^2 am(\omega \sqrt{1 - \xi_2} t)}.$$

Für $t = 0$ ergiebt sich wieder $\xi_0 = \xi_1$, wie nöthig.

Unter der gemachten Annahme nun

$$\sigma_0 = 0,$$

also

$$\xi_0 = \xi_1 = Min \xi, \quad \beta_0 = \beta_1 = Max \beta,$$

$$\beta'_0 = 0$$

wird

$$\xi_1 \Big), \quad d. i. \quad \frac{-\beta'_0{}^2 - (\varphi'_0{}^2 - \omega^2) \cos^2 \beta_0 \pm \sqrt{}}{2\omega^2} \dots$$

$$= -(\varphi'_0{}^2 - \omega^2) \cos^2 \beta_1 + (\varphi'_0{}^2 + \omega^2) \cos^2 \beta_1, \\ \frac{2\omega^2}{2\omega^2},$$

$$\xi_1 = \cos^2 \beta_1, \dots \text{also } + \text{ und zwischen } 0 \text{ und } 1,$$

$$\xi_2 = -\left(\frac{\varphi'_0}{\omega}\right)^2 \cos^2 \beta_1, \dots \text{also } -,$$

$$P = +\xi_1 \xi_2 = -\left(\frac{\varphi'_0}{\omega}\right)^2 \cos^4 \beta_1,$$

$$Q = -(\xi_1 + \xi_2) = +\frac{\varphi'_0{}^2 - \omega^2}{\omega^2} \cos^2 \beta_1$$

in Uebereinstimmung mit Früherem. Und führe ich ferner einen Hilfswinkel (ohne geometrische Bedeutung) ein, schreibe nämlich für den Ausdruck

$$\frac{\varphi'_0{}^2 \cos^2 \beta_1}{\omega^2},$$

welcher von 0 bis ∞ sich ändern kann, $\operatorname{tg}^2 \mu$, wo dann

$$\sin^2 \mu = \frac{\varphi'_0{}^2 \cos^2 \beta_1}{\omega^2 + \varphi'_0{}^2 \cos^2 \beta_1},$$

$$\cos^2 \mu = \frac{\omega^2}{\omega^2 + \varphi'_0{}^2 \cos^2 \beta_1}$$

wird, so bekomme ich folgende Constantenumformung:

$$\begin{array}{lll} \xi_0 = \xi_1 & = \cos^2 \beta_1 & = \cos^2 \beta_1 \\ \xi_2 & = -\frac{\varphi'_0{}^2 \cos^2 \beta_1}{\omega^2} & = -\operatorname{tg}^2 \mu \\ \hline \frac{\xi_1}{\xi_2} & = -\frac{\omega^2}{\varphi'_0{}^2} & = -\frac{\cos^2 \beta_1}{\operatorname{tg}^2 \mu} \\ \omega \sqrt{1 - \xi_2} & = \sqrt{\omega^2 + \varphi'_0{}^2 \cos^2 \beta_1} = \frac{\omega}{\cos \mu} \\ k^2 = \frac{1 - \xi_1}{1 - \xi_2} & = \frac{\omega^2 \sin^2 \beta_1}{\omega^2 + \varphi'_0{}^2 \cos^2 \beta_1} & = \sin^2 \beta_1 \cos^2 \beta_1. \end{array}$$

Dadurch wird

$$\begin{aligned} \xi = \cos^2 \beta &= \xi_1 \cdot \frac{1 - \frac{\xi_2}{\xi_1} \frac{1 - \xi_1}{1 - \xi_2} \sin^2 \operatorname{am} \omega \sqrt{1 - \xi_2} t}{1 + \frac{1 - \xi_1}{1 - \xi_2} \sin^2 \operatorname{am} \omega \sqrt{1 - \xi_2} t} \\ &= \cos^2 \beta_1 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \beta_1 \sin^2 \mu \sin^2 \operatorname{am} \left(\frac{\omega}{\cos \mu} t\right)}{1 + \sin^2 \beta_1 \cos^2 \mu \sin^2 \operatorname{am} \left(\frac{\omega}{\cos \mu} t\right)}, \\ &\text{mod } (k = \sin \beta_1 \cos \mu). \end{aligned}$$

15. Discussion. Wiederherleitung der beiden Grenzfälle.

Der Bruch, mit welchem multipliziert der Anfangswert $\cos^2 \beta_1$ hier erscheint, kann, wie es erforderlich ist, nie echt werden. Er wird

$= 1 = \text{Min}$ für $t = 0$, und dann ist $\beta = \beta_1$. Nach einer Zeit ferner, die $\frac{T}{2}$ heissen mag, ist der Amplitudensinus so gross geworden, als möglich:

$$\sin^2 am \left(\frac{\omega}{\cos \mu} \frac{T}{2} \right) = \text{Max} = 1;$$

und zugleich damit hat die rechte Seite ihren höchsten Werth

$$\frac{\cos^2 \beta_1 (1 + \tan^2 \beta_1 \sin^2 \mu)}{1 - \sin^2 \beta_1 \cos^2 \mu}$$

erreicht. Dieser aber findet sich

$$= 1,$$

d. h.: das Mobil überschreitet den Aequator, $\frac{T}{2}$ ist eine halbe so genannte Schwingungsdauer. Und da

$$am \left(\frac{\omega}{\cos \mu} \frac{T}{2} \right) = \frac{\pi}{2},$$

so wird

$$\frac{T}{2} = \frac{K \cos \mu}{\omega} \text{ (modk d. i. } \sin \beta_1 \cos \mu).$$

Ein zweites Minimum von $\sin am$ und von $\cos^2 \beta$ und damit zugleich Maximum des Absolutwerthes von β wird erreicht für

$$am \left(\frac{\omega}{\cos \mu} t \right) = \pi, \quad t = \frac{2K}{\omega} = T,$$

d. i. nach einer ganzen Schwingungsdauer. Ebenso ist nach einer weiteren halben das Mobil zum Aequator zurückgekehrt u. s. f., so dass folgender Verlauf sich herausstellt:

t	0	\dots	$\frac{T}{2}$	\dots	T	\dots	$\frac{3}{2}T$	\dots	$2T$	\dots
$u, \text{ d. i. } \frac{\omega}{\cos \mu} t$	0	\dots	K	\dots	$2K$	\dots	$3K$	\dots	$4K$	\dots
$\sin^2 am u$	0	\dots	1	\dots	0	\dots	1	\dots	0	\dots
$\cos^2 \beta$	$\cos^2 \beta_1$	\dots	0	\dots	$\cos^2 \beta_1$	\dots	1	\dots	$\cos^2 \beta_1$	\dots
β	$+\beta_1$	\dots	0	\dots	$-\beta_1$	\dots	0	\dots	$+\beta_1$	\dots

Weiter ist ersichtlich, dass wegen

$$\sin^2 am (K + \alpha) = \sin^2 am (K - \alpha)$$

nach jeder halben Schwingungsdauer die Werthe von β in umgekehrter Folge sich wiederholen; und wegen

$$\sin^2 am (2K + \alpha) = \sin^2 am \alpha$$

nach einer ganzen in derselben Aufeinanderfolge wie zuvor (auf der andern Halbkugel); endlich, dass nach jedesmaliger doppelter Schwingungsdauer der gesammte Verlauf der Bewegung sich erneuert.

Der Gleichung für $\cos^2 \beta$ lässt sich auch die Form geben

$$\sin^2 \beta = \frac{1 - \sin^2 \beta_1 \cos^2 \mu \sin^2 am u - \cos^2 \beta_1 - \sin^2 \beta_1 \sin^2 \mu \sin^2 am u}{1 - \sin^2 \beta_1 \cos^2 \mu \sin^2 am u},$$

dies aber

$$= \sin^2 \beta_1 \cdot \frac{\cos^2 am u}{\Delta^2 am u},$$

$$\sin \beta = \pm \sin \beta_1 \cdot \frac{\cos am u}{\Delta am u}$$

$$\text{oder } \sin \beta_1 \cdot \sin co am u.$$

Somit haben sich in den drei Hauptfällen folgende Gleichungen für die geographische Breite gefunden:

$$0 = \frac{\varphi'_0}{\omega} \dots \text{(Hin- und Hergang auf Meridiane)} \dots \sin \beta = \sin \beta_1 \cdot \sin am \omega t \text{ mod}(k = \sin \beta_1),$$

$$0 < \frac{\varphi'_0}{\omega} < \infty \dots \sin \beta = \sin \beta_1 \cdot \sin co am \frac{\omega t}{\cos \mu} \text{ mod}(k = \sin \beta_1 \cos \mu)$$

$$\frac{\varphi'_0}{\omega} = \infty \dots \text{(Gang auf Hauptkreise)} \dots \sin \beta = \sin \beta_1 \cdot \cos(\varphi'_0 \cos \beta_1 t).$$

Es muss sich zeigen, dass von diesen Gleichungen die mittlere, welche ohne Beschränkung gewonnen ist, die Grenzfälle in sich mitbegreift. In der That wird

		für $\varphi'_0 = 0$:	für $\omega = 0$:
$\frac{\omega}{\cos \mu}$	ω		$\varphi'_0 \cos \beta_1$
k^2	$\sin^2 \beta_1$	$0, K = \frac{\pi}{2}, am u = u = \varphi'_0 \cos \beta_1$	
$\frac{T}{2}$	$\frac{K}{\omega}$ (wie S. 13),		$\frac{\pi}{2} \frac{\omega t}{\varphi'_0 \cos \beta_1}$ (wie S. 16).

Also für $\varphi'_0 = 0$

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \mp \sin \beta_1 \sin co am \omega t \text{ oder } \mp \sin \beta_1 \sin am(\omega t - K) \\ &= \pm \sin \beta_1 \sin am \omega \left(t - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Dies aber erweist sich als mit dem früher Gefundenen übereinstimmend, wenn man beachtet, dass der Bewegungsbeginn hier in den Zeitpunkt grössten Ausschlages gelegt ist, dort aber in den Uebertritt über den Äquator. —

Andererseits wird für $\omega = 0$

$$\sin \beta = \pm \sin \beta_1 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi'_0 \cos \beta_1 \right)$$

in Uebereinstimmung mit dem Obigen.

16. Reihenentwickelung. Ein Beispiel.

Der letztgefundene allgemeine Ausdruck für die Breite

$$\sin \beta = \sin \beta_1 \cdot \sin \operatorname{coam} \left(\frac{\omega}{\cos \mu} t \right) \bmod (k = \sin \beta_1 \cos \mu)$$

ist zur Entwicklung geeignet. Er findet sich, wenn ich die Formeln Jacobi, *Fundamenta* S. 173, 1) und S. 180, 1) und 2) benutze

$$\begin{aligned} &= \sin \beta_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{k} \frac{H(u+K)}{\Theta(u+K)}} \\ &= \sin \beta_1 \cdot \frac{2 \sqrt[4]{q \cos x + 2} \sqrt[4]{q^9 \cos 3x + \dots}}{1 + 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x + \dots}, \end{aligned}$$

wo, wie üblich,

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi u}{2K}, \text{ also hier } = \frac{\frac{1}{2}}{K} \frac{\omega}{\cos \mu} t = \frac{\pi}{2} \frac{t}{\frac{T}{2}}, \\ q &= e^{-\frac{\pi K'}{K}}. \end{aligned}$$

Nehme ich, um ein Beispiel zu haben, für $\beta \dots \frac{\pi}{6}$, und $\frac{\omega}{\varphi} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, so wird

$$\cos^2 \mu = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} = \frac{2}{5},$$

$$k^2 = \frac{1}{10}, \quad k = 0,316, \quad \sqrt{\frac{1}{k}} = 1,778;$$

ferner findet sich dann

$$q = 0,007, \quad q^4 = 0,000 \dots,$$

$$q^{\frac{1}{4}} = 0,289, \quad q^{\frac{9}{4}} = 0,000 \dots$$

und demnach

$$\sin \beta = \sin \beta_1 \cdot 1,778 \cdot \frac{2 \cdot 0,289 \cos \frac{\pi t}{T}}{1 + 2 \cdot 0,007 \cos 2 \frac{\pi t}{T}}$$

V. Die geographische Länge φ .

17. Reduction auf die Normalform dritter Gattung.

Es hatte als erstes Integral sich ergeben

$$\text{also ist } r^2 \varphi' = C_1^2,$$

$$d\varphi = \frac{C_1^2}{r^2} dt$$

$$= \frac{a^2 \sin^2 \vartheta_0}{a^2 \sin^2 \vartheta} \varphi'_0 dt = \frac{\cos^2 \beta_0}{\cos^2 \beta} \varphi'_0 dt = \frac{\xi_1}{\xi} \varphi'_0 dt,$$

da $\xi_0 = \xi_1$ genommen war. Folglich wird

$$d\varphi = \xi_1 \cdot \varphi'_0 \cdot \frac{d\xi}{\xi \sqrt{4\omega^2(1-\xi)(P+Q\xi+\xi^2)}},$$

und diese Gleichung führt auf die dritte Gattung elliptischer Integrale.

Bei der Zurückführung des rechtsstehenden Differentials auf die Form

$$\xi_1 \cdot \varphi'_0 \cdot \frac{f(\sigma) d\sigma}{(1+n \sin^2 \sigma) d\sigma}$$

fällt n so aus, dass gleichzeitig mit $\xi=0$ auch $1+n \sin^2 \sigma=0$ wird. Daher ist zu setzen

$$\begin{aligned} n &= -\left(\frac{1}{\sin^2 \sigma}\right)_{\xi=0} \\ &= -\left(\frac{1-\xi_1}{1-\xi_2} \cdot \frac{\xi-\xi_2}{\xi-\xi_1}\right)_{\xi=0} = +\frac{1-\xi_1}{1-\xi_2} \cdot \frac{-\xi_2}{\xi_1} = +\operatorname{tg} \beta_1 \sin^2 \mu, \end{aligned}$$

und es gehört in der Jacobi, *Fundam.* S. 170 oder Werke II, S. 192 aufgestellten Tafel

0	$-k^2$	-1	$+\infty$	0
1.	n			
2.	n			
3.		n		
4.			n	

der gegenwärtige Fall unter Nr. 4 (gehört nach Legendre'scher Bezeichnung in das Gebiet der *Intégrales à paramètre circulaire*). In der That wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} &= \frac{(1-\xi_2) - (1-\xi_1) \sin^2 \sigma + \frac{\xi_1}{\xi_2} (1-\xi_2) - \frac{\xi_1}{\xi_2} (1-\xi_2)}{\xi_1 (1-\xi_2) - \xi_2 (1-\xi_1) \sin^2 \sigma} \\ &= \frac{1}{\xi_2} - \frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1 \xi_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{-\xi_2 (1-\xi_1)}{\xi_1 (1-\xi_2)} \sin^2 \sigma}. \end{aligned}$$

Hiernach wird

$$d\varphi = \xi_1 \cdot \varphi'_0 \cdot \frac{1}{\omega \sqrt{1-\xi_2}} \cdot \left(\frac{1}{\xi_2} - \frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1 \xi_2} \cdot \frac{1}{1+n \sin^2 \sigma} \right) \frac{d\sigma}{d\sigma}$$

oder auch

$$= + \frac{\cos \beta_1 \cdot \cos^2 \mu}{\sin \mu} \left(-1 + \frac{\cos^2 \beta_1 + \operatorname{tg}^2 \mu}{\cos^2 \beta_1} \frac{1}{1+n \sin^2 \sigma} \right) \frac{d\sigma}{d\sigma}.$$

Nun ist in einem Falle wie der jetzige

$$n, \text{ welches hier den Werth } + \frac{-\xi_2}{\xi_1} \frac{1-\xi_1}{1-\xi_2}, \text{ d. i. } + k^2 \frac{-\xi_2}{\xi_1}$$

$$\text{oder auch } + \operatorname{tg}^2 \beta_1 \sin^2 \mu, \text{ d. i. } + k^2 \frac{\operatorname{tg}^2 \mu}{\cos^2 \beta_1} \text{ hat,}$$

$$= -k^2 \sin^2 \operatorname{am} i a$$

zu setzen, so dass

$$\text{also } -\sin^2 \operatorname{am} ia = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{-\xi_2}{\xi_1} \\ = + \frac{\varphi'_0{}^2}{\omega^2} \\ = + \frac{\operatorname{tg}^2 \mu}{\cos^2 \beta_1} \end{array} \right\} = + \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} (ak'),$$

$$\begin{array}{l} \Delta^2 \operatorname{am} ia = 1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1 \sin^2 \mu \\ = \frac{(\cos^2 \beta_1 + \operatorname{tg}^2 \mu) \cos^2 \mu}{\cos^2 \beta_1} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \Delta^2 \operatorname{am} (ak') = \frac{\cos^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_1 \sin^2 \mu}{\cos^2 \beta_1 + \operatorname{tg}^2 \mu} \\ = \cos^2 \mu \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \frac{\sin am ia}{\cos am ia \Delta am ia} = i \frac{\sin am (ak') \cos am (ak')}{\Delta am (ak')} \\ = i \frac{\cos \beta_1 \operatorname{tg} \mu}{\cos \mu \sqrt{\cos^2 \beta_1 + \operatorname{tg}^2 \mu}} \end{array}$$

wird. — Indem man nun nach erfolgter Integration von 0 bis σ

$$\begin{array}{l} \text{für } \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\Delta \sigma} \quad \left| u \right. \\ \text{und für } \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1+n \sin^2 \sigma) \Delta \sigma} \quad \left| u + \frac{\operatorname{tg} am ia}{\Delta am ia} \Pi(u, ia, k) \right. \end{array}$$

einsetzt, wo Π die alte Jacobi'sche Form (Fundam. S. 144) des Integrals dritter Gattung bezeichnet, erhält man

$$\varphi = + \frac{\varphi'_0}{\omega \sqrt{1-\xi_2}} \cdot u - i \frac{\varphi'_0}{\omega \sqrt{1-\xi_2}} \frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_2} \frac{\sin am (ak') \cos am (ak')}{\Delta am (ak')} \Pi(u, ia, k)$$

oder auch

$$= + \frac{\sin \mu}{\cos \beta_1} \cdot u - i \frac{\cos^2 \mu (\cos^2 \beta_1 + \operatorname{tg}^2 \mu)}{\sin \mu \cos \beta_1} \cdot \frac{\sin am (ak') \cos am (ak')}{\Delta am (ak')} \Pi(u, ia, k).$$

Hierin kann aber das erste Glied

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\varphi'_0}{\omega \sqrt{1-\xi_2}} \cdot u \\ \text{oder } \frac{\sin \mu}{\cos \beta_1} \cdot u \end{array} \right\} \text{auch } \varphi'_0 t$$

geschrieben werden; und ferner erweist sich, dass der im zweiten vor kommende Coefficient

$$+ \frac{\varphi'_0}{\omega \sqrt{1-\xi_2}} \cdot \frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_2} \cdot \frac{\sin am (ak') \cos am (ak')}{\Delta am (ak')}$$

$$\text{oder } = - \frac{\varphi'_0}{\sqrt{\omega^2 + \varphi'_0{}^2 \cos^2 \beta_1}} \cdot \frac{\omega^2 + \varphi'_0{}^2}{\varphi'_0{}^2} \cdot \frac{\varphi'_0}{(\omega^2 + \varphi'_0{}^2)} \cdot \frac{\omega \sqrt{\omega^2 + \varphi'_0{}^2 \cos^2 \beta_1}}{\omega} \quad \left| = -1 \right.$$

$$\text{oder } = \frac{\sin \mu}{\cos \beta_1} \cdot \frac{\cos^2 \beta_1 + \operatorname{tg}^2 \mu}{\operatorname{tg}^2 \mu} \cdot \frac{\operatorname{tg} \mu \cdot \cos \beta_1}{(\cos^2 \beta_1 + \operatorname{tg}^2 \mu) \cos \mu}$$

wird. Dadurch nimmt die Gleichung für die geographische Länge folgende Gestalt an:

$$\varphi = \varphi'_0 t + i \Pi(u, ia, k).$$

18. Theilung des Ausdrucks für φ .

Das Glied $i \Pi$ muss aus mechanischen Gründen reell sein, und ist es auch, da das Differential

$$\frac{n \sin^2 \sigma}{1 + n \sin^2 \sigma} \cdot \frac{d \sigma}{d \sigma}, \text{ d. i. } \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_1 \sin^2 \mu \sin^2 \sigma}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1 \sin^2 \mu \sin^2 \sigma} \cdot \frac{d \sigma}{d \sigma}$$

reell ist. Es gilt, dies auch in der Form des Ausdrucks erkennbar zu machen. Indess schon ehe das geschehen ist, lässt die nächstfolgende Umformung Schlüsse auf die Art der Bewegung zu.

Mit Hilfe der Formeln *Fundam.* S. 146, 3) oder *Werke II*, 186, 1) bekomme ich weiter

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi'_0 t + i \Pi(u, ia, k), \\ &= \frac{\sin \mu}{\cos \beta_1} u + i \Pi(u, ia, k) \\ &= \frac{\sin \mu}{\cos \beta_1} u + i u \frac{\Theta'(ia)}{\Theta(ia)} + \frac{i}{2} \lg \frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}, \end{aligned}$$

worin $\Theta'(ia) = \left[\frac{d \Theta(u)}{du} \right]_{u=ia}$ gesetzt ist. Dies nun ist nach der Formel *Fundam.* S. 162, 4) ferner

$$\begin{aligned} &= u \left(\frac{\sin \mu}{\cos \beta_1} - \operatorname{tg} am(ak') \operatorname{d} am(ak') + \frac{\pi a}{2 K K'} + \frac{\Theta'(ak')}{\Theta(ak')} \right) \\ &\quad + \frac{i}{2} \lg \frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}. \end{aligned}$$

Da aber

$$\frac{\sin \mu}{\cos \beta_1} - \operatorname{tg} am(ak') \operatorname{d} am(ak') = 0$$

sich findet, so wird

$$\begin{aligned} \varphi &= u \left(\frac{\pi a}{2 K K'} + \frac{\Theta'(ak')}{\Theta(ak')} \right) + \frac{i}{2} \lg \frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)} \\ &= t \frac{\omega}{\cos \mu} \left(\frac{\pi a}{2 K K'} + \frac{\Theta'(ak')}{\Theta(ak')} \right) + \frac{i}{2} \lg \frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}. \end{aligned}$$

Somit zeigt sich auch hier diejenige Spaltung in zweierlei Bewegungen, die überall da auftritt, wo das mechanische Problem auf elliptische Integrale dritter Gattung zurückkommt (*Jacobi, Sur la rotation d'un corps*, *Werke II*, S. 185 und S. 195 ob.). Das Wachsthum der geographischen Länge φ kann zerlegt werden in eines proportional mit der Zeit und ein periodisches, demnach die Bewegung in eine fortschreitende und eine oscillirende. Oder

denkt man sich eine Meridianebene rotirend mit einer bestimmten constanten Geschwindigkeit um die Axe der Kugel, so wird die geographische Länge des Mobils

dieser Ebene bald vorausseilen, bald hinter ihr zurückbleiben, in periodischem Verlaufe.

Ich führe hier wiederum den bei Bestimmung der Breite β aufgetretenen Zeitabschnitt

$$t = \frac{T}{2}$$

ein, für welchen allgemein

$$u = \frac{\omega}{\cos \mu} \frac{T}{2} = K \mod (k = \sin \beta_1 \cos \mu).$$

Für diesen wird, da

$$\Theta(K-i\alpha) = \Theta(K+i\alpha)$$

ist, der Logarithmus null, das periodische Glied verschwindet (oder: das Mobil tritt in die rotirende Ebene hinein) und das übrigbleibende der Zeit proportionale Glied wird

$$\varphi = \frac{\Phi}{2} = \frac{T}{2} \frac{\omega}{\cos \mu} \left(\frac{\pi a}{2 K' K} + K \frac{\Theta'(a k')}{\Theta(a k')} \right) = \frac{\pi}{2} \frac{a}{K'} + K \frac{\Theta'(a k')}{\Theta(a k')}.$$

Dies ist der Werth des Längenzuwachses in einer halben Schwingungsdauer, welchen ich die halbe Längen-Periode nennen will. Mit Benutzung desselben lässt sich die allgemeine Formel für φ auch schreiben:

$$\varphi = \frac{\Phi}{2} \frac{t}{T} + \frac{i}{2} \lg \frac{\Theta(u-i\alpha)}{\Theta(u+i\alpha)}.$$

19. Die halbe Längen-Periode.

Weiteren Aufschluss über die Art der sphärischen Curve, die das Mobil beschreibt, giebt die Untersuchung der Werthe, deren

$$\frac{\Phi}{2}, \text{ d. i. } \frac{\pi}{2} \frac{a}{K'} + K \frac{\Theta'(a k')}{\Theta(a k')}$$

fähig ist. In dem ersten Grenzfalle $\varphi'_0 = 0$ wird

$$\lg^2 a m(a k'), \text{ d. i. } \frac{\varphi'_0}{\omega} = 0, \quad a m(a k') = 0, \quad a = 0$$

$$k = \sin \beta_1,$$

und es ergiebt für die Längen-Periode sich dann der Werth 0. Dies zeigt der ursprüngliche Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{2} &= \varphi'_0 \frac{T}{2} + i u \frac{\Theta'(i\alpha)}{\Theta(i\alpha)} \\ &= \varphi'_0 \frac{T}{2} + u \frac{d \lg \Theta(i\alpha)}{da}, \end{aligned}$$

welcher nach der Formel Jacobi, W. II, S. 191 u.

$$= \varphi'_0 \frac{T}{2} - \frac{\pi u}{K} \left(\frac{q^{1-b}}{1-q^{1-b}} - \frac{q^{1+b}}{1-q^{1+b}} + \frac{q^{3-b}}{1-q^{3-b}} - \dots \right)$$

ist, worin

$$b = \frac{a}{K'} = 0. -$$

Oder es folgt auch daraus, dass nach früherer Jacobi'scher Bezeichnung (Fund. S. 145)

$$\frac{d \log \Theta(v)}{d v} = \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} = Z(v),$$

und nach der Definition von Z mittels der ersten und zweiten Gattung S. 133, 1) oder 2)

$$K Z(0) = [F'E(\varphi) - E'F(\varphi)] = 0.$$

Dass demnach in dem vorliegenden Falle

$$\frac{\Phi}{2} = 0$$

wird, enthält nur die Bestätigung dafür, dass bei einer Anfangsgeschwindigkeit rein in der Meridianebene ein Längenfortschritt nicht stattfindet, sondern das Mobil auf einem Meridiane bleibt. —

Im andern Grenzfalle $\omega = 0$ wird

$$k = 0, \quad K = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 am(ak') = \varphi, \quad am(ak') = \frac{\pi}{2}, \quad a = K' \bmod k'$$

$$Z(ak') = Z(K'k') = 0$$

$$\frac{\pi}{2} \frac{a}{K'} = \frac{\pi}{2},$$

folglich

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{2} &= \frac{\pi}{2} \frac{a}{K'} + K \frac{\Theta'(ak')}{\Theta(ak')} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{a}{K'} + K Z(ak') \\ &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

wie auf S. 158.

Hervorzuheben ist nun für den allgemeinen Fall der Satz, dass die halbe Längen-Periode nie einen Quadranten überschreiten kann.

Denn zwischen den beiden Grenzen

$$\frac{\varphi'_0}{\omega} = 0 \dots \frac{\Phi}{2} = 0$$

$$\frac{\varphi'_0}{\omega} = \infty \dots \frac{\Phi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

kann keiner der in $\frac{\Phi}{2}$ vorkommenden Werthe null oder unendlich werden, weder a und K, K' , noch $Z(ak')$. Das Wachsthum von $\frac{\Phi}{2}$ findet vielmehr von einer Grenze zur andern in stetiger Weise statt. Somit ist

$$v. \operatorname{abs.} \frac{\Phi}{2} \text{ oder } \frac{\pi}{2} \frac{a}{K'} + K Z(ak') \leq 0.$$

Diesen Fortschritt der Länge stellt der auf Tafel III, Fig. 3 befindliche Grund- und Aufriss dar.

20. Beseitigung des scheinbar Imaginären. Werth des Oscillations-Winkels.

Indem man für das Folgende den von Jacobi angegebenen Weg einschlägt, erreicht man einen dreifachen Vortheil, nämlich aus dem Ausdrucke

$$\begin{aligned}\varphi &= t \frac{\omega}{\cos \mu} \left(\frac{\pi}{2} \frac{a}{KK'} + \frac{\Theta'(ak')}{\Theta(ak')} \right) + \frac{i}{2} \lg \frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)} \\ &= \frac{\Phi}{2} \frac{t}{T} + \frac{i}{2} \lg \frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}\end{aligned}$$

erstens das noch in ihm enthaltene scheinbar Imaginäre fortzuschaffen; sodann nur algebraische Functionen von Θ -Reihen zu bekommen und endlich nicht für den Winkel selbst, sondern für den häufiger gebrauchten Sinus und Cosinus desselben Ausdrücke zu erhalten.

Vor Allem ist statt der ganzen Länge φ der Oscillations-Winkel φ' einzuführen, d. i. derjenige Winkel, in welchem die Länge φ in jedem Augenblicke in positivem oder negativem Sinne abweicht von der mittleren (der Zeit proportionalen) $\frac{\Phi}{2} \frac{t}{T}$, so dass

$$\varphi' = \varphi - \frac{\Phi}{2} \frac{t}{T}.$$

Dieser Oscillationswinkel nun

$$= \frac{i}{2} \lg \frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)} = \frac{1}{2i} \lg \frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}.$$

Jetzt sind beide Seiten der Gleichung, imaginär genommen, als Exponenten von e einzusetzen; man erhält

$$e^{i\varphi'} = \sqrt{\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}} = \frac{\Theta(u+ia)}{\sqrt{P}}, \text{ wo } P = \Theta(u+ia) \Theta(u-ia),$$

und daraus

$$\cos \varphi' = \frac{e^{i\varphi'} + e^{-i\varphi'}}{2} = \frac{\Theta(u+ia) + \Theta(u-ia)}{2\sqrt{P}},$$

$$\sin \varphi' = \frac{e^{i\varphi'} - e^{-i\varphi'}}{2i} = \frac{\Theta(u+ia) - \Theta(u-ia)}{2i\sqrt{P}},$$

und wenn man, um das Irrationale zu entfernen, dividirt, so findet sich

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{\frac{1}{2} [\Theta(u+ia) - \Theta(u-ia)]}{\frac{1}{2} [\Theta(u+ia) + \Theta(u-ia)]}.$$

Dieser Reihenquotient aber ist nahezu einem geschlossenen Ausdrucke gleich zu achten, wenn man bedenkt, dass die in den Reihen

$$\frac{1}{2} [\Theta(u+ia) - \Theta(u-ia)] = q^{2b} (1 - q^{2b}) \sin 2x - q^{4-2b} (1 - q^{2b}) \sin 4x \dots$$

$$\frac{1}{2} [\Theta(u+ia) + \Theta(u-ia)] = 1 - q^{2b} (1 + q^{2b}) \cos 2x + q^{4-2b} (1 + q^{2b}) \cos 4x \dots$$

$$\left(b = \frac{a}{K'} \right)$$

auftrtende Grösse q in der Mehrzahl der Fälle ausserordentlich klein ist.

Zu demselben Ergebniss wie das ebengenannte kann man hier auch auf dem nicht wesentlich verschiedenen Wege gelangen, dass man in

$$\varphi' = \frac{i}{2} \lg \frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}$$

unter dem \lg das Imaginäre vom Reellen in Zähler und Nenner scheidet, nämlich

$$\Theta(u-ia) = M - iN \text{ und folglich}$$

$$\Theta(u+ia) = M + iN$$

setzt. Dann wird

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{i}{2} \lg \frac{M-iN}{M+iN} \\ &= \operatorname{arctg} \frac{N}{M}, \end{aligned}$$

wobei unter arctg der kleinste positive Bogen verstanden ist. Hierin aber bekommen N und M die Werthe

$$N = \frac{1}{i} \left(+2q \sin \frac{\pi u}{K} \sin i \frac{\pi a}{K} - 2q^4 \sin \frac{2\pi u}{K} \sin i \frac{2\pi a}{K} \pm \dots \right)$$

$$M = 1 - 2q \cos \frac{\pi u}{K} \cos i \frac{\pi a}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi u}{K} \cos i \frac{2\pi a}{K} \pm \dots,$$

welche mit Hilfe von

$$\frac{1}{i} \sin i \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\cos i \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

und

$$\frac{\pi u}{2K} = x, \quad e^{\frac{\pi a}{K}} = q^b$$

genau in die oben angezogenen Reihen übergehen.

Auf den gefundenen Werth von φ' leidet ferner der von Jacobi, W. II, 188, 189 geführte Beweis Anwendung; diesem zufolge kann

auch der Oscillations-Winkel φ' nie $\frac{\pi}{2}$ übersteigen
(so wenig wie bei dem vorliegenden Probleme die halbe Längen-Periode $\frac{\Phi}{2}$). Denn in der Reihe, auf welche der Werth von φ' sich auch bringen lässt:

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{i}{2} \lg \frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)} \\ &= \operatorname{arctg} \frac{q^{1-b} \sin 2x}{1 - q^{1-b} \cos 2x} + \operatorname{arctg} \frac{q^{3-b} \sin 2x}{1 - q^{3-b} \cos 2x} + \dots \\ &= \operatorname{arctg} \frac{q^{1+b} \sin 2x}{1 - q^{1+b} \cos 2x} - \operatorname{arctg} \frac{q^{3-b} \sin 2x}{1 - q^{3+b} \cos 2x} - \dots \end{aligned}$$

erreicht jeder einzelne arctg sein Maximum für

$$\cos 2x = q^u,$$

wo n irgend einen der vorkommenden Exponenten bedeutet, und dieses Maximum selbst ist

$$\arcsin q^u < \frac{\pi}{2},$$

woraus

$$\frac{i}{2} \lg \frac{\Theta(u - ia)}{\Theta(u + ia)} < \arcsin q^{1-b} < \frac{\pi}{2}$$

hergeleitet wird.

VI. Die Geschwindigkeit.

21. Geschwindigkeit in der Meridianebene, und längs der Bahncurve.

Durch Differentiation von

$$\sin \beta = \sin \beta_1 \sin \operatorname{coam} \left(\frac{\omega}{\cos \mu} t \right)$$

und Einsetzung des Werthes für $\cos \beta$ ergiebt sich

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} &= - \frac{k'^2 \omega \operatorname{tg} \beta_1}{\cos \mu} \cdot \frac{\sin am u}{\Delta am u \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1 \sin^2 \mu \sin^2 am u}} \quad (k = \sin \beta_1 \cos \mu) \\ &= - \frac{k'^2 \omega \operatorname{tg} \beta_1}{\cos \mu} \cdot \frac{\cos \operatorname{coam} u}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1 \sin^2 \mu \sin^2 am u}} \end{aligned}$$

Dieser Werth wird für die Werthe des Argumentes

$$0 \dots \frac{\omega}{\cos \mu} \cdot T \quad \frac{\omega}{\cos \mu} \cdot 2T \dots$$

oder für

$$\beta = \beta_1 \dots - \beta_1 \dots + \beta_1 \dots$$

zu Null, und β geht an jeder dieser Stellen vom Sinken ins Steigen und umgekehrt über.

Da nun ferner, wenn s die Länge des zurückgelegten Weges auf der Bahncurve bedeutet,

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{a^2 (d\beta^2 + \cos^2 \beta d\varphi^2)}{dt^2},$$

und nach S. 166

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\cos^2 \beta_0}{\cos^2 \beta} \varphi'_0, \text{ also}$$

$$\cos^2 \beta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{\cos^4 \beta_1}{\cos^2 \beta} \cdot \varphi'^2_0,$$

so wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 &= \frac{k'^4 \omega^2 \operatorname{tg}^2 \beta_1}{\cos^2 \mu} \cdot \frac{\sin^2 am u}{\Delta^2 am u (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1 \sin^2 \mu \sin^2 am u)} \\ &+ \varphi'^2_0 \cos^4 \beta_1 \cdot \frac{\Delta^2 am u}{\cos^2 \beta_1 (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1 \sin^2 \mu \sin^2 am u)} \\ &= \frac{\omega^2}{\cos^2 \mu} \cdot \frac{k'^4 \operatorname{tg}^2 \beta_1 \sin^2 am u + \sin^2 \mu \Delta^4 am u}{\Delta^2 am u (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1 \sin^2 \mu \sin^2 am u)} \end{aligned}$$

Dieser Bruch kann, so lange ω nicht verschwindet, wie auch die Anfangsgeschwindigkeit sei,

$$\text{nie } = 0$$

werden, das Mobil also nicht ruhen. Es sei selbst

$$\varphi'_0 = 0,$$

oder, da überdies die Annahme $\beta'_0 = 0$ durchweg gemacht worden ist, das Mobil sei anfänglich in Ruhe. Auch in diesem Falle, wo $k'^2 = \cos^2 \beta_1$, $\mu = 0$ ist, und die rechte Seite in

$$\omega^2 \frac{\sin^2 \beta_1 \cos^2 \beta_1 \sin^2 a m \omega t}{A^2 a m \omega t}$$

übergeht, ist ein Verschwinden derselben nur in zwei Fällen möglich:

1. wenn $\beta_1 = 0$, 2. wenn $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$; das bedeutet: auch aus der Formel zeigt sich (vergl. S. 11.), dass ein Ruhen des Mobils ausserhalb des Poles und des Äquators unmöglich ist.

Für

$$\omega = 0$$

wird in der allgemeinen Formel für $\frac{1}{a^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$

$$k^2 = 0, \quad \frac{\omega^2}{\cos^2 \mu} = 0$$

und

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \varphi'^2_0 \cos^2 \beta_1 \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_1 \sin^2 u + 1}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1 \sin^2 u} = \text{Const.} = \varphi'^2_0 \cos^2 \beta_1.$$

VII. Abhängigkeit der Coordinaten von einander.

22. φ ausgedrückt durch β . Rückkehr zu einem durchlaufenen Punkte.

Will man das gefundene analytisch-mechanische Resultat sich durch eine Functionscurve geometrisch verdeutlichen, so ist die Abhängigkeit der sphärischen Coordinaten von einander darzulegen, nämlich nach Elimination der Zeit. Dies kann geschehen, indem in der Formel für φ .

$$\varphi = t \frac{\omega}{\cos \mu} \left(\frac{\pi}{2} \frac{a}{KK} + \frac{\Theta'(ak')}{\Theta(ak')} \right) + \operatorname{arctg} \frac{N}{M}$$

nach S. 162 das elliptische Integral erster Gattung

$$u = t \frac{\omega}{\cos \mu} = F(\delta)$$

substituiert wird (dessen numerische Werthe in Tafeln gebracht sind — Legendre, *Traité des ff. ell.* Bd. II, Taf. IX). Denn dadurch findet sich

$$\varphi = F(\sigma) \left(\frac{\pi}{2} \frac{a}{KK'} + \frac{\Theta'(ak')}{\Theta(ak')} \right) + \operatorname{arctg} \frac{q^{1-b} (1 - q^{2b}) \sin \left(\pi \frac{F(\sigma)}{K} \right) - \dots}{1 - q^{1-b} (1 + q^{2b}) \cos \left(\pi \frac{F(\sigma)}{K} \right) + \dots},$$

worin

$$\begin{aligned} \sin^2 \sigma &= \frac{1 - \xi_2}{1 - \xi_1} \cdot \frac{\xi - \xi_1}{\xi - \xi_2} \\ &= \frac{1}{\sin^2 \beta_1 \cos^2 \mu} + \frac{\cos^2 \beta - \cos^2 \beta_1}{\cos^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \mu}. \end{aligned}$$

Dann hängt die Länge φ nur noch von der Breite β und den Constanten k, q, a, β_1, μ ab, die sich auf die zwei

β_1 und μ

oder ebenso auf die zwei Constanten

β_1 und $\frac{\varphi'_0}{\omega}$

zurückbringen lassen. —

Die Curve mit den Ordinaten β , wenn die Längen φ die Abscissen sind, theilt in Bezug auf die Periodicität die wesentlichen Eigenschaften der wirklichen Bahncurve.

Diese Bahn des Mobils, eine Curve doppelter Krümmung, wird eine wellenartige Linie, durch den Aequator in congruente Stücke zertheilt, ferner symmetrisch zu aufeinanderfolgenden Meridianen, welche je um eine halbe Längenperiode $\frac{\Phi}{2}$, die einen Quadranten nicht überschreitet, von einander entfernt sind. —

Wenn die Halbperiode $\frac{\Phi}{2}$ zu π ein rationales Verhältniss hat, so wird, nachdem das Mobil eine bestimmte endliche Anzahl Male die Kugel umwandert hat, es genau wieder die früheren Punkte durchlaufen. Wenn aber nicht, so trifft das Mobil in demselben Punkte, in dem es einmal gewesen, erst nach unendlich langer Zeit wieder ein.

Zur Uebersicht der Längenperioden im Vergleich zur Breite dient die angehängte Mercator-Projection der Bahnen (Fig. 4). In ihr ist

bei Curve Nr. 1 $\sin \beta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, 0 = \frac{\varphi'_0}{\omega},$

„ „ „ 2 und 3 $\sin \beta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, 0 < \frac{\varphi'_0}{\omega} < \infty,$

„ „ „ 4 $\sin \beta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{\varphi'_0}{\omega} = \infty,$

„ „ „ 5 $\sin \beta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 < \frac{\varphi'_0}{\omega} < \infty.$

Zu Fig. 1.

Gang auf Meridian.

Curve der Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Winkel (der geogr. Breite).

$$\frac{d\beta}{dt} = \beta'_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega \omega}{\beta'_0 \beta'_0} \sin^2 \beta}, \quad \beta'_0 = \text{Const} = 1.$$

$$\omega > \beta'_0, \text{ Oscillation. Z. B.} \quad \omega = \beta'_0 \cdot \sqrt{2}$$

$$\omega = \beta'_0.$$

$$\omega < \beta'_0, \text{ Umlauf. Z. B.} \quad \omega = \beta'_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Zu Fig. 2.

Gang auf Meridian.

Curve der Abhängigkeit der geograph. Breite von der Zeit.

$$\beta'_0 = \text{Const} = 1.$$

$$\frac{\omega}{\beta'_0} = 0, \text{ Umlauf. } \beta = \beta'_0 t. \quad \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\beta'_0} = 1,571.$$

$$\omega < \beta'_0, \text{ Umlauf. } \beta = a m \beta'_0 t$$

$$\text{mod} \left(\lambda = \frac{\omega}{\beta'_0} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \lambda \beta'_0 t + \dots$$

$$= \frac{\pi}{T} \cdot t + \dots$$

$$\text{z. B. } \omega = \beta'_0 \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}}; \quad \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\beta'_0} = 1,854.$$

$$\omega = \beta'_0 \dots \dots \dots \quad \frac{T}{2} = \infty, \quad \beta_1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\omega > \beta'_0, \text{ Oscillation. } \sin^2 \beta = \sin^2 \beta_1 \sin^2 a m \omega t$$

$$\text{mod} \left(k = \sin \beta_1 = \frac{\beta'_0}{\omega} \right),$$

$$\text{z. B. } \omega = \beta'_0 \sqrt{2},$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}}; \quad \frac{T}{2} = \frac{K}{\omega} = 1,311,$$

$$\beta_1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\frac{\omega}{\beta'_0} = \infty, \text{ Oscillation. } \beta = 0 \text{ (Stillstand).}$$

IX.

Ueber aufsteigende Kettenbrüche.

Von

Dr. S. GÜNTHER,

Privatdocent am Polytechnikum in München.

§ 1. Während die sogenannten absteigenden Kettenbrüche schon seit geraumer Zeit eifrig untersucht worden sind, hat man ihrem Analogon, den aufsteigenden Kettenbrüchen, verhältnissmässig nur sehr wenig Theilnahme geschenkt, obschon dieselben eines höheren Alters sich erfreuen, als erstere¹. Auch nachdem in neuerer Zeit diese Gebilde wieder etwas mehr in den Vordergrund getreten waren, scheint man ihnen vom theoretischen Standpunkte aus ein geringeres Interesse zugewandt zu haben, als den gewöhnlichen Kettenbrüchen, und nach Herleitung einiger weniger einfacher Grundeigenschaften ging man sofort dazu über, ihre praktische Verwendbarkeit ins Auge zu fassen.

Es hatte zwar schon Lagrange² die Theorie dieser Formen wesentlich dadurch gefördert, dass er den einfachen Zusammenhang zwischen auf- und absteigenden Kettenbrüchen aufdeckte; indess scheint diese Arbeit des grossen Mathematikers nicht so bekannt geworden zu sein, wie sie es verdiente, wie denn auch die verdienstliche Schrift von Kunze³ dieses interessante Factum nicht enthält. Später hat wohl zuerst Schlömilch⁴ auf die erwähnte Relation hingewiesen. Eine kürzlich erschienene Abhandlung⁵ stellt sich allerdings die Aufgabe, die aufsteigenden Kettenbrüche mit anderen selbstständigen analytischen Formen in Beziehung zu setzen, stets jedoch mit Rücksicht auf die Auflösung numerischer Gleichungen u. dergl.

Die vorliegende Arbeit im Gegentheil verfolgt den Zweck, die Theorie an sich zu erörtern und, wenn möglich, in einigen Punkten zu erweitern. Vor Allem soll dabei die Darstellung der aufsteigenden Kettenbrüche durch Determinanten in umfassender Weise zur Geltung kommen.

1) Günther, *Storia dello sviluppo della teoria delle frazioni continue fino ad Euler, Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, Tomo VII, S. 219.*

- 2) Lagrange, *Essai de l'analyse numérique, sur la transformation des fonctions*, *Journal de l'école polytechnique, Cahier V.* S. 93 fgg.
- 3) Kunze, *Die aufsteigenden Kettenbrüche*, Weimar 1857.
- 4) Schlömilch, Recension hierzu, *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* 3. Bd., *Literaturzeitg.* S. 63.
- 5) Lembkes, *Theoria fractionum continuarum ascendentium*, Monasterii 1870.

§ 2. Die independente Darstellung der Näherungswerte des Kettenbruches

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n}$$

ist bereits an andrer Stelle gegeben worden⁶; da jedoch daselbst der Inductionsschluss angewandt wurde, so wird es sich hier empfehlen, diese Transformation auf einem mehr organischen Wege durchzuführen.

Bezeichnen wir mit

$$\frac{p_n}{q_n}$$

den n^{ten} Näherungswert des genannten Kettenbruches, so können wir das recurrende Bildungsgesetz dieser Werthe durch die Gleichung

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + b_n}{a_n q_{n-1}}$$

ausdrücken. Der Nenner q_n ist also sofort bekannt, gleich

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n;$$

dagegen besteht für den Zähler ganz ebenso ein System binomischer recurrender Gleichungen, wie für die absteigenden Kettenbrüche bekanntlich ein trinomisches existirt. Man hat so

$$\begin{aligned} p_n - a_n p_{n-1} &= b_n, \\ p_{n-1} - a_{n-1} p_{n-2} &= b_{n-1}, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ p_3 - a_3 p_2 &= b_3, \\ p_2 - a_2 p_1 &= b_2, \\ p_1 &= b_1. \end{aligned}$$

Hieraus findet sich

$$p_n = \frac{\begin{vmatrix} b_n & -a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{n-1} & 1 & -a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ b_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_2 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_2 \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}}.$$

Die Determinante des Nenners reducirt sich auf ihr Diagonalglied 1; um die des Zählers auf die obenerwähnte Form zu bringen, machen wir die erste Colonne zur letzten; hierdurch tritt vor die Determinante der Factor

$$(-1)^{n-1}.$$

Multiplicirt man dann die $(n-1)$ Colonnen, welche kein b enthalten, durch (-1) , so erhält die Determinante den Factor

$$(-1)^{n-1-n+1} = (-1)^0 = +1,$$

und man bekommt

$$p_n = \begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_n \\ -1 & a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{n-1} \\ 0 & -1 & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & b_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_3 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_{n-2} & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & -1 & 0 \\ b_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & -1 \\ b_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

6) Günther, Darstellung der Näherungswerte von Kettenbrüchen in unabhängiger Form, Erlangen 1872, S. 42.

§ 3. Die Lagrange'sche Transformation ist in der letztgenannten Schrift ebenfalls behandelt worden; während jedoch der eine Beweis sich auf den Schluss von n auf $(n+1)$ stützt und also keinen Einblick in das Wesen der Sache gewährt, wurde der andere nur angedeutet. Es soll nun gezeigt werden, wie einfach sich diese Beziehung durch Anwendung des Determinantencalculus gestaltet.

Multiplicirt man in der für p_n zuletzt erhaltenen Determinante jede r^{te} Zeile ($r \leq n \geq 2$) mit b_{r-1} und zieht von ihr alsdann die mit b_r multiplizirte $(r-1)^{\text{te}}$ Zeile ab, so ändert man die Determinante hierdurch nur insoweit, dass vor dieselbe der Factor

$$\varrho = (b_1 b_2 \dots b_{n-2} b_{n-1})^{-1}$$

tritt. Es wird demnach

$$p_n = \varrho \cdot \begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 b_1 + b_2 & -b_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 b_3 & a_3 b_2 + b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} b_{n-3} + b_{n-2} & -b_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-2} b_{n-1} & a_{n-1} b_{n-2} + b_{n-1} & -b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} b_n & a_n b_{n-1} + b_n \end{vmatrix}.$$

Transformirt man in analoger Weise den Nenner

$$q_n = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix},$$

so folgt

$$q_n = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 b_2 & a_2 b_1 + b_2 & -b_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 b_3 & a_3 b_2 + b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} b_{n-3} + b_{n-2} & -b_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-2} b_{n-1} & a_{n-1} b_{n-2} + b_{n-1} & -b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} b_n & a_n b_{n-1} + b_n \end{vmatrix}$$

Der Factor q hebt sich bei der Division fort und man erkennt q_n und p_n als zusammengehörige Kettenbruchdeterminanten. Die letztere Eigenschaft liegt unmittelbar am Tage und es ist auch

$$p_n = b_1 \frac{\partial q_n}{\partial a_1}.$$

Es geht hieraus nach einem allgemeineren Lehrsatz⁷ hervor, dass der Quotient beider Determinanten sofort als Kettenbruch geschrieben werden kann, und man erhält

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{b_1}{a_1} - \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1 + b_2} - \frac{a_2 b_1 b_3}{a_3 b_2 + b_3} - \frac{a_3 b_2 b_4}{a_4 b_3 + b_4} - \dots - \frac{a_{n-2} b_{n-3} b_{n-1}}{a_{n-1} b_{n-2} + b_{n-1}} - \frac{a_{n-1} b_{n-2} b_n}{a_n b_{n-1} + b_n}$$

in der geforderten Weise.

7) Günther, Beiträge zur Theorie der Kettenbrüche, Archiv d. Math. u. Phys. 55. Theil, S. 397.

§ 4. Eine einfache Anwendung können wir von dem Bisherigen machen, um die bekannte Formel abzuleiten, vermittelst deren Euler⁸ eine Reihe in einen Kettenbruch zu verwandeln gelehrt hat. Hat man die alternirende Reihe

$$S = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots + (-1)^n b_n,$$

so ist dieselbe gleich der Determinante $(n+1)$ ten Grades

$$\begin{vmatrix} b_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-2} & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ b_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ b_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

wie sich sofort zeigt, wenn man von jeder Zeile die unter ihr stehende abzieht, von der untersten angefangen; denn alsdann reducirt sich die Determinante auf ihr Diagonalglied

$$[b_0 - b_1 + \dots + (-1)^n b_n] \cdot 1^n.$$

Um die Normalform zu erhalten, muss noch jede Colonne, die kein b enthält, mit (-1) multiplicirt werden; alsdann erkennt man, dass die obige Reihe dem aufsteigenden Kettenbrüche

$$(-1)^{-n} \cdot \frac{b_0}{1} + \frac{b_1}{b_1 - b_0} + \dots + \frac{b_n}{b_n - b_{n-1}}$$

gleich ist. Wird auf diesen Kettenbruch die in § 3 gefundene Transformationsformel angewandt, so ergibt sich

$$S = \frac{(-1)^{-n} b_0}{1} + \frac{b_1}{b_1 - b_0} + \frac{b_0 b_2}{b_2 - b_1} + \dots + \frac{b_{n-3} b_{n-1}}{b_{n-1} - b_{n-2}} + \frac{b_{n-2} b_n}{b_n - b_{n-1}}.$$

Auch einige ähnliche Formeln von etwas allgemeinerer Natur, wie sie z. B. Nachreiner⁹ ebenfalls durch eine Determinantenbetrachtung erhalten hat, haben ihre eigentliche Quelle in dem Theorem von Lagrange.

Eine ganz ähnliche Umformung hat auch G. Bauer¹⁰ angewandt, um den Kettenbruch

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{b_1} + \frac{1+b_1}{b_2} + \dots + \frac{1+b_{n-1}}{b_n}$$

als Quotienten zweier Aggregate darzustellen. Schreibt man nämlich denselben in gewohnter Weise als Quotienten zweier Kettenbruchdeterminanten vom bezüglich $(n-1)^{\text{ten}}$ und n^{ten} Grade und addirt zu jeder Horizontalreihe alle darauf folgenden, so wird

$$Q_n = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n + 1 \\ -(b_1 + 1) & -1 & 0 & \dots & 0 & b_n + 1 \\ 0 & -(b_2 + 1) & -1 & \dots & 0 & b_n + 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_n + 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(b_{n-1} + 1) & b_n \end{vmatrix}$$

und entsprechend P_n . Um auf die Normalform zu bringen, mache man die letzte Verticalreihe zur ersten; dividirt man dann noch mit

$$[-(b_1 + 1)][-(b_2 + 1)] \dots [-(b_{n-1} + 1)],$$

so wird, da sich die Vorzeichen gegenseitig ausgleichen,

$$Q_n = (b_1 + 1)(b_2 + 1) \dots (b_{n-1} + 1) \frac{b_n + 1}{1} - \frac{b_n + 1}{b_1 + 1} - \dots - \frac{b_n}{b_{n-1} + 1}.$$

Führt man diesen Kettenbruch in das gleichgeltende Aggregat über, so wird

$$Q_n = (b_1 + 1)(b_2 + 1) \dots (b_{n-1} + 1)(b_n + 1) \left(1 - \frac{1}{b_1 + 1} + \frac{1}{(b_1 + 1)(b_2 + 1)} - \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(b_1 + 1)(b_2 + 1) \dots (b_n + 1)} \right),$$

und ein ähnlicher Werth existirt für P_n .

- 8) Euler, Einleitung in die Analysis des Unendlichen, deutsch von Michel-sen, 1. Bd., Berlin 1788, S. 395.
- 9) Nachreiner, Beziehungen zwischen Determinanten und Kettenbrüchen, München 1872, S. 16.
- 10) Bauer, Von einem Kettenbruche Euler's und einem Theorem von Wallis, München 1872, S. 10.

§ 5. In die Kategorie der hier discutirten Objecte gehört auch die Anwendung, welche ein von Lucas¹¹ aufgestellter Satz zu machen verstattet: Sind

$$a_1, a_2 \dots a_m \dots a_n$$

willkürliche Grössen mit der Summe S , und wird

$$A_m = S - a_m$$

gesetzt, so hat die Determinante

$$A = \begin{vmatrix} -A_1 + x & a_2 & \dots & a_{m-1} & a_m & a_{m+1} & \dots & a_n \\ a_1 & -A_2 + x & \dots & a_{m-1} & a_m & a_{m+1} & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & \dots & -A_{m-1} + x & a_m & a_{m+1} & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{m-1} & -A_m + x & a_{m+1} & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{m-1} & a_m & -A_{m+1} + x & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{m-1} & a_m & a_{m+1} & \dots & -A_n + x \end{vmatrix}$$

den Werth

$$x(x-S)^{n-1}.$$

Um dies zu erkennen, braucht man nur nach einem bekannten Satze¹² die Determinante in eine nach aufsteigenden Potenzen von x fortlaufende Reihe zu entwickeln, denn dann findet man

$$A = x^n - \binom{n-1}{1} (a_1 + \dots + a_n) x^{n-1} + \binom{n-1}{2} (a_1 + \dots + a_n)^2 x^{n-2} \\ - + \dots + \binom{n-1}{n-1} (a_1 + \dots + a_n)^{n-1} x,$$

indem das von x freie Glied

$$\begin{vmatrix} -A_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & -A_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & \dots & -A_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & -A_n \end{vmatrix}$$

ersichtlich identisch verschwindet; es ist also in der That

$$A = x[x - (a_1 + \dots + a_n)]^{n-1}.$$

Zwei andere Beweise können an anderer Stelle¹³ nachgesehen werden*.

* In der genannten Arbeit ist das Versehen begangen worden, dass

$$\binom{n}{q} \text{ statt } \binom{n-1}{q}$$

durchgehends geschrieben wurde, was hiermit berichtigt werden möge.

Die Determinante \mathcal{A} möge nun aber auch in der Weise transformirt werden, dass von jeder Zeile, die letzte natürlich ausgenommen, die zunächst unter ihr stehende abgezogen wird. Dann ist

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} x - (A_1 + a_1) & A_2 + a_2 - x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x - (A_2 + a_2) & A_3 + a_3 - x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x - (A_3 + a_3) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x - (A_{n-1} + a_{n-1}) & A_n + a_n - x \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x - a_n \end{vmatrix}.$$

Nun ist aber der Definition gemäss

$$A_r + a_r = S;$$

dividirt man also mit $(x - S)$ die ersten $(n - 1)$ Horizontalreihen, so erhält man

$$\mathcal{A} = (x - S)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x - A_n \end{vmatrix}.$$

Machen wir jetzt alle Colonnen zu Zeilen und substituiren für \mathcal{A} den oben gefundenen Werth, so wird

$$x = \begin{vmatrix} x - A_n & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{x - A_n + \frac{a_{n-1}}{1} + \dots + \frac{a_1}{1}}{1}.$$

Durch Verwandlung in einen absteigenden Kettenbruch wird

$$x = \frac{x - A_n}{1} - \frac{a_{n-1}}{x - A_n + a_{n-1}} - \frac{a_{n-2}(x - A_n)}{a_{n-1} + a_{n-2}} - \dots - \frac{a_3 a_1}{a_2 + a_1},$$

und man hat hierdurch ein einfaches Mittel an die Hand gegeben, jede willkürliche Zahl in einen Kettenbruch von beliebig vielen Gliedern zu verwandeln.

11) Lucas, *Sur une formule d'analyse*, *Compt. rend. de l'acad. franq.* 1870, S. 1167.

12) Baltzer, *Theorie und Anwendung der Determinanten*, Leipzig 1870, S. 30.

13) Günther, *Ueber einige Determinantensätze*, *Sitzungsber. d. phys.-med. Societät zu Erlangen*, 5. Heft, S. 88 fllg.

§ 6. Verschiedene Autoren, darunter besonders auch Heis¹⁴, haben gezeigt, dass die aufsteigenden Kettenbrüche mit Nutzen zur Auflösung höherer Gleichungen gebraucht werden können. Ein interessanter Zu-

sammenhang zwischen beiden wird durch folgenden, anscheinend noch nicht erwähnten Lehrsatz festgestellt:

Hat der aufsteigende Kettenbruch

$$\frac{b_1}{m} + \frac{b_2}{m} + \dots + \frac{b_{n+1}}{m}$$

den Werth Null, so ist m ein Wurzelwerth der Gleichung

$$F \equiv b_1 x^n + b_2 x^{n-1} + \dots + b_n x + b_{n+1} = 0.$$

Dass dies sich wirklich so verhält, lässt sich leicht durch Induction erweisen; elementar dagegen kommen wir durch folgende Ueberlegung zum Ziele.

Wenn m eine Wurzel der obigen Gleichung ist, so muss, wenn man in F für x dieses m substituirt, dies Polynom sich annulliren, mit andern Worten: Eliminirt man aus den beiden Gleichungen

$$F = 0, \quad -x + m = 0$$

die Grösse x , so muss das Eliminationsresultat identisch verschwinden. Nach Sylvester's dialytischer Methode müsste also die Gleichung

$$\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & m & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & 0 & 0 & \dots & 0 & m & -1 \\ b_{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & m \end{vmatrix} = 0$$

existieren. Gelingt es nun, diese Identität auf anderem Wege nachzuweisen, so ist der Beweis für unsern Lehrsatz als erbracht anzusehen. Wenn aber der genannte aufsteigende Kettenbruch verschwinden soll, so kann dies, da m natürlich als endlich angenommen ist, nur dadurch geschehen, dass der Zähler

$$\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & m & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & 0 & 0 & \dots & 0 & m & -1 \\ b_{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & m \end{vmatrix}$$

gleich Null wird.

14) Matthiessen, Schlüssel zur Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra von Heis, Köln und Wien 1873, S. 181 fllg.

§ 7. Als Corollar des eben besprochenen Satzes ergiebt sich uns, dass, wenn auch

ist, der Kettenbruch

$$\frac{m_1}{m} + \dots + \frac{m_n}{m}$$

den Werth

$$\frac{m_1}{m^n} (m^{n-1} + m^{n-2} + \dots + m^2 + m + 1)$$

hat. Summiert man die geometrische Reihe, so folgt Nachstehendes:

Der aufsteigende Kettenbruch von eingliedriger Periode

$\left(\frac{b}{a}\right)$ ist gleich

$$M = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1}.$$

Diese Relation kann nun aber auch benutzt werden, um den Werth eines absteigenden Kettenbruches von eingliedriger Periode kennen zu lernen. Denn man findet nach § 3

$$M = \frac{b}{a} - \frac{ab}{ab+b} - \frac{ab^2}{ab+b} - \dots - \frac{ab^2}{ab+b},$$

und zwar besteht der periodische Theil dieses Kettenbruches aus $(n-2)$ Theilbrüchen. Um die Grösse V dieses periodischen Theiles zu finden, setzen wir

$$ab^2 = x, \quad ab + b = y,$$

also

$$a = \frac{x}{\frac{y^2}{2} - x + y \sqrt{\frac{y^2}{4} - x}}, \quad b = \frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} - x}$$

und

$$M = \frac{\frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} - x}}{\frac{x}{\frac{y^2}{2} - x + y \sqrt{\frac{y^2}{4} - x}} - \frac{\frac{y}{2} - \sqrt{\frac{y^2}{4} - x}}{y - V}}.$$

Indem man für M seinen Werth einsetzt, findet man nach einigen Transformationen

$$V = x \frac{\left(\frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} - x}\right)^{n-3} - \left(\frac{y}{2} - \sqrt{\frac{y^2}{4} - x}\right)^{n-3}}{\left(\frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} - x}\right)^{n-2} - \left(\frac{y}{2} - \sqrt{\frac{y^2}{4} - x}\right)^{n-2}}$$

in bekannter Weise.

§ 8. Aus dem in § 6 bewiesenen Satze leiten sich einfach mehrere Theoreme her, welche Siacci¹⁵ ohne Beweis aufgestellt hat. Es sollen nämlich für die Gleichung

$$F \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

die beiden Identitäten

$$\left| \begin{array}{cccccc} \frac{a_1}{a_0} + x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_2}{a_0} & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_3}{a_0} & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_{n-1}}{a_0} & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ \frac{a_n}{a_0} & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{array} \right| = \frac{F}{a_0}$$

und

$$\left| \begin{array}{cccccc} 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} x & -x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_{n-2}}{a_n} x & 1 & -x & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_{n-3}}{a_n} x & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_1}{a_n} x & 0 & 0 & \dots & 1 & -x \\ \frac{a_0}{a_n} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right| = \frac{F}{a_n}$$

bestehen. Die erste Relation erhellt sofort, wenn man die Determinante dadurch, dass man die Summe

$$\frac{a_1}{a_0} + x$$

in ihre beiden Summanden zerlegt, ebenfalls als Summe zweier Theile darstellt; denn der erste Summand hat nach dem Obigen den Werth

$$\frac{1}{a_0} (a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n),$$

der zweite dagegen ist gleich

$$x^n.$$

Um die zweite Beziehung nachzuweisen, dividire man zunächst jede Zeile durch x und zerlege alsdann in der nämlichen Weise, so erhält man ebenfalls als ersten Summanden den aufsteigenden Kettenbruch

$$\frac{1}{a_n} \cdot \frac{a_{n-1}}{1} + \frac{a_{n-2}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x} + \frac{a_0}{x}$$

und dieser ist gleich

$$\frac{1}{a_n} \frac{a_{n-1} \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + a_{n-2} \left(\frac{1}{x}\right)^{n-2} + \dots + a_1 \left(\frac{1}{x}\right) + a_0}{\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

oder, indem man mit x^n multipliziert,

$$\frac{1}{a_n} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x).$$

Der zweite Summand wird sein

$$\frac{1}{a_n} x^n \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{a_n},$$

so dass die Summe wirklich den Werth

$$\frac{F}{a_n}$$

erhält.

Siacci¹⁶ hat für seine beiden Sätze in der Folge selbst einen eleganten Beweis geliefert; jedoch scheint der hier betretene Weg der natürlichere zu sein.

Unmittelbar folgen aus den obigen Sätzen zwei weitere, welche ihr Begründer (a. a. O.) in dieser Weise formulirt: „Se si dicono P_{rs} e Q_{rs} i complementi algebrici di due elementi omologhi di P e Q si ha

$$a_0 P_{rr} x + a_n Q_{rr} = F, \quad a_0 P_{rs} x + a_n Q_{rs} = 0.$$

15) Siacci, *Intorno ad una serie e ad una funzione dei coefficienti binomiali*, Battaglini's *Giornale di Matematiche*, Vol. XI.

16) Siacci, *Intorno ad alcune trasformazioni di determinanti*, Torino 1872, S. 10.

Ist mit Vorstehendem der Nachweis gelungen, dass auch in der elementaren Lehre von den aufsteigenden Kettenbrüchen noch mancher theoretisch interessante Gesichtspunkt zu finden sei, so hat diese Arbeit ihren Zweck erreicht.

§ 9. Bekanntlich existirt eine grosse Anzahl von Methoden zur Verwandlung unendlicher Reihen in ebensolche Kettenbrüche, und zwar lassen sich dieselben der Hauptsache nach auf die classischen Arbeiten von Euler und Lagrange zurückführen. Aber all' diese Methoden, deren übersichtlichste Zusammenstellung man in dem grossen Handbuche von Eytelwein¹⁷ findet, leiden an dem grossen Uebelstande, dass die Convergenz des resultirenden Kettenbruches erst nachträglich durch eine oft sehr schwierige Discussion festzustellen ist. Nur eine gewisse Classe dieser Methoden macht hiervon eine Ausnahme; wir meinen diejenigen, welche nicht nur zwischen Reihe und Kettenbruch an sich, sondern auch zwischen den einzelnen Theilen derselben vollkommene Gleichheit herstellen¹⁸. Die betreffende Entwicklung wird meistens nur für specielle Fälle gegeben, lässt sich aber in der That sehr leicht für den allgemei-

nen Fall einer willkürlichen Potenzreihe durchführen, sobald man dieselbe als aufsteigenden Kettenbruch behandelt. Diese Ausdehnung soll nun hier geleistet werden; vorher aber wollen wir noch eine Definition einführen, welche, ursprünglich von Seidel¹⁹ herrührend, bei unserem Problem besonders gute Dienste zu leisten scheint. Dabei möge vorausgesetzt werden, dass man es lediglich mit convergenten Reihen zu thun habe, indem ein Operiren mit divergirenden keinen eigentlichen Sinn hat. Wir sagen nun:

Ist eine gewisse endliche Grösse durch Ausdrücke gegeben, welche ein unendlich fortgesetztes Wiederholen einer gewissen Operation erfordern (Reihe, Factorenfolge, Kettenbruch, Potenz), und stehen diese Ausdrücke in einer solchen gegenseitigen Relation, dass nicht nur sie selbst, sondern auch ihre p^{ten} Näherungswerte einander bezüglich gleich sind, so nennen wir solche Ausdrücke äquivalent.

Alsdann stellen wir uns folgende Aufgabe:

Es soll die (convergente) allgemeine Potenzreihe

$$\frac{x^p}{a_1} + \frac{x^{p+h}}{a_2} + \frac{x^{p+2h}}{a_3} + \dots \equiv S$$

in einen äquivalenten Kettenbruch umgesetzt werden.

Verstehen wir hier unter p eine ganze, unter h dagegen eine ganz willkürliche reelle Zahl, so ist das vorstehend formulirte Problem wohl das allgemeinst denkbare, insofern darin alle gesetzmässig fortschreitenden Reihen begriffen sind.

Wir haben zunächst offenbar

$$S = \frac{x^p}{a_1} + \frac{x^{p+h}}{\frac{a_2}{a_1}} + \frac{x^{p+2h}}{\frac{a_3}{a_2}} + \dots$$

und zwischen diesem Kettenbruch und der obigen Reihe besteht, wie eine einfache Rechnung zeigt, wiederum die Beziehung der Aequivalenz. Den aufsteigenden Kettenbruch transformiren wir jetzt in bekannter Weise in einen absteigenden und bekommen

$$S_1 = \frac{x^p}{a_1} - \frac{a_1 x^{p+h}}{\frac{a_2 x^p + x^{p+h}}{a_1}} - \frac{\frac{a_2}{a_1} x^p x^{p+2h}}{\frac{a_3 x^{p+h} + x^{p+2h}}{a_2}} - \frac{\frac{a_3}{a_2} x^{p+h} x^{p+3h}}{\frac{a_4 x^{p+2h} + x^{p+3h}}{a_3}} - \dots$$

Den jetzt erhaltenen Kettenbruch gestalten wir weiter dadurch um, dass wir den Satz, wonach man stets zwei Theilzähler und den zwischenliegenden Theilnenner mit einer willkürlichen Zahl (≥ 0) multiplizieren darf, sowohl auf die Potenzen von x , als auch auf die Constanten anwenden. So ergiebt sich schliesslich

$$S_2 = x^p \cdot \frac{1}{a_1} - \frac{a_1^2 x^h}{a_2 + a_1 x^h} - \frac{a_2^2 x^h}{a_3 + a_2 x^h} - \frac{a_3^2 x^h}{a_4 + a_3 x^h} - \dots$$

Was nun den zuerst gewonnenen Kettenbruch anlangt, so ergiebt sich aus der oben durchgeföhrten Determinantenbetrachtung unmittelbar, dass S_1 dem aufsteigenden Kettenbruch äquivalent sein muss, und diese Beziehung ward natürlich durch die weiterhin an S_1 vorgenommene Veränderung nicht gestört. Nun sind aber offenbar zwei analytische Gebilde äquivalent, wenn sie einem dritten äquivalent sind, und es erhellt also die Wahrheit:

Der absteigende Kettenbruch S_2 ist der Reihe S nicht allein gleich, sondern auch äquivalent.

Nunmehr ist jede ähnliche Transformation einfach zu bewerkstelligen. Wollten wir die Function $\sin x$ als unendlichen Kettenbruch darstellen, so würde die gewöhnliche Regel, bei der $h=1$ vorausgesetzt wird, versagen, d. h. sie würde auf eine unbrauchbare Form führen, indem jede Constante mit geradem Index $=\infty$ gesetzt werden müsste. Für uns ist dagegen, weil $\sin x$ der Reihe

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

gleichwerthig ist,

$$p=1, \quad h=2, \quad a_n=(2n-1)!,$$

und wir finden demnach

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{(1!)^2 x^2}{3! + 1! x^2} - \frac{(3!)^2 x^2}{5! + 3! x^2} - \frac{(7!)^2 x^2}{7! + 5! x^2} - \dots$$

Da aber

$$(2n-1)! : (2n-3)! = (2n-1)(2n-2)$$

ist, so können wir durch Anwendung des schon oben gebrauchten Satzes auch diese Form herstellen:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{1 \cdot 1 x^2}{2 \cdot 3 + x^2} - \frac{2 \cdot 3 x^2}{4 \cdot 5 + x^2} - \frac{4 \cdot 5 x^2}{6 \cdot 7 + x^2} - \dots$$

Auch hier ist das Fortschreitungsgesetz augenfällig.

Fassen wir als ein anderes Beispiel die gewöhnliche hypergeometrische Reihe von Gauss

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 1 + \frac{\alpha \beta}{1! \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \beta(\beta+1)}{2! \gamma(\gamma+1)} + \dots$$

auf. In diesem Falle wird, wenn wir das Glied 1 nicht mit zur Reihe rechnen,

$$p=1=h, \quad a_m=1 : \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+m-1) \beta(\beta+1) \dots (\beta+m-1)}{m! \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+m-1)},$$

und sonach

$$-1 + F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{x}{1! \gamma} - \frac{\left(\frac{1! \gamma}{\alpha \beta}\right)^2 x}{\frac{2! \gamma (\gamma+1)}{\alpha (\alpha+1) \beta (\beta+1)} + \frac{1! \gamma}{\alpha \beta} x} - \frac{\left(\frac{2! \gamma (\gamma+1)}{\alpha (\alpha+1) \beta (\beta+1)}\right)^2 x}{\frac{3! \gamma (\gamma+1) (\gamma+2)}{\alpha (\alpha+1) (\alpha+2) \beta (\beta+1) (\beta+2)} + \frac{2! \gamma (\gamma+1)}{\alpha (\alpha+1) \beta (\beta+1)} x} - \dots$$

Aus dieser Form lassen sich die anderen bekannten leicht herleiten und überdies geniesst man des grossen Vortheils, die Convergenz *a priori* behaupten zu können, sobald natürlich die Reihe F selbst convergent, d. h. wenn $x < 1$ oder aber für

$$x = 1, \quad \alpha + \beta > \gamma$$

war.

Erwähnt möge anhangsweise noch werden, dass der von uns hier mehrfach verwandte Begriff der Aequivalenz Erweiterung zulässt. Würde man die hier charakterisirte Aequivalenz die einfache nennen, so würde ihr eine mn -fache entsprechen, die so zu definiren wäre:

Zwei unendliche Ausdrücke (dies Wort im Sinne Euler's genommen) haben eine $m-n$ -fache Aequivalenz, wenn der m^{te} Näherungswert des einen dem n^{ten} des andern gleich ist. Für $m=n$ ist die Aequivalenz eine einfache.

So hat die von Pacioli erfundene und von Bertrand²⁰ wieder reproducire Nähерungsreihe zur Bestimmung des Wurzelwerthes

$$\sqrt{a^2 + p}$$

zu der bekannten Kettenbruchentwickelung

$$a + \frac{p}{2a} + \frac{p}{2a} + \dots$$

eine $n-2^{n-1}$ -fache Aequivalenz, wie wir dies bei einer andern Gelegenheit²¹ nachgewiesen haben.

17) Eytelwein, Grundlehren der höheren Analysis, 1. Band, Berlin 1824, S. 361 fgg.

18) Schlämilch, Handbuch der algebraischen Analysis, Jena 1868, S. 315.

19) Seidel, Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen dem Bildungsgesetz eines Kettenbruches und der Art des Fortganges seiner Näherungswerte, München 1875, S. 7.

20) Bertrand, *Traité d'arithmétique*, Paris 1867, S. 245 fgg.

21) Günther-Sparagna, *Paragone di due metodi per la determinazione approssimata di grandezze irrazionali*, Boncompagni Bullettino, Tomo VII, S. 596.

X.

Ueber die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit im Zusammenhange stehende Fragen.

Von

Prof. HELMERT

am Polytechnikum in Aachen.

(Hierzu Taf. IV, Fig. 1—18.)

§ 1. Allgemeine Formeln.

Wir bezeichnen die absoluten Werthe der Beobachtungsfehler für n Beobachtungen mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ und die Summe ihrer m^{ten} Potenzen $[\varepsilon^m]$ mit $n\sigma_m$. Der durchschnittliche Werth von $n\sigma_m$, wenn man jedem ε alle möglichen Werthe nach seiner Wahrscheinlichkeit beilegt, ist gleich nS_m , wobei

$$1) \quad S_m = \int_0^a \varepsilon^m \psi(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Hierin ist a der überhaupt erreichbare Maximalfehler und $\psi(\varepsilon) = \varphi(+\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)$, falls $\varphi(\varepsilon) d\varepsilon$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass ein Beobachtungsfehler ε mit Rücksicht auf sein Vorzeichen zwischen $\varepsilon - \frac{d\varepsilon}{2}$ und $\varepsilon + \frac{d\varepsilon}{2}$ liege.

Wir wenden uns nun zur Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der m^{ten} Potenzen von n Beobachtungsfehlern liegen werde zwischen den Grenzen

$$n \left(\sigma_m - \frac{\delta_m}{2} \right) \text{ und } n \left(\sigma_m + \frac{\delta_m}{2} \right),$$

worin der Einfachheit halber δ_m geradezu das Differential von σ_m bedeuten möge. Wir bezeichnen diese Wahrscheinlichkeit mit $\varphi(\sigma_m) \delta_m$. Um

sie kennen zu lernen, hat man zwei Wege. Entweder nimmt man successive $n=1, 2, \dots$ oder man nimmt n beliebig und sucht mittelst eines Discontinuitätsfactors die vorkommenden Integrationen zu bewältigen. Allgemein ist das Problem nur unter beschränkenden Voraussetzungen lösbar; bekanntlich hat Gauss ohne Beweis Endformeln gegeben, welche ein sehr grosses n voraussetzen, aber für ein ganz beliebiges Fehlergesetz $\varphi(\varepsilon)$ gelten sollen. Schon Poisson hat bei einer ähnlichen Untersuchung (mit $m=1$) gezeigt, dass jedenfalls eine Beschränkung auf denkbare Fehlergesetze nötig ist und $\varphi(\varepsilon)$ nicht jede denkbare Function von ε sein darf.

Ist $n=1$, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass ε_1^m zwischen $\sigma_m \mp \frac{\delta_m}{2}$ liege, gleich

$$\varphi(\sigma_m)_1 \delta_m = \int_{\sqrt[m]{\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}}}^{\sqrt[m]{\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}}} \psi(\varepsilon) d\varepsilon,$$

wobei dem Zeichen $\varphi(\sigma_m)$ der Index 1 wegen $n=1$ angehängt worden ist. Weil nun δ_m nur ein Differential sein soll, wird

$$\varphi(\sigma_m)_1 \delta_m = \left(\sqrt[m]{\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}} - \sqrt[m]{\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}} \right) \psi(\sqrt[m]{\sigma_m}).$$

Indem nun σ_m genau genommen niemals gleich Null gesetzt werden darf sondern immer um wenigstens $\frac{\delta_m}{2}$ davon entfernt bleiben muss (da ja eine negative Grenze für ε_1^m ausgeschlossen ist), so ist auch (wie nach leichter Reduction gefunden wird)

$$2) \quad \varphi(\sigma_m)_1 \delta_m = \frac{\psi(\sqrt[m]{\sigma_m})}{m \sigma_m^{1-\frac{1}{m}}} \delta_m.$$

Ist $n=2$, so lautet die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeit zu suchen, dass $\varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m$ zwischen $2\left(\sigma_m \mp \frac{\delta_m}{2}\right)$ liege. Nun ist nach 2) die Wahrscheinlichkeit, dass ε^m zwischen $x \mp \frac{d x}{2}$ liege, gleich

$$\frac{\psi(\sqrt[m]{x})}{m x^{1-\frac{1}{m}}} dx$$

und daher, wenn wir die x nach den Indices ihrer ε unterscheiden, die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\varphi(\sigma_m)_2 \delta_m = \frac{1}{m^2} \int_p^q dx_2 \int_{\frac{2(\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}) - x_2}{2}}^{\frac{2(\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}) - x_2}{2}} \frac{\psi(\sqrt[m]{x_2})}{x_2^{1-\frac{1}{m}}} \frac{\psi(\sqrt[m]{x_1})}{x_1^{1-\frac{1}{m}}} dx_1$$

oder mit Berücksichtigung des Betrages von δ_m und Weglassen des Index 2 unter dem Integral

$$3) \quad \varphi(\sigma_m)_2 \delta_m = \frac{2\delta_m}{m^2} \int_p^q \frac{\psi(\sqrt[m]{x})}{x^{1-\frac{1}{m}}} \frac{\psi(\sqrt[m]{2\sigma_m - x})}{(2\sigma_m - x)^{1-\frac{1}{m}}} dx,$$

worin

$$p = \text{Null}, \quad q = 2\sigma_m \text{ für } 2\sigma_m < a^m, \\ p = (2\sigma_m - a^m), \quad q = a^m \quad , \quad 2\sigma_m > a^m.$$

Man kann in angegebener Weise die Frage successive für $n = 3, 4 \dots$ weiter behandeln, falls nur die jedesmal vorausgehende Integration möglich ist.

Ist n unbestimmt, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der m^{ten} Potenzen der ε zwischen $n\left(\sigma_m \mp \frac{\delta_m}{2}\right)$ liege, gleich

$$4) \quad \varphi(\sigma_m)_n \delta_m = \int_0^a d\varepsilon_1 \int_0^a d\varepsilon_2 \dots \int_0^a d\varepsilon_n \psi(\varepsilon_1) \psi(\varepsilon_2) \dots \psi(\varepsilon_n) F,$$

worin F folgenden Discontinuitätsfactor bezeichnet:

$$5) \quad F = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos[\varepsilon^m] z \cdot dz \int_{n\left(\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}\right)}^{n\left(\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}\right)} \cos z \Theta \cdot d\Theta,$$

welcher für alle $[\varepsilon^m]$ zwischen den Grenzen $n\left(\sigma_m \mp \frac{\delta_m}{2}\right)$ gleich 1, dagegen für $[\varepsilon^m]$ ausserhalb derselben gleich Null ist und angewandt werden darf bei jedem Werthe $\sigma_m \geq \frac{\delta_m}{2}$. Es ist also, wie früher, unzulässig, σ_m genau gleich Null zu setzen. Führt man in dem Factor F die Integration nach Θ aus, so wird

$$5^*) \quad F = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin z n\left(\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}\right) - \sin z n\left(\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}\right)}{z} \cos[\varepsilon^m] z \cdot dz.$$

Bezeichnen wir ferner mit ω_m die Differenz $S_m - \sigma_m$, so ist offenbar in $\varphi(\sigma_m)$ auch das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Abweichungen ω_m gefunden. Betrachtet man aber verschiedene m , dann bemerkt man, dass die ω_m gar nicht vergleichbar sind; wir müssen daher auf gleichartige Abweichungen reduzieren. Wie diese zu nehmen sind, sieht man sogleich ein, indem man sich erinnert, dass zur Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers die $\sqrt[m]{\sigma_m}$ anstatt der unbekannten $\sqrt[m]{S_m}$ dient und dass man ihn durch Multiplication dieser Wurzelgrösse mit einer vom Fehlergesetz abhängenden Zahl erhält. Setzt man daher

$$\sqrt[m]{\sigma_m} = \sqrt[m]{S_m} (1 + v_m),$$

so bedeutet v_m nicht nur die negative Verbesserung von $\sqrt[m]{\sigma_m}$ in Bruchtheilen von $\sqrt[m]{S_m}$, sondern auch die Verbesserung des berechneten wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers in Bruchtheilen von dessen strengem Werthe. Mithin sind die v_m für veränderliches m vergleichbare Grössen. Kennt man nun $\varphi(\sigma_m) \delta_m$, so findet man daraus die Wahrscheinlichkeit $\varphi(v_m) d v_m$, es falle v_m zwischen die Grenzen $v_m \mp \frac{d v_m}{2}$, durch Substitution der Grössen v_m und $d v_m$ mittelst der Relationen

$$6) \quad \sigma_m = S_m (1 + v_m)^m, \quad \delta_m = m S_m (1 + v_m)^{m-1} d v_m,$$

was sich in aller Strenge [wie Formel 2)] begründen lässt.

§ 2. Constante Fehlerwahrscheinlichkeit.

$$\psi(\varepsilon) = \frac{1}{a} \text{ für } \varepsilon \leq a, \text{ ausserhalb gleich Null.}$$

I. $n = 1$.

Für die drei Fälle $m = 1, 2$ und 3 gibt Formel 2) folgende Functionen:

$$7) \quad \begin{aligned} \varphi(\sigma_1)_1 \delta_1 &= \frac{1}{a} \delta_1, \\ \varphi(\sigma_2)_1 \delta_2 &= \frac{1}{2a} \sigma_2^{-\frac{1}{2}} \delta_2, \\ \varphi(\sigma_3)_1 \delta_3 &= \frac{1}{3a} \sigma_3^{-\frac{2}{3}} \delta_3. \end{aligned}$$

Um eine Prüfung dieser Formeln zu erhalten, integrierte ich die erste von Null bis a , die zweite bis a^2 , die dritte bis a^3 und fand, wie es sein muss, eins. In der That ist es gewiss, dass σ_m einen der Werthe zwischen 0 und a^m annehmen werde.

Durch Einführung der Relationen 6) und weil jetzt

$$S_m = \frac{a^m}{m+1}$$

ist, findet man weiter aus den Functionen $\varphi(\sigma_1)\delta_1$:

$$8) \quad \begin{aligned} \varphi(v_1)_1 dv_1 &= \frac{1}{2} dv_1, \quad -1 < v_1 < +1, \\ \varphi(v_2)_1 dv_2 &= \frac{1}{\sqrt[3]{4}} dv_2, \quad -1 < v_2 < \sqrt[3]{3} - 1, \\ \varphi(v_3)_1 dv_3 &= \frac{1}{\sqrt[3]{4}} dv_3, \quad -1 < v_3 < \sqrt[3]{4} - 1. \end{aligned}$$

Die Figuren 1, 2 und 3 geben eine graphische Darstellung der Functionen $\varphi(v)_1$ als Ordinaten für die Abscissen v . Im vorliegenden Falle sind die $\varphi(v)_1$ gerade Linien parallel zur Abscissenaxe und es ist die Fläche, welche die Ordinate φ überstreckt, schraffirt. Demnächst enthalten die Figuren noch die Darstellung von $\psi(v)_1 = \varphi(+v)_1 + \varphi(-v)_1$ als Ordinate für den *val. abs.* v als Abscisse. Man wird bemerken, dass sich trotz der Einfachheit des Falles doch in den Figuren 2 und 3 die Darstellung von $\psi(v)_1$ immerhin schon etwas complicirt.

Fig. 4 endlich zeigt das gegenseitige Verhalten der Functionen $\psi(v_1)$, $\psi(v_2)$, $\psi(v_3)$.

II. $n = 2$.

Für die drei Fälle $m = 1$, 2 und 3 giebt Formel 3)

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma_1)_2 \delta_1 &= \frac{2\delta_1}{a^2} \int_p^q dx, \\ \varphi(\sigma_2)_2 \delta_2 &= \frac{2\delta_2}{4a^2} \int_p^q \frac{dx}{\sqrt{x(2\sigma_2 - x)}}, \\ \varphi(\sigma_3)_2 \delta_3 &= \frac{2\delta_3}{9a^2} \int_p^q \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2\sigma_3 - x)^2}}. \end{aligned}$$

Nach einiger Reduction folgt hieraus

$$9) \quad \varphi(\sigma_1)_2 \delta_1 = \begin{cases} \frac{4\sigma_1}{a^2} \delta_1 & \text{für } 2\sigma_1 < a, \\ \frac{4(a - \sigma_1)}{a^2} \delta_1 & \text{,, } 2\sigma_1 > a; \end{cases}$$

$$10) \quad \varphi(\sigma_2)_2 \delta_2 = \begin{cases} \frac{\pi}{2a^2} \delta_2 & \text{für } 2\sigma_2 < a^2, \\ \frac{1}{a^2} \arcsin \left(\frac{a^2}{\sigma_2} - 1 \right) \delta_2 & \text{,, } 2\sigma_2 > a^2; \end{cases}$$

$$11) \quad \varphi(\sigma_3)_2 \delta_3 = \begin{cases} \frac{2 \delta_3}{3 a^2 \sqrt[3]{2 \sigma_3}} \int_0^1 (1-t^3)^{-\frac{1}{3}} dt \quad \text{für } 2\sigma_3 < a^3, \\ \frac{2 \delta_3}{3 a^2 \sqrt[3]{2 \sigma_3}} \int_{\sqrt[3]{\frac{a^3}{2\sigma_3}}}^{\sqrt[3]{\frac{a^3}{2\sigma_3}}} (1-t^3)^{-\frac{1}{3}} dt \quad \text{,, } 2\sigma_3 > a^3. \end{cases}$$

Die Prüfung der Formeln 8) und 9) durch Integration nach σ über alle möglichen Werthe desselben ist leicht zu erledigen und bestätigt ihre Richtigkeit. Insbesondere ist

$$\int_0^{a^2} \varphi(\sigma_2)_2 \delta_2 = \frac{\pi}{2 a^2} \int_0^{\frac{a^2}{2}} \delta_2 + \frac{1}{a^2} \int_{\frac{a^2}{2}}^{a^2} \arcsin\left(\frac{a^2}{\sigma_2} - 1\right) \delta_2,$$

und wenn man im zweiten Integral rechter Hand \arcsin als ersten Factor nimmt und theilweise integriert, so hat man weiter

$$\int_0^{a^2} \varphi(\sigma_2)_2 \delta_2 = \int_{\frac{a^2}{2}}^{a^2} \frac{\delta_2}{\sqrt{2 a^2 \sigma_2 - a^4}} = 1.$$

Was nun den ersten Theil der Formel 11) anlangt, so giebt die directe Reihenentwickelung daselbst zu schwache Convergenz. Wir setzen daher $t = 1 - z$ und integriren anstatt nach z nach der Variablen $y = (1-t^3)^{-\frac{1}{3}}$; dann wird leicht mittelst einer geometrischen Betrachtung

$$11*) \quad \varphi(\sigma_3)_2 \delta_3 = \frac{2 \delta_3}{3 a^2 \sqrt[3]{2 \sigma_3}} \left(1 + \int_1^\infty (1 - \sqrt[3]{1-y^{-\frac{3}{2}}}) dy \right) = \frac{1,17 \dots}{a^2 \sqrt[3]{2 \sigma_3}} \delta_3,$$

$2\sigma_3 < a^3.$

Für den zweiten Theil der Formel 11) genügt (da hier wesentlich nur die spätere Curvenconstruction ins Auge gefasst ist) die directe Reihenentwickelung

$$11***) \quad \varphi(\sigma_3)_2 \delta_3 = \frac{2 \delta_3}{3 a^2 \sqrt[3]{2 \sigma_3}} \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{a^3}{2 \sigma_3}} \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{a^3}{2 \sigma_3} \right) + \frac{5}{6} \left(\frac{a^3}{2 \sigma_3} \right)^2 + \frac{4}{81} \left(\frac{a^3}{2 \sigma_3} \right)^3 + \frac{110}{3159} \left(\frac{a^3}{2 \sigma_3} \right)^4 \dots \right] \\ - \sqrt[3]{1 - \frac{a^3}{2 \sigma_3}} \left[1 + \frac{1}{6} \left(1 - \frac{a^3}{2 \sigma_3} \right) + \frac{5}{6} \left(1 - \frac{a^3}{2 \sigma_3} \right)^2 + \frac{4}{81} \left(1 - \frac{a^3}{2 \sigma_3} \right)^3 + \frac{110}{3159} \left(1 - \frac{a^3}{2 \sigma_3} \right)^4 \dots \right] \end{cases},$$

$2\sigma_3 > a^3.$

Integriert man zur Probe $\varphi(\sigma_3)_2 \delta_3$ in 11*) von σ_3 gleich 0 bis $\frac{a^3}{2}$, so folgt ohne besondere Mühe 0,88...; die weitere Integration bis a^3 nach 11**) gab mir mittelst mechanischer Quadratur etwas mühsamer 0,12..., zusammen also 1.

Die Substitution der Relationen 6) führt nun zu folgenden Formeln:

$$12) \quad \varphi(v_1)_2 dv_1 = \begin{cases} (1+v_1) dv_1, & -1 < v_1 \leq 0; \\ (1-v_1) dv_1, & 0 \leq v_1 < +1; \end{cases}$$

$$13) \quad \varphi(v_2)_2 dv_2 = \begin{cases} \frac{\pi}{3} (1+v_2) dv_2, & -1 < v_2 \leq \sqrt[3]{\frac{3}{2}} - 1; \\ \frac{2(1+v_2)}{3} \arcsin \left(\frac{3}{(1+v_2)^2} - 1 \right) dv_2, & \sqrt[3]{\frac{3}{2}} - 1 \leq v_2 < \sqrt{3} - 1; \end{cases}$$

$$14) \quad \varphi(v_3)_2 dv_3 = \begin{cases} 1,10 \dots (1+v_3) dv_3, & -1 < v_3 \leq \sqrt[3]{2} - 1; \\ \frac{1+v_3}{\sqrt[3]{4}} \left(\begin{array}{l} \alpha \left(1 + \frac{\alpha^3}{6} + \frac{5\alpha^6}{63} + \frac{4\alpha^9}{81} + \frac{110\alpha^{12}}{3159} \dots \right) \\ - \beta \left(1 + \frac{\beta^3}{6} + \frac{5\beta^6}{63} + \frac{4\beta^9}{81} + \frac{110\beta^{12}}{3159} \dots \right) \end{array} \right) dv_3, & \sqrt[3]{2} - 1 \leq v_3 \leq \sqrt[3]{4} - 1; \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{2} - 1 \leq v_3 \leq \sqrt[3]{4} - 1; \quad \alpha = \frac{\sqrt[3]{2}}{1+v_3}, \quad \beta = \sqrt[3]{1 - \frac{2}{(1+v_3)^3}}.$$

Die Figuren 5, 6 und 7 zeigen die Curven $\varphi(v)_2$, sowie die entsprechenden Curven $\psi(v_2)$, welche letztere in Fig. 8 zur Vergleichung unter sich besonders zusammengestellt sind.

III. Rückblick.

Die Betrachtung der Curven φ mit schraffirter Fläche in den Figuren 1—3 und 5—7 lässt sogleich erkennen, dass die Functionen $\varphi(v)_1$ und $\varphi(v)_2$ vom Gauss'schen Fehlergesetz zwar stark abweichen, aber sich demselben doch mit wachsender Anzahl n der Beobachtungen zu nähern scheinen. Man bemerkt ferner mittelst der Figuren 4 und 8 alsbald, dass mit wachsendem Exponenten m die Wahrscheinlichkeit wächst, es falle $\sqrt[m]{\sigma_m}$ mit $\sqrt[m]{S_m}$ zusammen. Um dies deutlicher zu erkennen, integrierte ich $\varphi(v) dv$ zwischen solchen Grenzen $-v_m$ und $+v_m$, dass sich gerade $\frac{1}{2}$ ergab. Alsdann ist auch die Wahrscheinlichkeit, die $\sqrt[m]{\sigma_m}$ werde zwischen die Grenzen $\sqrt[m]{S_m} (1 \mp v_m)$ fallen, gerade $\frac{1}{2}$, also sind die v_m die wahrscheinlichen Fehler von $\sqrt[m]{\sigma_m}$ in Bezug auf $\sqrt[m]{S_m}$ (und in Bruchtheilen dieses Werthes angegeben). Es fand sich v_m gleich

I)

	$n = 1$	$n = 2$
$m = 1$	0,50	0,29
2	0,43	0,24
3	0,40	0,23

Nach diesen Ergebnissen bekommt man (innerhalb der hier betrachteten Fälle) die grösste Wahrscheinlichkeit, dass die $\sqrt[m]{\sigma_m}$ mit der $\sqrt[m]{S_m}$ zusammenfalle, durch Anwendung eines möglichst hohen Exponenten m .

§ 3. Gauss'sches Fehlgesetz.

$$\psi(\varepsilon) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}.$$

I. $n = 1$.

Für die drei Fälle $m = 1, 2$ und 3 giebt Formel 2) nachstehende Functionen:

$$15) \quad \begin{aligned} \varphi(\sigma_1)_1 \delta_1 &= \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \sigma_1^2} \delta_1, \\ \varphi(\sigma_2)_1 \delta_2 &= \frac{2h}{2\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \sigma_2} \sigma_2^{-1/2} \delta_2, \\ \varphi(\sigma_3)_1 \delta_3 &= \frac{2h}{3\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \sigma_3^{2/3}} \sigma_3^{-2/3} \delta_3. \end{aligned}$$

Zur Prüfung integrierte ich diese Formeln nach σ von Null bis ∞ und erhielt für jedes der Integrale eins, wie es sein soll. Man hat weiter

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}, \\ S_2 &= \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^2 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{2h^2}, \\ S_3 &= \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^3 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{h^3 \sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Führt man diese Werthe in die Relationen 6) ein und substituiert sodann letztere in die 15), so ergiebt sich

$$16) \quad \begin{aligned} \varphi(v_1)_1 dv_1 &= \frac{2}{\pi} e^{-\frac{(1+v_1)^2}{\pi}} dv_1, \quad -1 < v_1; \\ \varphi(v_2)_1 dv_2 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{(1+v_2)^2}{2}} dv_2, \quad -1 < v_2; \\ \varphi(v_3)_1 dv_3 &= \frac{2}{\pi} \sqrt[3]{\pi} e^{-\frac{(1+v_3)^2}{3\sqrt{\pi}}} dv_3, \quad -1 < v_3. \end{aligned}$$

Die Figuren 9, 10 und 11 zeigen die Curven $\varphi(v)_1$, sowie die entsprechenden Curven $\psi(v)_1$, welche letzteren in Fig. 12 zu bequemern Vergleichung untereinander nochmals zusammengestellt sind.

II. $n = 2$.

Für die drei Fälle $m = 1, 2$ und 3 giebt die Formel 3)

$$\varphi(\sigma_1)_2 \delta_1 = \frac{8h^2 \delta_1}{\pi} \int_0^{2\sigma_1} e^{-h^2[x^2 + (2\sigma_1 - x)^2]} dx,$$

$$\varphi(\sigma_2)_2 \delta_2 = \frac{8h^2 \delta_2}{4\pi} \int_0^{2\sigma_2} \frac{e^{-2h^2\sigma_2}}{\sqrt{x(2\sigma_2 - x)}} dx,$$

$$\varphi(\sigma_3)_2 \delta_3 = \frac{8h^2 \delta_3}{9\pi} \int_0^{2\sigma_3} \frac{e^{-h^2[x^{2/3} + (2\sigma_3 - x)^{2/3}]}}{x^{2/3} \cdot (2\sigma_3 - x)^{2/3}} dx.$$

Nach einiger Reduction folgt hieraus

$$17) \quad \varphi(\sigma_1)_2 \delta_1 = \frac{8\sqrt{2}h}{\pi} e^{-2h^2\sigma_1^2} \delta_1 \int_0^{h\sigma_1\sqrt{2}} e^{-t^2} dt,$$

$$18) \quad \varphi(\sigma_2)_2 \delta_2 = 2h^2 e^{-2h^2\sigma_2} \delta_2,$$

$$19) \quad \varphi(\sigma_3)_2 \delta_3 = \frac{8h^3 \delta_3}{3\pi(h\sqrt[3]{2\sigma_3})} \int_0^1 \frac{e^{-[z^2 + (1-z^3)^{2/3}](h\sqrt[3]{2\sigma_3})^2}}{(1-z^3)^{2/3}} dz.$$

Um die zur Prüfung der Formel 17) nöthige Integration nach σ_1 durchzuführen, kann man zunächst $z = t: h\sqrt{2}$ setzen und sodann Polar-coordinaten mittels der Beziehungen $r \sin \Theta = z$, $r \cos \Theta = \sigma_1$ einführen und erhält alsdann

$$\int_0^\infty \varphi(\sigma_1)_2 \delta_1 = \frac{16h^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\Theta \int_0^\infty e^{-2h^2r^2} r dr = 1.$$

Dass Formel 18) die Prüfung durch Integration besteht, überblickt man sofort.

Was nun die Formel 19) anlangt, so begnügte ich mich, dafür einen zur Construction einer Zeichnung ausreichenden Näherungsausdruck herzustellen. Der Exponent $[z^2 + (1-z^3)^{2/3}]$ ändert aber zwischen den Grenzen $z = 0$ und 1 seinen Werth sehr wenig, man hat nämlich für

$$z = 0,0 \quad 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4 \quad 0,5 \quad 0,6 \quad 0,7 \quad 0,8 \quad 0,9 \quad 1,0$$

$$\text{Exponent} = 1,00 \quad 1,01 \quad 1,04 \quad 1,07 \quad 1,12 \quad 1,17 \quad 1,21 \quad 1,24 \quad 1,26 \quad 1,23 \quad 1,00$$

und ist daher mit Berücksichtigung der Veränderlichkeit des Nenners $(1-z^3)^{2/3}$ eine Zerspaltung des Integrals in drei Integrale möglich, wobei für jedes derselben jener Exponent einen constanten Mittelwerth erhält:

$$\int_0^1 e^{-1,09(h\sqrt[3]{2\sigma_3})^2} \int_0^{0,6} \frac{dz}{(1-z^3)^{2/3}} + e^{-1,24(h\sqrt[3]{2\sigma_3})^2} \int_{0,6}^{0,9} \frac{dz}{(1-z^3)^{2/3}} \\ + e^{-1,07(h\sqrt[3]{2\sigma_3})^2} \int_{0,9}^1 \frac{dz}{(1-z^3)^{2/3}}.$$

Die Zahlen 1,10, 1,25, 1,14 sind überdies so gewählt, dass für $\sigma_3 = S_3$ die Formel genau stimmt. Die jetzt noch zu bewirkenden Integrationen lassen sich in den beiden ersten Fällen durch direkte Reihenentwickelung, im letzten Falle nach vorheriger Substitution von $z = 1 - \zeta$, in hinreichender Schärfe rasch erledigen und man erhält

$$19^*) \quad \varphi(\sigma_3)_2 \delta_3 = \frac{h^3 \delta_3}{h \sqrt[3]{2\sigma_3}} \{ 0,530 e^{-1,09(h\sqrt[3]{2\sigma_3})^2} + 0,391 e^{-1,24(h\sqrt[3]{2\sigma_3})^2} + 0,576 e^{-1,07(h\sqrt[3]{2\sigma_3})^2} \}.$$

Die Integration nach σ_3 von 0 bis ∞ giebt 1,004 statt 1, mithin für den vorliegenden Zweck ausreichend übereinstimmend.

Die Einführung der Relationen 6) führt (unter Beachtung der angegebenen Werthe der S_1, S_2, S_3) von den Formeln 17), 18) und 19*) zu folgenden:

$$20) \quad \begin{aligned} \varphi(v_1)_2 dv_1 &= \frac{8\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}} e^{-\frac{2(1+v_1)^2}{\pi}} \int_0^{(1+v_1)\sqrt{\frac{2}{\pi}}} e^{-t^2} dt, & -1 < v_1; \\ \varphi(v_2)_2 dv_2 &= 2(1+v_2) e^{-(1+v_2)^2} dv_2, & -1 < v_2; \\ \varphi(v_3)_2 dv_3 &= (1+v_3)(0,86 e^{-1,18(1+v_3)^2} + 0,64 e^{-1,34(1+v_3)^2} \\ &\quad + 0,94 e^{-1,15(1+v_3)^2}) dv_3, & -1 < v_3. \end{aligned}$$

Die Figuren 13, 14 und 15 zeigen die Curven $\varphi(v_2)$ und überdies die entsprechenden $\psi(v_2)$, für welch letztere Fig. 16 noch eine besondere Zusammenstellung bietet.

III. Rückblick.

Die Betrachtung der Figuren 9—11 und 13—15 zeigt, dass die Function $\varphi(v)$ sich mit wachsendem n ziemlich rasch der Form des Gauss'schen Fehlgesetzes annähert. Wir werden dies wenigstens für $m=2$ im folgenden Paragraphen weiter untersuchen, da für diesen Fall die mathematische Behandlung am bequemsten ausfällt. Die Figuren 12 und 16 zeigen ferner, dass nicht, wie bei konstanter Fehlerwahrscheinlichkeit mit wachsendem m , die Wahrscheinlichkeit, es falle $\sqrt[m]{\sigma_m}$ mit der $\sqrt[m]{S_m}$ zusammen, wächst. Vielmehr bietet offenbar $m=2$ die meiste Wahrscheinlichkeit. Um dies deutlicher zu erkennen, berechnete

ich folgendes Täfelchen der wahrscheinlichen Fehler ν_m [mit der Bedeutung: die Wahrscheinlichkeit für die $\sqrt[m]{\sigma_m}$, zwischen die Grenzen $\sqrt[m]{S_m} (1 \mp \nu_m)$ zu fallen, ist $\frac{1}{2}$]:

II)		$n = 1.$	$n = 2.$
		$m = 1$	$m = 2$
	1	0,545	0,372
	2	0,515	0,355
	3	0,521	0,361

§ 4. Gauss'sches Fehlergesetz (Fortsetzung).

$m = 2$, n beliebig.

Es sei zunächst $n = 3$ und also die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2$ zwischen die Grenzen $3\left(\sigma_2 \mp \frac{\delta_2}{2}\right)$ falle. Nach der zweiten Formel 15) und nach Formel 18) ist aber, wenn ε_1^2 mit x und $\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2$ mit y bezeichnet wird:

$$\varphi(x) dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x} x^{-\frac{1}{2}} dx,$$

$$\varphi(y) dy = h^2 e^{-h^2 y} dy;$$

mithin wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\varphi(\sigma_2)_3 \delta_2 = \frac{h^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^{3\sigma_2} dx \int_0^{3\left(\sigma_2 + \frac{\delta_2}{2}\right) - x} e^{-h^2(x+y)} x^{-\frac{1}{2}} dy.$$

Berücksichtigt man, dass $(x+y) = 3\sigma_2$ ist und δ_2 ein Differential sein soll, so wird

$$21) \quad \varphi(\sigma_2)_3 \delta_2 = \frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} (3\sigma_2)^{\frac{1}{2}} e^{-h^2(3\sigma_2)} (3\delta_2).$$

Die Substitution der Relationen 6) ergibt hieraus

$$22) \quad \varphi(\nu_2)_3 d\nu_2 = 3 \sqrt{\frac{6}{\pi}} (1 + \nu_2)^2 e^{-\frac{3}{2}(1 + \nu_2)^2} d\nu_2,$$

zu welcher Function die Fig. 17 eine graphische Darstellung liefert. Zur Prüfung der Formel 17) beachte man noch, dass

$$\int_0^{\infty} \varphi(\sigma_2)_3 \delta_2 = \frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{h^3} = 1.$$

Ist nun ferner $n=4$ und demnach die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2$ zwischen die Grenzen $4\left(\sigma_2 \mp \frac{\delta_2}{2}\right)$, so giebt die zweimalige Anwendung der Formel 18) auf die Theile $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = x$ und $\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 = y$ leicht

$$23) \quad \varphi(\sigma_2)_4 \delta_2 = h^4 (4\sigma_2) e^{-h^2(4\sigma_2)} (4\delta_2)$$

mit der Prüfung

$$\int_0^\infty \varphi(\sigma_2)_4 \delta_2 = h^4 \cdot \frac{\Gamma(2)}{h^4} = 1.$$

Die Anwendung der Relationen 6) auf 23) führt zu

$$24) \quad \varphi(v_2)_4 dv_2 = 8(1+v_2)^3 e^{-2(1+v_2)^2} dv_2,$$

und hierzu giebt Fig. 18 eine graphische Darstellung.

Die vorigen Entwickelungen legen den Schluss nahe, es sei allgemein für beliebiges n die Wahrscheinlichkeit, dass $[\varepsilon^2]$ zwischen die Grenzen $n\left(\sigma_2 \mp \frac{\delta_2}{2}\right)$ falle, gleich

$$25) \quad \varphi(\sigma_2)_n \delta_2 = \frac{h^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (n\sigma_2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-h^2 n \sigma_2} n \delta_2,$$

wozu ferner die Formel gehört

$$26) \quad \varphi(v_2)_n dv_2 = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} (1+v_2)^{n-1} e^{-\frac{n}{2}(1+v_2)^2} dv_2, \quad -1 < v_2.$$

Zunächst bestätigt die Integration nach σ_2 die Formel 25); um ihre Richtigkeit nachzuweisen, genügt es, zu zeigen, dass sie auch für $(n+2)$ besteht, da sie bereits für $n=1$ und 2 gilt. Wir setzen $[\varepsilon^2]_1^n = x$ und $\varepsilon_{n+1}^2 + \varepsilon_{n+2}^2 = y$. Dann geben die Formeln 18) und 25) für die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der $(n+2)$ Fehlerquadrate zwischen $(n+2)\left(\sigma_2 \mp \frac{\delta_2}{2}\right)$ falle, den Ausdruck

$$\varphi(\sigma_2)_{n+2} \delta_2 = \frac{h^{n+2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{(n+2)\sigma_2} dx \int_{(n+2)\left(\sigma_2 - \frac{\delta_2}{2}\right) - x}^{(n+2)\left(\sigma_2 + \frac{\delta_2}{2}\right) - x} e^{-h^2(x+y)} x^{\frac{n}{2}-1} dy,$$

woraus man, wie bei früheren entsprechenden Fällen, leicht folgert, dass

$$\varphi(\sigma_2)_{n+2} \delta_2 = \frac{h^{n+2}}{\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \left(\frac{n+2}{2} \cdot \sigma_2\right)^{\frac{n}{2}} e^{-h^2(n+2)\sigma_2} (n+2) \delta_2.$$

Setzt man aber in 25) für n den Werth $n+2$, so erhält man die soeben abgeleitete Formel, indem $\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)$. Mithin gilt Formel 25) allgemein.

Ist n nur einigermassen gross, so hat man nach der Formel*

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{n}{2} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{45n(n+2)(n+4)}} \dots$$

zur Vereinfachung der Formel 26) für deren ersten, von v_2 unabhängigen Theil sehr nahe

$$\frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{\frac{n}{2}},$$

welcher Ausdruck für $n=16$ etwa 1 Procent, für $n=160$ etwa 1 Promille u. s. f. fehlerhaft ist. Aus 26) wird damit

$$27) \quad \varphi(v_2)_n dv_2 = \sqrt{\frac{n}{\pi}} (1+v_2)^{n-1} e^{-nv_2\left(1+\frac{v_2}{2}\right)} dv_2,$$

und wenn man hierin endlich von der Entwicklung

$$1+v_2 = e^{v_2 - \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{1}{3}v_2^3 \dots}$$

Gebrauch macht, welche für $v_2^2 \ll 1$ giltig ist, so ergibt sich

$$28) \quad \varphi(v_2)_n dv_2 = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-v_2 - (n - \frac{1}{2})v_2^2 + \frac{n-1}{3}v_2^3 \dots} dv_2.$$

Dieser Näherungsausdruck zeigt deutlich, unter welchen Bedingungen man berechtigt ist,

$$29) \quad \varphi(v_2)_n dv_2 = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nv_2^2} dv_2$$

zu setzen. Der Exponent von e heisst nämlich genauer

$$-nv_2^2 \left(1 + \frac{1}{nv_2} - \frac{1}{2n} - \frac{v_2}{3} \dots\right)$$

und zur Anwendbarkeit der Formel 29) gehört mithin, dass [während für $v_2=0$ die Ausdrücke 27) und 29) jedenfalls übereinstimmen] auch für Werthe v_2 von der Ordnung $1:\sqrt{n}$ die Parenthese des Exponenten gleich eins gesetzt werden darf; für grössere v_2 gilt die Formel 29) als dann auch noch, weil dafür übereinstimmend mit der strengeren Formel 27) der geringere Betrag der Exponentialgrösse die Wahrscheinlichkeit $\varphi(v_2)_n$ überhaupt nahezu auf Null reducirt.

Durch einmalige Differentiation nach v_2 findet man leicht, dass nach der strengen Formel 26) der Maximalwerth von $\varphi(v_2)_n$ zu

* Schlämilch, Compendium der höheren Analysis, II, 1866. S. 260.

$$v_2 = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{n}},$$

d. i. nahe $-\frac{1}{2n}$ gehört, während die Näherungsformel 29) $v_2 = 0$ fordert. Beide Maximalwerthe stehen im Verhältniss $1 : \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$.

Durch zweimalige Differentiation nach v_2 findet man ferner aus 26) als Abscissen der Wendepunkte der Curve $\varphi(v_2)_n$:

$$v_2 = -1 + \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \pm \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{7}{4n^2}}, \quad \text{d. i. nahe } \pm \frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{2n} \dots;$$

dagegen liegen die Wendepunkte nach 29) bei $\pm \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Wie die strenge Formel zeigt, sind schon für $n = 2$ beide Wendepunkte reell (Fig. 14).

Um ein Beispiel in Zahlen zu haben, setzen wir $n = 100$ und erhalten dafür nach Formel 27), resp. 29) folgende Werthe von $\varphi(v_2)_{100}$:

	(27).	(29).
$v = 0$	5,64*	5,64
$+ 0,1$	1,94	$\left. \begin{array}{l} 2,08 \\ 2,08 \end{array} \right\}$
$- 0,1$	2,21	
$+ 0,2$	0,11	$\left. \begin{array}{l} 0,10 \\ 0,10 \end{array} \right\}$
$- 0,2$	0,09	
$+ 0,3$	0,0012	$\left. \begin{array}{l} 0,0007 \\ 0,0007 \end{array} \right\}$
$- 0,3$	0,0003	

§ 5. Beliebiges Fehlgesetz; Anzahl n der Beobachtungen sehr gross.

Wir behandeln diesen Fall nach dem Vorgange von Poisson** und Glaisher*** bei einer ähnlichen Untersuchung mit $m = 1$. Die Formeln 4) und 5*) ergeben unter Beachtung der Relation $e^{i\gamma z} = \cos \gamma z + i \sin \gamma z$, dass die Wahrscheinlichkeit $\varphi(\sigma_m)_n \delta_m$ gleich ist dem reellen Theile von

* Der Maximalwerth für $v_2 = -\frac{1}{2n}$ ist 5,67.

** Wahrscheinlichkeitsrechnung, übersetzt von Schnuse, 1841, S. 227 und 475.

*** Philosophical Magazine, Vol. XLIII, 1872, S. 194.

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\int_0^a \psi(\varepsilon) e^{iz\varepsilon^m} d\varepsilon \right)^n \frac{\sin z n \left(\sigma_m + \frac{\delta_m}{2} \right) - \sin z n \left(\sigma_m - \frac{\delta_m}{2} \right)}{z} dz.$$

Setzt man hierin

$$\int_0^a \psi(\varepsilon) \cos z \varepsilon^m d\varepsilon = R \cos r$$

und

$$\int_0^a \psi(\varepsilon) \sin z \varepsilon^m d\varepsilon = R \sin r,$$

so geht die grosse Parenthese in $R e^{ir}$ über, und erhebt man dies zur n^{ten} Potenz und trennt alsdann die reellen und imaginären Theile, so wird

$$30) \quad \varphi(\sigma_m)_n \delta_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R^n \cos r n \frac{\sin z n \left(\sigma_m + \frac{\delta_m}{2} \right) - \sin z n \left(\sigma_m - \frac{\delta_m}{2} \right)}{z} dz.$$

Für R^2 ergibt sich durch Quadriren und Addiren der Werthe von $R \cos r$ und $R \sin r$, sowie nach weiterer Reduction in bekannter Weise

$$31) \quad R^2 = \int_0^a \int_0^a \psi(\varepsilon) \psi(\varepsilon') \cos z(\varepsilon^m - \varepsilon'^m) d\varepsilon d\varepsilon'.$$

Löst man nun in den Ausdrücken für $R \cos r$, $R \sin r$ und R^2 den \cos , resp. \sin in eine Potenzreihe auf, so ergibt sich weiter [mit Benutzung der Formel 1)]

$$32) \quad \begin{aligned} R \cos r &= 1 - \frac{z^2}{2} S_{2m} + \frac{z^4}{24} S_{4m} - \dots, \\ R \sin r &= z S_m - \frac{z^3}{6} S_{3m} + \dots, \\ R^2 &= 1 - A z^2 + B z^4 - C z^6 + \dots, \end{aligned}$$

worin die Coefficienten A , B , $C \dots$ als Quadratsummen folgende positive Werthe haben:

$$\begin{aligned} A &= S_{2m} - S_{2m}^2, \\ B &= \frac{1}{12} (S_{4m} - 4 S_{3m} S_m + 3 S_{2m}^2), \\ C &= \frac{1}{360} (S_{6m} - 6 S_{5m} S_m + 15 S_{4m} S_{2m} - 10 S_{3m}^2). \end{aligned}$$

Indem nun für wirkliche Fehlergesetze $\psi(\varepsilon)$ immer der Gleichung

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{S_{pm}}{(p-1)p S_{(p-2)m}} \right) = 0$$

Genüge geleistet werden wird, so gelten die Reihen 32) für jedes endliche z .*

Der Ausdruck 31) zeigt nun, dass R^2 im Allgemeinen ein echter Bruch und nur für $z=0$ der Einheit gleich ist. Je grösser mithin n angenommen wird, um so kleiner wird R^n im Allgemeinen sein und es werden nur diejenigen R^n in Betracht kommen, welche zu $z=0$ und sehr nahe Null gehören. Es kommt hierbei Nichts darauf an, ob R^2 mit wachsendem z nicht durchaus abnimmt, sondern theilweise vielleicht wieder zunimmt, da das Integral in 30), wenn man die untere Grenze Null durch einen kleinen z -Werth ersetzt, jedenfalls nach bekannten Formeln mit wachsendem n sich dem Grenzwert Null nähert. Für die Geschwindigkeit dieser Annäherung ist von Bedeutung, dass R^2 für $z>0$ nicht wieder einmal sehr nahe gleich Eins wird, was man wohl ohne weitere Untersuchung aus 31) herauslesen darf; ferner, dass R^2 für $z=\infty$ gleich Null wird. Dies erkennt man am bequemsten an $R \sin r$ und $R \cos r$ einzeln. Setzt man in dem Integralausdrucke für $R \sin r$ an Stelle von ε^m die neue Variable t , so ergiebt sich

$$R \sin r = \frac{1}{m} \int_0^{a^m} t^{\frac{1}{m}} \psi\left(\frac{1}{t^m}\right) \frac{\sin z t}{t} dt,$$

und da $\varepsilon \psi(\varepsilon)$ ohne Zweifel immer endlich bleibt, für $\varepsilon=0$ aber Null ist, so ist $\lim_{z \rightarrow \infty} R \sin r = 0$.

In dem Integralausdrucke für $R \cos r$ setzen wir an Stelle von $z \varepsilon^m$ die neue Variable t_1 und erhalten

$$R \cos r = \frac{1}{m z^{\frac{1}{m}}} \int_0^{z a^m} \frac{\psi\left(\sqrt[m]{\frac{t_1}{z}}\right)}{t_1^{1-\frac{1}{m}}} \cos t_1 dt_1.$$

Bedeuten aber p eine ganze Zahl, q einen echten Bruch, derart, dass $z a^m = (p+q) \frac{\pi}{2}$, so zerfällt das letzte Integral in $(p+1)$ Integrale mit den Grenzen $0, \frac{\pi}{2}, 2\frac{\pi}{2}, \dots, p\frac{\pi}{2}, (p+q)\frac{\pi}{2}$, und substituirt man in

* In dem bekannten Poisson'schen Ausnahmefalle, für welchen

$$\psi(\varepsilon) = \frac{2}{\pi(1+\varepsilon^2)}$$

ist, werden die S unendlich und geschieht auch jener Bedingung nicht Genüge. Aber dieser Ausnahmefall entspricht, da eben S unendlich ist, gar keinem that-sächlichen Fehlergesetze.

diesen die resp. neuen Variablen $t_1 = t, t + \frac{\pi}{2}, t + 2 \cdot \frac{\pi}{2}, \dots$, so ergiebt sich

$$R \cos r = \frac{1}{m z^{\frac{1}{m}}} \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\psi\left(\sqrt[m]{\frac{t}{z}}\right)}{t^{1-\frac{1}{m}}} - \frac{\psi\left(\sqrt[m]{\frac{t+\pi}{z}}\right)}{(t+\pi)^{1-\frac{1}{m}}} + \frac{\psi\left(\sqrt[m]{\frac{t+2\pi}{z}}\right)}{(t+2\pi)^{1-\frac{1}{m}}} - \dots \right) \cos t dt \\ & - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\psi\left(\sqrt[m]{\frac{t+\frac{\pi}{2}}{z}}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)^{1-\frac{1}{m}}} - \frac{\psi\left(\sqrt[m]{\frac{t+\frac{3\pi}{2}}{z}}\right)}{\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)^{1-\frac{1}{m}}} + \dots \right) \sin t dt \\ & + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi\left(\sqrt[m]{\frac{t+p\frac{\pi}{2}}{z}}\right)}{\left(t+p\frac{\pi}{2}\right)^{1-\frac{1}{m}}} \cos\left(t+p\frac{\pi}{2}\right) dt \end{aligned} \right\}$$

Wird z unendlich gross, so wird auch p unendlich gross, aber die beiden ersten Reihen von Integralen behalten endliche Werthe, da sie convergiren, sobald $\psi(\varepsilon)$ nur die Eigenschaft hat, von einem gewissen $\varepsilon < a$ nicht mehr zuzunehmen (falls es überhaupt mit wachsendem ε zum Theil zunimmt). Bei Fehlergesetzen wird dies immer zutreffen. Der Werth des dritten Integrals convergirt ebenso, wie die letzten Glieder der erwähnten beiden Reihen mit wachsendem p gegen Null. Da nun der sonach endliche Werth der geschlungenen Parenthese durch $z^{\frac{1}{m}}$ dividirt wird, so ist $\lim_{z \rightarrow \infty} R \cos r = 0$.

Für die nunmehr allein zu berücksichtigenden kleinen z -Werthe ist in gleichgrosser Annäherung

$$R^2 = e^{-A z^2}, \quad r = z S_m.$$

Die genaueren Werthe würden sein, wenn man zugleich auf R^n und r^n übergeht:

$$R^n = e^{-\frac{1}{2} A z^2 n} - \frac{1}{4} (A^2 - 2B) z^4 n - \frac{1}{6} (A^3 - 3AB + 3C) z^6 n \dots$$

$$r^n = z^n S_m - \frac{z^3 n}{6} (S_{3m} - 3S_{2m} S_m + 2S_m^2) \dots$$

Denkt man sich z von Null bis zu einem Werthe z_0 wachsend, für welchen $e^{-\frac{1}{2} A z_0^2 n}$ bereits sehr klein, also $\frac{1}{2} A z_0^2 n$ eine grössere Zahl ist (etwa 6), so muss für diesen Werth z_0 jedes der Glieder mit $z_0^3 n, z_0^4 n, \dots$

in R^n und rn noch hinreichend klein sein, um vernachlässigt werden zu können. Ohne Zweifel hängt dies sehr von der Beschaffenheit des Fehlergesetzes ab. Man hat beispielsweise bei dem Gauss'schen Gesetz für $m=1$

$$R^n = e^{-u_1 + \frac{0,144}{n} u_1^2 + \frac{3,8}{n^2} u_1^3 \dots}, \quad u_1 = 0,285 \frac{z^2 n}{h^2 \pi},$$

$$rn = \frac{z n}{h \sqrt{\pi}} - 0,47 \frac{u_1^{3/2}}{\sqrt{n}} \dots;$$

ferner ist bei demselben Fehlergesetz für $m=2$

$$R^n = e^{-u_2 + \frac{2}{n} u_2^2 - \frac{16}{3n^2} u_2^3 \dots}, \quad u_2 = \frac{z^2 n}{4 h^4},$$

$$rn = \frac{z n}{2 h^2} - \frac{4}{3} \frac{u_2^{3/2}}{\sqrt{n}} \dots.$$

Bei gleichem Grade der Annäherung muss hiernach im zweiten Falle n etwas grösser als im ersten angenommen werden. Ist die Fehlerwahrscheinlichkeit constant, so hat man für $m=1$

$$R^n = e^{-u_1 - \frac{0,2}{n} u_1^2 - \frac{0,076}{n^2} u_1^3 \dots}, \quad u_1 = \frac{a^2 z^2 n}{24},$$

$$rn = \frac{az n}{2} - 0 \frac{u_1^{3/2}}{\sqrt{n}} \dots.$$

Dagegen ist für $m=2$

$$R^n = e^{-u_2 - \frac{0,14}{n} u_2^2 - \frac{0,004}{n^2} u_2^3 \dots}, \quad u_2 = \frac{2 a^4 z^2 n}{45},$$

$$rn = \frac{a^2 z n}{3} - \frac{2,9}{\sqrt{n}} \cdot u_2^{3/2} \dots.$$

Für sich allein geben diese Entwicklungungen wenig Aufschluss über den Grad der Annäherung. Es ist aber früher gezeigt worden, dass $n=100$ für $m=2$ beim Gauss'schen Gesetz schon eine starke Annäherung der Function $\varphi(v_2)$ an das Gauss'sche Fehlergesetz zeigt (was, wie sich finden wird, mit der Zulässigkeit der oben erwähnten Abkürzung von R^n und rn auf je ein Glied zusammenfällt); da nun in den vier speciellen Fällen die Reihen für R^n und rn sich wenigstens nicht sehr erheblich von einander unterscheiden, so kann man wohl erwarten, dass für diese Fälle $n=100$ eine beiläufig gleichstarke Annäherung bietet.

Der Ausdruck 30) geht unter Einführung der vereinfachten Ausdrücke von R^n und rn über in

$$33) \varphi(\sigma_m)_n \delta_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} A z^2 n} \cos z n S_m \frac{\sin z n \left(\sigma_m + \frac{\delta_m}{2} \right) - \sin z n \left(\sigma_m - \frac{\delta_m}{2} \right)}{z} dz,$$

worin die obere Grenze unbedenklich von z_0 bis ∞ ausgedehnt werden konnte, da der dadurch entstehende Fehler wohl noch geringer ist, als der durch Vernachlässigung des strengen Integralwerthes von z_0 bis ∞ . Zerlegt man nun in 33) die Producte $\cos \cdot \sin$ in die Differenz zweier \sin und wendet die Formel

$$\int_0^\infty e^{-\alpha z^2} \frac{\sin \beta z}{z} dz = \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-t^2} dt$$

an, so erhält man nach einfacher Reduction

$$\varphi(\sigma_m)_n \delta_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{n \left(S_m + \sigma_m + \frac{\delta_m}{2} \right)}{\sqrt{2A_n}} + \frac{n \left(S_m - \sigma_m + \frac{\delta_m}{2} \right)}{\sqrt{2A_n}} \right\},$$

$$\frac{n \left(S_m + \sigma_m - \frac{\delta_m}{2} \right)}{\sqrt{2A_n}} + \frac{n \left(S_m - \sigma_m - \frac{\delta_m}{2} \right)}{\sqrt{2A_n}}$$

demnach mit Berücksichtigung des Betrages von δ_m

$$\varphi(\sigma_m)_n \delta_m = \delta_m \sqrt{\frac{n}{2A\pi}} \left\{ e^{-\frac{(S_m + \sigma_m)^2 n}{2A}} + e^{-\frac{(S_m - \sigma_m)^2 n}{2A}} \right\}.$$

Die erste der beiden Exponentialgrößen kann vernachlässigt werden, da sie für jeden Werth von σ_m sehr klein ist. Damit hat man schliesslich unter gleichzeitiger Restitution des Ausdruckes für A

$$34) \quad \varphi(\sigma_m)_n \delta_m = \sqrt{\frac{n}{2\pi(S_{2m} - S_m^2)}} e^{-\frac{n(S_m - \sigma_m)^2}{2(S_{2m} - S_m^2)}} \delta_m.$$

Die Differenzen $(S_m - \sigma_m)$ befolgen hiernach das Gauss'sche Fehlergesetz, wobei die Präcision gleich $\sqrt{\frac{n}{2(S_{2m} - S_m^2)}}$ ist. Es ist ferner also die Wahrscheinlichkeit, dass σ_m zwischen die Grenzen

$$\left(S_m \mp 0,6745 \sqrt{\frac{S_{2m} - S_m^2}{n}} \right)$$

fallen werde, gerade $\frac{1}{2}$.

Bildet man zur Probe das Integral von $\varphi(\sigma_m)_n \delta_m$ für σ_m von Null bis ∞ , wobei $(S_m - \sigma_m)$ von S_m bis $-\infty$ geht, so erhält man zwar nicht genau, aber doch sehr nahe eins, indem der daran fehlende Betrag des Integrals von S_m bis $+\infty$ nur sehr wenig beträgt.

Wenn wir nun in 34) noch die Relationen 6) substituiren, so ist zu bedenken, dass nur sehr kleine $(S_m - \sigma_m)$, also auch nur sehr kleine v_m eine merkliche Wahrscheinlichkeit haben. Man darf daher abgekürzt setzen

$$\sigma_m = S_m (1 + m v_m), \quad \delta_m = m S_m d v_m$$

und erhält damit aus 34)

$$35) \quad \varphi(v_m)_n d v_m = \sqrt{\frac{n m^2 S_m^2}{2 \pi (S_{2m} - S_m^2)}} e^{-\frac{n m^2 S_m^2}{2(S_{2m} - S_m^2)} v_m^2} d v_m;$$

es befolgen hiernach auch die v_m um so genauer das Gauss'sche Gesetz, je grösser n ist. Die Präcision ergiebt sich für dieselben gleich $\sqrt{\frac{n m^2 S_m^2}{2 (S_{2m} - S_m^2)}}$

und die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{2}$, dass $\sqrt[m]{\sigma_m}$ zwischen die Grenzen falle

$$36) \quad \sqrt[m]{S_m} \left(1 \mp 0,6745 \sqrt{\frac{S_{2m} - S_m^2}{n m^2 S_m^2}} \right).$$

Den in der Klammer stehenden Ausdruck mit dem Vorzeichen \mp werden wir, wie früher, kurz v_m nennen.

§ 6. Constante Fehlerwahrscheinlichkeit; n sehr gross.

Hier ist $S_m = \frac{a^m}{m+1}$, womit 36) giebt

$$37) \quad \sqrt[m]{S_m} \left(1 \mp \frac{0,6745}{\sqrt{n(2m+1)}} \right).$$

Zum Vergleiche mit dem Täfelchen I) für $n = 1, 2$ und $m = 1, 2, 3$ führen wir diese Werthe in 37) ein und erhalten damit, correspondirend mit I), folgendes Täfelchen der v_m :

		$n = 1.$	$n = 2.$
I *)	$m = 1$	0,39	0,28
	2	0,30	0,21
	3	0,25	0,18

woraus hervorgeht, dass für kleinere Exponenten m schon wenige Beobachtungen n ausreichen, um Formel 37) anwenden zu dürfen. Die Annäherung ist offenbar hinsichtlich dieser Formel allein eine viel grössere, als hinsichtlich der Function $\varphi(\sigma_m)$, resp. $\varphi(v_m)$ an das Gauss'sche Gesetz.

Die Formel 37) bestätigt nun für viele Beobachtungen, was früher schon für wenige gefunden wurde: Es ist die Wahrscheinlichkeit dass die $\sqrt[m]{\sigma_m}$ mit der $\sqrt[m]{S_m}$ zusammenfallen werde, um so grösser, je grösser der Exponent m angenommen wird.

Wenn nun der wahrscheinliche Beobachtungsfehler unbekannt ist und man will ihn (oder einfacher den Maximalfehler a) aus einem gegebenen σ_m berechnen nach der Formel

$$38) \quad a = \sqrt[m]{(m+1)\sigma_m},$$

welche Formel annimmt, dass σ_m gerade S_m sei, so ist es vortheilhaft, m thunlichst gross anzunehmen. Wie sich aber hierzu die günstigsten Hypothesen über a bei gegebenen ε verhalten, soll weiterhin untersucht werden.

§ 7. Gauss'sches Fehlergesetz; n sehr gross.

Hier ist $S_m = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{h^m \sqrt{\pi}}$ und daher

$$39) \quad S_1 = \frac{1}{h \sqrt{\pi}}; \quad S_m = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \left(\frac{m-1}{2}\right)}{h^m \sqrt{\pi}}, \quad m \text{ ungerade};$$

$$S_{2p} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)}{2p h^{2p}}, \quad m = 2p.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$39^*) \quad S_m = \frac{\alpha}{h^m}, \quad S_{2m} = \frac{\beta}{h^{2m}},$$

so ergibt sich nun anstatt 36)

$$40) \quad \sqrt[m]{S_m} \left(1 \mp 0,6745 \sqrt{\frac{\beta - \alpha^2}{nm^2 \alpha^2}} \right).$$

Um zu sehen, welche Annäherung dieser Ausdruck für kleine n bietet, setzen wir darin $m=1$ bis 3 für $n=1$ und 2 und erhalten damit folgendes, dem Täfelchen II correspondirende Täfelchen der wahrscheinlichen Grenzen ν_m :

II *)			$n=1.$	$n=2.$
$m=1$			0,510	0,360
	2		0,477	0,337
	3		0,497	0,352

Hiernach ist die Annäherung der Formel 40) schon für kleinere n jedenfalls eine bedeutende wie sich ebenfalls bei constanter Fehlerwahrscheinlichkeit fand. Gegen diesen Fall zeigt sich aber der Unterschied, dass die zweiten Fehlerpotenzen die engsten Grenzen $\mp \nu_m$ geben: Es ist die Wahrscheinlichkeit, dass die $\sqrt[m]{\sigma_m}$ mit der $\sqrt[m]{S_m}$ zusammenfallen werde, am grössten für den Exponenten $m=2$. Gauss gab zu diesem Satze, der hier für kleines und grosses n bewiesen ist, die Formel 40) unter Voraussetzung eines grossen n und wandte dieselbe auf $m=1$ bis 6 an. Es bleibt bei Betrachtung der betreffenden

ν_m kein Zweifel, dass mit weiter wachsendem m auch ν_m weiter zunehmen werde; immerhin könnte schliesslich einmal eine Änderung dieser Verhältnisse eintreten. Doch ist dies nicht der Fall, wie sich leicht zeigen lässt. Setzt man nämlich, da es sich nur um grössere m handeln kann, in dem Ausdrucke für S_m näherungsweise, aber doch sehr

nahe richtig $\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) = \sqrt{2\pi} \left(\frac{m+1}{2}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{m+1}{2}}$ (vergl. § 4), so geht 40) über in

$$41) \quad \sqrt[m]{S_m} \left(1 + 0,6745 \sqrt{\frac{1}{n m^2} \left[\sqrt{\frac{e}{2}} \left(\frac{2m+1}{m+1}\right)^m - 1 \right]} \right)$$

und man sieht sofort, dass der Radicand der Quadratwurzel mit wachsendem m immer rascher wächst.

Nach dem Vorhergehenden ist es bei unbekannter Präcision h am vortheilhaftesten, sich des Durchschnitts σ_2 der zweiten Potenzen gegebener Fehler zu bedienen, um h zu berechnen. Man wird, indem man annimmt, es sei σ_2 gerade S_2 , setzen

$$42) \quad h = \frac{1}{\sqrt{2 \sigma_2}}.$$

§ 8. Constante Fehlerwahrscheinlichkeit; verschiedene Hypothesen.

In den bisherigen Betrachtungen wurde, soweit es sich um die Ermittlung des Maximalfehlers a handelte, angenommen, dass ein gegebenes σ_m für S_m genommen werde. Diese Hypothese, dass σ_m gerade S_m sei, ist in der That die praktisch bequemste und allein durchführbare. Aber die beste ist es nicht immer. Darauf wird man schon dadurch aufmerksam, dass bei bekanntem a die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens für $\sigma_m = S_m$ nur ein Maximum bei sehr grossen n ist, nicht aber bei kleinen n .

Um zur besten Hypothese, aus einem bestimmten σ_m a zu berechnen, zu gelangen, differenzieren wir 34) nach a und setzen den Differentialquotienten gleich Null. Je grösser n ist, um so genauer wird

für die beste Hypothese $a = \sqrt[m]{(m+1)\sigma_m}$, mit der früheren Rechnung nach 38) übereinstimmend.

Für kleine m fehlt aber diese Uebereinstimmung. Die Formeln 7) lehren, dass bei $n=1$ am besten $a = \sqrt[m]{\sigma_m}$, d. i. gleich dem einen gegebenen ε zu setzen ist [und hier würde die Formel 38) $a = \varepsilon \sqrt[m]{(m+1)}$ setzen]. Die Formeln 9) bis 11) zeigen ferner, dass bei $n=2$ und $m=1$ bis 3 am besten $a = \sqrt[m]{2 \sigma_m}$, d. i. $\sqrt[m]{\varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m}$ zu nehmen ist (For-

mel 38) würde geben $a = \sqrt[m]{(\varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m) \frac{m+1}{2}}$. Wie nun die Berechnung von a aus σ_m für $n > 2$ nach der besten Hypothese sich gestaltet, lässt sich ohne mühsame Untersuchung nicht angeben. Daher muss man eben im Allgemeinen zur praktisch bequemen Hypothese zurückkehren und nach 38) rechnen.

Immerhin hat diese Formel 38) aber den Mangel, dass sie a kleiner ergeben kann, als den grössten der gegebenen Fehler ε . Nennen wir diesen ε_M , so muss nothwendig $a \geq \varepsilon_M$ gewählt werden. Es zeigt sich nun wieder, dass auch in dieser Beziehung mit wachsendem m die Hypothese 38) günstiger wird. Denn offenbar ist $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{(m+1) \sigma_m} = \varepsilon_M$, indem man zunächst schreiben kann

$$\sqrt[m]{(m+1) \sigma_m} = \varepsilon_M \sqrt[m]{\frac{m+1}{n} \left[1 + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_M} \right)^m + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_M} \right)^m + \dots \right]}$$

und nun erkennt, dass der Factor von ε_M gegen eins convergirt.

Die Annahme $a = \varepsilon_M$ ist hiernach unter den besten Hypothesen zur Berechnung von a aus irgend einem σ_m die vortheilhafteste. Sie ist aber überhaupt die absolut günstigste Hypothese. Denn sie allein giebt für die Wahrscheinlichkeit des Eintretens der wirklich begangenen Fehler $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$, d. h. also für $\frac{1}{a^n}$ ein Maximum.

S 9. Gauss'sches Fehlergesetz; verschiedene Hypothesen.

Die bisherigen Untersuchungen drehten sich auch bei dem Gauss'schen Fehlergesetz, soweit die Berechnung der Präcision h in Frage kam, um die Annahme, dass σ_m mit S_m zusammenfalle. In der That ist diese Hypothese die praktisch bequemste für die Ermittelung von h aus σ_m ; aber sie ist ebenfalls nicht immer die beste Hypothese, was schon der Umstand vermuten lässt, dass nur für grosses n der wahrscheinlichste Werth von σ_m mit S_m zusammenfällt, während er für kleine n nach unseren früheren Entwickelungen von S_m verschieden ist.

Um zur besten Hypothese, aus einem gegebenen σ_m die Präcision h zu berechnen, zu gelangen, hat man, wie früher durch Differentiation von 34) nach h^m , in welche Formel zunächst für S_m und S_{2m} die Werthe nach 39*) einzuführen sind, die Bedingung

$$1 = \frac{n \alpha \sigma_m}{\beta - a^2} h^m \left(\frac{\sigma_m}{\alpha} h^m - 1 \right)$$

und hieraus folgt für h^m mit mehr oder weniger Annäherung an die Strenge

$$43) \quad h^m = \frac{\alpha}{\sigma_m} \left(1 + \frac{\beta - \alpha^2}{\alpha^2 n} \right) \text{ und } h^m = \frac{\alpha}{\sigma_m}.$$

Hiernach wird man in der That am besten thun, sobald n gross ist, ein gegebenes σ_m für S_m zu nehmen und h nach der Formel

$$44) \quad h = \sqrt[m]{\frac{\alpha}{\sigma_m}}$$

zu berechnen. Ist aber n klein, so wird (ausgenommen für den Exponenten $m=2$) die beste Hypothese eine andere:

Die Formeln 15) lassen erkennen, dass bei $n = 1$ statt 44) besser angenommen werden musste

$$45) \quad h = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma_m^2}}}}, \text{ d. i. } \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}}$$

Complicirter werden die Rechnungen zur Ableitung der Ausdrücke für $m \geq 2$ und man sieht sich genöthigt, von der besten Hypothese abzugehen und durchaus Formel 44) anzuwenden. Diese praktisch bequeme Hypothese scheint sich überdies der besten Hypothese rasch zu nähern. Man hat z. B. für den interessantesten Fall $m = 1$

$$\text{bei } n=1 \text{ nach 44) } h = \frac{0,564}{\varepsilon}, \text{ dagegen besser nach 45) } h = \frac{0,707}{\varepsilon};$$

$$\text{,, } n=2 \quad \text{,, } \quad h = \frac{2.0,564}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad \text{,, } \quad \text{,, } \quad \text{,, } \quad 17) \quad h = \frac{2.0,628}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Wenn nun h nach Formel 44) berechnet werden soll und man hat die Wahl des Exponenten m frei, so ist's nach § 7 am vortheilhaftesten, mit den zweiten Potenzen zu rechnen. Hieraus folgt natürlich noch gar nicht, dass diese Rechnung die absolut günstigste Hypothese über h ergiebt; denn sobald die n Beobachtungsfehler ε einzeln bekannt sind, könnte ja auch eine andere Function der ε , als gerade ein σ_m , zur genannten Hypothese führen. Nun, bekanntlich ist von Gauss gezeigt worden, dass der Durchschnitt der zweiten Potenzen zur absolut günstigsten Hypothese führt, weil dafür die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens der gegebenen ε ein Maximum wird.

§ 10. Gauss'sches Fehlergesetz; wahrscheinlicher Fehler der Hypothesen.

Die Untersuchungen des § 7 lassen nur im Allgemeinen den relativen Werth der Berechnung von h aus verschiedenen σ_m nach Formel 44) erkennen. Es ist erwünscht, den wahrscheinlichen Fehler dieser Hypothesen zu erfahren. Nach 34) ist aber mit Rücksicht auf 39*) die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese über h proportional

$$h^m e^{-\frac{n(\alpha - h^m \sigma_m)^2}{2(\beta - \alpha^2)}}$$

Bezeichnen wir nun den nach 43) berechneten h -Werth mit H und setzen im Allgemeinen $h = H + \lambda$, so giebt der vorige Ausdruck mit Weglassung der von λ unabhängigen Theile

$$46) \quad \left(1 + \frac{\lambda}{H}\right)^m e^{-\frac{n\alpha^2}{2(\beta-\alpha^2)} \left(\frac{\sigma_m}{\alpha} (H+\lambda)^m - 1\right)^2}.$$

Da nun hier ein grosses n Voraussetzung ist, so haben nur sehr kleine λ eine in Betracht kommende Wahrscheinlichkeit; man hat daher in zureichender Näherung

$$\left(1 + \frac{\lambda}{H}\right)^m = e^{\frac{m\lambda}{H} - \frac{m\lambda^2}{2H^2}},$$

ferner unter Substitution des ersten der Ausdrücke 43)

$$\frac{\sigma_m}{\alpha} (H+\lambda)^m = 1 + \frac{m\lambda}{H} + \frac{m(m-1)\lambda^2}{2H^2} + \frac{\beta - \alpha^2}{\alpha^2 n}$$

und daraus in gleicher Annäherung

$$\left(\frac{\sigma_m}{\alpha} (H+\lambda)^m - 1\right)^2 = \frac{m^2\lambda^2}{H^2} + 2\frac{\beta - \alpha^2}{\alpha^2 n} \left(\frac{m\lambda}{H} + \frac{m(m-1)\lambda^2}{2H^2}\right).$$

Damit geht 46) über in

$$e^{-\frac{n m^2 \alpha^2}{2 H^2 (\beta - \alpha^2)} \lambda^2 - \frac{m^2 \lambda^2}{2 H^2}},$$

hierin darf man aber den zweiten Theil des Exponenten noch gegen den ersten vernachlässigen. Jetzt findet man ohne Weiteres als Wahrscheinlichkeit, dass der richtige Werth von h zwischen $(H+\lambda)$ und $(H+\lambda+d\lambda)$ fällt, den Werth

$$47) \quad \frac{K}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{n m^2 \alpha^2}{2 H^2 (\beta - \alpha^2)} \lambda^2} d\lambda,$$

$$K = \sqrt{\pi} \cdot \int_{-H}^{\infty} e^{-\frac{n m^2 \alpha^2}{2 H^2 (\beta - \alpha^2)} \lambda^2} d\lambda = \sqrt{\frac{n m^2 \alpha^2}{2 H^2 (\beta - \alpha^2)}}.$$

Der letzte Ausdruck für K ist unter der hier sehr unerheblichen Vernachlässigung berechnet, dass die untere Integralgrenze $-H$ auf $-\infty$ ausgedehnt wurde. Ein Blick auf 47) zeigt K in der Bedeutung als Präcision, welche zu den Abweichungen λ gehört, und somit ist die Wahrscheinlichkeit gerade $\frac{1}{2}$, dass der richtige Werth von h zwischen die Grenzen falle

$$48) \quad \sqrt{\frac{\alpha}{\sigma_m}} \left(1 \mp 0,6745 \sqrt{\frac{\beta - \alpha^2}{n m^2 \alpha^2}}\right).$$

Soweit es die Parenthese angeht, stimmt 48) mit 40) überein. Beziiglich der Bedeutung von 48) darf nicht unbetont bleiben, dass sie ein gegebenes σ_m voraussetzt, aus welchem die Präcision berechnet wird, und dass dabei die Werthe der Beobachtungsfehler ε im Einzelnen unbeachtet bleiben, wie es ja eigentlich der Fall ist. Würde man mittelst der Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der n Beobachtungsfehler einen dem 48) entsprechenden Ausdruck ermitteln, so würde dieser eine andere Gestalt annehmen; er würde aber (wie mir scheint) keinen

praktischen Werth haben. Uebrigens gehen für σ_2 beide Ausdrücke ineinander über. 48) giebt alsdann

$$\sqrt{\frac{1}{2\sigma_2}} \left(1 \mp \frac{0,4769}{\sqrt{n}} \right)$$

übereinstimmend mit den von Gauss über die absolut günstige Hypothese gegebenen wahrscheinlichen Grenzen.

Um noch zu sehen, wie sich 48) für kleine n verhält, betrachten wir den Fall $n=1$ im Anschluss an die Formeln 15). Die Wahrscheinlichkeit der Hypothese h bei gegebenem σ_m ist hier proportional

$$h e^{-h^2 \sigma_m^2}$$

und daher die Wahrscheinlichkeit, dass die Präcision zwischen h und $h+dh$ liegt, gleich

$$K h e^{-h^2 \sigma_m^2} dh,$$

$$K = 1 : \int_0^\infty h e^{-h^2 \sigma_m^2} dh = 2 \sigma_m^2.$$

Die Wahrscheinlichkeit ist ferner gerade $\frac{1}{2}$, dass der richtige Werth von h zwischen die Grenzen

$$49) \quad \sqrt{\frac{\alpha}{\sigma_m}} \left(1 \mp \nu'_m \right)$$

falle, wobei, wie leicht zu finden ist, ν'_m der Bedingung Genüge zu leisten hat:

$$50) \quad e^{-\alpha^2 (1-\nu'_m)^2} - e^{-\alpha^2 (1+\nu'_m)^2} = \frac{1}{2}.$$

Hieraus hat man folgende Werthe, denen wir die entsprechenden nach 48) an die Seite stellen:

III)	m.	Werth ν'_m		Werth $\nu'_m \sqrt{\alpha} \sqrt{2}$	
		nach 50).	nach 48).	nach 50).	nach 48).
					3.
	1	0,589	0,510	0,470	0,407
	2	0,446	0,477	0,440	0,477
	3	0,382	0,497	0,446	0,580

Die Colonnen 3 und 4 enthalten die Werthe ν'_m , multipliziert mit einer Grösse, welche dem Werthe von h , wie er aus 48) folgt, proportional ist, wobei zu beachten, dass im vorliegenden Falle die $\sqrt{\sigma_m} = \varepsilon$ wird

und daher die h -Werthe nur noch von den α abhängen. Während so-
nach für $n=1$ die mittelst verschiedener Exponenten m berechneten
 h -Werthe in einem von ϵ unabhängigen Verhältnisse stehen, ist für $n>1$
dies nicht mehr der Fall und auch das Verhältniss allgemein nicht mehr
angebbar. Im Allgemeinen wird man daher die Güte der Bestimmung
von h nach den ν_m beurtheilen, dagegen im besondern Falle $n=1$ noch
auf das angegebene Verhältniss der h -Werthe Rücksicht nehmen (wie in
Col. 3 geschehen). Vergleichbar sind nach meiner Ansicht überdies die
entsprechenden Werthe der Colonnen 3 und 2 (nicht 4, welche nur der
Vollständigkeit halber beigefügt ist); man darf darnach wohl eine rasche
Annäherung von 48) an die Strenge mit wachsendem n erwarten.

Bemerkung.

Herr Mees hat S. 126 fig. des XXI. Bandes dieser Zeitschrift auf meine Aeu-
serung S. 300, XX über seinen früheren Aufsatz geantwortet. Dieser Antwort gegen-
über genügt es, wiederum auf meine ebenerwähnte Aeußerung hinzuweisen und
Herrn Mees daran zu erinnern, dass ich selbst in meinem Buche auf eine gewisse
Unvollständigkeit eines Beweises aufmerksam mache, mir also die Priorität
einer „Warnung“ verbleibt. Zu den Mängeln meines Buches rechne ich selbst-
verständlich die betreffende Stelle nicht — indem ich nämlich aus praktischen
Gründen der jüngern Gauss'schen Darstellung der Ausgleichungsrechnung im
Wesentlichen folgte, musste ich nothwendig auch deren Lücken in Kauf nehmen,
die selbst durch lange Untersuchungen nicht vollständig ausfüllbar sind, aber doch
Erwähnung verdienen, und zwar auch in einem Lehrbuche. Gestattet eine nur
auf das Gauss'sche Fehlergesetz gebaute Ausgleichungstheorie gerade in dem
streitigen Punkte auch eine weit befriedigendere Lösung, so verbleiben doch auch
einer solchen Theorie noch Lücken genug, um im Hinblick auf den weit compli-
cirteren mathematischen Apparat und die engeren Grenzen der Giltigkeit derselben
nicht der andern Darstellungsweise den Vorzug geben zu können.

HELMERT.

Kleinere Mittheilungen.

XIII. Die Bewegung materieller Punkte auf vorgeschriebenen beweglichen Bahnen.

§ 1.

Denkt man sich mit der Bahn B (einer Fläche F oder Curve C) des materiellen Punktes P , dessen Masse stets als Einheit genommen werden soll, ein rechtwinkliges System (S) oder (x, y, z) fest verbunden, so wird jeder Bewegung von B eine Bewegung von (S) entsprechen und umgekehrt. Die unendliche Mannichfaltigkeit der möglichen Bewegungen von B wird der unendlichen Mannichfaltigkeit der Bewegungen von (S) äquivalent sein. Es wird mithin die Bewegung von B eine völlig willkürliche genannt werden dürfen, sobald man (S) völlig freie Beweglichkeit gegeben hat.

Dies aber wird erreicht, wenn man einstheils dem Anfangspunkte O' des Systems (S) jede mögliche Bewegung gestattet, anderntheils jede mögliche Rotation von (S) um O' zulässt. — Hat nun O' , bezogen auf ein festes rechtwinkliges System (S) oder (x, y, z) , die Coordinaten x_1, y_1, z_1 , denkt man sich ferner durch O' zu irgend einer Zeit t ein dem (S) paralleles System (Σ) oder (ξ, η, ζ) gelegt, so wird jede mögliche Bewegung von (S) , also auch von B berücksichtigt sein, wenn man einstheils die Grössen x_1, y_1, z_1 beliebige Functionen der Zeit sein lässt, anderntheils das System (S) auf das System (Σ) durch die bekannten Transformationsformeln, als welche hier die Euler'schen benutzt werden sollen, so bezieht, dass man die darin vorkommenden Winkel ψ, ϑ, φ willkürliche Functionen der Zeit sein lässt. — Hier bedeutet ψ den Winkel, welchen der Grundschnitt der xy -Ebene in der $\xi\eta$ -Ebene mit der ξ -Axe bildet, ϑ den Neigungswinkel der Ebene xy zur Ebene $\xi\eta$, φ den Winkel, welchen die Axe der x mit jenem Grundschnitt einschliesst. Man kann jene Formeln auch für $\vartheta = 0$ beibehalten; sie stimmen dann mit den Formeln der ebenen Geometrie überein, wenn man nur noch dem ψ das entgegengesetzte Vorzeichen giebt, was nach der Ableitungs-

art (Leroy, Analyt. Geometrie des Raumes, übers. v. Kauffmann, § 89 Anm.) selbstverständlich ist.

Man bewahrt also die volle Allgemeinheit, wenn man die Coordinaten x, y, z von P durch folgende Gleichungen definiert:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) + a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ y &= \psi(t) + a_2 x + b_2 y + c_2 z, \\ z &= \chi(t) + a_3 x + b_3 y + c_3 z, \end{aligned}$$

wo die a, b, c die Coefficienten der Euler'schen Formeln sind und x, y, z noch den Gleichungen der Bahn B , bezogen auf (S) , zu genügen haben.

§ 2.

Von den mechanischen Principien hat nur das d'Alembert'sche Geltung. Es ist vortheilhaft, die zweite der von Lagrange gegebenen Formen dieses Princips anzuwenden. Zu diesem Behufe sind für x, y, z independente Coordinaten q einzuführen, an Anzahl 2, wenn B eine Fläche, 1, wenn B eine Curve ist. Dann wird die Lage von P bestimmt durch Gleichungen von folgender Form:

$$\begin{aligned} x &= A_1(t, q_1, q_2), \\ y &= A_2(t, q_1, q_2), \\ z &= A_3(t, q_1, q_2). \end{aligned}$$

Bildet man nun den Ausdruck für die lebendige Kraft, führt die in der Lagrange'schen Formel vorgeschriebenen Differentiationen aus, setzt, wie üblich, $\frac{\partial U}{\partial q} = Q$, so entsteht nach einigen Vereinfachungen die folgende erste Bewegungsgleichung, der die andere ganz analog ist:

$$q''_1 \left(\frac{\partial A}{\partial q_1} \right)^2 + q''_2 \frac{\partial A}{\partial q_1} \frac{\partial A}{\partial q_2} + q'_1 \frac{\partial A}{\partial q_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial A}{\partial q_1} + \frac{\partial A}{\partial q_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial A}{\partial q_1} + q'_2 \frac{\partial A}{\partial q_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial A}{\partial q_2} - Q_1 = 0.$$

Hier ist, wie auch im Folgenden stets, durch die Accente die Differentiation nach der Zeit, durch das Zeichen $=$ aber, statt des Gleichheitszeichens, das nur durch ein A ohne Index angedeutete Vorkommen dreigliedriger Summen links bezeichnet.

Für die Integration der Bewegungsgleichungen ist es von Wichtigkeit, die Fälle kennen zu lernen, in welchen diese Gleichungen linear sind und in welchen sie t nicht explicite enthalten.

§ 3.

Damit q''_1, q''_2, q'_1, q'_2 in den Bewegungsgleichungen nicht vorkommen, müssen folgende sechs Gleichungen erfüllt sein:

$$1) \quad \Sigma \frac{\partial A}{\partial q_1} \frac{\partial^2 A}{\partial q_1^2} = 0, \quad 2) \quad \Sigma \frac{\partial A}{\partial q_1} \frac{\partial^2 A}{\partial q_2^2} = 0, \quad 3) \quad \Sigma \frac{\partial A}{\partial q_1} \frac{\partial^2 A}{\partial q_1 \partial q_2} = 0,$$

$$1*) \quad \Sigma \frac{\partial A}{\partial q_2} \frac{\partial^2 A}{\partial q_2^2} = 0, \quad 2*) \quad \Sigma \frac{\partial A}{\partial q_2} \frac{\partial^2 A}{\partial q_1^2} = 0, \quad 3*) \quad \Sigma \frac{\partial A}{\partial q_2} \frac{\partial^2 A}{\partial q_1 \partial q_2} = 0,$$

wo die Summation über die A zu erstrecken ist. — Mit Berücksichtigung der zwischen den a, b, c des § 1 bestehenden Beziehungen lassen sich diese Bedingungen durch die folgenden ersetzen:

$$\begin{array}{ll} 1) \quad \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 \text{ darf kein } q_1, & 1*) \quad \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial q_2} \right)^2 \text{ kein } q_2 \text{ enthalten,} \\ 2) \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial^2 x}{\partial q_2^2} = 0, & 2*) \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} = 0, \\ 3) \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} = 0, & 3*) \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} = 0. \end{array}$$

Hier repräsentirt x die x, y, z .

Von algebraischen Functionen kann diesen Bedingungen nur genügt werden durch die Form

$$x = \lambda q_1 + \mu q_2 + \nu,$$

wo λ, μ, ν beliebige Constante sind. Hierdurch wird, wie nach Elimination der, resp. des q ersichtlich ist, die Bahn als eine Ebene oder eine Gerade qualificirt.

Sonst wird den Bedingungen nur noch genügt, wenn x, y, z die folgende Form haben:

$$\begin{aligned} x &= k \cos(\lambda q_1 + \mu q_2 + \nu) + k_1, \\ y &= k \sin(\lambda q_1 + \mu q_2 + \nu) + k_2, \\ z &= \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma, \end{aligned}$$

oder sich durch Transformation auf diese Form bringen lassen. Die $k, \lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma$ sind wieder Constante. Hierdurch aber wird die Bahn von P entweder als die Fläche eines Kreiscylinders oder als eine auf einer solchen verzeichnete Curve definiert.

Man hat mithin folgendes Resultat:

Die Bewegungsgleichungen sind linear, wenn die Bahn des Punktes P eine Gerade oder eine Ebene, oder die Fläche eines Kreiscylinders oder eine auf einer solchen Fläche verzeichnete Curve ist.

Es hängt also nur von den geometrischen Eigenschaften der Bahn ab, ob die Gleichungen zu den linearen gehören oder nicht.

§ 4.

Es ist ferner für die Integration der Bewegungsgleichungen von Wichtigkeit, die Fälle auszusondern, wo die Zeit nicht explicite in diesen Gleichungen erscheint. Damit nun zunächst t nicht in den \mathfrak{Q} stehe, werden die Kraftcomponenten X, Y, Z sowohl von t , als den q frei sein müssen. Dann wird

$$\mathfrak{Q} = X \frac{\partial A_1}{\partial q} + Y \frac{\partial A_2}{\partial q} + Z \frac{\partial A_3}{\partial q},$$

wo t nur noch in den Derivirten $\frac{\partial A}{\partial q}$ stehen könnte.

Dies aber findet zunächst dann nicht statt, wenn jedes A in zwei additive Theile α und a derart zerfällt, dass α nur t , a nur die q enthält. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann t nur noch vorkommen in

$$\Sigma \frac{\partial A}{\partial q} d \frac{\partial A}{\partial t},$$

was nach unserer Annahme übergeht in

$$\Sigma \frac{\partial a}{\partial q} \frac{d^2 \alpha}{dt^2}.$$

Dieses Glied aber ist dann von t frei, wenn die α algebraische Functionen von t , aber von keinem höheren als dem zweiten Grade sind. Nun sind die α mit den Functionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ des § 1 zu identificiren und man erhält folgendes Resultat:

Die Zeit kommt dann nicht explicite in den Bewegungsgleichungen vor, wenn der Punkt P von constanten Kräften beeinflusst wird und die Bahn B eine ausschliesslich translatorische Bewegung hat, die mit constanter Beschleunigung — welche auch Null sein kann — erfolgt.

Gleichzeitig sieht man, dass, wenn die Beschleunigung, mit der B fortschreitet, Null, also die Geschwindigkeit constant ist, diese letztere Constante gar nicht in die Bewegungsgleichungen eintritt, also auf die relative Bewegung von P ohne Einfluss ist.

Bei einer nicht ausschliesslich translatorischen Bewegung von B enthalten zwar ebenfalls die α kein q , aber die a sowohl die q , als auch t . — Schliesst man nun den Fall aus, dass X , Y , Z gleichzeitig Null sind, so wird die Bedingung dafür, dass die \mathfrak{Q} t nicht explicite enthalten, entweder die sein, dass die eine der Kraftkomponenten, z. B. X , verschwindet, während $\frac{\partial A_2}{\partial q}$ und $\frac{\partial A_3}{\partial q}$ kein t enthalten, oder die, dass zwei Kraftkomponenten, z. B. X und Y , Null werden, während $\frac{\partial A_3}{\partial q}$ von t frei ist.

Da aber im ersten Falle t sofort in $\left(\frac{\partial A_1}{\partial q}\right)^2$ auftritt, so ist nur der zweite in Betracht zu ziehen. In diesem letzteren sind, da

$$A_3 = \chi(t) + \zeta$$

und ζ von t frei ist, alle um O möglichen Rotationen der Bahn B oder des Systems (\mathfrak{S}) auf solche um die ζ -Axe eingeschränkt. Lässt man

nun die ζ -Axe mit dieser und folglich die Ebene der xy mit der Ebene der $\xi\eta$ zusammenfallen, so ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$x = A_1 = \varphi(t) + x \cos \psi - y \sin \psi,$$

$$y = A_2 = \psi(t) + x \sin \psi + y \cos \psi,$$

$$z = A_3 = \chi(t) + \zeta.$$

Weiter ergibt sich, dass nunmehr

$$\Sigma \frac{\partial A}{\partial q_1} \frac{\partial A}{\partial q_2} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \frac{\partial z}{\partial q_2}$$

t nicht explicite enthält, während

$$\Sigma \frac{\partial A}{\partial q} \frac{d}{dt} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial q} [\varphi''(t) \cos \psi + \psi''(t) \sin \psi] + \frac{\partial y}{\partial q} [\psi''(t) \cos \psi - \varphi''(t) \sin \psi]$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial q} \chi''(t) - \frac{\partial x}{\partial q} [x \psi'^2 + y \psi' + y \psi''] + \frac{\partial y}{\partial q} [x \psi' + x \psi'' - y \psi'^2]$$

wird.

Damit hier t nicht erscheine, ist zunächst nothwendig, dass ψ' eine Constante ω , ferner, dass $\chi(t)$ eine algebraische Function von t und von keinem höheren als dem zweiten Grade sei. Endlich aber müssen die Ausdrücke

$$\varphi''(t) \cos \psi + \psi''(t) \sin \psi \text{ und } \psi''(t) \cos \psi - \varphi''(t) \sin \psi$$

von t frei sein. Diese Ausdrücke gehen durch $\varphi(t) = k \cos \lambda$ und $\psi(t) = k \sin \lambda$ über in

$$\cos(\lambda - \psi) [k'' - k \lambda'^2] - \sin(\lambda - \psi) [k \lambda'' + 2k \lambda']$$

$$\cos(\lambda - \psi) [k \lambda'' + 2k \lambda'] + \sin(\lambda - \psi) [k'' - k \lambda'^2].$$

Enthält hier $(\lambda - \psi)$ die Zeit explicite, so muss für unsern Fall

$$k \lambda'' + 2k \lambda' = 0 \text{ und } k'' - k \lambda'^2 = 0$$

sein. Dadurch wird eine gewisse Curve (α) definiert, welche die Bahn von O' , resp. die Projection dieser Bahn in die Ebene der xy darstellt.

Unterscheidet sich hingegen λ von ψ nur um eine Constante — die man dann auch gleich Null supponiren darf —, so hat man nur noch dem k einen constanten Werth beizulegen, um zu bewirken, dass in den obigen Ausdrücken t nicht steht.

Es zeigt sich nun auch leicht, dass unter diesen Voraussetzungen t auch in den übrigen Gliedern der Bewegungsgleichungen nicht explicite vorkommt. Wir haben also folgendes Resultat:

Von den nicht ausschliesslich translatorischen Bewegungen der Bahn B ist, mit der Ausnahme (α), die Rotation mit constanter Winkelgeschwindigkeit um eine feste Axe, längs welcher allein Kräfte wirken dürfen, eine Rotation, mit welcher ein constant beschleunigtes Fortschreiten in der Richtung jener Axe verbunden sein kann, die einzige,

unter deren Voraussetzung t nicht explicite in den Bewegungsgleichungen erscheint.

Somit ist die Art der Probleme, bei welchen die Hauptschwierigkeit bei der Integration der Bewegungsgleichungen, das explicite Vorkommen der Zeit in denselben, nicht vorhanden ist, völlig bestimmt. Es kommt hierbei also nur auf die mechanischen Eigenschaften des Systems an.

Minden i. Westf.

R. MISCHER, Gymnasiallehrer.

XIV. Zur Definition des bestimmten Integrals durch den Grenzwerth einer Summe

bemerkt Herr P. du Bois-Reymond mit Recht, dass in dem Riemann-Dirichlet'schen Beweise, den ich in meine Schrift „Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale“, Halle, bei L. Nebert, aufgenommen habe, der Nachweis fehlt, dass man nicht blos dann, wenn man die Zerlegung des Intervalles dadurch immer weiter treibt, dass man die Theile einer vorhandenen Theilung wieder theilt, und so fort, sondern auch dann, wenn man die Theile in beliebiger Weise kleiner werden lässt, z. B. indem man das Intervall in gleiche Theile theilt und für die Theilungszahl grösse und grössere Primzahlen nimmt, in welchem Falle kein Theilpunkt einer späteren Theilung mit der früheren zusammenfällt — einen und denselben Grenzwerth der Summe erhalte. Es ist hierzu nöthig, das Resultat für eine beliebige Theilung mit dem für eine specielle, z. B. für die durch fortgesetztes Halbiren entstandene zu vergleichen. Da für das einfache Integral ein von diesem Mangel freier Beweis durch Herrn du Bois-Reymond bereits vorhanden ist, derselbe Vorwurf aber auch den Existenzbeweis des Doppelintegrals trifft, so will ich hier den letzteren ergänzen. Dabei bediene ich mich zur Darstellung von Zahlengebieten zweier Veränderlichen der bekannten graphischen Terminologie, bei welcher x, y rechtwinklige Coordinaten einer Ebene sind.

Die Definition des Doppelintegrals habe ich in meiner Schrift so ausgesprochen:

Zerlegt man [ein Gebiet T der xy -Ebene (welches der Einfachheit wegen zusammenhängend und einfach-zusammenhängend angenommen werden mag) in n Theile $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, Flächenelemente genannt, welche der Bedingung unterworfen sind, in allen ihren Ausdehnungen und also auch ihrem Flächeninhalte nach kleiner als eine bestimmte vorgegebene Grösse ω zu sein, und ist die obere Grenze einer in T gegebenen Function $f(x, y)$ G_μ in τ_μ , die untere g_μ , und ist ξ_μ eine zwischen 0 und 1 gelegene Zahl, so versteht man unter dem über das Gebiet T ausgedehnten Integral

$$\int f(x, y) dT$$

den Grenzwerth, den man erhält, wenn in dem Ausdrucke

$$\sum_{1(\mu)}^n \tau_\mu [g_\mu + \xi_\mu (G_\mu - g_\mu)],$$

in dem die τ alle kleiner als ω sind, ω der Grenze Null zustrebt.

Dieser Grenzwerth hat aber dann einen Sinn, wenn die kritische Summe

$$\sum_{1(\mu)}^n \tau_\mu (G_\mu - g_\mu)$$

mit abnehmenden ω der Grenze Null zustrebt.

Zuerst zeigen wir dies für den Fall, in welchem das Kleinerwerden dadurch bewirkt wird, dass eine vorhandene Theilung $\tau_1^1, \tau_2^1, \dots, \tau_{n^1}^1$, in welcher die Theile kleiner als ω_1 sind, dadurch abgeändert wird, dass die τ^1 auf dieselbe Weise in Elemente zerlegt werden, welche kleiner als ω_2 sind. Die neuen Theile $\tau_1^2, \tau_2^2, \dots, \tau_{n^2}^2$ sind dann so beschaffen, dass die Begrenzungen der $\tau_1^1, \tau_2^1, \dots$ sämmtlich einen Theil der Begrenzungen von $\tau_1^2, \tau_2^2, \dots$ bilden, aber nicht umgekehrt. So fährt man fort. Ist nun, wenn μ den Summationsbuchstaben bedeutet,

$$\sum \tau^1 \mu G^1 \mu = A_1, \sum \tau^2 \mu G^2 \mu = A_2, \dots, \sum \tau^\nu \mu G^\nu \mu = A_\nu, \dots,$$

$$\sum \tau^1 \mu g^1 \mu = B_1, \sum \tau^2 \mu g^2 \mu = B_2, \dots, \sum \tau^\nu \mu g^\nu \mu = B_\nu, \dots,$$

so beweist man in derselben Weise, wie es beim einfachen Integral geschieht, dass A_1, A_2, \dots eine abnehmende (wenigstens nicht zunehmende), B_1, B_2, \dots eine zunehmende (wenigstens nicht abnehmende) Zahlenreihe bilden, und dass $A_\nu \geq B_\nu$ ist, woraus einmal folgt, dass beide Grössen einer bestimmten endlichen Grenze A , bez. B zustreben, und dann noch, weil $A_\nu - B_\nu$ der kritischen, der Voraussetzung nach mit wachsendem ν verschwindenden Summe gleich ist, dass $A = B$ sein muss. Da $A_{\nu+1} \leq A_\nu, B_{\nu+1} \geq B_\nu$ sein muss, so kann man ν so gross annehmen oder, mit anderen Worten, die Theilung so weit treiben, dass, wie nun auch die τ^ν in $\tau^{\nu+1}$ getheilt werden, oder wie auch die Theilung weiter getrieben wird, A_ν, B_ν von A beliebig wenig verschieden sind.

Da aber

$$\sum_\mu \{\tau^\nu \mu g^\nu \mu + \xi^\nu \mu (G^\nu \mu - g^\nu \mu)\} = B_\nu + \xi (A_\nu - B_\nu)$$

zwischen A_ν und B_ν liegt, so nähert sich dieser Ausdruck ebenfalls A , oder der Grenzwerth ist von der Wahl der $\xi^\nu \mu$ unabhängig.

Nun ist zunächst zu erweisen, dass derselbe Grenzwerth erhalten wird, wenn man eine andere Theilung von T , zuerst in $t_1^1, t_2^1, t_3^1, \dots$, dann in $t_1^2, t_2^2, t_3^2, \dots$ unter derselben Bedingung als vorhin vornimmt, ob dann

$$\sum t_\mu [g_\mu + \xi_\mu (G_\mu - g_\mu)] \text{ oder, was hinreicht, } \sum t_\mu G_\mu$$

demselben Grenzwerth A zustrebt. Angenommen dieser Grenzwerth sei A' , und

$$\Sigma \tau^\nu G^\nu_\mu = A_\nu, \quad \Sigma \tau^\lambda G^\lambda_\mu = A'_\lambda,$$

so kann man ν, λ so gross annehmen, dass $A_\nu = A + \xi\sigma$, $A'_\lambda = A' + \xi'\sigma$ ist, wenn σ beliebig klein vorgegeben wird, und ξ, ξ' zwischen Null und Eins liegen.

Legt man nun die zu τ^ν und τ^λ gehörigen Theilungsnetze gleichzeitig auf T und bezeichnet (irgendwie gezählt) die hierdurch entstehenden, vollständig durch Theile des Netzes τ^ν und des Netzes τ^λ begrenzten Elemente mit t_1, t_2, t_3, \dots , so ist

$$\Sigma t_\mu G_\mu = S$$

sowohl kleiner oder gleich $A + \xi\sigma$, als auch kleiner oder gleich $A' + \xi'\sigma$, und sowohl grösser als A , als auch grösser als A' , weil die t_1, t_2, \dots als eine weitere Theilung der τ^ν ebenso wie der τ^λ angesehen werden können. Also ist

$$A + \xi\sigma \geq S \geq A, \quad A' + \xi'\sigma \geq S \geq A'.$$

Da also sich A und A' von S um weniger als σ unterscheiden können, so können sich A und A' nur um weniger als 2σ unterscheiden; sie müssen also, da σ beliebig klein angenommen werden kann, gleich sein.

Nun muss noch gezeigt werden, dass auch bei beliebiger Abnahme der τ derselbe Grenzwerth erreicht wird.

Es sei

$$\Sigma t^\mu G^\nu_\mu = A_\nu = A + \xi\sigma$$

und die Theilung so weit getrieben oder ν so gross genommen, dass, wenn σ eine beliebig kleine vorgegebene Grösse bedeutet, ξ zwischen 0 und 1 liegt. Hierauf werde die beliebige Theilung τ zugleich mit t auf T gelegt. Dann kann man die Theilung τ so weit treiben, dass der Flächeninhalt der Summe aller derjenigen τ , durch welche irgend ein Theil der Begrenzung der t hindurchgeht oder sie auch nur berührt, kleiner als $\sigma \cdot M$ wird, wenn M die obere Grenze des absoluten Betrages der Werthe von $f(x, y)$ in T ist; denn man kann offenbar diesen Flächeninhalt beliebig klein machen. Der Beitrag, den die Elemente τ , welche Begrenzungstücke von t enthalten, zur Gesamtsumme

$$\Sigma \tau_\mu G_\mu$$

liefern, ist dann, absolut genommen, kleiner als σ .

Legt man beide Theilungen übereinander, so erhält man eine Theilung t und es ist

$$\Sigma t_\mu G_\mu = A_\nu - \xi'\sigma = A + (\xi - \xi')\sigma, \quad (0 \leq \xi' \leq \xi \leq 1),$$

weil die Theilung t als eine weitere Theilung der t angesehen werden kann. Der Beitrag aller Flächentheile t , welche Begrenzungstücke von t enthalten, ist, absolut genommen, jedenfalls kleiner als σ . Folglich ist der Beitrag der Theile τ , die keine Begrenzung von t enthalten, mindestens gleich $A + (\xi - \xi')\sigma - \sigma$, höchstens gleich $A + (\xi - \xi')\sigma + \sigma$, und

nimmt man die Theile τ hinzu, welche Begrenzungsstücke von t enthalten, deren Beitrag zwischen $-\sigma$ und $+\sigma$ liegt, so ist die Gesamtsumme mindestens gleich $A - 3\sigma$, höchstens gleich $A + 2\sigma$ und, da σ beliebig klein angenommen werden kann, die Grenze derselben gleich A , w. z. b. w.

Auf die von Herrn du Bois-Reymond in dieser Zeitschrift über meine „Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale“ veröffentlichte Kritik will ich nicht eingehen, obgleich ich in vielen Punkten nicht damit übereinstimmen kann. Das dort gegebene Beispiel eines (wie es dort genannt wird) bedingt convergenten Integrals, dessen Element sein Zeichen nicht unendlich oft wechsele, ist verdrückt.

Freiburg i. B., October 1875.

J. THOMAE.

XV. Ueber eine zahlentheoretische Spielerei.

Die Herstellung solcher Kärtchen, wie sie Herr Prof. Cantor auf S. 134 der hist.-literar. Abtheilung des vorigen Jahrganges beschreibt, wurde bereits im Jahre 1859 den Secundanern des hiesigen Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums bei Gelegenheit der geometrischen Reihen gezeigt. Herr Prof. Schellbach ging nämlich von der Identität aus

$$\frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \cdot \frac{1-x^{16}}{1-x^8} \cdot \frac{1-x^{32}}{1-x^{16}} = \frac{1-x^{32}}{1-x},$$

woraus sich ergiebt

$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}) = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^{31}$, und zeigte so, dass sich die Zahlen von 1 bis 31 sämmtlich durch die Potenzen $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ und 2^4 darstellen lassen, da ja auf der linken Seite nur diese Potenzen von 2 als Exponenten des x auftreten, rechts aber als solche alle ganzen Zahlen bis 31. Er fügte hinzu, dass ein Kaufmann mit 5 Gewichtsstücken alle Gewichte von 1 bis 31 wiegen könne.

Ebenso ergiebt sich die Darstellung aller Zahlen von 1 bis 63 durch $2^0, 2^1, \dots, 2^5$, die aller Zahlen von 1 bis 127 durch $2^0, 2^1, \dots, 2^6$, d. h. mit Hilfe von 7 Kärtchen lassen sich alle ganzen Zahlen von 1 bis 127 errathen u. s. f. Allgemein giebt die Gleichung

$$\prod_{r=0}^{r=n} (1+x^{2^r}) = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=2^{n+1}-1} x^\varrho$$

sofort das Bildungsgesetz solcher Kärtchen. Es kommt z. B. 2^r in allen Zahlen von den Formen $2^{r+1} \cdot n + 2^r, 2^{r+1} \cdot n + 2^r + 1$ bis $2^{r+1} \cdot n + 2^{r+1} - 1$ vor.

Eine zweite Sorte von Kärtchen ist die umstehende; sie ist, wie man leicht sieht, analog aus den Potenzen von 3 gebildet. Hier muss man aber den Betreffenden, dem die Kärtchen hingehalten werden, fragen, ob die gedachte Zahl schwach oder stark gedruckt ist. Im erstenen Falle nimmt man die der Karte entsprechende Potenz von 3 mit positivem, im andern Falle mit negativem Vorzeichen. Z. B. $49 = +3^4 - 3^3 - 3^2$

$+3^1 + 3^0$. Der Beweis, dass sich alle Zahlen 1, 2 bis $\frac{1}{2}(3^n+1-1)$ durch die positiv oder negativ genommenen Potenzen $3^0, 3^1$ bis 3^n darstellen lassen, ergiebt sich aus der Identität

$$\frac{1-x^3}{1-x} \cdot \frac{1-x^9}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^{27}}{1-x^9} \cdots \frac{1-x^{3^{n+1}}}{1-x^{3^n}} = \frac{1-x^{3^{n+1}}}{1-x}.$$

Aus dieser folgt nämlich

$$(1+x+x^2)(1+x^3+x^6)(1+x^9+x^{18}) \cdots (1+x^{3^n}+x^{2 \cdot 3^n}) = 1+x+x^2+\cdots+x^{3^n},$$

und wenn man beiderseits durch $x^{\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)}$ dividirt,

$$(x^{-1}+1+x^1)(x^{-3}+1+x^3)(x^{-9}+1+x^9) \cdots (x^{-3^n}+1+x^{3^n}) \\ = x^{-\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)} + \cdots + x^{-2} + x^{-1} + 1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)}.$$

Also haben wir für unsere Karten ($n=4$)

$$(x^{-1}+1+x^1)(x^{-3}+1+x^3)(x^{-9}+1+x^9)(x^{-27}+1+x^{27})(x^{-81}+1+x^{81}) \\ = x^{-121} + x^{-120} + \cdots + x^{-2} + x^{-1} + 1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{120} + x^{121},$$

d. h. die Darstellung aller Zahlen von 1 bis 121 durch die positiv oder negativ genommenen Potenzen $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4$.

I.	II.	III.	IV.	V.
1 32 62 92	2 32 61 93	5 35 64 93	14 35 55 102	41 62 82 102
2 34 64 94	3 33 65 94	6 36 65 94	15 36 56 103	42 63 83 103
4 35 65 95	4 34 66 95	7 37 66 95	16 37 57 104	43 64 84 104
5 37 67 97	5 38 67 96	8 38 67 96	17 38 58 105	44 65 85 105
7 38 68 98	6 39 68 97	9 39 68 97	18 39 59 106	45 66 86 106
8 40 70 100	7 40 69 101	10 40 69 98	19 40 60 107	46 67 87 107
10 41 71 101	11 41 70 102	11 41 70 99	20 41 61 108	47 68 88 108
11 43 73 103	12 42 74 103	12 42 71 100	21 42 62 109	48 69 89 109
13 44 74 104	13 43 75 104	13 43 72 101	22 43 63 110	49 70 90 110
14 46 76 106	14 47 76 105	14 44 73 102	23 44 64 111	50 71 91 111
16 47 77 107	15 48 77 106	15 45 74 103	24 45 65 112	51 72 92 112
17 49 79 109	16 49 78 110	16 46 75 113	25 46 66 113	52 73 93 113
19 50 80 110	20 50 79 111	17 47 76 114	26 47 67 114	53 74 94 114
20 52 82 112	21 51 83 112	18 48 86 115	27 48 95 115	54 75 95 115
22 53 83 113	22 52 84 113	19 49 87 116	28 49 96 116	55 76 96 116
23 55 85 115	23 56 85 114	20 59 88 117	29 50 97 117	56 77 97 117
25 56 86 116	24 57 86 115	21 60 89 118	30 51 98 118	57 78 98 118
26 58 88 118	25 58 87 119	22 61 90 119	31 52 99 119	58 79 99 119
28 59 89 119	29 59 88 120	32 62 91 120	32 53 100 120	59 80 100 120
29 61 91 121	30 60 92 121	33 63 92 121	33 54 101 121	60 81 101 121
31	31	34	34	61

Aus der allgemeinen Gleichung

$$\prod_{v=0}^{v=n} (x^{-3^v} + 1 + x^{3^v}) = \sum_{\varrho = -\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)}^{\varrho = \frac{1}{2}(3^{n+1}-1)} x^\varrho$$

ergiebt sich, dass z. B. $+3^r$ auftritt in allen Zahlen von den Formen $3^{r+1} \cdot n + \frac{1}{2}(3^r+1), 3^{r+1} \cdot n + \frac{1}{2}(3^r+1)+1$ bis $3^{r+1} \cdot n + \frac{1}{2}(3^r+1)-1$, und -3^r in denen von den Formen $3^{r+1} \cdot n - \frac{1}{2}(3^r+1), 3^{r+1} \cdot n - \frac{1}{2}(3^r+1)-1$ bis $3^{r+1} \cdot n - \frac{1}{2}(3^r+1)$.

Berlin.

Dr. FELIX MÜLLER.

Anzeige.

Cartonmodelle der Poinsot'schen Vielflache, vier weitere regelmässige Körper, nämlich das zwanzigeckige Sternzwölfflach, das zwölfeckige Sternzwölfflach, das sterneckige Zwanzigflach und das sterneckige Zwölfflach. Durchmesser 18 Cm. Preis 50 Mk. Angefertigt von M. Doll, Lehrer am Polytechnikum in Carlsruhe in Baden.

Bestellungen sind zu richten an

B. G. Teubner in Leipzig.

In der Nicolaischen Verlags-Buchhandlung in Berlin erschien soeben:

Bremiker's

Sechsstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln.

Mit Rücksicht auf den Schulgebrauch bearbeitet. 4. Auflage. 4,20 Mk.

Durch geringeren Zeitaufwand und grösserer Sicherheit im Rechnen gewinnen Bremiker's 6 stellige Logarithmen in neuerer Zeit vor allen anderen Tafeln den Vorzug. „Der Grosse Generalstab der Preuss. Armee“ hat dieselben ebenfalls in Gebrauch genommen, desgl. viele grössere Lehranstalten, technische Institute etc. — Eine englische Ausgabe ist erschienen. Die Ausgaben in russischer und italienischer Sprache werden vorbereitet.

Verlag von Louis Nebert in Halle a. S.

Soeben erschien:

Sammlung von Formeln

welche bei Anwendung

der elliptischen und Rosenhain'schen Functionen

gebraucht werden

von

Prof. Dr. Thomae.

gr. Quart. geh. 3 Mark.

Im Verlag von W. Spemann in Stuttgart erschien soeben:

Erweiterung

der

Gauss'schen Theorie

der

Verschlingungen

mit

Anwendung in der Elektrodynamik

von

Dr. Otto Böddicker.

8. Mit zahlreichen Illustrationen. Preis M. 5. 50.

I N H A L T.

VIII. Ueber die Bewegung eines Punktes auf einer Kugel unter Einwirkung von Kräften in einer Meridianebene mit dem Potential $Ax_1^2+Bx_2^2+Bx_3^2$. Von Dr. JOHANNES EDUARD BÖTTCHER, Oberlehrer an der Realschule I. Ordn. in Leipzig. (Hierzu Taf. III, Fig. 1—4)	145
IX. Ueber aufsteigende Kettenbrüche. Von Dr. S. GÜNTHER, Privatdocent am Polytechnikum in München	178
X. Ueber die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit im Zusammenhange stehende Fragen. Von Prof. HELMERT am Polytechnikum in Aachen. (Hierzu Taf. IV, Fig. 1—18.)	192

Kleinere Mittheilungen.

XIII. Die Bewegung materieller Punkte auf vorgeschriebenen beweglichen Bahnen. Von R. MISCHER, Gymnasiallehrer in Minden i. Westf.	219
XIV. Zur Definition des bestimmten Integrals durch den Grenzwert einer Summe. Von J. THOMAE in Freiburg i. B.	224
XV. Ueber eine zahlentheoretische Spielerei. Von Dr. FELIX MÜLLER in Berlin	227

Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt). Mathematisch-historische Miscellen. Von Dr. SIEGMUND GÜNTHER in München

Recensionen:

SUTER, Dr. HEINRICH, Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Von Dr. S. GÜNTHER in München	65
HULTZSCH, FRIDERICUS, <i>Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt.</i> Von CANTOR	70
NÄRE, Dr. F., Einleitung in die theoretische Mechanik. Von Dr. TH. KÖTTERITZSCH	80

Bibliographie vom 1. Februar bis 31. März 1876:

Periodische Schriften	83
Reine Mathematik	8
Angewandte Mathematik	84
Physik und Meteorologie	84