VIII.

Ueber die Bewegung eines Punktes auf einer Kugel unter Einwirkung von Kräften in einer Meridianebene mit dem Potential $Ax_1^2 + Bx_2^2 + Bx_3^2$.

Von

Dr. Johannes Eduard Böttcher,

Oberlehrer a. d. Realschule I. Ordn. in Leipzig.

(Hierzu Taf. III, Fig. 1—4.)

In der Vorlesung Winter 1869/70 des Herrn Geheimrath Professor Richelot über Dynamik wies an einer Stelle dieser mein auf's Tiefste verehrter Lehrer, der mittlerweile, nämlich am 1. April d. J., aus dem Leben geschieden ist, auf ein anziehendes analytisch-mechanisches Problem hin, das „ebenso verdiente durchgeführt zu werden — mit Hilfe der elliptischen Functionen — als das des sphärischen Pendels". Es ist das in 3. genannte.* Zwar nicht dieses Problem in seiner Allgemeinheit, von welchem einen speciellen Fall C. G. J. Jacobi selbst behandelt hat (vgl. unter 4), sondern ein anderer besonderer Fall des in 3. genannten Problems bildet den Gegenstand vorliegender Arbeit.

Aus welchem Grunde ich deren ursprünglichen Titel: Ueber die Bewegung eines Punktes auf einer rotirenden homogenen Kugel, die ihn anzieht, abgeändert habe, findet in 5. sich angedeutet.

I. Die Aufgabe. Ihre Zurückführung auf Quadraturen.

1. Eine Gattung integrabler Probleme.

Verhältnissmässig gering ist die Anzahl derjenigen analytisch-mechanischen Probleme, die bisher auf Quadraturen sich haben zurückbringen lassen. Und unter ihnen wieder konnte die Mehrzahl nicht eher zum letzten Ziele hindurch geführt werden, nämlich zur Darstellung der Coordinaten durch die Zeit, als für die Integrale der nächsthöheren Stufe nach den logarithmischen und cyclometrischen das entscheidende Hilfsmittel dargeboten war in C. G. J. Jacobi's Θ-Functionen.

* Er brachte dasselbe auf Quadraturen und zeigte die eine Eigenschaft, die Vermeidung des Pols.

Auf eine umfassende Gattung integrabler Probleme ist von dem Ebengenannten hingewiesen worden.

Damit nämlich aus dem Gleichungs-Systeme für die Bewegung auf einer Oberfläche:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x_1}{dt^2} &= X_1 + \lambda\frac{\partial L}{\partial x_1}\\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= X_2 + \lambda\frac{\partial L}{\partial x_2}\\ \frac{d^2x_3}{dt^2} &= X_3 + \lambda\frac{\partial L}{\partial x_3}\end{aligned}\right\}$$

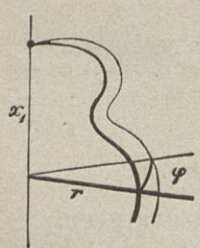
sich für den Ausdruck

$$dT = \Sigma X\,dx + \lambda\,dL$$

ein exactes Differential ergebe, ist auch ohne Annahme einer Kräftefunction die Bedingung nothwendig und hinreichend, dass

$$\begin{aligned}&\frac{dL}{dx_1}\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right)\\ +&\frac{dL}{dx_2}\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3}\right)\\ +&\frac{dL}{dx_3}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right) \equiv 0\end{aligned}$$

sei. Diese Bedingung aber ist u. A. jederzeit dann identisch erfüllt, wenn die Fläche eine Rotationsfläche ist, und die Kräfte nur in der Meridianebene wirken:



$$\begin{aligned}x_1 &= x_1,\\ x_2 &= r\cos\varphi,\\ x_3 &= r\sin\varphi;\\ L &= L(x_1, r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0;\\ X_1 &= X_1(x_1, r),\\ X_2 &= R\,.\,\frac{x_2}{r},\\ X_3 &= R\,.\,\frac{x_3}{r}; \quad R = R(x_1, r).\end{aligned}$$

Beim Einsetzen dieser Werthe ergiebt sich das identische Verschwinden des obigen Ausdruckes. Man bekommt nun mit Hilfe der Lagrange-schen Transformation

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x'_1 &= X_1 + \lambda\frac{\partial L}{\partial x_1},\\ \frac{d}{dt}r' &= r\varphi'\varphi' + R + \lambda\frac{\partial L}{\partial r},\\ \frac{d}{dt}r^2\varphi' &= 0;\end{aligned}$$

und indem man das sich bietende Flächenintegral

$$r^2\varphi' = C_1^2$$

sofort weiter benutzt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x_1}{dt^2} &= \qquad X_1 + \lambda\frac{\partial L}{\partial x_1}\\ \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{C_1^4}{r^3} + R + \lambda\frac{\partial L}{\partial r}\end{aligned}\right\}.$$

Diese Gleichungen aber lassen den Satz erkennen:

Jedes Problem, mit oder ohne Kräftefunction, bei welchem

die Fläche eine Rotationsfläche ist, und

die Kräfte nur in der Meridianebene wirken,

ist integrabel.

Denn nach Einführung einer einzigen neuen Variabeln ξ, welche die Bedingungsgleichung identisch erfüllt:

$$x_1 = F_1(\xi), \quad r = F_2(\xi), \quad L(\xi) \equiv 0$$

erhält man

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\,d\,(x'_1x'_1 + r'r') &= \left(X_1 \qquad + \lambda\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)dx_1\\ &\quad + \left(\frac{C_1^4}{r^3} + R + \lambda\frac{\partial L}{\partial r}\right)dr\\ &= \Xi\, d\xi,\\ \tfrac{1}{2}\frac{dx_1^2 + dr^2}{dt^2} &= \int \Xi\, d\xi.\end{aligned}$$

Und hierdurch ist die Aufgabe zurückgeführt auf eine

Quadratur für t und eine

Quadratur für φ. Es wird

$$t = \int \frac{d\xi}{\sqrt{\dfrac{2\int \Xi\, d\xi}{(F_1'\xi)^2 + (F_2'\xi)^2}}};$$

$$d\varphi = \frac{C_1^2\,dt}{r^2};$$

$$\varphi = \int \frac{C_1^2}{(F_2\xi)^2}\,\frac{d\xi}{\sqrt{\text{uts}}}.$$

2. Erweiterung.

Prof. Richelot fügt hinzu: Das Problem bleibe auch dann lösbar, wenn die gegebene Rotationsfläche nicht festliegt, sondern eine constante Rotationsgeschwindigkeit um die Rotationsaxe besitzt. Man habe dann* nur überall ein von der Centrifugalkraft herrührendes Glied anzufügen, nämlich

* Nach Vorgange Jacobi's bei Gelegenheit der Anziehung nach festen Centren (Vorl. üb. Dynamik S. 223 flgg.).

$$\text{an Stelle von } R \ldots R + \frac{v^2}{r} \text{ oder } R + r\omega^2$$

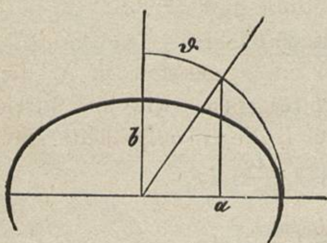
zu setzen, wo unter v die Linien-, unter ω die Winkelgeschwindigkeit verstanden ist, ohne dass an der Analysis etwas geändert werde.

3. Ein Einzelproblem dieser Gattung.

Als Beispiel führte Prof. Richelot folgendes Problem vor: Ein Punkt bewege sich auf der Oberfläche eines Rotationsellipsoides, ähnlich unserer Erde,

dasselbe rotire gleichförmig um die Axe,

und die wirkende Kraft sei eine Newton'sche Attraction des Ellipsoides selbst, also es sei



die Fläche: $\frac{x_1^2}{b^2} + \frac{r^2}{a^2} - 1 = 0$;

die Kräfte: $X_1 = -mx_1$,

$R = -nx$; diese vermehrt um $r\omega_1^2$: $R + r\omega^2 = r(-n + \omega^2)$;

so dass eine Kräftefunction, die zur Lösbarkeit nicht erfordert würde, hier in der That vorhanden ist:

$$U = \frac{-mx_1^2}{2} + \frac{-n+\omega^2}{2} r^2;$$

und zur identischen Erfüllung der Bedingungsgleichung sei

$$x_1 = b \cos \vartheta$$
$$r = a \sin \vartheta.$$

Die Aufgabe führt zu dem Ergebnisse, dass, wenn

$$\sin^2\vartheta \ldots \xi$$

und eine zweite Integrationsconstante (die der lebendigen Kraft) C_2^2 genannt wird,

$$t = \int \frac{d\xi\,(\overline{b^2 - a^2}\,\xi + a^2)}{2\sqrt{b^2-a^2}\sqrt{\left(\xi - \frac{a^2}{a^2-b^2}\right)(1-\xi)\left(-\frac{C_1^4}{a^2} + (-mb^2+C_2^2)\,\xi + (\overline{-n+\omega}^2\,a^2 + mb^2)\,\xi^2\right)}}$$

Hierin sind die Fälle

$$b \lesseqgtr a,$$

des abgeplatteten, des gestreckten Ellipsoides, zu unterscheiden.

Eine der wichtigsten allgemein giltigen Bemerkungen über dieses Integral ist die folgende. Da das Problem ein mechanisches ist, so darf t, die Zeit, niemals imaginär werden; demnach der Radicand der Wurzel im Nenner nie negativ. Nun aber würde für

$$\xi = 0$$

dieser Radicand $= -\frac{C_1^4}{a^2}$, also, von $C_1^2 = 0$ abgesehen, negativ werden.

Dies liefert ohne Weiteres den weittragenden Satz:

Das Mobil kann im Allgemeinen den Pol nicht erreichen.

4. Besondere Probleme, in dem genannten enthalten.

Man kann, um das erhaltene Integral, das elliptisch ist, zu vereinfachen, verschiedene beschränkende Annahmen machen. Nachstehende Tafel giebt Uebersicht darüber, welcher Stufe die dann sich bietenden Integrale angehören. Man bekommt bei der Bewegung

	auf Rotations-Ellipsoid	auf einer Kugel ($a=b$)
mit Meridiankräften X und R mit $r\omega^2$	elliptische	elliptische
" " ohne "	elliptische	cyclometrische
ohne Meridiankräfte ($m=n=0$) mit $r\omega^2$	elliptische	elliptische
" " ohne "	elliptische	cyclometrische

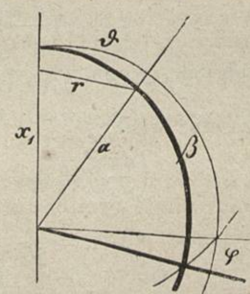
Integrale. Insbesondere liefert der Fall

$$m = n = 0 \quad \text{(keine Attraction) und}$$
$$\omega = 0 \quad \text{(keine Rotation)}$$

immer noch ein elliptisches Integral. Und zwar müssten u. A. die Formeln für die geodätische Linie sich ergeben, wie sie durch C. G. J. Jacobi hergeleitet und durch Prof. Luther mitgetheilt sind Crelle'sches Journal Bd LIII, S. 335 und S. 342.

5. Die zu behandelnde Aufgabe.

Ich stelle mir die Aufgabe: die Bewegung eines Punktes zu bestimmen auf der Oberfläche einer homogenen Kugel unter Einfluss einer Attraction der Kugel selbst und einer gleichförmigen Rotation, oder — ohne physikalische Deutung — die Bewegung dann zu bestimmen, wenn



$$\left.\begin{aligned}
&\text{die Fläche } L = 0 = x^2 + r^2 - a^2,\\
&\text{die Kräfte } X = -A\frac{x}{a},\\
&R = -A\frac{r}{a} + r\omega^2\\
&\text{die Kräftefunction also}\\
&U = \frac{-A}{2a}x^2 + \frac{-A + a\omega^2}{2a}r^2
\end{aligned}\right\}$$

ist.

Hierin bedeutet a den Kugelradius; und wenn ferner als Aequator die Hauptkreisebene bezeichnet wird, zu welcher die Kraftcomponente $r\omega^2$ parallel gerichtet ist, so ist x der Abstand des Mobils von der Aequatorebene, r derjenige von der Axe oder der Parallelkreisradius.

Weiter giebt $-A$ diejenige Beschleunigung an, welche die Newton'sche Attraction für sich allein auf der Kugeloberfläche dem Mobil ertheilen würde.

Der physikalischen Deutung der obigen Gleichungen steht im Wege, dass bei Annahme einer Reibung zwischen dem Massenpunkte und der Kugeloberfläche zu der Componente der Centrifugalkraft noch eine weitere Tangentialkraft hinzutreten würde; andererseits, wenn keine Reibung stattfindet, die rotirende Kugel überhaupt nur eine radial gerichtete Kraft auf das Mobil ausüben könnte und demnach unter demselben weggleiten würde. Daher bedeuten die obigen Gleichungen nichts Anderes, als diejenigen für die Bewegung eines Massenpunktes, der gezwungen ist, auf einer Kugeloberfläche zu bleiben und unter dem Einflusse einer Kräftefunction von der Form

$$A x_1^2 + B(x_2^2 + x_3^2)$$

steht.

Die Bewegungsgleichungen werden nach dem Vorigen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \qquad -A\frac{x}{a} + \lambda\frac{x}{a}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{C_1^4}{r^3} - A\frac{r}{a} + \lambda\frac{x}{a},$$

worin unter C_1^2 die von der ersten Integration herrührende Flächenconstante verstanden ist, und geben nach Einführung von

$$x = a\cos\vartheta$$

$$r = a\sin\vartheta$$

und Integration

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = -\frac{C_1^4}{a^4\sin^2\vartheta} - \frac{A}{a} + \omega^2\sin^2\vartheta + \frac{C_2^2}{a^2},$$

folglich, wenn wie vorher

$$\sin^2\vartheta = \xi$$

gesetzt wird,

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = 4\omega^2(1-\xi)\left(-\frac{C_1^4}{a^4\omega^2} - \frac{Aa - C_2^2}{a^2\omega^2}\xi + \xi^2\right),$$

$$t = \frac{1}{2\omega}\int\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi}\sqrt{-\frac{C_1^4}{a^4\omega^2} - \frac{Aa - C_2^2}{a^2\omega^2}\xi + \xi^2}};$$

und da ferner

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = C_1^2,$$

so wird

$$\varphi = \int\frac{C_1^2}{r^2}dt.$$

II. Allgemein giltige Bemerkungen. Zwei besondere Fälle.

Der allgemeinen Weiterbehandlung dieses Integrals mögen Bemerkungen, die schon vor der Reduction auf die Normalform sich darbieten, sowie um späterer Vergleichung willen die Durchführung zweier Grenzfälle vorangehen.

6. Erreichen des Pols. Gang auf Meridian; auf Parallelkreis.

Vor Allem ist auch für hier zu wiederholen, dass in

$$t = \frac{1}{2\omega}\int \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi}\sqrt{-\frac{C_1^4}{a^4\omega^2} - \frac{Aa - C_2^2}{a^2\omega^2}\xi + \xi^2}}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = 2\omega \cdot \sqrt{1-\xi}\sqrt{\text{,,}}$$

der Radicand nie negativ werden darf, ξ also im Allgemeinen nicht $= 0$, so dass das Mobil

im Allgemeinen nicht in den Pol gelangt.

(Vergl. S. 148.)

Da der Radicand zwar nicht < 0, wohl aber $= 0$ werden darf, so ist der einzige Fall, in welchem ein Verschwinden von ξ in der That möglich ist, der, dass gleichzeitig auch

$$C_1^2, \text{ d. i. } r^2 \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\equiv r_0^2 \varphi'_0 = 0.$$

Dies kann auf zweierlei Weise geschehen.

Erstens, wenn $\varphi'_0 = 0$. Das bedeutet: Das Mobil kann den Pol in dem Falle erreichen, dass seine Geschwindigkeit zu Anfang (zu irgend einer Zeit) ganz in die Meridianebene fiel.

Zweitens, wenn $r_0 = 0$, wenn das Mobil schon anfangs im Pole sich befand. Dieser Fall ist im vorigen enthalten; denn von dem Pole als Anfangsorte aus fällt eine jede Anfangsgeschwindigkeit in einen Meridian hinein.

Eine Bewegung ausschliesslich auf einem Meridiane, so dass

$$\frac{d\varphi}{dt} \equiv 0$$

bleibt, tritt immer dann und nur dann ein, wenn

$$\varphi'_0 = 0:$$

Wenn das Mobil zu irgend einer Zeit ein Stück längs eines Meridians gegangen ist, so verlässt es denselben nie wieder.

Es ist ferner zu fragen, unter welchen Umständen identisch

$$\frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \xi = Const.$$

sein, das Mobil also auf einem Parallelkreise umlaufen kann. Dies findet nun statt,

erstens, wenn

$$\xi = Const. = 1;$$

dazu ist erforderlich, dass

$$\xi_0 = 1 \text{ und}$$
$$\xi'_0 = 0,$$

oder dass das Mobil anfangs auf dem Aequator war und nur eine Geschwindigkeit in dessen Ebene besass. Also auch für den Aequator gilt der Satz:

Wenn das Mobil zu irgend einer Zeit ein Stück entlang desselben gegangen ist, so bleibt es in ihm, wie schon die symmetrische Lage der Halbkugeln an die Hand giebt. Es ist dann

$$\frac{d\varphi}{dt} = Const. = \varphi'_0,$$

d. h. der Aequator wird gleichförmig durchlaufen (nicht so der Meridian [vergl. 7]).

Zweitens, wenn

$$\left.\begin{array}{ll} \xi = Const. = 0 \\ C_1^2 \qquad = 0 \end{array}\right\},$$

und gleichzeitig

also wenn

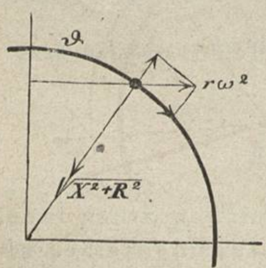
$\xi_0 = 0$, oder das Mobil anfangs im Pole sich befand,

und $\xi'_0 = 0$, wenn es keine meridionale,

d. h. überhaupt keine Geschwindigkeit hatte. Es bleibt dann im Pole ruhend.

Dass dagegen die beiden Werthe von ξ, für welche ausserdem noch der Radicand verschwindet, auf keine Parallelkreisbewegung führen, wird später sich zeigen.

Ebensowenig kann an anderem Orte als im Pole oder auf dem Aequator das Mobil ruhen. Denn während die blosse Attractionskraft $\sqrt{X^2 + R^2}$ hier immer normal zur Fläche gerichtet ist, liefert die Beschleunigung $r\omega^2$ zwei Componenten, eine normale oder radiale, welche als Minderung des Druckes sich äussert, und eine längs des Meridians. Diese letztere



$$r\omega^2 \cos\vartheta,$$

welche für $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ oder $\vartheta = \frac{3\pi}{4}$ ihren höchsten Betrag erreicht, treibt das Mobil dem Aequator zu.

Somit ist gefunden worden:

1. Das Mobil kann im Pole ruhen;
2. „ „ „ auf einem Meridiane gehen;
3. „ „ „ sonst niemals in den Pol kommen;
4. „ „ „ auf dem Aequator gehen (mit constanter Geschwindigkeit), insbesondere ruhen;
5. „ „ „ nicht auf einem andern Parallelkreise gehen;

6. Das Mobil kann nicht an einem Orte ausser Pol oder Aequator ruhen.*

7. Andere Form der Gleichung. Erster specieller Fall: Bewegung auf Meridian.

Die beiden in die Gleichung für t eingegangenen Constanten, nämlich

die Flächenconstante C_1^2 und
die der lebendigen Kraft C_2^2

lassen sich durch andere, mit mechanischer Bedeutung, ersetzen. Es wird

$$C_1^2 = r_0^2 \varphi'_0 = a^2 \sin^2 \vartheta_0 \varphi'_0$$

$$\begin{aligned} C_2^2 &= a^2 \vartheta'_0 \vartheta'_0 + \frac{C_1^4}{a^2 \sin^2 \vartheta_0} + A a - \omega^2 a^2 \sin^2 \vartheta_0 \\ &= a^2 \vartheta'_0 \vartheta'_0 + a^2 \sin^2 \vartheta_0 \varphi'_0 \varphi'_0 + A a - \omega^2 a^2 \sin^2 \vartheta_0 . \end{aligned}$$

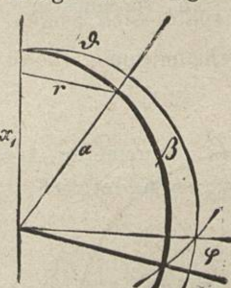
Ihre Einsetzung liefert

$$\sin^2 \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$$

$$= \omega^2 \left(- \frac{\varphi'_0 \varphi'_0 \sin^4 \vartheta_0}{\omega^2} + \frac{\vartheta'_0 \vartheta'_0 + (\varphi'_0 \varphi'_0 - \omega^2) \sin^2 \vartheta_0}{\omega^2} \sin^2 \vartheta + \sin^4 \vartheta\right).$$

Hieraus ist die Constante A der Attraction ganz herausgegangen, wie nöthig. Denn die Resultante der anziehenden Kräfte X und R allein wird normal zur Oberfläche.

Gleicherweise ist die Gleichung von der Länge des Kugelradius unabhängig geworden.



Führe ich nun ferner

$\sin \vartheta$	$\cos \beta$
$\sin^2 \vartheta$ oder $\cos^2 \beta$	ξ

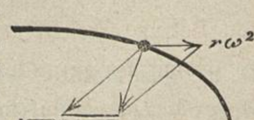
ein, so wird

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = 4\,\omega^2 (1 - \xi)(P + Q\xi + \xi^2),$$

worin

---

* Für ein Rotationsellipsoid behalten Nr. 1 bis 4, Nr. 5 und 6 dagegen verlieren die Giltigkeit. Insbesondere ist beim Rotationsellipsoid die Resultante von X und R im Allgemeinen nicht normal zur Fläche gerichtet. Nimmt man vielmehr den Anfangsort beliebig, die Anfangsgeschwindigkeit $= 0$ und sieht (was wenigstens so lange statthaft ist, als das Mobil in relativer Ruhe bleibt) $r\omega^2$ als eine Centrifugalkraft an, herrührend von einer Rotation um die Axe: so kann es hier geschehen, dass die Resultante der Attraction und der Centrifugalkraft normal zur Fläche wird, die tangentiale Componente in der Meridianebene also null, so dass das Mobil keinen Antrieb nach dem Aequator hin erfährt.



Dies wird vor Allem dann der Fall sein, wenn die jetzt vorhandene constante Rotationsgeschwindigkeit dieselbe ist, wie die, unter deren Einflusse etwa das Ellipsoid früher (in flüssigem Zustande) seine Gestalt angenommen hat.

$$\begin{array}{c|c} P & -\dfrac{\varphi'_0\varphi'_0 \cos^4\beta_0}{\varphi^2} \\ Q & \dfrac{\beta'_0\beta'_0 + (\varphi'_0\varphi'_0 - \omega^2)\cos\beta_0}{\omega^2}. \end{array}$$ —

Der erste zu behandelnde Specialfall sei die als möglich erkannte Bewegung auf einem Meridiane; dann, wenn

$$\varphi'_0 = 0.$$

In diesem Falle wird

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = \beta'_0\beta'_0 - \omega^2(\sin^2\beta - \sin^2\beta_0),$$

und es ist zunächst zu entscheiden, ob das Mobil auf dem Meridiane hin- und herpendelt, oder rundumläuft. Dazu ist zu fragen, ob immer ein reeller Winkel

$$\beta_1 = Max\,\beta$$

sich angeben lasse. Nun kann der aus der Forderung

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = 0$$

sich ergebende Werth

$$\sin^2\beta_1 = \frac{\beta'_0\beta'_0}{\omega^2} + \sin^2\beta_0$$

nie negativ, wohl aber ein unechter Bruch werden. Soll indess β_1 reell sein, so muss er

$$\leqq 1$$

bleiben, mithin

$$\frac{\beta'_0}{\cos\beta_0} \leqq \omega.$$

Behufs bequemerer Aussprache in Worten multiplicire ich beiderseits mit r_0, so findet sich

$$\beta'_0 \frac{r_0}{\cos\beta_0}$$

$$\text{oder } a\beta'_0 \leqq r_0\omega,$$

und nimmt man für den Augenblick als Anfangsort den Punkt des Uebergangs über den Aequator, den einzigen, der auf alle Fälle erreicht wird, so geht die Ungleichung über in

$$a\,.\,\beta'_0 \leqq a\,\omega$$
$$\beta'_0 \leqq \omega.$$

D. h.: das Mobil

$$\left.\begin{array}{l}\text{oscillirt quer über den} \\ \text{Aequator} \\ \text{läuft rundum}\end{array}\right\} \text{je nachdem die Winkelgeschwindigkeit beim Ueberschreiten des Aequators} \left\{\begin{array}{c} < \\ \\ > \end{array}\right\} \omega.$$

8. Erster Specialfall. Fortsetzung.

Im Falle der Oscillation auf dem Meridiane nehme ich in der Gleichung

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = \beta'_0\beta'_0 - \omega^2(\sin^2\beta - \sin^2\beta_0)$$

$$= (\beta'_0\beta'_0 + \omega^2\sin^2\beta_0)\left(1 - \frac{\omega^2}{\beta'_0\beta'_0 + \omega^2\sin^2\beta_0}\sin^2\beta\right)$$

die Substitution

$$\frac{\omega^2}{\beta'_0\beta'_0 + \omega^2\sin\beta_0} = \frac{1}{k^2}(> 1)$$

vor und bekomme

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = k\omega^2\left(1 - \frac{1}{k^2}\sin^2\beta\right),$$

$$t = \int_0^\beta \frac{1}{k\omega}\frac{d\beta}{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}\sin^2\beta}},$$

wenn ich die Werthe

$$\begin{array}{c|c} t & \beta \\ \hline 0 & \beta_0 = 0 \end{array}$$

zusammengehören lasse. Substituirt man nun

für $\sin^2\beta \ldots k^2\sin^2\gamma$,

so wird

$$dt^2 = \frac{1}{k^2\omega^2}\cdot\frac{k^2 d\gamma^2}{1 - k^2\sin^2\gamma},$$

und da β und γ gleichzeitig verschwinden,

$$t = \frac{1}{\omega}\int_0^\gamma \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\gamma}},$$

$$\gamma = am\,\omega t,$$

$$\sin^2\beta = k^2\sin^2 am\,\omega t.$$

Da aber weiter

$$\beta_0 = 0,$$

k^2 od. $\dfrac{\beta'_0\beta'_0 + \omega^2\sin^2\beta_0}{\omega^2} = \dfrac{\beta'_0\beta'_0}{\omega^2} = \sin^2\beta_1$, so wird

$$\sin^2\beta = \sin^2\beta_1 \,.\, \sin^2 am\,\omega t \quad mod\ (k = \sin\beta_1).$$

Der Verlauf ist nun folgender. Bezeichnet man durch

$$\frac{T}{2}$$

eine halbe Schwingungsdauer, d. i. die Zeit der Bewegung vom Aequator bis zum Punkte weitesten Ausschlags, so gehören folgende Werthe zusammen:

t	0	$\frac{1}{2}T$	T	$\frac{3}{2}T$	$2T$	$\ldots$
β	0	$+\beta_1$	0	$-\beta_1$	0	$\ldots$
am	0	$am K$	$am 2K$	$am 3K$	$am 4K$	$\ldots$,

und es wird

$$K = \omega\frac{T}{2}, \quad T = \frac{2K}{\omega}.$$

Nehme ich z. B. $\beta'_0 = \omega \sqrt{\frac{1}{2}}$, also auch $k = \sin \beta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, daher $K = 1{,}854$, und stelle mir etwa unter ω eine Geschwindigkeit vor, mit welcher in n Secunden der Weg 2π durchlaufen würde, so ist $\omega = \frac{2\pi}{n}$, und

$$T = n \frac{2K}{2\pi} = 0{,}590\, n;$$

nach soviel Secunden ist eine Schwingung von Wendekreis zu Wendekreis vollendet, und nach

$$2T \qquad = 1{,}180\, n$$

Secunden ist das Mobil zum ersten Ausschlagspunkte zurückgekehrt.

9. Erster Specialfall. Fortsetzung.

Wenn dagegen, weil das Verhältniss

$$\frac{\beta'_0}{\omega} > 1$$

ist, ein Umlauf auf dem Meridiane stattfindet, so erlaubt die Gleichung

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = \beta'_0 \beta'_0 - \omega^2 (\sin^2 \beta - \sin^2 \beta_0)$$

$$= (\beta'_0 \beta'_0 + \omega^2 \sin^2 \beta_0) \left(1 - \frac{\omega^2}{\beta'_0 \beta'_0 + \omega^2 \sin^2 \beta_0} \sin^2 \beta\right)$$

jetzt ohne Weiteres die Setzung

$$\frac{\omega^2}{\beta'_0 \beta'_0 + \omega^2 \sin^2 \beta_0} = \lambda^2 \; (< 1),$$

oder wenn auch hier

$$\frac{0 \mid \beta}{t \mid \beta_0 = 0}$$

angenommen wird,

$$\lambda = \frac{\omega}{\beta'_0} < 1.$$

Dann wird

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = \frac{\omega^2}{\lambda^2} (1 - \lambda^2 \sin^2 \beta),$$

$$t = \frac{\lambda}{\omega} \int_0^\beta \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \beta}}$$

$$\beta = am \frac{\omega}{\lambda} t$$

$$= am\, \beta'_0 t \quad mod \left(\lambda = \frac{\omega}{\beta'_0}\right).$$

Verlauf. Der gefundene Werth der geographischen Breite theilt die Eigenschaften der Amplitude. Insbesondere wächst er beständig, indem der Differentialquotient $\Delta\,(\beta, \lambda)$ stets positiv bleibt. Heisst

$2T$

die Dauer von einem völligen Umlaufe, so wird für

$$\begin{array}{c|l} t & 0 \ldots 2T \ldots \\ \hline \beta & 0 \ldots am\, \beta'_0\, (0+2T) \ldots \\ & \quad = am\,(0+4\varLambda), \end{array}$$

also

$$4\varLambda = \beta'_0 \,.\, 2T$$

$$2T = \frac{4\varLambda}{\beta'_0} = \frac{4\varLambda \,.\, \lambda}{\omega}$$

oder bei derselben Annahme über ω wie vorhin

$$= \frac{4\varLambda \,.\, \lambda}{2\pi} n.$$

Sei z. B. $\beta'_0 = \omega \sqrt{2}$, so erfolgt jetzt das Wiedereintreffen in demselben Punkte schon nach

$$2T = \frac{4 \,.\, 1{,}854 \,.\, 0{,}707}{2\pi} n$$
$$= 0{,}834\, n$$

Secunden.

Für

$$\beta_1, \text{ d. i. } Max\,\beta = \frac{\pi}{2}$$

wird

$$\beta'_0 = \omega.$$

Es fallen dann die beiden gefundenen Formeln zusammen und geben

$$\sin\beta = \sin am\, \omega t \text{ oder } \sin am\, \beta'_0 t \;\; mod\left(\frac{\omega}{\beta'_0} = 1\right),$$

woraus

$$\beta = am\,(\omega t,\, 1)$$
$$= \arcsin \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{e^{\omega t} + e^{-\omega}}$$

folgt. In diesem Falle befindet sich das Mobil im Pole (den es nach unendlich langer Zeit erreicht) im Zustande labilen Gleichgewichtes: bei einem um verschwindend Weniges kleineren β'_0 würde es am Pole umkehren und oscilliren; bei einem noch so wenig grösseren β'_0 dagegen rundumlaufen.

Die beigegebene Curventafel zeigt für beide Fälle und den Grenzfall die Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Winkel, sowie die des Winkels von der Zeit.

10. Zweiter Specialfall: $\omega = 0$.

Wenn $\omega = 0$ ist, also einzig eine Anziehung mit normaler Richtung wirkt, so wird die Differentialgleichung für β

$$dt = \frac{1}{\varphi'_0 \cos\beta_1} \cdot \frac{\cos\beta\, d\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\beta_1}},$$

wo

$$Max\,\beta \mid \beta_1$$

gesetzt, und

$$\begin{array}{c|l} t & 0 \\ \hline \beta & \beta_0 = \beta_1 \end{array}$$

angenommen ist. Dann wird

$$t = \int_{\beta_1}^{\beta} = \frac{1}{\varphi'_0 \cos^2 \beta_1} \left(\arcsin \frac{\sin\beta}{\sin\beta_1} - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sin\beta = \sin\beta_1 \cos(\varphi'_0 \cos\beta_1 t).$$

Ferner

$$d\varphi = \varphi'_0 \cos^2\beta_1 \frac{dt}{\cos^2\beta}$$

$$= - \frac{d \,.\, \cos\beta_1 \, ctg(\varphi'_0 \cos\beta_1 t)}{1 + \cos^2\beta_1 \, ctg^2(\varphi'_0 \cos\beta_1 t)}$$

und, wenn auch

$$\frac{t \mid 0}{\varphi \mid \varphi_0 = 0}$$

genommen wird,

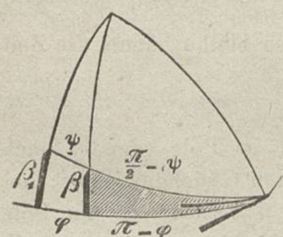
$$\varphi = \int_0^t = arc\, ctg(\cos\beta_1 \, ctg\, \varphi'_0 \cos\beta_1 t)$$

$$ctg\varphi = \cos\beta_1 \, ctg(\varphi'_0 \cos\beta_1 t).$$

Die gefundenen beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta &= \sin\beta_1 \cos(\varphi'_0 \cos\beta_1 t) \\ ctg\,\varphi &= \cos\beta_1 \, ctg(\varphi'_0 \cos\beta_1 t) \end{aligned}\right\}$$

sind aber Relationen für ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, in welchem



die eine Kathete $\frac{\pi}{2} - \varphi$,

die Hypotenuse $\frac{\pi}{2} - \varphi'_0 \cos\beta_1 t$,

der Zwischenwinkel β_1

beträgt. Dies giebt Bestätigung dafür, dass wie nöthig, unter der gemachten Annahme das Mobil sich auf einem **Hauptkreise**, einer kürzesten sphärischen Linie, bewegt. Und wird dessen Bogen ψ genannt, so bestätigt sich weiter, dass

$$\psi = \varphi'_0 \cos\beta_1 t$$
$$= \psi'_0 t$$
$$\psi' = \psi'_0 = Const.,$$

die Bewegung auf dem Hauptkreise somit eine **gleichförmige** ist Fernerhin ist mit $\psi = \frac{\pi}{2}$ gleichzeitig $\varphi = \frac{\pi}{2}$, und wird, wie früher, die Periode einer unveränderten Wiederkehr der Bewegung, die für $\psi = 2\pi$ eintritt, durch $2T$ bezeichnet, so wird

$$\text{für } t = \frac{T}{2} \qquad \varphi = \frac{\Phi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

III. Allgemeine Wurzel-Discussion. Reduction auf die Normalform.

11. Wurzel-Discussion.

Indem ich zu dem allgemeinen Probleme mich wende, gilt es vor Allem, die Wurzelwerthe aufzusuchen, für welche in

$$t = +\frac{1}{2\omega}\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi}\sqrt{P+Q\xi+\xi^2}}$$

der Radicand im Nenner verschwindet. Hierin war

$$\begin{array}{c|l} \xi & \cos^2\beta \\ P & -\dfrac{\varphi'_0\varphi'_0 \cos^4\beta_0}{\omega^2} \\ Q & \dfrac{\beta'_0\beta'_0 + (\varphi'_0\varphi'_0 - \omega^2)\cos^2\beta_0}{\omega^2} \\ \xi_0 & \text{noch willkürlich gelassen.} \end{array}$$

Jeder Wurzel von

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = 4\omega^2(1-\xi)(P+Q\xi+\xi^2) = 0$$

entspricht ein $M_{ax}^{in}\,\xi$ (doch nicht nothwendig $M_{ax}^{in}\,\beta$). Da nach erreichtem $Max\,\xi$ $d\xi$ vom Positiven ins Negative übergeht, so muss bei einem jeden Wurzelwerthe die Quadratwurzel ihr Zeichen wechseln, damit $dt = \dfrac{d\xi}{\sqrt{}}$ jederzeit eine positive Grösse bleibe, denn die Zeit gilt als beständig wachsend.

Da ferner

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C_1^2}{r^2} = \frac{a^2\cos^2\beta_0\varphi'_0}{a^2\cos^2\beta}$$

ist, so findet jedesmal zugleich

$$\text{mit } M_{ax}^{in}\,\xi \text{ ein } M_{in}^{ax}\,\frac{d\varphi}{dt}$$

statt. —

Als reelle Wurzel der Gleichung $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = 0$ bietet sich zunächst

$$\xi_3 = 1 \ (\beta = 0, \text{ das Mobil auf dem Aequator}).$$

Ob nun die beiden anderen, aus

$$P + Q\xi + \xi^2 = 0$$

sich ergebenden Wurzeln

$$\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\end{matrix} = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - 4P}}{2}$$

gleichfalls reell sind, hängt davon ab, ob

$$Q^2 - 4P \quad > 0$$

ist. Dies ist aber stets der Fall. Denn es ist sowohl Q^2 positiv, als $-4P$ positiv. Somit hat die Gleichung 3 reelle Wurzeln; und es ist nur noch die Frage, ob beide letztgefundenen Wurzeln einen mechanischen Sinn haben, nämlich ob

$$0 < \xi_{\frac{1}{2}} = cos^2\beta_{\frac{1}{2}} < 1.$$

12. Wurzel-Discussion. Fortsetzung.

Die Frage, zwischen welchen Grenzen ξ sich bewegen darf, wenn

$$\eta = 4\,\omega^2\,(1-\xi)\,(P + Q\xi + \xi^2) = pos.$$

bleiben soll oder, was damit übereinkommt, die Frage nach der Lage der Wurzeln wird dadurch beantwortet, dass man das Vorzeichen von η für einzelne Werthe von ξ bestimmt. Es wird

für ξ	η
$=0$	$4\,\omega^2 P$ d. i. $-4\varphi'_0\varphi'_0 cos^4\beta_0 \ldots neg.$; Ausnahme: $=0$: 1. wenn $\varphi'_0 = 0$ — Umlauf auf Meridian; 2. wenn $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ — Anfangsort im Pole; (Fall Nr. 2 enthalten im vorigen.) Siehe früher.
$=\xi_3=1$	0
$=cos^2\beta_0$	$4\omega^2(1-cos^2\beta_0)\left(-\frac{\varphi'_0\varphi'_0 cos^4\beta_0}{\omega^2} + \frac{\beta'_0\beta'_0 + (\varphi'_0\varphi'_0-\omega^2)cos^2\beta_0}{\omega^2} cos^2\beta_0 + cos^4\beta_0\right)$ d. i. $4 sin^2\beta_0 . \beta'_0\beta'_0 . cos^2\beta_0 \ldots$ *pos.* in allen Fällen.

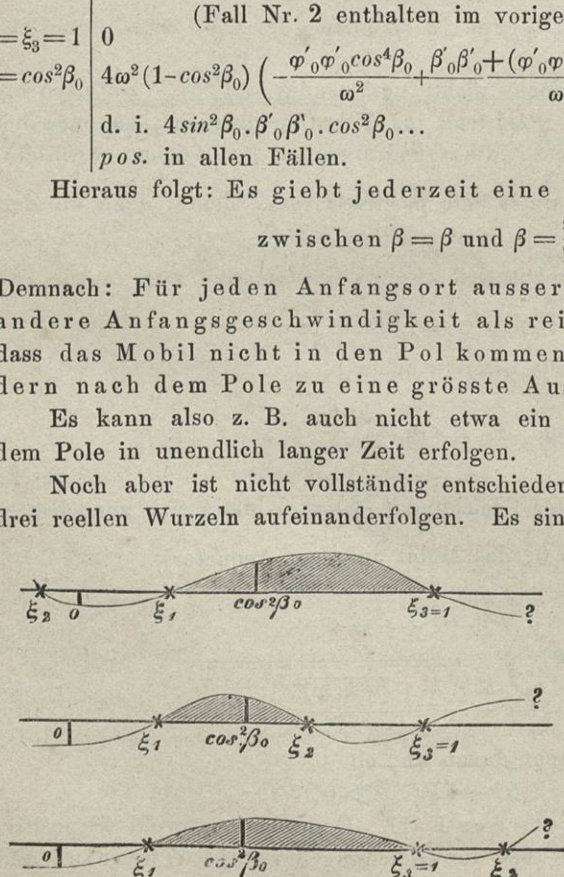
Hieraus folgt: Es giebt jederzeit eine Wurzel

$$\text{zwischen } \beta = \beta \text{ und } \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Demnach: Für jeden Anfangsort ausser dem Pole und jede andere Anfangsgeschwindigkeit als rein im Meridiane gilt, dass das Mobil nicht in den Pol kommen kann (vgl. 6.), sondern nach dem Pole zu eine grösste Ausweichung hat.

Es kann also z. B. auch nicht etwa ein spiraliger Aufstieg nach dem Pole in unendlich langer Zeit erfolgen.

Noch aber ist nicht vollständig entschieden, in welcher Reihe die drei reellen Wurzeln aufeinanderfolgen. Es sind drei Fälle denkbar:



Indessen die Untersuchung, ob auch die dritte Wurzel ξ_2 zwischen 0 und 1 liegen könne, wird dadurch entbehrlich, dass das Wurzelproduct $\xi_1\,\xi_2$ dem Gliede ohne ξ in der Gleichung, nämlich P gleich sein muss. Denn da dieses negativ und die erste Wurzel positiv ist, so muss

$$\xi_2 \text{ negativ}$$

sein. — Damit stimmt überein, dass die η-Curve bei ihrer Ankunft in $\xi=1$ sinkend ist, indem

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\xi=1}, \text{ d. i. } & 4\omega^2(Q-P+2(1-Q)\xi-3\xi^2)_{\xi=1}\\ &=-4\omega^2(P+Q+1)\\ &=-4\quad(-\varphi_0'^2 cos^4\beta_0+\beta_0'^2+\varphi_0'^2 cos^2\beta_0-\omega^2 cos^2\beta_0+\omega^2)\\ &=-4\quad(\omega^2 sin^2\beta_0 \quad +\beta_0'^2+\varphi_0'^2 cos^2\beta\,.\,sin^2\beta_0),\end{aligned}$$

also negativ ist. Demnach folgen die drei Wurzeln so:

Und daher ist das Mobil gezwungen, auf einer Zone zu bleiben, deren Mittellinie der Aequator ist.

13. Reduction auf die Normalform.

Das zu reducirende Integral ist nunmehr

$$t=\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{4\omega^2(1-\xi)(P+Q\xi+\xi^2)}}=\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{4\omega^2(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_1)(1-\xi)}},$$

wobei

$$\xi_2<\xi_1<\xi<\xi_3$$

und

$$4\omega^2 \text{ positiv.}$$

Ich benutze eine Substitution zweiten Grades, und zwar werde

der positive echte Bruch $\dfrac{1-\xi_1}{1-\xi_2}=k^2$

gesetzt, und der gleichfalls positive echte

$$\frac{1-\xi_2}{1-\xi_1}\cdot\frac{\xi-\xi_1}{\xi-\xi_2}=sin^2\sigma,$$

so dass

$$\xi=\frac{\xi_1(1-\xi_2)-\xi_2(1-\xi_1)\,sin^2\sigma}{(1-\xi_2)-\quad(1-\xi_1)\,sin^2\sigma}$$

$$cos^2\sigma=\frac{\xi_1-\xi_2}{1-\xi_1}\cdot\frac{1-\xi}{\xi-\xi_2}.$$

Damit wird

$$t=\int_{\xi_0}^{\xi}uts=\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{d\sigma}{\sqrt{\omega^2(1-\xi_2)}\sqrt{1-k^2 sin^2\sigma}},$$

wobei die Werthe

$$\begin{array}{c|cc}\xi & \xi_1 & 1\\ \hline 0 & 0 & \dfrac{\pi}{2}\end{array}$$

zusammengehören. — Bei dieser Reduction war

$$\xi_{\frac{1}{2}} = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - 4P}}{2}$$

oder nach Einsetzung der Werthe von P und Q

$$\xi_1 = \frac{-\beta'^2_0 - (\varphi'^2_0 - \omega^2) \cos^2\beta_0 \pm \sqrt{\beta'^4_0 + 2\beta'^2_0(\varphi'^2_0 - \omega^2)\cos^2\beta_0 + (\varphi'^2_0 + \omega^2)\cos^4\beta_0}}{2\omega^2}$$

$$\xi_2 = \frac{P}{\xi_1} = \frac{-\beta'^2_0 - (\varphi'^2_0 - \omega^2) \cos^2\beta_0 \mp \sqrt{\beta'^4_0 + 2\beta'^2_0(\varphi'^2_0 - \omega^2)\cos^2\beta_0 + (\varphi'^2_0 + \omega^2)\cos^4\beta_0}}{2\omega^2}$$

Das Vorzeichen der Quadratwurzel ist so zu wählen, dass der Werth ξ_1 positiv wird. Er muss dann von selbst zwischen 0 und 1 zu liegen kommen, während ξ_2 dann unter 0 fällt. (Dies wird sich demnächst bestätigen.)

IV. Die geographische Breite β.

14. Wahl der unteren Grenze. Ausdruck für $\cos\beta$.

Nach dem Vorigen wird

$$\omega\sqrt{1-\xi_2}\, t = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\Delta\sigma},$$

und nun werde die bisher willkürlich gelassene untere Grenze β_0 so bestimmt, dass die untere Grenze $\sigma_0 = 0$ werde:

$$\sin^2\sigma_0 = 0 = \frac{1-\xi_2}{1-\xi_1} \cdot \frac{\xi_0 - \xi_1}{\xi_0 - \xi_2},$$

daraus folgt

$$\xi_0 \quad = \xi_1, \quad \cos^2\beta_0 = \cos^2\beta_1;$$

d. h. der Beginn der Bewegung möge fortan in den Punkt höchster geographischer Breite verlegt sein. Dann wird

$$\omega\sqrt{1-\xi_2}\, t = \int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{\Delta\sigma}, \quad \sigma = am\,(\omega\sqrt{1-\xi_2}\, t),$$

$$\xi = \cos^2\beta = \frac{\xi_1(1-\xi_2) - \xi_0(1-\xi_1)\sin^2 am\,(\omega\sqrt{1-\xi_2}\, t)}{(1-\xi_2) - (1-\xi_2)\sin^2 am\,(\omega\sqrt{1-\xi_2}\, t)}.$$

Für $t = 0$ ergiebt sich wieder $\xi_0 = \xi_1$, wie nöthig.

Unter der gemachten Annahme nun

$$\sigma_0 = 0,$$

also

$$\xi_0 = \xi_1 = Min\,\xi, \quad \beta_0 = \beta_1 = Max\,\beta,$$
$$\beta'_0 = 0$$

wird

$$\left.\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\end{matrix}\right), \text{ d. i. } \frac{-\beta'^2_0 - (\varphi'^2_0 - \omega^2)\cos^2\beta_0 \pm \sqrt{\qquad \ldots}}{2\omega^2}$$

$$= \frac{-(\varphi_0'^2 - \omega^2)\cos^2\beta_1 \pm (\varphi_0'^2 + \omega^2)\cos^2\beta_1}{2\omega^2},$$

$$\xi_1 = \quad \cos^2\beta_1, \ \ldots\ldots\ldots \text{ also } + \text{ und zwischen 0 und 1,}$$

$$\xi_2 = -\left(\frac{\varphi'_0}{\omega}\right)^2 \cos^2\beta_1, \ldots \text{ also } -,$$

$$P = +\xi_1\xi_2 \qquad = -\left(\frac{\varphi'_0}{\omega}\right)^2 \cos^4\beta_1,$$

$$Q = -(\xi_1 + \xi_2) \qquad = + \frac{\varphi'^2_0 - \omega^2}{\omega^2}\cos^2\beta_1$$

in Uebereinstimmung mit Früherem. Und führe ich ferner einen Hilfswinkel (ohne geometrische Bedeutung) ein, schreibe nämlich für den Ausdruck

$$\frac{\varphi_0'^2 \cos^2\beta_1}{\omega^2},$$

welcher von 0 bis ∞ sich ändern kann, $tg^2\mu$, wo dann

$$\sin^2\mu = \frac{\varphi_0'^2\cos^2\beta_1}{\omega^2 + \varphi_0'^2\cos^2\beta_1},$$

$$\cos^2\mu = \frac{\omega^2}{\omega^2 + \varphi_0'^2\cos^2\beta_1}$$

wird, so bekomme ich folgende Constantenumformung:

$$\xi_0 = \xi_1 \quad = \cos^2\beta_1 \qquad = \cos^2\beta_1$$

$$\xi_2 \qquad = -\frac{\varphi_0'^2\cos^2\beta_1}{\omega^2} \qquad = -\,tg^2\mu$$

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} \qquad = -\frac{\omega^2}{\varphi_0'^2} \qquad = -\frac{\cos^2\beta_1}{tg^2\mu}$$

$$\omega\sqrt{1-\xi_2} \quad = \sqrt{\omega^2 + \varphi_0'^2\cos^2\beta_1} = \frac{\omega}{\cos\mu}$$

$$k^2 = \frac{1-\xi_1}{1-\xi_2} = \frac{\omega^2\sin^2\beta_1}{\omega^2 + \varphi_0'^2\cos^2\beta_1} \quad = \sin^2\beta_1\cos^2\beta_2.$$

Dadurch wird

$$\xi = \cos^2\beta = \quad \xi_1 \quad . \frac{1 - \frac{\xi_2}{\xi_1}\frac{1-\xi_1}{1-\xi_2}\sin^2 am\, \omega\sqrt{1-\xi_2}\,t}{1 + \quad \frac{1-\xi_1}{1-\xi_2}\sin^2 am\, \omega\sqrt{1-\xi_2}\,t}$$

$$= \cos^2\beta_1 . \frac{1 - tg^2\beta_1 \sin^2\mu \sin^2 am\left(\frac{\omega}{\cos\mu}t\right)}{1 + \sin^2\beta_1\cos^2\mu\sin^2 am\left(\frac{\omega}{\cos\mu}t\right)},$$

$$mod\ (k = \sin\beta_1\cos\mu).$$

15. Discussion. Wiederherleitung der beiden Grenzfälle.

Der Bruch, mit welchem multiplicirt der Anfangswerth $\cos^2\beta_1$ hier erscheint, kann, wie es erforderlich ist, nie echt werden. Er wird

$=1=Min$ für $t=0$, und dann ist $\beta=\beta_1$. Nach einer Zeit ferner, die $\frac{T}{2}$ heissen mag, ist der Amplitudensinus so gross geworden, als möglich:

$$sin^2 am\left(\frac{\omega}{cos\,\mu}\,\frac{T}{2}\right)=Max=1;$$

und zugleich damit hat die rechte Seite ihren höchsten Werth

$$\frac{cos^2\beta_1\,(1+tg^2\beta_1\,sin^2\mu)}{1-sin^2\beta_1\,cos^2\mu}$$

erreicht. Dieser aber findet sich

$$=1,$$

d. h.: das Mobil überschreitet den Aequator, $\frac{T}{2}$ ist eine halbe sogenannte Schwingungsdauer. Und da

$$am\left(\frac{\omega}{cos\,\mu}\,\frac{T}{2}\right)=\frac{\pi}{2},$$

so wird

$$\frac{T}{2}=\frac{K\,cos\,\mu}{\omega}\ (mod\,k\ \text{d. i.}\ sin\,\beta_1\,cos\,\mu).$$

Ein zweites Minimum von $sin\,am$ und von $cos^2\beta$ und damit zugleich Maximum des Absolutwerthes von β wird erreicht für

$$am\left(\frac{\omega}{cos\,\mu}\,t\right)=\pi,\quad t=\frac{2K}{\omega}=T,$$

d. i. nach einer ganzen Schwingungsdauer. Ebenso ist nach einer weitern halben das Mobil zum Aequator zurückgekehrt u. s. f., so dass folgender Verlauf sich herausstellt:

t	$0\ \ldots\ \frac{T}{2}\ \ldots\ T\ \ldots\ \frac{3}{2}T\ \ldots\ 2T\ \ldots$
u, d. i. $\frac{\omega}{cos\,\mu}\,t$	$0\ \ldots\ K\ \ldots\ 2K\ \ldots\ 3K\ \ldots\ 4K\ \ldots$
$sin^2 am\,u$	$0\ \ldots\ 1\ \ldots\ 0\ \ldots\ 1\ \ldots\ 0\ \ldots$
$cos^2\beta$	$cos^2\beta_1\ \ldots\ 0\ \ldots\ cos^2\beta_1\ \ldots\ 1\ \ldots\ cos^2\beta_1\ \ldots$
β	$+\beta_1\ \ldots\ 0\ \ldots\ -\beta_1\ \ldots\ 0\ \ldots\ +\beta_1\ \ldots$

Weiter ist ersichtlich, dass wegen

$$sin^2 am\,(K+\alpha)=sin^2 am\,(K-\alpha)$$

nach jeder halben Schwingungsdauer die Werthe von β in umgekehrter Folge sich wiederholen; und wegen

$$sin^2 am\,(2\,K+\alpha)=sin^2 am\,\alpha$$

nach einer ganzen in derselben Aufeinanderfolge wie zuvor (auf der andern Halbkugel); endlich, dass nach jedesmaliger doppelter Schwingungsdauer der gesammte Verlauf der Bewegung sich erneuert.

Der Gleichung für $cos^2\beta$ lässt sich auch die Form geben

$$sin^2\beta = \frac{1 - sin^2\beta_1\, cos^2\mu\, sin^2 am\, u - cos^2\beta_1 - sin^2\beta_1\, sin^2\mu\, sin^2 am\, u}{1 - sin^2\beta_1\, cos^2\mu\, sin^2 am\, u},$$

dies aber

$$= sin^2\beta_1 \,.\, \frac{cos^2 am\, u}{\Delta^2 am\, u},$$

$$sin\beta = \pm\, sin\beta_1 \,.\, \frac{cos\, am\, u}{\Delta\, am\, u}$$

oder $sin\beta_1 \,.\, sin\, co\, am\, u.$

Somit haben sich in den drei Hauptfällen folgende Gleichungen für die geographische Breite gefunden:

$0 = \frac{\varphi'_0}{\omega}$ ... (Hin- und Hergang auf Meridiane) ... $sin\beta = sin\beta_1 . sin\, am\, \omega t$ $mod(k = sin\beta_1)$,

$0 < \frac{\varphi'_0}{\omega} < \infty$ . . . . $sin\beta = sin\beta_1 . sin\, coam \frac{\omega t}{cos\mu}$ $mod(k = sin\beta_1\, cos\mu)$

$\frac{\varphi'_0}{\omega} = \infty$ ... (Gang auf Hauptkreise) ... $sin\beta = sin\beta_1 . cos(\varphi'_0\, cos\beta_1 t)$.

Es muss sich zeigen, dass von diesen Gleichungen die mittlere, welche ohne Beschränkung gewonnen ist, die Grenzfälle in sich mitbegreift. In der That wird

	für $\varphi'_0 = 0$:	für $\omega = 0$:
$\frac{\omega}{cos\mu}$	ω	$\varphi'_0\, cos\beta_1$
k^2	$sin^2\beta_1$	$0,\ K = \frac{\pi}{2},\ am\, u = u = \varphi'_0\, cos\beta_1$
$\frac{T}{2}$	$\frac{K}{\omega}$ (wie S. 13),	$\frac{\frac{\pi}{2}}{\varphi'_0\, cos\beta_1}$ (wie S. 16).

Also für $\varphi'_0 = 0$

$$sin\beta = \mp\, sin\beta_1\, sin\, coam\, \omega t \text{ oder } \mp\, sin\beta_1\, sin\, am(\omega t - K)$$

$$= \pm\, sin\beta_1\, sin\, am\, \omega\left(t - \frac{T}{2}\right).$$

Dies aber erweist sich als mit dem früher Gefundenen übereinstimmend, wenn man beachtet, dass der Bewegungsbeginn hier in den Zeitpunkt grössten Ausschlages gelegt ist, dort aber in den Uebertritt über den Aequator. —

Andererseits wird für $\omega = 0$

$$sin\beta = \pm\, sin\beta_1\, sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi'_0\, cos\beta_1\right)$$

in Uebereinstimmung mit dem Obigen.

16. Reihenentwickelung. Ein Beispiel.

Der letztgefundene allgemeine Ausdruck für die Breite

$$\sin\beta = \sin\beta_1 \,.\, \sin coam\left(\frac{\omega}{\cos\mu}\, t\right) \quad mod\,(k = \sin\beta_1 \cos\mu)$$

ist zur Entwickelung geeignet. Er findet sich, wenn ich die Formeln Jacobi, *Fundamenta* S. 173, 1) und S. 180, 1) und 2) benutze

$$= \sin\beta_1 \,.\, \sqrt{\frac{1}{k}}\, \frac{H(u+K)}{\Theta(u+K)}$$

$$= \sin\beta_1 \,.\, \frac{2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + \ldots}{1 + 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x + \ldots},$$

wo, wie üblich,

$$x = \frac{\pi u}{2K}, \text{ also hier } = \frac{\frac{\pi}{2}}{K}\, \frac{\omega}{\cos\mu}\, t = \frac{\pi}{2}\, \frac{t}{\frac{T}{2}},$$

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}.$$

Nehme ich, um ein Beispiel zu haben, für $\beta \ldots \frac{\pi}{6}$, und $\frac{\omega}{\varphi_0} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, so wird

$$\cos^2\mu = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} = \frac{2}{5},$$

$$k^2 = \tfrac{1}{10}, \quad k = 0{,}316, \quad \sqrt{\frac{1}{k}} = 1{,}778;$$

ferner findet sich dann

$$q = 0{,}007, \quad q^4 = 0{,}000 \ldots,$$
$$q^{1/4} = 0{,}289, \quad q^{9/4} = 0{,}000 \ldots$$

und demnach

$$\sin\beta = \sin\beta_1 \,.\, 1{,}778 \,.\, \frac{2\,.\,0{,}289 \cos\frac{\pi t}{T}}{1 + 2\,.\,0{,}007 \cos 2\frac{\pi t}{T}}.$$

V. Die geographische Länge φ.

17. Reduction auf die Normalform dritter Gattung.

Es hatte als erstes Integral sich ergeben

$$r^2\varphi' = C_1^{\,2},$$

also ist

$$d\varphi = \frac{C_1^{\,2}}{r^2}\, dt$$

$$= \frac{a^2 \sin^2\vartheta_0}{a^2 \sin^2\vartheta}\, \varphi'_0\, dt = \frac{\cos^2\beta_0}{\cos^2\beta}\, \varphi'_0\, dt = \frac{\xi_1}{\xi}\, \varphi'_0\, dt,$$

da $\xi_0 = \xi_1$ genommen war. Folglich wird

$$d\varphi = \xi_1 \cdot \varphi'_0 \cdot \frac{d\xi}{\xi\sqrt{4\,\omega^2(1-\xi)(P+Q\xi+\xi^2)}},$$

und diese Gleichung führt auf die dritte Gattung elliptischer Integrale.

Bei der Zurückführung des rechtsstehenden Differentials auf die Form

$$\xi_1 \cdot \varphi'_0 \cdot \frac{f(\sigma)\, d\sigma}{(1+n\, sin^2\sigma)\,\Delta\sigma}$$

fällt n so aus, dass gleichzeitig mit $\xi = 0$ auch $1 + n\, sin^2\sigma = 0$ wird. Daher ist zu setzen

$$n = -\left(\frac{1}{sin^2\sigma}\right)_{\xi=0}$$

$$= -\left(\frac{1-\xi_1}{1-\xi_2}\,\frac{\xi-\xi_2}{\xi-\xi_1}\right)_{\xi=0} = +\frac{1-\xi_1}{1-\xi_2}\cdot\frac{-\xi_2}{\xi_1} = +\, tg\,\beta_1\, sin^2\mu,$$

und es gehört in der Jacobi, *Fundam.* S. 170 oder Werke II, S. 192 aufgestellten Tafel

	0		$-k^2$		-1		$+\infty$		0
1. . . .		n							
2.				n					
3.						n			
4.								n	

der gegenwärtige Fall unter Nr. 4 (gehört nach Legendre'scher Bezeichnung in das Gebiet der *Intégrales à paramètre circulaire*). In der That wird

$$\frac{1}{\xi} = \frac{(1-\xi_2) - \quad (1-\xi_1)\, sin^2\sigma + \frac{\xi_1}{\xi_2}(1-\xi_2) - \frac{\xi_1}{\xi_2}(1-\xi_2)}{\xi_1(1-\xi_2) - \xi_2(1-\xi_1)\, sin^2\sigma}$$

$$= \frac{1}{\xi_2} \qquad - \frac{\xi_1-\xi_2}{\xi_1\,\xi_2}\cdot\frac{1}{1+\frac{-\xi_2(1-\xi_1)}{\xi_1(1-\xi_2)}\, sin^2\sigma}.$$

Hiernach wird

$$d\varphi = \xi_1 \cdot \varphi'_0 \cdot \frac{1}{\omega\sqrt{1-\xi_2}} \quad \left(\frac{1}{\xi_2} - \quad \frac{\xi_1-\xi_2}{\xi_1\,\xi_2} \cdot \frac{1}{1+n\, sin^2\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}$$

oder auch

$$= + \quad \frac{cos\,\beta_1 \,.\, cos^2\mu}{sin\,\mu} \quad \left(-1 + \frac{cos^2\beta_1 + tg^2\mu}{cos^2\beta_1}\;\frac{1}{1+n\, sin^2\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}.$$

Nun ist in einem Falle wie der jetzige

n, welches hier den Werth $+\frac{-\xi_2}{\xi_1}\,\frac{1-\xi_1}{1-\xi_2}$, d. i. $+\,k^2\frac{-\xi_2}{\xi_1}$

oder auch $+\,tg^2\beta_1\, sin^2\mu$, d. i. $+\,k^2\frac{tg^2\mu}{cos^2\beta_1}$ hat,

$=$ $-\,k^2\, sin^2 am\, i a$

zu setzen, so dass

$$-\sin^2 am\, i a = \left\{\begin{aligned} &+\frac{-\xi_2}{\xi_1} \\ &=+\frac{\varphi_0'^2}{\omega^2} \\ &=+\frac{tg^2\mu}{\cos^2\beta_1}\end{aligned}\right\} = + tg^2 am(ak'),$$

also

$$\begin{aligned} \Delta^2 am\, ia &= 1 + tg^2\beta_1 \sin^2\mu \\ &= \frac{(\cos^2\beta_1 + tg^2\mu)\cos^2\mu}{\cos^2\beta_1} \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} \Delta^2 am\,(ak') &= \frac{\cos^2\beta_1 + \sin^2\beta_1 \sin^2\mu}{\cos^2\beta_1 + tg^2\mu} \\ &= \cos^2\mu \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\sin am\, ia}{\cos am\, ia\ \Delta am\, ia} &= i\frac{\sin am\,(ak')\ \cos am\,(ak')}{\Delta am\,(ak')} \\ &= i\frac{\cos\beta_1\, tg\mu}{\cos\mu\sqrt{\cos^2\beta_1 + tg^2\mu}} \end{aligned}$$

wird. — Indem man nun nach erfolgter Integration von 0 bis σ

für $\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\Delta\sigma}$	u
und für $\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\Delta\sigma}$	$u + \frac{tg\, am\, ia}{\Delta\, am\, ia}\Pi(u, ia, k)$

einsetzt, wo Π die alte Jacobi'sche Form (*Fundam.* S. 144) des Integrals dritter Gattung bezeichnet, erhält man

$$\varphi = + \frac{\varphi'_0}{\omega\sqrt{1-\xi_2}}\,.\,u - i\frac{\varphi'_0}{\omega\sqrt{1-\xi_2}}\ \frac{\xi_1-\xi_2}{\xi_2}\ \frac{\sin am\,(ak')\ \cos am\,(ak')}{\Delta am\,(ak')}\ \Pi\,(u, ia, k)$$

oder auch

$$= + \frac{\sin\mu}{\cos\beta_1}\,.\,u - i\frac{\cos^2\mu\,(\cos^2\beta_1 + tg^2\mu)}{\sin\mu\,\cos\beta_1}\,.\,\frac{\sin am\,(ak')\ \cos am\,(ak')}{\Delta am\,(ak')}\ \Pi(u, ia, k).$$

Hierin kann aber das erste Glied

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\varphi'_0}{\omega\sqrt{1-\xi_2}}\,.\,u \\ \text{oder}\quad &\frac{\sin\mu}{\cos\beta_1}\,.\,u \end{aligned}\right\}\ \text{auch}\ \varphi'_0 t$$

geschrieben werden; und ferner erweist sich, dass der im zweiten vorkommende Coefficient

$$\left.\begin{aligned} &+\frac{\varphi'_0}{\omega\sqrt{1-\xi_2}}\,.\,\frac{\xi_1-\xi_2}{\xi_2}\,.\,\frac{\sin am\,(ak')\ \cos am\,(ak')}{\Delta am\,(ak')} \\ \text{oder } &= -\frac{\varphi'_0}{\sqrt{\omega^2+\varphi_0'^2\cos^2\beta_1}}\,.\,\frac{\omega^2+\varphi_0'^2}{\varphi_0'^2}\,.\,\frac{\varphi'_0}{(\omega^2+\varphi_0'^2)}\,.\,\frac{\omega\sqrt{\omega^2+\varphi_0'^2\cos^2\beta_1}}{\omega} \\ \text{oder } &= -\frac{\sin\mu}{\cos\beta_1}\,.\,\frac{\cos^2\beta_1 + tg^2\mu}{tg^2\mu}\,.\,\frac{tg\mu\,.\,\cos\beta_1}{(\cos^2\beta_1 + tg^2\mu)\cos\mu} \end{aligned}\right\} = -1$$

wird. Dadurch nimmt die Gleichung für die geographische Länge folgende Gestalt an:

$$\varphi = \varphi'_0 t + i\,\Pi(u, ia, k).$$

18. Theilung des Ausdrucks für φ.

Das Glied $i\Pi$ muss aus mechanischen Gründen reell sein, und ist es auch, da das Differential

$$\frac{n \sin^2\sigma}{1 + n\sin^2\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}, \quad \text{d. i.} \quad \frac{tg^2\beta_1 \sin^2\mu \sin^2\sigma}{1 + tg^2\beta_1 \sin^2\mu \sin^2\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}$$

reell ist. Es gilt, dies auch in der Form des Ausdrucks erkennbar zu machen. Indess schon ehe das geschehen ist, lässt die nächstfolgende Umformung Schlüsse auf die Art der Bewegung zu.

Mit Hilfe der Formeln *Fundam.* S. 146, 3) oder Werke II, 186, 1) bekomme ich weiter

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi'_0 t + i\Pi(u, ia, k), \\ &= \frac{\sin\mu}{\cos\beta_1} u + i\Pi(u, ia, k) \\ &= \frac{\sin\mu}{\cos\beta_1} u + iu\frac{\Theta'(ia)}{\Theta(ia)} + \frac{i}{2} lg \frac{\Theta(u - ia)}{\Theta(u + ia)},\end{aligned}$$

worin $\Theta'(ia) = \left[\frac{d\Theta(u)}{du}\right]_{u=ia}$ gesetzt ist. Dies nun ist nach der Formel *Fundam.* S. 162, 4) ferner

$$= u\left(\frac{\sin\mu}{\cos\beta_1} - tg\,am(ak')\,\Delta am(ak') + \frac{\pi a}{2KK'} + \frac{\Theta'(ak')}{\Theta(ak')}\right) + \frac{i}{2} lg \frac{\Theta(u - ia)}{\Theta(u + ia)}.$$

Da aber

$$\frac{\sin\mu}{\cos\beta_1} - tg\,am(ak')\,\Delta am(ak') = 0$$

sich findet, so wird

$$\begin{aligned}\varphi &= u\left(\frac{\pi}{2}\frac{a}{KK'} + \frac{\Theta'(ak')}{\Theta(ak')}\right) + \frac{i}{2} lg \frac{\Theta(u - ia)}{\Theta(u + ia)} \\ &= t\frac{\omega}{\cos\mu}\left(\frac{\pi}{2}\frac{a}{KK'} + \frac{\Theta'(ak')}{\Theta(ak')}\right) + \frac{i}{2} lg \frac{\Theta(u - ia)}{\Theta(u + ia)}.\end{aligned}$$

Somit zeigt sich auch hier diejenige Spaltung in zweierlei Bewegungen, die überall da auftritt, wo das mechanische Problem auf elliptische Integrale dritter Gattung zurückkommt (Jacobi, *Sur la rotation d'un corps*, Werke II, S. 185 und S. 195 ob.). Das Wachsthum der geographischen Länge φ kann zerlegt werden in eines proportional mit der Zeit und ein periodisches, demnach die Bewegung in eine fortschreitende und eine oscillirende. Oder

denkt man sich eine Meridianebene rotirend mit einer bestimmten constanten Geschwindigkeit um die Axe der Kugel, so wird die geographische Länge des Mobils dieser Ebene bald vorauseilen, bald hinter ihr zurückbleiben, in periodischem Verlaufe.

Ich führe hier wiederum den bei Bestimmung der Breite β aufgetretenen Zeitabschnitt

$$t=\frac{T}{2}$$

ein, für welchen allgemein

$$u=\frac{\omega}{\cos\mu}\,\frac{T}{2}=K \quad mod\,(k=\sin\beta_1\cos\mu).$$

Für diesen wird, da

$$\Theta\,(K-ia)=\Theta\,(K+ia)$$

ist, der Logarithmus null, das periodische Glied verschwindet (oder: das Mobil tritt in die rotirende Ebene hinein) und das übrigbleibende der Zeit proportionale Glied wird

$$\varphi=\frac{\Phi}{2}=\frac{T}{2}\,\frac{\omega}{\cos\mu}\left(\frac{\pi a}{2\,KK'}+\frac{\Theta'\,(a\,k')}{\Theta\,(a\,k')}\right)=\frac{\pi}{2}\,\frac{a}{K'}+K\,\frac{\Theta'\,(a\,k')}{\Theta\,(a\,k')}.$$

Dies ist der Werth des Längenzuwachses in einer halben Schwingungsdauer, welchen ich die halbe Längen-Periode nennen will. Mit Benutzung desselben lässt sich die allgemeine Formel für φ auch schreiben:

$$\varphi=\frac{\Phi}{2}\,\frac{t}{\frac{T}{2}}+\frac{i}{2}\,lg\,\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}.$$

19. Die halbe Längen-Periode.

Weiteren Aufschluss über die Art der sphärischen Curve, die das Mobil beschreibt, giebt die Untersuchung der Werthe, deren

$$\frac{\Phi}{2},\ \text{d. i.}\ \frac{\pi}{2}\,\frac{a}{K'}+K\,\frac{\Theta'\,(a\,k')}{\Theta\,(a\,k')}$$

fähig ist. In dem ersten Grenzfalle $\varphi'_0=0$ wird

$$tg^2 am\,(a\,k'),\ \text{d. i.}\ \frac{\varphi'_0}{\omega}=0,\quad am\,(a\,k')=0,\quad a=0$$

$$k=\sin\beta_1,$$

und es ergiebt für die Längen-Periode sich dann der Werth 0. Dies zeigt der ursprüngliche Ausdruck

$$\frac{\Phi}{2}=\varphi'_0\,\frac{T}{2}+iu\,\frac{\Theta'\,(ia)}{\Theta\,(ia)}$$

$$=\varphi'_0\,\frac{T}{2}+u\,\frac{d\,lg\,\Theta\,(ia)}{da},$$

welcher nach der Formel Jacobi, W. II, S. 191 u.

$$=\varphi'_0\,\frac{T}{2}-\frac{\pi u}{K}\left(\frac{q^{1-b}}{1-q^{1-b}}-\frac{q^{1+b}}{1-q^{1+b}}+\frac{q^{3-b}}{1-q^{3-b}}-\dots\right)$$

ist, worin

$$b=\frac{a}{K'}=0.-$$

Oder es folgt auch daraus, dass nach früherer Jacobi'scher Bezeichnung (Fund. S. 145)

$$\frac{d \log \Theta(v)}{dv} = \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} = Z(v),$$

und nach der Definition von Z mittels der ersten und zweiten Gattung S. 133, 1) oder 2)

$$K Z(0) = [F' E(\varphi) - E' F(\varphi)] = 0.$$

Dass demnach in dem vorliegenden Falle

$$\frac{\Phi}{2} = 0$$

wird, enthält nur die Bestätigung dafür, dass bei einer Anfangsgeschwindigkeit rein in der Meridianebene ein Längenfortschritt nicht stattfindet, sondern das Mobil auf einem Meridiane bleibt. —

Im andern Grenzfalle $\omega = 0$ wird

$$k = 0,\ K = \frac{\pi}{2}$$

$$tg^2 am(ak') = \varphi,\ am(ak') = \frac{\pi}{2},\ a = K' \operatorname{mod} k'$$

$$Z(ak') = Z(K'k') = 0$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{a}{K'} = \frac{\pi}{2},$$

folglich

$$\frac{\Phi}{2} = \frac{\pi}{2}\frac{a}{K'} + K\frac{\Theta'(ak')}{\Theta(ak')}$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{a}{K'} + K Z(ak')$$

$$= \frac{\pi}{2},$$

wie auf S. 158.

Hervorzuheben ist nun für den allgemeinen Fall der Satz, dass die halbe Längen-Periode nie einen Quadranten überschreiten kann.

Denn zwischen den beiden Grenzen

$$\frac{\varphi'_0}{\omega} = 0 \ \ldots \ \frac{\Phi}{2} = 0$$

$$\frac{\varphi'_0}{\omega} = \infty \ldots \ \frac{\Phi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

kann keiner der in $\frac{\Phi}{2}$ vorkommenden Werthe null oder unendlich werden, weder a und K, K', noch $Z(ak')$. Das Wachsthum von $\frac{\Phi}{2}$ findet vielmehr von einer Grenze zur andern in stetiger Weise statt. Somit ist

$$v.\,abs.\,\frac{\Phi}{2} \text{ oder } \frac{\pi}{2}\frac{a}{K'} + K Z(ak') \leqq 0.$$

Diesen Fortschritt der Länge stellt der auf Tafel III, Fig. 3 befindliche Grund- und Aufriss dar.

20. Beseitigung des scheinbar Imaginären. Werth des Oscillations-Winkels.

Indem man für das Folgende den von Jacobi angegebenen Weg einschlägt, erreicht man einen dreifachen Vortheil, nämlich aus dem Ausdrucke

$$\varphi = t\frac{\omega}{\cos\mu}\left(\frac{\pi}{2}\frac{a}{KK'}+\frac{\Theta'(ak')}{\Theta(ak')}\right)+\frac{i}{2}\,lg\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}$$
$$=\frac{\Phi}{2}\frac{t}{\frac{T}{2}} \qquad +\frac{i}{2}\,lg\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}$$

erstens das noch in ihm enthaltene scheinbar Imaginäre fortzuschaffen; sodann nur algebraische Functionen von Θ-Reihen zu bekommen und endlich nicht für den Winkel selbst, sondern für den häufiger gebrauchten Sinus und Cosinus desselben Ausdrücke zu erhalten.

Vor Allem ist statt der ganzen Länge φ der Oscillations-Winkel φ' einzuführen, d. i. derjenige Winkel, in welchem die Länge φ in jedem Augenblicke in positivem oder negativem Sinne abweicht von der mittleren (der Zeit proportionalen) $\frac{\Phi}{2}\frac{t}{\frac{T}{2}}$, so dass

$$\varphi' = \varphi - \frac{\Phi}{2}\frac{t}{\frac{T}{2}}.$$

Dieser Oscillationswinkel nun

$$= \frac{i}{2}\,lg\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)} = \frac{1}{2i}\,lg\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}.$$

Jetzt sind beide Seiten der Gleichung, imaginär genommen, als Exponenten von e einzusetzen; man erhält

$$e^{i\varphi'} = \sqrt{\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}} = \frac{\Theta(u+ia)}{\sqrt{P}}, \text{ wo } P = \Theta(u+ia)\,\Theta(u-ia),$$

und daraus

$$\cos\varphi' = \frac{e^{i\varphi'}+e^{-i\varphi'}}{2} = \frac{\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)}{2\sqrt{P}},$$

$$\sin\varphi' = \frac{e^{i\varphi'}-e^{-i\varphi'}}{2i} = \frac{\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)}{2i\sqrt{P}},$$

und wenn man, um das Irrationale zu entfernen, dividirt, so findet sich

$$tg\,\varphi' = \frac{\frac{1}{2}[\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)]}{\frac{1}{2}[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)]}.$$

Dieser Reihenquotient aber ist nahezu einem geschlossenen Ausdrucke gleich zu achten, wenn man bedenkt, dass die in den Reihen

$$\tfrac{1}{2}[\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)] = \qquad q^{2b}(1-q^{2b})\sin 2x - q^{4-2b}(1-q^{2b})\sin 4x \cdots$$
$$\tfrac{1}{2}[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)] = 1 - q^{2b}(1+q^{2b})\cos 2x + q^{4-2b}(1+q^{2b})\cos 4x \cdots$$
$$\left(b = \frac{a}{K'}\right)$$

auftretende Grösse q in der Mehrzahl der Fälle ausserordentlich klein ist.

Zu demselben Ergebniss wie das ebengenannte kann man hier auch auf dem nicht wesentlich verschiedenen Wege gelangen, dass man in

$$\varphi' = \frac{i}{2}\, lg\, \frac{\Theta\,(u-ia)}{\Theta\,(u+ia)}$$

unter dem lg das Imaginäre vom Reellen in Zähler und Nenner scheidet, nämlich

$$\Theta\,(u-ia) = M - iN \text{ und folglich}$$
$$\Theta\,(u+ia) = M + iN$$

setzt. Dann wird

$$\varphi' = \frac{i}{2}\, lg\, \frac{M-iN}{M+iN}$$
$$= arctg\, \frac{N}{M},$$

wobei unter $arctg$ der kleinste positive Bogen verstanden ist. Hierin aber bekommen N und M die Werthe

$$N = \frac{1}{i}\left(+2q\, sin\, \frac{\pi u}{K}\, sin\, i\frac{\pi a}{K} - 2q^4\, sin\, \frac{2\pi u}{K}\, sin\, i\,\frac{2\pi a}{K} \pm \ldots\right)$$
$$M = 1 \quad -2q\, cos\, \frac{\pi u}{K}\, cos\, i\frac{\pi a}{K} + 2q^4\, cos\, \frac{2\pi u}{K}\, cos\, i\,\frac{2\pi a}{K} \pm \ldots,$$

welche mit Hilfe von

$$\frac{1}{i} sin\, i\alpha = \frac{e^{+\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$$
$$cos\, i\alpha = \frac{e^{+\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$

und

$$\frac{\pi u}{2K} = x, \quad e^{\frac{\pi a}{K}} = q^b$$

genau in die oben angezogenen Reihen übergehen.

Auf den gefundenen Werth von φ' leidet ferner der von Jacobi, W. II, 188, 189 geführte Beweis Anwendung; diesem zufolge kann

auch der Oscillations-Winkel φ' nie $\frac{\pi}{2}$ übersteigen

(so wenig wie bei dem vorliegenden Probleme die halbe Längen-Periode $\frac{\Phi}{2}$). Denn in der Reihe, auf welche der Werth von φ' sich auch bringen lässt:

$$\varphi' = \frac{i}{2}\, lg\, \frac{\Theta\,(u-ia)}{\Theta\,(u+ia)}$$
$$= arctg\, \frac{q^{1-b}\, sin\, 2x}{1 - q^{1-b}\, cos\, 2x} + arctg\, \frac{q^{3-b}\, sin\, 2x}{1 - q^{3-b}\, cos\, 2x} + \ldots$$
$$= arctg\, \frac{q^{1+b}\, sin\, 2x}{1 - q^{1+b}\, cos\, 2x} - arctg\, \frac{q^{3-b}\, sin\, 2x}{1 - q^{3+b}\, cos\, 2x} - \ldots$$

erreicht jeder einzelne $arctg$ sein Maximum für

$$cos\, 2x = q^u,$$

wo n irgend einen der vorkommenden Exponenten bedeutet, und dieses Maximum selbst ist

$$arcsin\, q^u < \frac{\pi}{2},$$

woraus

$$\frac{i}{2}\, lg\, \frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)} < arcsin\, q^{1-b} < \frac{\pi}{2}$$

hergeleitet wird.

VI. Die Geschwindigkeit.

21. Geschwindigkeit in der Meridianebene, und längs der Bahncurve.

Durch Differentiation von

$$sin\,\beta = sin\,\beta_1\, sin\, coam\left(\frac{\omega}{cos\,\mu}\, t\right)$$

und Einsetzung des Werthes für $cos\,\beta$ ergiebt sich

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{k'^2\omega\, tg\,\beta_1}{cos\,\mu}\cdot\frac{sin\, am\, u}{\Delta\, am\, u\sqrt{1+tg^2\beta_1\, sin^2\mu\, sin^2 am\, u}}\quad (k = sin\,\beta_1\, cos\,\mu)$$

$$= -\frac{k'^2\omega\, tg\,\beta_1}{cos\,\mu}\cdot\frac{cos\, coam\, u}{\sqrt{1+tg^2\beta_1\, sin^2\mu\, sin^2 am\, u}}.$$

Dieser Werth wird für die Werthe des Argumentes

$$0\ \ldots \frac{\omega}{cos\,\mu}.T\quad \frac{\omega}{cos\,\mu}.2T\ldots$$

oder für

$$\beta = \beta_1 \ldots -\beta_1\ \ldots +\beta_1\ \ \ldots$$

zu Null, und β geht an jeder dieser Stellen vom Sinken ins Steigen und umgekehrt über.

Da nun ferner, wenn s die Länge des zurückgelegten Weges auf der Bahncurve bedeutet,

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = \frac{a^2(d\beta^2+cos^2\beta\, d\varphi^2)}{dt^2},$$

und nach S. 166

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{cos^2\beta_0}{cos^2\beta}\,\varphi'_0, \text{ also}$$

$$cos^2\beta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{cos^4\beta_1}{cos^2\beta}\cdot\varphi'^2_0,$$

so wird

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{k'^4\omega^2 tg^2\beta_1}{cos^2\mu}\cdot\frac{sin^2 am\, u}{\Delta^2 am\, u\,(1+tg^2\beta_1\, sin^2\mu\, sin^2 am\, u)}$$

$$+\ \varphi'^2_0\, cos^4\beta_1\cdot\frac{\Delta^2 am\, u}{cos^2\beta_1\,(1+tg^2\beta_1\, sin^2\mu\, sin^2 am\, u)}$$

$$= \frac{\omega^2}{cos^2\mu}\cdot\frac{k'^4 tg^2\beta_1\, sin^2 am\, u + sin^2\mu\,\Delta^4 am\, u}{\Delta^2 am\, u\,(1+tg^2\beta_1\, sin^2\mu\, sin^2 am\, u)}.$$

Dieser Bruch kann, so lange ω nicht verschwindet, wie auch die Anfangsgeschwindigkeit sei,

$$\text{nie} = 0$$

werden, das Mobil also nicht ruhen. Es sei selbst

$$\varphi'_0 = 0,$$

oder, da überdies die Annahme $\beta'_0 = 0$ durchweg gemacht worden ist, das Mobil sei anfänglich in Ruhe. Auch in diesem Falle, wo $k'^2 = \cos^2\beta_1$, $\mu = 0$ ist, und die rechte Seite in

$$\omega^2 \frac{\sin^2\beta_1 \cos^2\beta_1 \sin^2 am\,\omega t}{\Delta^2 am\,\omega t}$$

übergeht, ist ein Verschwinden derselben nur in zwei Fällen möglich: 1. wenn $\beta_1 = 0$, 2. wenn $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$; das bedeutet: auch aus der Formel zeigt sich (vergl. S. 11.), dass ein Ruhen des Mobils ausserhalb des Poles und des Aequators unmöglich ist.

Für

$$\omega = 0$$

wird in der allgemeinen Formel für $\frac{1}{a^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$

$$k^2 = 0, \quad \frac{\omega^2}{\cos^2\mu} = 0$$

und

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \varphi'^2_0 \cos^2\beta_1 \frac{tg^2\beta_1 \sin^2 u + 1}{1 + tg^2\beta_1 \sin^2 u} = Const. = \varphi'^2_0 \cos^2\beta_1.$$

VII. Abhängigkeit der Coordinaten von einander.

22. φ ausgedrückt durch β. Rückkehr zu einem durchlaufenen Punkte.

Will man das gefundene analytisch-mechanische Resultat sich durch eine Functionscurve geometrisch verdeutlichen, so ist die Abhängigkeit der sphärischen Coordinaten von einander darzulegen, nämlich nach Elimination der Zeit. Dies kann geschehen, indem in der Formel für φ.

$$\varphi = t\frac{\omega}{\cos\mu}\left(\frac{\pi}{2}\frac{a}{KK'} + \frac{\Theta'(ak')}{\Theta(ak')}\right) + arctg\frac{N}{M}$$

nach S. 162 das elliptische Integral erster Gattung

$$u = t\frac{\omega}{\cos\mu} = F(\sigma)$$

substituirt wird (dessen numerische Werthe in Tafeln gebracht sind — Legendre, *Traité des ff. ell.* Bd. II, Taf. IX). Denn dadurch findet sich

$$\varphi = F(\sigma)\left(\frac{\pi}{2}\frac{a}{KK'} + \frac{\Theta'(ak')}{\Theta(ak')}\right)$$
$$+ arctg \frac{q^{1-b}(1-q^{2b})\sin\left(\pi\frac{F(\sigma)}{K}\right) - \dots}{1 - q^{1-b}(1+q^{2b})\cos\left(\pi\frac{F(\sigma)}{K}\right) + \dots},$$

worin

$$\sin^2\sigma = \frac{1-\xi_2}{1-\xi_1}\cdot\frac{\xi-\xi_1}{\xi-\xi_2}$$
$$= \frac{1}{\sin^2\beta_1\cos^2\mu} + \frac{\cos^2\beta - \cos^2\beta_1}{\cos^2\beta + tg^2\mu}.$$

Dann hängt die Länge φ nur noch von der Breite β und den Constanten k, q, a, β_1, μ ab, die sich auf die zwei

$$\beta_1 \text{ und } \mu$$

oder ebenso auf die zwei Constanten

$$\beta_1 \text{ und } \frac{\varphi'_0}{\omega}$$

zurückbringen lassen. —

Die Curve mit den Ordinaten β, wenn die Längen φ die Abscissen sind, theilt in Bezug auf die Periodicität die wesentlichen Eigenschaften der wirklichen Bahncurve.

Diese Bahn des Mobils, eine Curve doppelter Krümmung, wird eine wellenartige Linie, durch den Aequator in congruente Stücke zertheilt, ferner symmetrisch zu aufeinanderfolgenden Meridianen, welche je um eine halbe Längenperiode $\frac{\Phi}{2}$, die einen Quadranten nicht überschreitet, von einander entfernt sind. —

Wenn die Halbperiode $\frac{\Phi}{2}$ zu π ein rationales Verhältniss hat, so wird, nachdem das Mobil eine bestimmte endliche Anzahl Male die Kugel umwandert hat, es genau wieder die früheren Punkte durchlaufen. Wenn aber nicht, so trifft das Mobil in demselben Punkte, in dem es einmal gewesen, erst nach unendlich langer Zeit wieder ein.

Zur Uebersicht der Längenperioden im Vergleich zur Breite dient die angehängte Mercator-Projection der Bahnen (Fig. 4). In ihr ist

bei Curve Nr. 1 $\quad \sin\beta_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}},\quad 0 = \frac{\varphi'_0}{\omega}$,

„ „ „ 2 und 3 $\quad \sin\beta_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}},\quad 0 < \frac{\varphi'_0}{\omega} < \infty$,

„ „ „ 4 $\quad \sin\beta_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}},\quad \frac{\varphi'_0}{\omega} = \infty$,

„ „ „ 5 $\quad \sin\beta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad 0 < \frac{\varphi'_0}{\omega} < \infty$.

Zu Fig. 1.

Gang auf Meridian.

Curve der Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Winkel (der geogr. Breite).

$$\frac{d\beta}{dt} = \beta'_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega\omega}{\beta'_0 \beta'_0} \sin^2\beta}, \qquad \beta'_0 = Const = 1.$$

$\omega > \beta'_0$, Oscillation. Z. B. $\omega = \beta'_0 . \sqrt{2}$

$\omega = \beta'_0$.

$\omega < \beta'_0$, Umlauf. Z. B. $\omega = \beta'_0 . \sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

Zu Fig. 2.

Gang auf Meridian.

Curve der Abhängigkeit der geograph. Breite von der Zeit.

$\beta'_0 = Const = 1$.

$\frac{\omega}{\beta'_0} = 0$, Umlauf. $\beta = \beta'_0 t$. $\qquad \frac{T}{2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\beta'_0} = 1{,}571.$

$\omega < \beta'_0$, Umlauf. $\beta = am\, \beta'_0 t$

$$mod \left(\lambda = \frac{\omega}{\beta'_0}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2 \Delta} \beta'_0 t + \dots$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{T}{2}} . t + \dots$$

z. B. $\omega = \beta'_0 \sqrt{\tfrac{1}{2}}$,

$\lambda = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$; $\frac{T}{2} = \frac{\Delta}{\beta'_0} = 1{,}854.$

$\omega = \beta'_0$ .... $\frac{T}{2} = \infty$, $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$.

$\omega > \beta'_0$, Oscillation. $\sin^2\beta = \sin^2\beta_1 \sin^2 am\, \omega t$

$$mod \left(k = \sin\beta_1 = \frac{\beta'_0}{\omega}\right),$$

z. B. $\omega = \beta'_0 \sqrt{2}$,

$k = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$; $\frac{T}{2} = \frac{K}{\omega} = 1{,}311,$

$\beta_1 = \frac{\pi}{4}$.

$\frac{\omega}{\beta'_0} = \infty$, Oscillation. $\beta = 0$ (Stillstand).
