Werk

Titel: Zeitschrift für Mathematik und Physik

Verlag: Teubner

Jahr: 1876

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 MATH I, 755:21

Werk Id: PPN599415665_0021

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN599415665_0021|LOG_0023

IX.

Ueber aufsteigende Kettenbrüche.

Von

Dr. S. Günther,

Privatdocent am Polytechnikum in München.

---

§ 1. Während die sogenannten absteigenden Kettenbrüche schon seit geraumer Zeit eifrig untersucht worden sind, hat man ihrem Analogon, den aufsteigenden Kettenbrüchen, verhältnissmässig nur sehr wenig Theilnahme geschenkt, obschon dieselben eines höheren Alters sich erfreuen, als erstere[1]. Auch nachdem in neuerer Zeit diese Gebilde wieder etwas mehr in den Vordergrund getreten waren, scheint man ihnen vom theoretischen Standpunkte aus ein geringeres Interesse zugewandt zu haben, als den gewöhnlichen Kettenbrüchen, und nach Herleitung einiger weniger einfacher Grundeigenschaften ging man sofort dazu über, ihre praktische Verwendbarkeit ins Auge zu fassen.

Es hatte zwar schon Lagrange[2] die Theorie dieser Formen wesentlich dadurch gefördert, dass er den einfachen Zusammenhang zwischen auf- und absteigenden Kettenbrüchen aufdeckte; indess scheint diese Arbeit des grossen Mathematikers nicht so bekannt geworden zu sein, wie sie es verdiente, wie denn auch die verdienstliche Schrift von Kunze[3] dieses interessante Factum nicht enthält. Später hat wohl zuerst Schlömilch[4] auf die erwähnte Relation hingewiesen. Eine kürzlich erschienene Abhandlung[5] stellt sich allerdings die Aufgabe, die aufsteigenden Kettenbrüche mit anderen selbstständigen analytischen Formen in Beziehung zu setzen, stets jedoch mit Rücksicht auf die Auflösung numerischer Gleichungen u. dergl.

Die vorliegende Arbeit im Gegentheil verfolgt den Zweck, die Theorie an sich zu erörtern und, wenn möglich, in einigen Punkten zu erweitern. Vor Allem soll dabei die Darstellung der aufsteigenden Kettenbrüche durch Determinanten in umfassender Weise zur Geltung kommen.

1) *Günther, Storia dello sviluppo della teoria delle frazioni continue fino ad Euler, Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, Tomo VII, S. 219.*

2) *Lagrange, Essai de l'analyse numérique, sur la transformation des fonctions, Journal de l'école polytechnique, Cahier V.* S. 93 flgg.
3) Kunze, Die aufsteigenden Kettenbrüche, Weimar 1857.
4) Schlömilch, Recension hierzu, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 3. Bd., Literaturzeitg. S. 63.
5) *Lembkes, Theoria fractionum continuarum ascendentium, Monasterii 1870.*

§ 2. Die independente Darstellung der Näherungswerthe des Kettenbruches

$$\frac{b_1 + \frac{b_2 + \dots + \frac{b_n}{a_n}}{a_2}}{a_1}$$

ist bereits an anderer Stelle gegeben worden[6]; da jedoch daselbst der Inductionsschluss angewandt wurde, so wird es sich hier empfehlen, diese Transformation auf einem mehr organischen Wege durchzuführen.

Bezeichnen wir mit

$$\frac{p_n}{q_n}$$

den n^{ten} Näherungswerth des genannten Kettenbruches, so können wir das recurrirende Bildungsgesetz dieser Werthe durch die Gleichung

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + b_n}{a_n q_{n-1}}$$

ausdrücken. Der Nenner q_n ist also sofort bekannt, gleich

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n;$$

dagegen besteht für den Zähler ganz ebenso ein System binomischer recurrirender Gleichungen, wie für die absteigenden Kettenbrüche bekanntlich ein trinomisches existirt. Man hat so

$$\begin{aligned}
p_n - a_n p_{n-1} &= b_n, \\
p_{n-1} - a_{n-1} p_{n-2} &= b_{n-1}, \\
\dots\dots\dots\dots & \\
p_3 - a_3 p_2 &= b_3, \\
p_2 - a_2 p_1 &= b_2, \\
p_1 &= b_1.
\end{aligned}$$

Hieraus findet sich

$$p_n = \frac{\begin{vmatrix} b_n & -a_n & 0 & \dots 0 & 0 \\ b_{n-1} & 1 & -a_{n-1} & \dots 0 & 0 \\ b_{n-2} & 0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_2 & 0 & 0 & \dots 1 & -a_2 \\ b_1 & 0 & 0 & \dots 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -a_n & 0 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 1 \end{vmatrix}}.$$

Die Determinante des Nenners reducirt sich auf ihr Diagonalglied 1; um die des Zählers auf die obenerwähnte Form zu bringen, machen wir die erste Colonne zur letzten; hierdurch tritt vor die Determinante der Factor

$$(-1)^{n-1}.$$

Multiplicirt man dann die $(n-1)$ Colonnen, welche kein b enthalten, durch (-1), so erhält die Determinante den Factor

$$(-1)^{n-1-n+1}=(-1)^0=+1,$$

und man bekommt

$$p_n=\begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_n \\ -1 & a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{n-1} \\ 0 & -1 & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & b_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_3 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-2} & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & -1 & 0 \\ b_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & -1 \\ b_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

6) Günther, Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form, Erlangen 1872, S. 42.

§ 3. Die Lagrange'sche Transformation ist in der letztgenannten Schrift ebenfalls behandelt worden; während jedoch der eine Beweis sich auf den Schluss von n auf $(n+1)$ stützt und also keinen Einblick in das Wesen der Sache gewährt, wurde der andere nur angedeutet. Es soll nun gezeigt werden, wie einfach sich diese Beziehung durch Anwendung des Determinantencalculs gestaltet.

Multiplicirt man in der für p_n zuletzt erhaltenen Determinante jede r^{te} Zeile $(r \leqq n \geqq 2)$ mit b_{r-1} und zieht von ihr alsdann die mit b_r multiplicirte $(r-1)^{\text{te}}$ Zeile ab, so ändert man die Determinante hierdurch nur insoweit, dass vor dieselbe der Factor

$$\varrho=(b_1 b_2 \dots b_{n-2} b_{n-1})^{-1}$$

tritt. Es wird demnach

$$p_n=\varrho.\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 b_1+b_2 & -b_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 b_3 & a_3 b_2+b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} b_{n-3}+b_{n-2} & -b_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-2} b_{n-1} & a_{n-1} b_{n-2}+b_{n-1} & -b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} b_n & a_n b_{n-1}+b_n \end{vmatrix}.$$

Transformirt man in analoger Weise den Nenner

$$q_n=a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix},$$

so folgt

$$q_n = \varrho.\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 b_2 & a_2 b_1 + b_2 & -b_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 b_3 & a_3 b_2 + b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} b_{n-3} + b_{n-2} & -b_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-2} b_{n-1} & a_{n-1} b_{n-2} + b_{n-1} & -b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} b_n & a_n b_{n-1} + b_n \end{vmatrix}.$$

Der Factor ϱ hebt sich bei der Division fort und man erkennt q_n und p_n als zusammengehörige Kettenbruchdeterminanten. Die letztere Eigenschaft liegt unmittelbar am Tage und es ist auch

$$p_n = b_1 \frac{\partial q_n}{\partial a_1}.$$

Es geht hieraus nach einem allgemeineren Lehrsatze[7] hervor, dass der Quotient beider Determinanten sofort als Kettenbruch geschrieben werden kann, und man erhält

$$\frac{p_n}{q_n} = \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{a_1 b_2}{a_2 b_1 + b_2 - \cfrac{a_2 b_1 b_3}{a_3 b_2 + b_3 - \cfrac{a_3 b_2 b_4}{a_4 b_3 + b_4 - \dots - \cfrac{a_{n-2} b_{n-3} b_{n-1}}{a_{n-1} b_{n-2} + b_{n-1} - \cfrac{a_{n-1} b_{n-2} b_n}{a_n b_{n-1} + b_n}}}}}}$$

in der geforderten Weise.

7) Günther, Beiträge zur Theorie der Kettenbrüche, Archiv d. Math. u. Phys. 55. Theil, S. 397.

§ 4. Eine einfache Anwendung können wir von dem Bisherigen machen, um die bekannte Formel abzuleiten, vermittelst deren Euler[8] eine Reihe in einen Kettenbruch zu verwandeln gelehrt hat. Hat man die alternirende Reihe

$$S = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + - \dots + (-1)^n b_n,$$

so ist dieselbe gleich der Determinante $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades

$$\begin{vmatrix} b_0 & 1 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 1 & \dots & & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & \dots & & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-2} & 0 & 0 & . & & 1 & 1 & 0 \\ b_{n-1} & 0 & 0 & . & & 0 & 1 & 1 \\ b_n & 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

wie sich sofort zeigt, wenn man von jeder Zeile die unter ihr stehende abzieht, von der untersten angefangen; denn alsdann reducirt sich die Determinante auf ihr Diagonalglied

$$[b_0 - b_1 + - \dots + (-1)^n b_n] . 1^n.$$

Um die Normalform zu erhalten, muss noch jede Colonne, die kein b enthält, mit (-1) multiplicirt werden; alsdann erkennt man, dass die obige Reihe dem aufsteigenden Kettenbruche

$$(-1)^{-n} \cdot \frac{b_0}{1} + \frac{b_1}{-1} + \dots + \frac{b_n}{-1}$$

gleich ist. Wird auf diesen Kettenbruch die in § 3 gefundene Transformationsformel angewandt, so ergiebt sich

$$S = \frac{(-1)^{-n} b_0}{1} + \frac{b_1}{b_1 - b_0} + \frac{b_0 b_2}{b_2 - b_1} + \dots + \frac{b_{n-3} b_{n-1}}{b_{n-1} - b_{n-2}} + \frac{b_{n-2} b_n}{b_n - b_{n-1}}.$$

Auch einige ähnliche Formeln von etwas allgemeinerer Natur, wie sie z. B. Nachreiner[9] ebenfalls durch eine Determinantenbetrachtung erhalten hat, haben ihre eigentliche Quelle in dem Theorem von Lagrange.

Eine ganz ähnliche Umformung hat auch G. Bauer[10] angewandt, um den Kettenbruch

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{b_1} + \frac{1 + b_1}{b_2} + \dots + \frac{1 + b_{n-1}}{b_n}$$

als Quotienten zweier Aggregate darzustellen. Schreibt man nämlich denselben in gewohnter Weise als Quotienten zweier Kettenbruchdeterminanten vom bezüglich $(n-1)^{\text{ten}}$ und n^{ten} Grade und addirt zu jeder Horizontalreihe alle darauf folgenden, so wird

$$Q_n = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \dots & 0 & b_n + 1 \\ -(b_1 + 1) & -1 & 0 \dots & 0 & b_n + 1 \\ 0 & -(b_2 + 1) & -1 \dots & 0 & b_n + 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots & -1 & b_n + 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots & -(b_{n-1} + 1) & b_n \end{vmatrix}$$

und entsprechend P_n. Um auf die Normalform zu bringen, mache man die letzte Verticalreihe zur ersten; dividirt man dann noch mit

$$[-(b_1 + 1)][-(b_2 + 1)] \dots [-(b_{n-1} + 1)],$$

so wird, da sich die Vorzeichen gegenseitig ausgleichen,

$$Q_n = (b_1 + 1)(b_2 + 1) \dots (b_{n-1} + 1) \frac{b_n + 1}{1} - \frac{b_n + 1}{b_1 + 1} - \dots - \frac{b_n}{b_{n-1} + 1}.$$

Führt man diesen Kettenbruch in das gleichgeltende Aggregat über, so wird

$$Q_n = (b_1 + 1)(b_2 + 1) \dots (b_{n-1} + 1)(b_n + 1)\Big(1 - \frac{1}{b_1 + 1} + \frac{1}{(b_1 + 1)(b_2 + 1)} - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(b_1 + 1)(b_2 + 1) \dots (b_n + 1)}\Big),$$

und ein ähnlicher Werth existirt für P_n.

8) Euler, Einleitung in die Analysis des Unendlichen, deutsch von Michelsen, 1. Bd., Berlin 1788, S. 395.
9) Nachreiner, Beziehungen zwischen Determinanten und Kettenbrüchen, München 1872, S. 16.
10) Bauer, Von einem Kettenbruche Euler's und einem Theorem von Wallis, München 1872, S. 10.

§ 5. In die Kategorie der hier discutirten Objecte gehört auch die Anwendung, welche ein von Lucas[11] aufgestellter Satz zu machen verstattet: Sind

$$a_1, a_2 \dots a_m \dots a_n$$

willkürliche Grössen mit der Summe S, und wird

$$A_m = S - a_m$$

gesetzt, so hat die Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} -A_1+x & a_2 & \dots & a_{m-1} & a_m & a_{m+1} & \dots & a_n \\ a_1 & -A_2+x & \dots & a_{m-1} & a_m & a_{m+1} & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & \dots & -A_{m-1}+x & a_m & a_{m+1} & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{m-1} & -A_m+x & a_{m+1} & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{m-1} & a_m & -A_{m+1}+x & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{m-1} & a_m & a_{m+1} & \dots & -A_n+x \end{vmatrix}$$

den Werth

$$x(x-S)^{n-1}.$$

Um dies zu erkennen, braucht man nur nach einem bekannten Satze[12] die Determinante in eine nach aufsteigenden Potenzen von x fortlaufende Reihe zu entwickeln, denn dann findet man

$$\varDelta = x^n - \binom{n-1}{1}(a_1+\dots+a_n)\,x^{n-1} + \binom{n-1}{2}(a_1+\dots+a_n)^2\,x^{n-2} \\ -+\dots+\binom{n-1}{n-1}(a_1+\dots+a_n)^{n-1}\,x,$$

indem das von x freie Glied

$$\begin{vmatrix} -A_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & -A_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & \dots & -A_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & -A_n \end{vmatrix}$$

ersichtlich identisch verschwindet; es ist also in der That

$$\varDelta = x\,[x-(a_1+\dots+a_n)]^{n-1}.$$

Zwei andere Beweise können an anderer Stelle[13] nachgesehen werden*.

---

* In der genannten Arbeit ist das Versehen begangen worden, dass

$$\binom{n}{q} \text{ statt } \binom{n-1}{q}$$

durchgehends geschrieben wurde, was hiermit berichtigt werden möge.

Die Determinante Δ möge nun aber auch in der Weise transformirt werden, dass von jeder Zeile, die letzte natürlich ausgenommen, die zunächst unter ihr stehende abgezogen wird. Dann ist

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-(A_1+a_1) & A_2+a_2-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x-(A_2+a_2) & A_3+a_3-x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-(A_3+a_3) & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-(A_{n-1}+a_{n-1}) & A_n+a_n-x \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x-a_n \end{vmatrix}.$$

Nun ist aber der Definition gemäss

$$A_r + a_r = S;$$

dividirt man also mit $(x-S)$ die ersten $(n-1)$ Horizontalreihen, so erhält man

$$\Delta = (x-S)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x-A_n \end{vmatrix}.$$

Machen wir jetzt alle Colonnen zu Zeilen und substituiren für Δ den oben gefundenen Werth, so wird

$$x = \begin{vmatrix} x-A_n & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{x-A_n}{1} + \frac{a_{n-1}}{1} + \dots + \frac{a_1}{1}.$$

Durch Verwandlung in einen absteigenden Kettenbruch wird

$$x = \frac{x-A_n}{1} - \cfrac{a_{n-1}}{x-A_n+a_{n-1} - \cfrac{a_{n-2}(x-A_n)}{a_{n-1}+a_{n-2} - \dots - \cfrac{a_3 a_1}{a_2+a_1}}},$$

und man hat hierdurch ein einfaches Mittel an die Hand gegeben, jede willkürliche Zahl in einen Kettenbruch von beliebig vielen Gliedern zu verwandeln.

11) Lucas, *Sur une formule d'analyse, Compt. rend. de l'acad. franç. 1870,* S. 1167.

12) Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig 1870, S. 30.

13) Günther, Ueber einige Determinantensätze, Sitzungsber. d. phys.-med. Societät zu Erlangen, 5. Heft, S. 88 flgg.

§ 6. Verschiedene Autoren, darunter besonders auch Heis[14], haben gezeigt, dass die aufsteigenden Kettenbrüche mit Nutzen zur Auflösung höherer Gleichungen gebraucht werden können. Ein interessanter Zusammenhang zwischen beiden wird durch folgenden, anscheinend noch nicht erwähnten Lehrsatz festgestellt:

Hat der aufsteigende Kettenbruch

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{b_1}{m}+b_2}{m}+\cdots+b_{n+1}}{m}$$

den Werth Null, so ist m ein Wurzelwerth der Gleichung

$$F \equiv b_1 x^n + b_2 x^{n-1} + \ldots + b_n x + b_{n+1} = 0.$$

Dass dies sich wirklich so verhält, lässt sich leicht durch Induction erweisen; elementar dagegen kommen wir durch folgende Ueberlegung zum Ziele.

Wenn m eine Wurzel der obigen Gleichung ist, so muss, wenn man in F für x dieses m substituirt, dies Polynom sich annulliren, mit anderen Worten: Eliminirt man aus den beiden Gleichungen

$$F = 0, \quad -x + m = 0$$

die Grösse x, so muss das Eliminationsresultat identisch verschwinden. Nach Sylvester's dialytischer Methode müsste also die Gleichung

$$\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 \\ b_2 & m & -1 & \ldots 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & 0 & 0 & \ldots 0 & m & -1 \\ b_{n+1} & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & m \end{vmatrix} = 0$$

existiren. Gelingt es nun, diese Identität auf anderem Wege nachzuweisen, so ist der Beweis für unsern Lehrsatz als erbracht anzusehen. Wenn aber der genannte aufsteigende Kettenbruch verschwinden soll, so kann dies, da m natürlich als endlich angenommen ist, nur dadurch geschehen, dass der Zähler

$$\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 \\ b_2 & m & -1 & \ldots 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & 0 & 0 & \ldots 0 & m & -1 \\ b_{n+1} & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & m \end{vmatrix}$$

gleich Null wird.

14) Matthiessen, Schlüssel zur Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra von Heis, Köln und Wien 1873, S. 181 flgg.

§ 7. Als Corollar des eben besprochenen Satzes ergiebt sich uns, dass, wenn auch

$$b_1 = b_2 = \ldots = m_1$$

ist, der Kettenbruch

$$\cfrac{\cfrac{m_1}{m}+\cdots+m_1}{m_{(n)}}$$

den Werth

$$\frac{m_1}{m^n}(m^{n-1}+m^{n-2}+\ldots+m^2+m+1)$$

hat. Summirt man die geometrische Reihe, so folgt Nachstehendes:

Der aufsteigende Kettenbruch von eingliedriger Periode $\left(\frac{b}{a}\right)$ ist gleich

$$M=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^n-1}{a-1}.$$

Diese Relation kann nun aber auch benützt werden, um den Werth eines absteigenden Kettenbruches von eingliedriger Periode kennen zu lernen. Denn man findet nach § 3

$$M=\cfrac{b}{a-\cfrac{ab}{ab+b-\cfrac{ab^2}{ab+b-\ldots-\cfrac{ab^2}{ab+b}}}},$$

und zwar besteht der periodische Theil dieses Kettenbruches aus $(n-2)$ Theilbrüchen. Um die Grösse V dieses periodischen Theiles zu finden, setzen wir

$$ab^2=x,\quad ab+b=y,$$

also

$$a=\frac{x}{\frac{y^2}{2}-x+y\sqrt{\frac{y^2}{4}-x}},\quad b=\frac{y}{2}+\sqrt{\frac{y^2}{4}-x}$$

und

$$M=\cfrac{\frac{y}{2}+\sqrt{\frac{y^2}{4}-x}}{\cfrac{x}{\frac{y^2}{2}-x+y\sqrt{\frac{y^2}{4}-x}}-\cfrac{\frac{y}{2}-\sqrt{\frac{y^2}{4}-x}}{y-V}}.$$

Indem man für M seinen Werth einsetzt, findet man nach einigen Transformationen

$$V=x\,\frac{\left(\frac{y}{2}+\sqrt{\frac{y^2}{4}-x}\right)^{n-3}-\left(\frac{y}{2}-\sqrt{\frac{y^2}{4}-x}\right)^{n-3}}{\left(\frac{y}{2}+\sqrt{\frac{y^2}{4}-x}\right)^{n-2}-\left(\frac{y}{2}-\sqrt{\frac{y^2}{4}-x}\right)^{n-2}}$$

in bekannter Weise.

§ 8. Aus dem in § 6 bewiesenen Satze leiten sich einfach mehrere Theoreme her, welche Siacci[15] ohne Beweis aufgestellt hat. Es sollen nämlich für die Gleichung

$$F\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

die beiden Identitäten

$$\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_0}+x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_2}{a_0} & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_3}{a_0} & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ \frac{a_{n-1}}{a_0} & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ \frac{a_n}{a_0} & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} = \frac{F}{a_0}$$

und

$$\begin{vmatrix} 1+\frac{a_{n-1}}{a_n}x & -x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_{n-2}}{a_n}x & 1 & -x & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_{n-3}}{a_n}x & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ \frac{a_1}{a_n}x & 0 & 0 & \dots & 1 & -x \\ \frac{a_0}{a_n}x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{F}{a_n}$$

bestehen. Die erste Relation erhellt sofort, wenn man die Determinante dadurch, dass man die Summe

$$\frac{a_1}{a_0}+x$$

in ihre beiden Summanden zerlegt, ebenfalls als Summe zweier Theile darstellt; denn der erste Summand hat nach dem Obigen den Werth

$$\frac{1}{a_0}(a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n),$$

der zweite dagegen ist gleich

$$x^n.$$

Um die zweite Beziehung nachzuweisen, dividire man zunächst jede Zeile durch x und zerlege alsdann in der nämlichen Weise, so erhält man ebenfalls als ersten Summanden den aufsteigenden Kettenbruch

$$\frac{1}{a_n}\cdot\cfrac{a_{n-1}}{\cfrac{1}{x}}+\cfrac{a_{n-2}}{\cfrac{1}{x}}+\dots+\cfrac{a_1}{\cfrac{1}{x}}+\cfrac{a_0}{\cfrac{1}{x}}$$

und dieser ist gleich

$$\frac{1}{a_n}\frac{a_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}+a_{n-2}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-2}+\ldots+a_1\left(\frac{1}{x}\right)+a_0}{\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

oder, indem man mit x^n multiplicirt,

$$\frac{1}{a_n}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x).$$

Der zweite Summand wird sein

$$\frac{1}{a_n}x^n\left(\frac{1}{x}\right)^n=\frac{1}{a_n},$$

so dass die Summe wirklich den Werth

$$\frac{F}{a_n}$$

erhält.

Siacci[16] hat für seine beiden Sätze in der Folge selbst einen eleganten Beweis geliefert; jedoch scheint der hier betretene Weg der natürlichere zu sein.

Unmittelbar folgen aus den obigen Sätzen zwei weitere, welche ihr Begründer (a. a. O.) in dieser Weise formulirt: „*Se si dicono* P_{rs} *e* Q_{rs} *i complementi algebrici di due elementi omologhi di* P *e* Q *si ha*

$$a_0P_{rr}x+a_nQ_{rr}=F,\quad a_0P_{rs}x+a_nQ_{rs}=0.\text{“}$$

15) *Siacci, Intorno ad una serie e ad una funzione dei coefficienti binomiali,* Battaglini's *Giornale di Matematiche, Vol. XI.*

16) *Siacci, Intorno ad alcune trasformazioni di determinanti, Torino 1872,* S. 10.

Ist mit Vorstehendem der Nachweis gelungen, dass auch in der elementaren Lehre von den aufsteigenden Kettenbrüchen noch mancher theoretisch interessante Gesichtspunkt zu finden sei, so hat diese Arbeit ihren Zweck erreicht.

§ 9. Bekanntlich existirt eine grosse Anzahl von Methoden zur Verwandlung unendlicher Reihen in ebensolche Kettenbrüche, und zwar lassen sich dieselben der Hauptsache nach auf die classischen Arbeiten von Euler und Lagrange zurückführen. Aber all' diese Methoden, deren übersichtlichste Zusammenstellung man in dem grossen Handbuche von Eytelwein[17] findet, leiden an dem grossen Uebelstande, dass die Convergenz des resultirenden Kettenbruches erst nachträglich durch eine oft sehr schwierige Discussion festzustellen ist. Nur eine gewisse Classe dieser Methoden macht hiervon eine Ausnahme; wir meinen diejenigen, welche nicht nur zwischen Reihe und Kettenbruch an sich, sondern auch zwischen den einzelnen Theilen derselben vollkommene Gleichheit herstellen[18]. Die betreffende Entwickelung wird meistens nur für specielle Fälle gegeben, lässt sich aber in der That sehr leicht für den allgemeinen Fall einer willkürlichen Potenzreihe durchführen, sobald man dieselbe als aufsteigenden Kettenbruch behandelt. Diese Ausdehnung soll nun hier geleistet werden; vorher aber wollen wir noch eine Definition einführen, welche, ursprünglich von Seidel[19] herrührend, bei unserem Problem besonders gute Dienste zu leisten scheint. Dabei möge vorausgesetzt werden, dass man es lediglich mit convergenten Reihen zu thun habe, indem ein Operiren mit divergirenden keinen eigentlichen Sinn hat. Wir sagen nun:

Ist eine gewisse endliche Grösse durch Ausdrücke gegegeben, welche ein unendlich fortgesetztes Wiederholen einer gewissen Operation erfordern (Reihe, Factorenfolge, Kettenbruch, Potenz), und stehen diese Ausdrücke in einer solchen gegenseitigen Relation, dass nicht nur sie selbst, sondern auch ihre p^{ten} Näherungswerthe einander bezüglich gleich sind, so nennen wir solche Ausdrücke äquivalent.

Alsdann stellen wir uns folgende Aufgabe:

Es soll die (convergente) allgemeine Potenzreihe

$$\frac{x^p}{a_1}+\frac{x^{p+h}}{a_2}+\frac{x^{p+2h}}{a_3}+\ldots\equiv S$$

in einen äquivalenten Kettenbruch umgesetzt werden.

Verstehen wir hier unter p eine ganze, unter h dagegen eine ganz willkürliche reelle Zahl, so ist das vorstehend formulirte Problem wohl das allgemeinst denkbare, insofern darin alle gesetzmässig fortschreitenden Reihen begriffen sind.

Wir haben zunächst offenbar

$$S=\cfrac{x^p+\cfrac{x^{p+h}+\cfrac{x^{p+2h}+\ldots,}{\frac{a_3}{a_2}}}{\frac{a_2}{a_1}}}{a_1}$$

und zwischen diesem Kettenbruch und der obigen Reihe besteht, wie eine einfache Rechnung zeigt, wiederum die Beziehung der Aequivalenz Den aufsteigenden Kettenbruch transformiren wir jetzt in bekannter Weise in einen absteigenden und bekommen

$$S_1=\frac{x^p}{a_1}-\cfrac{a_1x^{p+h}}{\frac{a_2}{a_1}x^p+x^{p+h}-\cfrac{\frac{a_2}{a_1}x^p\,x^{p+2h}}{\frac{a_3}{a_2}x^{p+h}+x^{p+2h}-\cfrac{\frac{a_3}{a_2}x^{p+h}\,x^{p+3h}}{\frac{a_4}{a_3}x^{p+2h}+x^{p+3h}-\ldots.}}}$$

Den jetzt erhaltenen Kettenbruch gestalten wir weiter dadurch um, dass wir den Satz, wonach man stets zwei Theilzähler und den zwischenliegenden Theilnenner mit einer willkürlichen Zahl ($\gtrless 0$) multipliciren darf, sowohl auf die Potenzen von x, als auch auf die Constanten anwenden. So ergiebt sich schliesslich

$$S_2 = x^p \cdot \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{a_1^2 x^h}{a_2 + a_1 x^h - \cfrac{a_2^2 x^h}{a_3 + a_2 x^h - \cfrac{a_3^2 x^h}{a_4 + a_3 x^h - \dots}}}}.$$

Was nun den zuerst gewonnenen Kettenbruch anlangt, so ergiebt sich aus der oben durchgeführten Determinantenbetrachtung unmittelbar, dass S_1 dem aufsteigenden Kettenbruch äquivalent sein muss, und diese Beziehung ward natürlich durch die weiterhin an S_1 vorgenommene Veränderung nicht gestört. Nun sind aber offenbar zwei analytische Gebilde äquivalent, wenn sie einem dritten äquivalent sind, und es erhellt also die Wahrheit:

Der absteigende Kettenbruch S_2 ist der Reihe S nicht allein gleich, sondern auch äquivalent.

Nunmehr ist jede ähnliche Transformation einfach zu bewerkstelligen. Wollten wir die Function $\sin x$ als unendlichen Kettenbruch darstellen, so würde die gewöhnliche Regel, bei der $h=1$ vorausgesetzt wird, versagen, d. h. sie würde auf eine unbrauchbare Form führen, indem jede Constante mit geradem Index $=\infty$ gesetzt werden müsste. Für uns ist dagegen, weil $\sin x$ der Reihe

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$$

gleichwerthig ist,

$$p=1, \quad h=2, \quad a_n = (2n-1)!,$$

und wir finden demnach

$$\sin x = \cfrac{x}{1! - \cfrac{(1!)^2 x^2}{3! + 1!\, x^2 - \cfrac{(3!)^2 x^2}{5! + 3!\, x^2 - \cfrac{(7!)^2 x^2}{7! + 5!\, x^2 - \dots}}}}.$$

Da aber

$$(2n-1)! : (2n-3)! = (2n-1)(2n-2)$$

ist, so können wir durch Anwendung des schon oben gebrauchten Satzes auch diese Form herstellen:

$$\sin x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{1.1\, x^2}{2.3 + x^2 - \cfrac{2.3\, x^2}{4.5 + x^2 - \cfrac{4.5\, x^2}{6.7 + x^2 - \dots}}}}.$$

Auch hier ist das Fortschreitungsgesetz augenfällig.

Fassen wir als ein anderes Beispiel die gewöhnliche hypergeometrische Reihe von Gauss

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\,\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)} + \dots$$

auf. In diesem Falle wird, wenn wir das Glied 1 nicht mit zur Reihe rechnen,

$$p = 1 = h, \quad a_m = 1 : \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+m-1)\,\beta(\beta+1)\dots(\beta+m-1)}{m!\,\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+m-1)},$$

und sonach

$$-1+F(\alpha,\beta,\gamma)=\cfrac{x}{\cfrac{1!\,\gamma}{\alpha\beta}-\cfrac{\left(\frac{1!\,\gamma}{\alpha\beta}\right)^2 x}{\cfrac{2!\,\gamma(\gamma+1)}{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}+\cfrac{1!\,\gamma}{\alpha\beta}x-\cfrac{\left(\frac{2!\,\gamma(\gamma+1)}{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}\right)^2 x}{\cfrac{3!\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\,\beta(\beta+1)(\beta+2)}+\cfrac{2!\,\gamma(\gamma+1)}{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}x-\ldots}}}$$

Aus dieser Form lassen sich die anderen bekannten leicht herleiten und überdies geniesst man des grossen Vortheils, die Convergenz *a priori* behaupten zu können, sobald natürlich die Reihe F selbst convergent, d. h. wenn $x < 1$ oder aber für

$$x=1,\quad \alpha+\beta>\gamma$$

war.

Erwähnt möge anhangsweise noch werden, dass der von uns hier mehrfach verwandte Begriff der Aequivalenz Erweiterung zulässt. Würde man die hier charakterisirte Aequivalenz die einfache nennen, so würde ihr eine mn-fache entsprechen, die so zu definiren wäre:

Zwei unendliche Ausdrücke (dies Wort im Sinne Euler's genommen) haben eine $m-n$-fache Aequivalenz, wenn der m^{te} Näherungswerth des einen dem n^{ten} des andern gleich ist. Für $m=n$ ist die Aequivalenz eine einfache.

So hat die von Pacioli erfundene und von Bertrand[20] wieder reproducirte Näherungsreihe zur Bestimmung des Wurzelwerthes

$$\sqrt{a^2+p}$$

zu der bekannten Kettenbruchentwickelung

$$a+\cfrac{p}{2a+\cfrac{p}{2a+\ldots}}$$

eine $n-2^{n-1}$-fache Aequivalenz, wie wir dies bei einer andern Gelegenheit[21] nachgewiesen haben.

17) Eytelwein, Grundlehren der höheren Analysis, 1. Band, Berlin 1824, S. 361 flgg.

18) Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analysis, Jena 1868, S. 315.

19) Seidel, Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen dem Bildungsgesetz eines Kettenbruches und der Art des Fortganges seiner Näherungswerthe, München 1875, S. 7.

20) *Bertrand, Traité d'arithmétique, Paris 1867,* S. 245 flgg.

21) *Günther-Sparagna, Paragone di due metodi per la determinazione approssimata di grandezze irrazionali, Boncompagni Bullettino, Tomo VII,* S. 596.