## Werk

**Titel:** Zeitschrift für Mathematik und Physik

**Verlag:** Teubner

**Jahr:** 1876

**Kollektion:** mathematica

**Signatur:** 8 MATH I, 755:21

**Werk Id:** PPN599415665_0021

**PURL:** http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN599415665_0021|LOG_0024

# X.

# Ueber die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit im Zusammenhange stehende Fragen.

Von

Prof. Helmert
am Polytechnikum in Aachen.

(Hierzu Taf. IV, Fig. 1—18.)

## § 1. Allgemeine Formeln.

Wir bezeichnen die absoluten Werthe der Beobachtungsfehler für $n$ Beobachtungen mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ und die Summe ihrer $m^{\text{ten}}$ Potenzen $[\varepsilon^m]$ mit $n\sigma_m$. Der durchschnittliche Werth von $n\sigma_m$, wenn man jedem $\varepsilon$ alle möglichen Werthe nach seiner Wahrscheinlichkeit beilegt, ist gleich $nS_m$, wobei

$$1)\qquad S_m = \int_0^a \varepsilon^m \psi(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Hierin ist $a$ der überhaupt erreichbare Maximalfehler und $\psi(\varepsilon) = \varphi(+\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)$, falls $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass ein Beobachtungsfehler $\varepsilon$ mit Rücksicht auf sein Vorzeichen zwischen $\varepsilon - \frac{d\varepsilon}{2}$ und $\varepsilon + \frac{d\varepsilon}{2}$ liege.

Wir wenden uns nun zur Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der $m^{\text{ten}}$ Potenzen von $n$ Beobachtungsfehlern liegen werde zwischen den Grenzen

$$n\left(\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}\right) \text{ und } n\left(\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}\right),$$

worin der Einfachheit halber $\delta_m$ geradezu das Differential von $\sigma_m$ bedeuten möge. Wir bezeichnen diese Wahrscheinlichkeit mit $\varphi(\sigma_m)\,\delta_m$. Um sie kennen zu lernen, hat man zwei Wege. Entweder nimmt man successive $n=1, 2, \ldots$ oder man nimmt $n$ beliebig und sucht mittelst eines Discontinuitätsfactors die vorkommenden Integrationen zu bewältigen. Allgemein ist das Problem nur unter beschränkenden Voraussetzungen lösbar; bekanntlich hat Gauss ohne Beweis Endformeln gegeben, welche ein sehr grosses $n$ voraussetzen, aber für ein ganz beliebiges Fehlergesetz $\varphi(\varepsilon)$ gelten sollen. Schon Poisson hat bei einer ähnlichen Untersuchung (mit $m=1$) gezeigt, dass jedenfalls eine Beschränkung auf denkbare Fehlergesetze nöthig ist und $\varphi(\varepsilon)$ nicht jede denkbare Function von $\varepsilon$ sein darf.

Ist $n=1$, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass $\varepsilon_1^m$ zwischen $\sigma_m \mp \frac{\delta_m}{2}$ liege, gleich

$$\varphi(\sigma_m)_1\, \delta_m = \int\limits_{\sqrt[m]{\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}}}^{\sqrt[m]{\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}}} \psi(\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

wobei dem Zeichen $\varphi(\sigma_m)$ der Index 1 wegen $n=1$ angehängt worden ist. Weil nun $\delta_m$ nur ein Differential sein soll, wird

$$\varphi(\sigma_m)_1\, \delta_m = \left(\sqrt[m]{\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}} - \sqrt[m]{\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}}\right) \psi(\sqrt[m]{\sigma_m}).$$

Indem nun $\sigma_m$ genau genommen niemals gleich Null gesetzt werden darf, sondern immer um wenigstens $\frac{\delta_m}{2}$ davon entfernt bleiben muss (da ja eine negative Grenze für $\varepsilon_1^m$ ausgeschlossen ist), so ist auch (wie nach leichter Reduction gefunden wird)

$$2) \qquad \varphi(\sigma_m)_1\, \delta_m = \frac{\psi(\sqrt[m]{\sigma_m})}{m\, \sigma_m^{1-\frac{1}{m}}}\, \delta_m.$$

Ist $n=2$, so lautet die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeit zu suchen, dass $\varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m$ zwischen $2\left(\sigma_m \mp \frac{\delta_m}{2}\right)$ liege. Nun ist nach 2) die Wahrscheinlichkeit, dass $\varepsilon^m$ zwischen $x \mp \frac{dx}{2}$ liege, gleich

$$\frac{\psi(\sqrt[m]{x})}{m\, x^{1-\frac{1}{m}}}\, dx$$

und daher, wenn wir die $x$ nach den Indices ihrer $\varepsilon$ unterscheiden, die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\varphi(\sigma_m)_2\,\delta_m = \frac{1}{m^2}\int_p^q dx_2 \int_{2\left(\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}\right) - x_2}^{2\left(\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}\right) - x_2} \frac{\psi(\sqrt[m]{x_2})}{x_2^{1-\frac{1}{m}}}\,\frac{\psi(\sqrt[m]{x_1})}{x_1^{1-\frac{1}{m}}}\,dx_1$$

oder mit Berücksichtigung des Betrages von $\delta_m$ und Weglassen des Index 2 unter dem Integral

$$3)\qquad \varphi(\sigma_m)_2\,\delta_m = \frac{2\,\delta_m}{m^2}\int_p^q \frac{\psi(\sqrt[m]{x})}{x^{1-\frac{1}{m}}}\,\frac{\psi(\sqrt[m]{2\sigma_m - x})}{(2\sigma_m - x)^{1-\frac{1}{m}}}\,dx,$$

worin

$$p = \text{Null},\qquad q = 2\sigma_m \text{ für } 2\sigma_m < a^m,$$
$$p = (2\sigma_m - a^m),\quad q = a^m \quad \text{,,}\quad 2\sigma_m > a^m.$$

Man kann in angegebener Weise die Frage successive für $n = 3, 4 \ldots$ weiter behandeln, falls nur die jedesmal vorausgehende Integration möglich ist.

Ist $n$ unbestimmt, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der $m^{\text{ten}}$ Potenzen der $\varepsilon$ zwischen $n\left(\sigma_m \mp \frac{\delta_m}{2}\right)$ liege, gleich

$$4)\qquad \varphi(\sigma_m)_n\,\delta_m = \int_0^a d\varepsilon_1 \int_0^a d\varepsilon_2 \ldots \int_0^a d\varepsilon_n\, \psi(\varepsilon_1)\,\psi(\varepsilon_2)\ldots\psi(\varepsilon_n)\,F,$$

worin $F$ folgenden Discontinuitätsfactor bezeichnet:

$$5)\qquad F = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\,[\varepsilon^m]\,z\,.\,dz \int_{n\left(\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}\right)}^{n\left(\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}\right)} \cos z\,\Theta\,.\,d\Theta,$$

welcher für alle $[\varepsilon^m]$ zwischen den Grenzen $n\left(\sigma_m \mp \frac{\delta_m}{2}\right)$ gleich 1, dagegen für $[\varepsilon^m]$ ausserhalb derselben gleich Null ist und angewandt werden darf bei jedem Werthe $\sigma_m \geqq \frac{\delta_m}{2}$. Es ist also, wie früher, unzulässig, $\sigma_m$ genau gleich Null zu setzen. Führt man in dem Factor $F$ die Integration nach $\Theta$ aus, so wird

$$5^*)\qquad F = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin z n\left(\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}\right) - \sin z n\left(\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}\right)}{z}\,\cos\,[\varepsilon^m]\,z\,.\,dz.$$

Bezeichnen wir ferner mit $\omega_m$ die Differenz $S_m - \sigma_m$, so ist offenbar in $\varphi(\sigma_m)$ auch das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Abweichungen $\omega_m$ gefunden. Betrachtet man aber verschiedene $m$, dann bemerkt man, dass die $\omega_m$ gar nicht vergleichbar sind; wir müssen daher auf gleichartige Abweichungen reduciren. Wie diese zu nehmen sind, sieht man sogleich ein, indem man sich erinnert, dass zur Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers die $\sqrt[m]{\sigma_m}$ anstatt der unbekannten $\sqrt[m]{S_m}$ dient und dass man ihn durch Multiplication dieser Wurzelgrösse mit einer vom Fehlergesetz abhängenden Zahl erhält. Setzt man daher

$$\sqrt[m]{\sigma_m} = \sqrt[m]{S_m}\,(1 + v_m),$$

so bedeutet $v_m$ nicht nur die negative Verbesserung von $\sqrt[m]{\sigma_m}$ in Bruchtheilen von $\sqrt[m]{S_m}$, sondern auch die Verbesserung des berechneten wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers in Bruchtheilen von dessen strengem Werthe. Mithin sind die $v_m$ für veränderliches $m$ vergleichbare Grössen. Kennt man nun $\varphi(\sigma_m)\,\delta_m$, so findet man daraus die Wahrscheinlichkeit $\varphi(v_m)\,dv_m$, es falle $v_m$ zwischen die Grenzen $v_m \mp \frac{dv_m}{2}$, durch Substitution der Grössen $v_m$ und $dv_m$ mittelst der Relationen

$$6)\qquad \sigma_m = S_m(1+v_m)^m, \quad \delta_m = m\,S_m(1+v_m)^{m-1}\,dv_m,$$

was sich in aller Strenge [wie Formel 2)] begründen lässt.

## § 2. Constante Fehlerwahrscheinlichkeit.

$\psi(\varepsilon) = \frac{1}{a}$ für $\varepsilon \leqq a$, ausserhalb gleich Null.

### I. $n = 1$.

Für die drei Fälle $m = 1$, 2 und 3 giebt Formel 2) folgende Functionen:

$$7)\qquad \begin{aligned} \varphi(\sigma_1)_1\,\delta_1 &= \frac{1}{a}\,\delta_1, \\ \varphi(\sigma_2)_1\,\delta_2 &= \frac{1}{2a}\,\sigma_2^{-1/2}\,\delta_2, \\ \varphi(\sigma_3)_1\,\delta_3 &= \frac{1}{3a}\,\sigma_3^{-2/3}\,\delta_3. \end{aligned}$$

Um eine Prüfung dieser Formeln zu erhalten, integrirte ich die erste von Null bis $a$, die zweite bis $a^2$, die dritte bis $a^3$ und fand, wie es sein muss, eins. In der That ist es gewiss, dass $\sigma_m$ einen der Werthe zwischen 0 und $a^m$ annehmen werde.

Durch Einführung der Relationen 6) und weil jetzt

$$S_m = \frac{a^m}{m+1}$$

ist, findet man weiter aus den Functionen $\varphi(\sigma)_1 \delta$:

$$\begin{aligned}
&\varphi(v_1)_1 dv_1 = \tfrac{1}{2}\, dv_1, \quad -1 < v_1 < +1,\\
8)\qquad &\varphi(v_2)_1 dv_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\, dv_2, \quad -1 < v_2 < \sqrt{3}-1,\\
&\varphi(v_3)_1 dv_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\, dv_3, \quad -1 < v_3 < \sqrt[3]{4}-1.
\end{aligned}$$

Die Figuren 1, 2 und 3 geben eine graphische Darstellung der Functionen $\varphi(v)_1$ als Ordinaten für die Abscissen $v$. Im vorliegenden Falle sind die $\varphi(v)_1$ gerade Linien parallel zur Abscissenaxe und es ist die Fläche, welche die Ordinate $\varphi$ überstreicht, wenn sich $v$ über alle möglichen Werthe erstreckt, schraffirt. Demnächst enthalten die Figuren noch die Darstellung von $\psi(v)_1 = \varphi(+v)_1 + \varphi(-v)_1$ als Ordinate für den *val. abs.* $v$ als Abscisse. Man wird bemerken, dass sich trotz der Einfachheit des Falles doch in den Figuren 2 und 3 die Darstellung von $\psi(v)_1$ immerhin schon etwas complicirt.

Fig. 4 endlich zeigt das gegenseitige Verhalten der Functionen $\psi(v_1)$, $\psi(v_2)$, $\psi(v_3)$.

II. $n = 2$.

Für die drei Fälle $m = 1$, 2 und 3 giebt Formel 3)

$$\varphi(\sigma_1)_2\, \delta_1 = \frac{2\delta_1}{a^2}\int_p^q dx,$$

$$\varphi(\sigma_2)_2\, \delta_2 = \frac{2\delta_2}{4a^2}\int_p^q \frac{dx}{\sqrt{x(2\sigma_2 - x)}},$$

$$\varphi(\sigma_3)_2\, \delta_3 = \frac{2\delta_3}{9a^2}\int_p^q \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2\sigma_3 - x)^2}}.$$

Nach einiger Reduction folgt hieraus

$$9)\qquad \varphi(\sigma_1)_2\, \delta_1 = \begin{cases} \dfrac{4\sigma_1}{a^2}\,\delta_1 & \text{für } 2\sigma_1 < a,\\[2mm] \dfrac{4(a-\sigma_1)}{a^2}\,\delta_1 & \text{,, } 2\sigma_1 > a; \end{cases}$$

$$10)\qquad \varphi(\sigma_2)_2\, \delta_2 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2a^2}\,\delta_2 & \text{für } 2\sigma_2 < a^2,\\[2mm] \dfrac{1}{a^2}\, arc\sin\left(\dfrac{a^2}{\sigma_2} - 1\right)\delta_2 & \text{,, } 2\sigma_2 > a^2; \end{cases}$$

$$11)\qquad \varphi(\sigma_3)_2\,\delta_3 = \begin{cases} \dfrac{2\,\delta_3}{3\,a^2\sqrt[3]{2\,\sigma_3}} \displaystyle\int\limits_0^1 (1-t^3)^{-2/3}\,dt \text{ für } 2\,\sigma_3 < a^3, \\[2ex] \dfrac{2\,\delta_3}{3\,a^2\sqrt[3]{2\,\sigma_3}} \displaystyle\int\limits_{\sqrt[3]{1-\frac{a^3}{2\,\sigma_3}}}^{\sqrt[3]{\frac{a^3}{2\,\sigma_3}}} (1-t^3)^{-2/3}\,dt \quad \text{,,} \quad 2\,\sigma_3 > a^3. \end{cases}$$

Die Prüfung der Formeln 8) und 9) durch Integration nach $\sigma$ über alle möglichen Werthe desselben ist leicht zu erledigen und bestätigt ihre Richtigkeit. Insbesondere ist

$$\int\limits_0^{a^2} \varphi(\sigma_2)_2\,\delta_2 = \frac{\pi}{2\,a^2}\int\limits_0^{\frac{a^2}{2}} \delta_2 + \frac{1}{a^2}\int\limits_{\frac{a^2}{2}}^{a^2} arcsin\left(\frac{a^2}{\sigma_2}-1\right)\delta_2,$$

und wenn man im zweiten Integral rechter Hand *arcsin* als ersten Factor nimmt und theilweise integrirt, so hat man weiter

$$\int\limits_0^{a^2} \varphi(\sigma_2)_2\,\delta_2 = \int\limits_{\frac{a^2}{2}}^{a^2} \frac{\delta_2}{\sqrt{2\,a^2\,\sigma_2 - a^4}} = 1.$$

Was nun den ersten Theil der Formel 11) anlangt, so giebt die directe Reihenentwickelung daselbst zu schwache Convergenz. Wir setzen daher $t = 1 - z$ und integriren anstatt nach $z$ nach der Variabeln $y = (1-t^3)^{-2/3}$; dann wird leicht mittelst einer geometrischen Betrachtung

$$11^*)\quad \varphi(\sigma_3)_2\,\delta_3 = \frac{2\,\delta_3}{3\,a^2\sqrt[3]{2\,\sigma_3}}\left(1 + \int\limits_1^\infty (1-\sqrt[3]{1-y^{-3/2}})\,dy\right) = \frac{1{,}17\ldots}{a^2\sqrt[3]{2\,\sigma_3}}\,\delta_3,$$
$$2\,\sigma_3 < a^3.$$

Für den zweiten Theil der Formel 11) genügt (da hier wesentlich nur die spätere Curvenconstruction ins Auge gefasst ist) die directe Reihenentwickelung

$$11^{**})\quad \varphi(\sigma_3)_2\,\delta_3 = \frac{2\,\delta_3}{3\,a^2\sqrt[3]{2\,\sigma_3}} \left\{ \begin{aligned} &\sqrt[3]{\frac{a^3}{2\,\sigma_3}}\Big[1 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{a^3}{2\,\sigma_3}\right) + \tfrac{5}{63}(\div)^2 \\ &\qquad + \tfrac{4}{81}(\div)^3 + \tfrac{110}{3159}(\div)^4 \ldots\Big] \\ -&\sqrt[3]{1-\frac{a^3}{2\,\sigma_3}}\Big[1 + \tfrac{1}{6}\left(1-\frac{a^3}{2\,\sigma_3}\right) + \tfrac{5}{63}(\div)^2 \\ &\qquad + \tfrac{4}{81}(\div)^3 + \tfrac{110}{3159}(\div)^4 \ldots\Big] \end{aligned} \right\},$$
$$2\,\sigma_3 > a^3.$$

Integrirt man zur Probe $\varphi(\sigma_3)_2\,\delta_3$ in 11*) von $\sigma_3$ gleich 0 bis $\frac{a^3}{2}$, so folgt ohne besondere Mühe 0,88...; die weitere Integration bis $a^3$ nach 11**) gab mir mittelst mechanischer Quadratur etwas mühsamer 0,12..., zusammen also 1.

Die Substitution der Relationen 6) führt nun zu folgenden Formeln:

$$12)\quad \varphi(v_1)_2\,dv_1 = \begin{cases} (1+v_1)\,dv_1, & -1 < v_1 \leqq 0; \\ (1-v_1)\,dv_1, & 0 \leqq v_1 < +1; \end{cases}$$

$$13)\quad \varphi(v_2)_2\,dv_2 = \begin{cases} \frac{\pi}{3}(1+v_2)\,dv_2, & -1 < v_2 \leqq \sqrt{\tfrac{3}{2}}-1; \\ \frac{2(1+v_2)}{3} \arcsin\left(\frac{3}{(1+v_2)^2}-1\right) dv_2, & \sqrt{\tfrac{3}{2}}-1 \leqq v_2 < \sqrt{3}-1; \end{cases}$$

$$14)\quad \varphi(v_3)_2\,dv_3 = \begin{cases} 1{,}10\ldots(1+v_3)\,dv_3, & -1 < v_3 \leqq \sqrt[3]{2}-1; \\ \frac{1+v_3}{\sqrt[3]{4}} \left( \begin{array}{l} \alpha\left(1+\frac{\alpha^3}{6}+\frac{5\alpha^6}{63}+\frac{4\alpha^9}{81}+\frac{110\alpha^{12}}{3159}\ldots\right) \\ -\beta\left(1+\frac{\beta^3}{6}+\frac{5\beta^6}{63}+\frac{4\beta^9}{81}+\frac{110\beta^{12}}{3159}\ldots\right) \end{array} \right) dv_3, & \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{2}-1 \leqq v_3 \leqq \sqrt[3]{4}-1; \quad \alpha = \frac{\sqrt[3]{2}}{1+v_3}, \quad \beta = \sqrt[3]{1-\frac{2}{(1+v_3)^3}}.$$

Die Figuren 5, 6 und 7 zeigen die Curven $\varphi(v)_2$, sowie die entsprechenden Curven $\psi(v_2)$, welche letztere in Fig. 8 zur Vergleichung unter sich besonders zusammengestellt sind.

## III. Rückblick.

Die Betrachtung der Curven $\varphi$ mit schraffirter Fläche in den Figuren 1—3 und 5—7 lässt sogleich erkennen, dass die Functionen $\varphi(v)_1$ und $\varphi(v)_2$ vom Gauss'schen Fehlergesetz zwar stark abweichen, aber sich demselben doch mit wachsender Anzahl $n$ der Beobachtungen zu nähern scheinen. Man bemerkt ferner mittelst der Figuren 4 und 8 alsbald, dass mit wachsendem Exponenten $m$ die Wahrscheinlichkeit wächst, es falle $\sqrt[m]{\sigma_m}$ mit $\sqrt[m]{S_m}$ zusammen. Um dies deutlicher zu erkennen, integrirte ich $\varphi(v)\,dv$ zwischen solchen Grenzen $-\nu_m$ und $+\nu_m$, dass sich gerade $\frac{1}{2}$ ergab. Alsdann ist auch die Wahrscheinlichkeit, die $\sqrt[m]{\sigma_m}$ werde zwischen die Grenzen $\sqrt[m]{S_m}\,(1 \mp \nu_m)$ fallen, gerade $\frac{1}{2}$, also sind die $\nu_m$ die wahrscheinlichen Fehler von $\sqrt[m]{\sigma_m}$ in Bezug auf $\sqrt[m]{S_m}$ (und in Bruchtheilen dieses Werthes angegeben). Es fand sich $\nu_m$ gleich

I)

| | $n=1.$ | $n=2.$ |
|---|---|---|
| $m=1$ | 0,50 | 0,29 |
| 2 | 0,43 | 0,24 |
| 3 | 0,40 | 0,23 |

Nach diesen Ergebnissen bekommt man (innerhalb der hier betrachteten Fälle) die grösste Wahrscheinlichkeit, dass die $\sqrt[m]{\sigma_m}$ mit der $\sqrt[m]{S_m}$ zusammenfalle, durch Anwendung eines möglichst hohen Exponenten $m$.

## § 3. Gauss'sches Fehlergesetz.

$$\psi(\varepsilon) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}.$$

### I. $n = 1$.

Für die drei Fälle $m = 1$, 2 und 3 giebt Formel 2) nachstehende Functionen:

$$\varphi(\sigma_1)_1 \, \delta_1 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\sigma_1^2} \delta_1,$$

15)
$$\varphi(\sigma_2)_1 \, \delta_2 = \frac{2h}{2\sqrt{\pi}} e^{-h^2\sigma_2} \sigma_2^{-\frac{1}{2}} \delta_2,$$

$$\varphi(\sigma_3)_1 \, \delta_3 = \frac{2h}{3\sqrt{\pi}} e^{-h^2\sigma_3^{2/3}} \sigma_3^{-\frac{2}{3}} \delta_3.$$

Zur Prüfung integrirte ich diese Formeln nach $\sigma$ von Null bis $\infty$ und erhielt für jedes der Integrale eins, wie es sein soll. Man hat weiter

$$S_1 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon \, e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{\pi}},$$

$$S_2 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{2h^2},$$

$$S_3 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^3 e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{h^3\sqrt{\pi}}.$$

Führt man diese Werthe in die Relationen 6) ein und substituirt sodann letztere in die 15), so ergiebt sich

$$\varphi(v_1)_1 \, dv_1 = \frac{2}{\pi} e^{-\frac{(1+v_1)^2}{\pi}} dv_1, \quad -1 < v_1;$$

16)
$$\varphi(v_2)_1 \, dv_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{(1+v_2)^2}{2}} dv_2, \quad -1 < v_2;$$

$$\varphi(v_3)_1 \, dv_3 = \frac{2}{\pi} \sqrt[3]{\pi} \, e^{-\frac{(1+v_3)^2}{\sqrt[3]{\pi}}} dv_3, \quad -1 < v_3.$$

Die Figuren 9, 10 und 11 zeigen die Curven $\varphi(v)_1$, sowie die entsprechenden Curven $\psi(v)_1$, welche letzteren in Fig. 12 zu bequemern Vergleichung untereinander nochmals zusammengestellt sind.

### II. $n = 2$.

Für die drei Fälle $m = 1$, 2 und 3 giebt die Formel 3)

$$\varphi(\sigma_1)_2\,\delta_1 = \frac{8h^2\delta_1}{\pi}\int_0^{2\sigma_1} e^{-h^2[x^2+(2\sigma_1-x)^2]}\,dx,$$

$$\varphi(\sigma_2)_2\,\delta_2 = \frac{8h^2\delta_2}{4\pi}\int_0^{2\sigma_2} \frac{e^{-2h^2\sigma_2}}{\sqrt{x(2\sigma_2-x)}}\,dx,$$

$$\varphi(\sigma_3)_2\,\delta_3 = \frac{8h^2\delta_3}{9\pi}\int_0^{2\sigma_3} \frac{e^{-h^2[x^{2/3}+(2\sigma_3-x)^{2/3}]}}{x^{2/3}.\,(2\sigma_3-x)^{2/3}}\,dx.$$

Nach einiger Reduction folgt hieraus

17) $$\varphi(\sigma_1)_2\,\delta_1 = \frac{8\sqrt{2}h}{\pi}e^{-2h^2\sigma_1^2}\,\delta_1\int_0^{h\sigma_1\sqrt{2}} e^{-t^2}\,dt,$$

18) $$\varphi(\sigma_2)_2\,\delta_2 = 2h^2 e^{-2h^2\sigma_2}\,\delta_2,$$

19) $$\varphi(\sigma_3)_2\,\delta_3 = \frac{8h^3\delta_3}{3\pi(h\sqrt[3]{2\sigma_3})}\int_0^1 \frac{e^{-[z^2+(1-z^3)^{2/3}](h\sqrt[3]{2\sigma_3})^2}}{(1-z^3)^{2/3}}\,dz.$$

Um die zur Prüfung der Formel 17) nöthige Integration nach $\sigma_1$ durchzuführen, kann man zunächst $z = t : h\sqrt{2}$ setzen und sodann Polarcoordinaten mittels der Beziehungen $r\sin\Theta = z$, $r\cos\Theta = \sigma_1$ einführen und erhält alsdann

$$\int_0^\infty \varphi(\sigma_1)_2\,\delta_1 = \frac{16h^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\Theta \int_0^\infty e^{-2h^2r^2}\,r\,dr = 1.$$

Dass Formel 18) die Prüfung durch Integration besteht, überblickt man sofort.

Was nun die Formel 19) anlangt, so begnügte ich mich, dafür einen zur Construction einer Zeichnung ausreichenden Näherungsausdruck herzustellen. Der Exponent $[z^2 + (1-z^3)^{2/3}]$ ändert aber zwischen den Grenzen $z = 0$ und 1 seinen Werth sehr wenig, man hat nämlich für

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ = | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
| Exponent = | 1,00 | 1,01 | 1,04 | 1,07 | 1,12 | 1,17 | 1,21 | 1,24 | 1,26 | 1,23 | 1,00 |

und ist daher mit Berücksichtigung der Veränderlichkeit des Nenners $(1-z^3)^{2/3}$ eine Zerspaltung des Integrals in drei Integrale möglich, wobei für jedes derselben jener Exponent einen constanten Mittelwerth erhält:

$$\int\limits_0^1 = e^{-1{,}09\,(h\sqrt[3]{2\sigma_3})^2}\int\limits_0^{0{,}6}\frac{dz}{(1-z^3)^{2/3}} + e^{-1{,}24\,(h\sqrt[3]{2\sigma_3})^2}\int\limits_{0{,}6}^{0{,}9}\frac{dz}{(1-z^3)^{2/3}}$$

$$+\, e^{-1{,}07\,(h\sqrt[3]{2\sigma_3})^2}\int\limits_{0{,}9}^{1}\frac{dz}{(1-z^3)^{2/3}}.$$

Die Zahlen 1,10, 1,25, 1,14 sind überdies so gewählt, dass für $\sigma_3 = S_3$ die Formel genau stimmt. Die jetzt noch zu bewirkenden Integrationen lassen sich in den beiden ersten Fällen durch directe Reihenentwickelung, im letzten Falle nach vorheriger Substitution von $z = 1 - \zeta$, in hinreichender Schärfe rasch erledigen und man erhält

$$19^*)\quad \varphi(\sigma_3)_2\,\delta_3 = \frac{h^3\,\delta_3}{h\sqrt[3]{2\,\sigma_3}}\left\{0{,}530\,e^{-1{,}09\,(h\sqrt[3]{2\sigma_3})^2} + 0{,}391\,e^{-1{,}24\,(\div)^2} + 0{,}576\,e^{-1{,}07\,(\div)^2}\right\}.$$

Die Integration nach $\sigma_3$ von 0 bis $\infty$ giebt 1,004 statt 1, mithin für den vorliegenden Zweck ausreichend übereinstimmend.

Die Einführung der Relationen 6) führt (unter Beachtung der angegebenen Werthe der $S_1$, $S_2$, $S_3$) von den Formeln 17), 18) und 19*) zu folgenden:

$$20)\quad \begin{aligned} \varphi(v_1)_2\,dv_1 &= \frac{8\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{2(1+v_1)^2}{\pi}}\,dv_1\int\limits_0^{(1+v_1)\sqrt{\frac{2}{\pi}}} e^{-t^2}\,dt, && -1 < v_1;\\ \varphi(v_2)_2\,dv_2 &= 2(1+v_2)\,e^{-(1+v_2)^2}\,dv_2, && -1 < v_2;\\ \varphi(v_3)_2\,dv_3 &= (1+v_3)\big(0{,}86\,e^{-1{,}18(1+v_3)^2} + 0{,}64\,e^{-1{,}34(1+v_3)^2}\\ &\qquad + 0{,}94\,e^{-1{,}15(1+v_3)^2}\big)\,dv_3, && -1 < v_3. \end{aligned}$$

Die Figuren 13, 14 und 15 zeigen die Curven $\varphi(v_2)$ und überdies die entsprechenden $\psi(v_2)$, für welch letztere Fig. 16 noch eine besondere Zusammenstellung bietet.

### III. Rückblick.

Die Betrachtung der Figuren 9—11 und 13—15 zeigt, dass die Function $\varphi(v)$ sich mit wachsendem $n$ ziemlich rasch der Form des Gauss'schen Fehlergesetzes annähert. Wir werden dies wenigstens für $m = 2$ im folgenden Paragraphen weiter untersuchen, da für diesen Fall die mathematische Behandlung am bequemsten ausfällt. Die Figuren 12 und 16 zeigen ferner, dass nicht, wie bei constanter Fehlerwahrscheinlichkeit mit wachsendem $m$, die Wahrscheinlichkeit, es falle $\sqrt[m]{\sigma_m}$ mit der $\sqrt[m]{S_m}$ zusammen, wächst. Vielmehr bietet offenbar $m = 2$ die meiste Wahrscheinlichkeit. Um dies deutlicher zu erkennen, berechnete ich folgendes Täfelchen der wahrscheinlichen Fehler $\nu_m$ [mit der Bedeutung: die Wahrscheinlichkeit für die $\sqrt[m]{\sigma_m}$, zwischen die Grenzen $\sqrt[m]{S_m}\,(1 \mp \nu_m)$ zu fallen, ist $\frac{1}{2}$]:

II)

| | $n=1.$ | $n=2.$ |
|---|---|---|
| $m=1$ | 0,545 | 0,372 |
| 2 | 0,515 | 0,355 |
| 3 | 0,521 | 0,361 |

## § 4. **Gauss'sches Fehlergesetz (Fortsetzung).**

$m=2$, $n$ beliebig.

Es sei zunächst $n=3$ und also die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass $\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2$ zwischen die Grenzen $3\left(\sigma_2 \mp \frac{\delta_2}{2}\right)$ falle. Nach der zweiten Formel 15) und nach Formel 18) ist aber, wenn $\varepsilon_1^2$ mit $x$ und $\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2$ mit $y$ bezeichnet wird:

$$\varphi(x)\,dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2 x}\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx,$$

$$\varphi(y)\,dy = h^2 e^{-h^2 y}\,dy;$$

mithin wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\varphi(\sigma_2)_3\,\delta_2 = \frac{h^3}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{3\sigma_2} dx \int\limits_{3\left(\sigma_2-\frac{\delta_2}{2}\right)-x}^{3\left(\sigma_2+\frac{\delta_2}{2}\right)-x} e^{-h^2(x+y)}\,x^{-\frac{1}{2}}\,dy.$$

Berücksichtigt man, dass $(x+y)=3\sigma_2$ ist und $\delta_2$ ein Differential sein soll, so wird

21) $$\varphi(\sigma_2)_3\,\delta_2 = \frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}\,(3\sigma_2)^{\frac{1}{2}}\,e^{-h^2(3\sigma_2)}\,(3\,\delta_2).$$

Die Substitution der Relationen 6) ergiebt hieraus

22) $$\varphi(v_2)_3\,dv_2 = 3\sqrt{\frac{6}{\pi}}\,(1+v_2)^2 e^{-\frac{3}{2}(1+v_2)^2}\,dv_2,$$

zu welcher Function die Fig. 17 eine graphische Darstellung liefert. Zur Prüfung der Formel 17) beachte man noch, dass

$$\int\limits_0^{\infty} \varphi(\sigma_2)_3\,\delta_2 = \frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{h^3} = 1.$$

Ist nun ferner $n=4$ und demnach die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass $\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2$ zwischen die Grenzen $4\left(\sigma_2 \mp \frac{\delta_2}{2}\right)$, so giebt die zweimalige Anwendung der Formel 18) auf die Theile $\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2 = x$ und $\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2=y$ leicht

23)
$$\varphi(\sigma_2)_4\,\delta_2 = h^4(4\,\sigma_2)\,e^{-h^2(4\sigma_2)}(4\,\delta_2)$$

mit der Prüfung

$$\int\limits_0^\infty \varphi(\sigma_2)_4\,\delta_2 = h^4 . \frac{\Gamma(2)}{h^4} = 1.$$

Die Anwendung der Relationen 6) auf 23) führt zu

24)
$$\varphi(v_2)_4\,dv_2 = 8\,(1+v_2)^3\,e^{-2(1+v_2)^2}\,dv_2,$$

und hierzu giebt Fig. 18 eine graphische Darstellung.

Die vorigen Entwickelungen legen den Schluss nahe, es sei allgemein für beliebiges $n$ die Wahrscheinlichkeit, dass $[\varepsilon^2]$ zwischen die Grenzen $n\left(\sigma_2 \mp \frac{\delta_2}{2}\right)$ falle, gleich

25)
$$\varphi(\sigma_2)_n\,\delta_2 = \frac{h^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,(n\,\sigma_2)^{\frac{n}{2}-1}\,e^{-h^2 n\sigma_2}\,n\,\delta_2,$$

wozu ferner die Formel gehört

26)
$$\varphi(v_2)_n\,dv_2 = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}(1+v_2)^{n-1}\,e^{-\frac{n}{2}(1+v_2)^2}\,dv_2, \quad -1<v_2.$$

Zunächst bestätigt die Integration nach $\sigma_2$ die Formel 25); um ihre Richtigkeit nachzuweisen, genügt es, zu zeigen, dass sie auch für $(n+2)$ besteht, da sie bereits für $n=1$ und 2 gilt. Wir setzen $[\varepsilon^2]_1^n = x$ und $\varepsilon^2_{n+1}+\varepsilon^2_{n+2}=y$. Dann geben die Formeln 18) und 25) für die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der $(n+2)$ Fehlerquadrate zwischen $(n+2)\left(\sigma_2 \mp \frac{\delta_2}{2}\right)$ falle, den Ausdruck

$$\varphi(\sigma_2)_{n+2}\,\delta_2 = \frac{h^{n+2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_0^{(n+2)\sigma_2} dx \int\limits_{(n+2)\left(\sigma_2-\frac{\delta_2}{2}\right)-x}^{(n+2)\left(\sigma_2+\frac{\delta_2}{2}\right)-x} e^{-h^2(x+y)}\,x^{\frac{n}{2}-1}\,dy,$$

woraus man, wie bei früheren entsprechenden Fällen, leicht folgert, dass

$$\varphi(\sigma_2)_{n+2}\,\delta_2 = \frac{h^{n+2}}{\frac{n}{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,(\overline{n+2\,.\,\sigma_2})^{\frac{n}{2}}\,e^{-h^2(n+2)\sigma_2}\,(n+2)\,\delta_2.$$

Setzt man aber in 25) für $n$ den Werth $n+2$, so erhält man die soeben abgeleitete Formel, indem $\frac{n}{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$. Mithin gilt Formel 25) allgemein.

Ist $n$ nur einigermassen gross, so hat man nach der Formel*

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{6n}-\frac{1}{45n(n+2)(n+4)}\cdots}$$

zur Vereinfachung der Formel 26) für deren ersten, von $v_2$ unabhängigen Theil sehr nahe

$$\frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,e^{\frac{n}{2}},$$

welcher Ausdruck für $n=16$ etwa 1 Procent, für $n=160$ etwa 1 Promille u. s. f. fehlerhaft ist. Aus 26) wird damit

$$\text{27)}\qquad \varphi(v_2)_n\,dv_2=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,(1+v_2)^{n-1}\,e^{-nv_2\left(1+\frac{v_2}{2}\right)}\,dv_2,$$

und wenn man hierin endlich von der Entwickelung

$$1+v_2=e^{v_2-\frac{1}{2}v_2^2+\frac{1}{3}v_2^3\cdots}$$

Gebrauch macht, welche für $v_2^2 < 1$ giltig ist, so ergiebt sich

$$\text{28)}\qquad \varphi(v_2)_n\,dv_2=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,e^{-v_2-(n-\frac{1}{2})v_2^2+\frac{n-1}{3}v_2^3\cdots}\,dv_2.$$

Dieser Näherungsausdruck zeigt deutlich, unter welchen Bedingungen man berechtigt ist,

$$\text{29)}\qquad \varphi(v_2)_n\,\overset{dv_2}{\delta_2}=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,e^{-nv_2^2}\,dv_2$$

zu setzen. Der Exponent von $e$ heisst nämlich genauer

$$-nv_2^2\left(1+\frac{1}{nv_2}-\frac{1}{2n}-\frac{v_2}{3}\cdots\right)$$

und zur Anwendbarkeit der Formel 29) gehört mithin, dass [während für $v_2=0$ die Ausdrücke 27) und 29) jedenfalls übereinstimmen] auch für Werthe $v_2$ von der Ordnung $1:\sqrt{n}$ die Parenthese des Exponenten gleich eins gesetzt werden darf; für grössere $v_2$ gilt die Formel 29) alsdann auch noch, weil dafür übereinstimmend mit der strengeren Formel 27) der geringere Betrag der Exponentialgrösse die Wahrscheinlichkeit $\varphi(v_2)_n$ überhaupt nahezu auf Null reducirt.

Durch einmalige Differentiation nach $v_2$ findet man leicht, dass nach der strengen Formel 26) der Maximalwerth von $\varphi(v_2)_n$ zu

* Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, II, 1866. S. 260.

$$v_2 = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{n}},$$

d. i. nahe $-\frac{1}{2n}$ gehört, während die Näherungsformel 29) $v_2 = 0$ fordert. Beide Maximalwerthe stehen im Verhältniss $1 : \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$.

Durch zweimalige Differentiation nach $v_2$ findet man ferner aus 26) als Abscissen der Wendepunkte der Curve $\varphi(v_2)_n$:

$$v_2 = -1 + \sqrt{1 - \frac{1}{2n} \pm \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{7}{4n^2}}}, \quad \text{d. i. nahe} \pm \frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{2n} \cdots;$$

dagegen liegen die Wendepunkte nach 29) bei $\pm \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Wie die strenge Formel zeigt, sind schon für $n = 2$ beide Wendepunkte reell (Fig. 14).

Um ein Beispiel in Zahlen zu haben, setzen wir $n = 100$ und erhalten dafür nach Formel 27), resp. 29) folgende Werthe von $\varphi(v_2)_{100}$:

| | (27). | (29). |
|---|---|---|
| $v =\ 0$ | 5,64* | 5,64 |
| $+0,1$ | 1,94 | 2,08 |
| $-0,1$ | 2,21 | |
| $+0,2$ | 0,11 | 0,10 |
| $-0,2$ | 0,09 | |
| $+0,3$ | 0,0012 | 0,0007 |
| $-0,3$ | 0,0003 | |

## § 5. Beliebiges Fehlergesetz; Anzahl $n$ der Beobachtungen sehr gross.

Wir behandeln diesen Fall nach dem Vorgange von Poisson** und Glaisher*** bei einer ähnlichen Untersuchung mit $m = 1$. Die Formeln 4) und 5*) ergeben unter Beachtung der Relation $e^{i\gamma z} = \cos\gamma z + i \sin\gamma z$, dass die Wahrscheinlichkeit $\varphi(\sigma_m)_n\, \delta_m$ gleich ist dem reellen Theile von

---

* Der Maximalwerth für $v_2 = -\frac{1}{200}$ ist 5,67.

** Wahrscheinlichkeitsrechnung, übersetzt von Schnuse, 1841, S. 227 und 475.

*** *Philosophical Magazine, Vol. XLIII, 1872,* S. 194.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_0^a \psi(\varepsilon)\, e^{iz\varepsilon^m}\, d\varepsilon\right)^n \frac{\sin z n\left(\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}\right) - \sin z n\left(\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}\right)}{z}\, dz.$$

Setzt man hierin

$$\int_0^a \psi(\varepsilon) \cos z\,\varepsilon^m\, d\varepsilon = R \cos r$$

und

$$\int_0^a \psi(\varepsilon) \sin z\,\varepsilon^m\, d\varepsilon = R \sin r,$$

so geht die grosse Parenthese in $R e^{ir}$ über, und erhebt man dies zur $n^{\text{ten}}$ Potenz und trennt alsdann die reellen und imaginären Theile, so wird

$$30)\quad \varphi(\sigma_m)_n\, \delta_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R^n \cos r n\, \frac{\sin z n\left(\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}\right) - \sin z n\left(\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}\right)}{z}\, dz.$$

Für $R^2$ ergiebt sich durch Quadriren und Addiren der Werthe von $R \cos r$ und $R \sin r$, sowie nach weiterer Reduction in bekannter Weise

$$31)\qquad R^2 = \int_0^a\int_0^a \psi(\varepsilon)\,\psi(\varepsilon') \cos z(\varepsilon^m - \varepsilon'^m)\, d\varepsilon\, d\varepsilon'.$$

Löst man nun in den Ausdrücken für $R \cos r$, $R \sin r$ und $R^2$ den $\cos$, resp. $\sin$ in eine Potenzreihe auf, so ergiebt sich weiter [mit Benutzung der Formel 1)]

$$32)\qquad \begin{aligned} R \cos r &= 1 - \frac{z^2}{2} S_{2m} + \frac{z^4}{24} S_{4m} - \ldots, \\ R \sin r &= z S_m - \frac{z^3}{6} S_{3m} + \ldots, \\ R^2 &= 1 - A z^2 + B z^4 - C z^6 + \ldots, \end{aligned}$$

worin die Coefficienten $A$, $B$, $C\ldots$ als Quadratsummen folgende positive Werthe haben:

$$\begin{aligned} A &= S_{2m} - S^2_{m}, \\ B &= \tfrac{1}{12}(S_{4m} - 4 S_{3m} S_m + 3 S^2_{2m}), \\ C &= \tfrac{1}{360}(S_{6m} - 6 S_{5m} S_m + 15 S_{4m} S_{2m} - 10 S^2_{3m}). \end{aligned}$$

Indem nun für wirkliche Fehlergesetze $\psi(\varepsilon)$ immer der Gleichung

$$\lim_{p=\infty}\left(\frac{S_{pm}}{(p-1)\, p\, S_{(p-2)m}}\right) = 0$$

Genüge geleistet werden wird, so gelten die Reihen 32) für jedes endliche $z$.*

Der Ausdruck 31) zeigt nun, dass $R^2$ im Allgemeinen ein echter Bruch und nur für $z=0$ der Einheit gleich ist. Je grösser mithin $n$ angenommen wird, um so kleiner wird $R^n$ im Allgemeinen sein und es werden nur diejenigen $R^n$ in Betracht kommen, welche zu $z=0$ und sehr nahe Null gehören. Es kommt hierbei Nichts darauf an, ob $R^2$ mit wachsendem $z$ nicht durchaus abnimmt, sondern theilweise vielleicht wieder zunimmt, da das Integral in 30), wenn man die untere Grenze Null durch einen kleinen $z$-Werth ersetzt, jedenfalls nach bekannten Formeln mit wachsendem $n$ sich dem Grenzwerthe Null nähert. Für die Geschwindigkeit dieser Annäherung ist von Bedeutung, dass $R^2$ für $z>0$ nicht wieder einmal sehr nahe gleich Eins wird, was man wohl ohne weitere Untersuchung aus 31) herauslesen darf; ferner, dass $R^2$ für $z=\infty$ gleich Null wird. Dies erkennt man am bequemsten an $R\,sin\,r$ und $R\,cos\,r$ einzeln. Setzt man in dem Integralausdrucke für $R\,sin\,r$ an Stelle von $\varepsilon^m$ die neue Variable $t$, so ergiebt sich

$$R\,sin\,r=\frac{1}{m}\int_0^{a^m} t^{\frac{1}{m}}\,\psi\left(t^{\frac{1}{m}}\right)\frac{sin\,z\,t}{t}\,dt,$$

und da $\varepsilon\psi(\varepsilon)$ ohne Zweifel immer endlich bleibt, für $\varepsilon=0$ aber Null ist, so ist $\underset{z=\infty}{Lim}\,R\,sin\,r=0$.

In dem Integralausdrucke für $R\,cos\,r$ setzen wir an Stelle von $z\varepsilon^m$ die neue Variable $t_1$ und erhalten

$$R\,cos\,r=\frac{1}{m\,z^{\frac{1}{m}}}\int_0^{z a^m}\frac{\psi\left(\sqrt[m]{\frac{t_1}{z}}\right)}{t_1^{1-\frac{1}{m}}}\,cos\,t_1\,dt_1.$$

Bedeuten aber $p$ eine ganze Zahl, $\varrho$ einen echten Bruch, derart, dass $z a^m=(p+\varrho)\frac{\pi}{2}$, so zerfällt das letzte Integral in $(p+1)$ Integrale mit den Grenzen $0,\ \frac{\pi}{2},\ 2\frac{\pi}{2},\ \ldots,\ p\frac{\pi}{2},\ (p+\varrho)\frac{\pi}{2}$, und substituirt man in

---

* In dem bekannten Poisson'schen Ausnahmefalle, für welchen

$$\psi(\varepsilon)=\frac{2}{\pi(1+\varepsilon^2)}$$

ist, werden die $S$ unendlich und geschieht auch jener Bedingung nicht Genüge. Aber dieser Ausnahmefall entspricht, da eben $S$ unendlich ist, gar keinem thatsächlichen Fehlergesetze.

diesen die resp. neuen Variablen $t_1 = t,\ t + \frac{\pi}{2},\ t + 2 \cdot \frac{\pi}{2},\ \ldots,$ so ergiebt sich

$$R \cos r = \frac{1}{m z^{\frac{1}{m}}} \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\psi\left(\sqrt[m]{\frac{t}{z}}\right)}{t^{1-\frac{1}{m}}} - \frac{\psi\left(\sqrt[m]{\frac{t+\pi}{z}}\right)}{(t+\pi)^{1-\frac{1}{m}}} + \frac{\psi\left(\sqrt[m]{\frac{t+2\pi}{z}}\right)}{(t+2\pi)^{1-\frac{1}{m}}} - \ldots \right) \cos t \, dt \\ \displaystyle - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\psi\left(\sqrt[m]{\frac{t+\frac{\pi}{2}}{z}}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)^{1-\frac{1}{m}}} - \frac{\psi\left(\sqrt[m]{\frac{t+\frac{3\pi}{2}}{z}}\right)}{\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)^{1-\frac{1}{m}}} + \ldots \right) \sin t \, dt \\ \displaystyle + \int_0^{\varrho \frac{\pi}{2}} \frac{\psi\left(\sqrt[m]{\frac{t+p\frac{\pi}{2}}{z}}\right)}{\left(t+p\frac{\pi}{2}\right)^{1-\frac{1}{m}}} \cos\left(t + p\frac{\pi}{2}\right) dt \end{array} \right\}.$$

Wird $z$ unendlich gross, so wird auch $p$ unendlich gross, aber die beiden ersten Reihen von Integralen behalten endliche Werthe, da sie convergiren, sobald $\psi(\varepsilon)$ nur die Eigenschaft hat, von einem gewissen $\varepsilon < a$ nicht mehr zuzunehmen (falls es überhaupt mit wachsendem $\varepsilon$ zum Theil zunimmt). Bei Fehlergesetzen wird dies immer zutreffen. Der Werth des dritten Integrals convergirt ebenso, wie die letzten Glieder der erwähnten beiden Reihen mit wachsendem $p$ gegen Null. Da nun der sonach endliche Werth der geschlungenen Parenthese durch $z^{\frac{1}{m}}$ dividirt wird, so ist $\underset{z=\infty}{Lim}\, R \cos r = 0$.

Für die nunmehr allein zu berücksichtigenden kleinen $z$-Werthe ist in gleichgrosser Annäherung

$$R^2 = e^{-Az^2}, \quad r = z S_m.$$

Die genaueren Werthe würden sein, wenn man zugleich auf $R^n$ und $rn$ übergeht:

$$R^n = e^{-\frac{1}{2}Az^2 n - \frac{1}{4}(A^2 - 2B)z^4 n - \frac{1}{6}(A^3 - 3AB + 3C)z^6 n \ldots},$$

$$rn = zn\, S_m - \frac{z^3 n}{6}(S_{3m} - 3 S_{2m} S_m + 2 S^2{}_m) \ldots.$$

Denkt man sich $z$ von Null bis zu einem Werthe $z_0$ wachsend, für welchen $e^{-\frac{1}{2}Az_0^2 n}$ bereits sehr klein, also $\frac{1}{2}Az_0^2 n$ eine grössere Zahl ist (etwa 6), so muss für diesen Werth $z_0$ jedes der Glieder mit $z_0^3 n,\ z_0^4 n, \ldots$

in $R^n$ und $rn$ noch hinreichend klein sein, um vernachlässigt werden zu können. Ohne Zweifel hängt dies sehr von der Beschaffenheit des Fehlergesetzes ab. Man hat beispielsweise bei dem Gauss'schen Gesetz für $m=1$

$$R^n = e^{-u_1 + \frac{0{,}144}{n} u_1^2 + \frac{3{,}8}{n^2} u_1^3 \dots}, \quad u_1 = 0{,}285 \frac{z^2 n}{h^2 \pi},$$

$$rn = \frac{zn}{h\sqrt{\pi}} - 0{,}47 \frac{u_1^{3/2}}{\sqrt{n}} \dots;$$

ferner ist bei demselben Fehlergesetz für $m=2$

$$R^n = e^{-u_2 + \frac{2}{n} u_2^2 - \frac{16}{3n^2} u_2^3 \dots}, \quad u_2 = \frac{z^2 n}{4 h^4},$$

$$rn = \frac{zn}{2h^2} - \frac{4}{3} \frac{u_2^{3/2}}{\sqrt{n}} \dots .$$

Bei gleichem Grade der Annäherung muss hiernach im zweiten Falle $n$ etwas grösser als im ersten angenommen werden. Ist die Fehlerwahrscheinlichkeit constant, so hat man für $m=1$

$$R^n = e^{-u_1 - \frac{0{,}2}{n} u_1^2 - \frac{0{,}076}{n^2} u_1^3 \dots}, \quad u_1 = \frac{a^2 z^2 n}{24},$$

$$rn = \frac{azn}{2} - 0 \frac{u_1^{3/2}}{\sqrt{n}} \dots .$$

Dagegen ist für $m=2$

$$R^n = e^{-u_2 - \frac{0{,}14}{n} u_2^2 - \frac{0{,}004}{n^2} u_2^3 \dots}, \quad u_2 = \frac{2 a^4 z^2 n}{45},$$

$$rn = \frac{a^2 zn}{3} - \frac{2{,}9}{\sqrt{n}} \cdot u_2^{3/2} \dots .$$

Für sich allein geben diese Entwickelungen wenig Aufschluss über den Grad der Annäherung. Es ist aber früher gezeigt worden, dass $n=100$ für $m=2$ beim Gauss'schen Gesetz schon eine starke Annäherung der Function $\varphi(v_2)$ an das Gauss'sche Fehlergesetz zeigt (was, wie sich finden wird, mit der Zulässigkeit der oben erwähnten Abkürzung von $R^n$ und $rn$ auf je ein Glied zusammenfällt); da nun in den vier speciellen Fällen die Reihen für $R^n$ und $rn$ sich wenigstens nicht sehr erheblich von einander unterscheiden, so kann man wohl erwarten, dass für diese Fälle $n=100$ eine beiläufig gleichstarke Annäherung bietet.

Der Ausdruck 30) geht unter Einführung der vereinfachten Ausdrücke von $R^n$ und $rn$ über in

$$33)\quad \varphi(\sigma_m)_n \delta_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} A z^2 n} \cos z n S_m \frac{\sin z n \left(\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}\right) - \sin z n \left(\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}\right)}{z} dz,$$

worin die obere Grenze unbedenklich von $z_0$ bis $\infty$ ausgedehnt werden konnte, da der dadurch entstehende Fehler wohl noch geringer ist, als der durch Vernachlässigung des strengen Integralwerthes von $z_0$ bis $\infty$. Zerlegt man nun in 33) die Producte *cos . sin* in die Differenz zweier *sin* und wendet die Formel

$$\int_0^\infty e^{-\alpha z^2} \frac{\sin \beta z}{z} dz = \sqrt{\pi} \int_0^{\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}} e^{-t^2} dt$$

an, so erhält man nach einfacher Reduction

$$\varphi(\sigma_m)_n \delta_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{\frac{n\left(S_m + \sigma_m - \frac{\delta_m}{2}\right)}{\sqrt{2An}}}^{\frac{n\left(S_m + \sigma_m + \frac{\delta_m}{2}\right)}{\sqrt{2An}}} e^{-t^2} dt + \int_{\frac{n\left(S_m - \sigma_m - \frac{\delta_m}{2}\right)}{\sqrt{2An}}}^{\frac{n\left(S_m - \sigma_m + \frac{\delta_m}{2}\right)}{\sqrt{2An}}} e^{-t^2} dt \right\},$$

demnach mit Berücksichtigung des Betrages von $\delta_m$

$$\varphi(\sigma_m)_n \delta_m = \delta_m \sqrt{\frac{n}{2A\pi}} \left\{ e^{-\frac{(S_m + \sigma_m)^2 n}{2A}} + e^{-\frac{(S_m - \sigma_m)^2 n}{2A}} \right\}.$$

Die erste der beiden Exponentialgrössen kann vernachlässigt werden, da sie für jeden Werth von $\sigma_m$ sehr klein ist. Damit hat man schliesslich unter gleichzeitiger Restitution des Ausdruckes für $A$

$$34) \qquad \varphi(\sigma_m)_n \delta_m = \sqrt{\frac{n}{2\pi(S_{2m} - S^2_m)}}\, e^{-\frac{n(S_m - \sigma_m)^2}{2(S_{2m} - S^2_m)}} \delta_m.$$

Die Differenzen $(S_m - \sigma_m)$ befolgen hiernach das Gauss'sche Fehlergesetz, wobei die Präcision gleich $\sqrt{\frac{n}{2(S_{2m} - S^2_m)}}$ ist. Es ist ferner also die Wahrscheinlichkeit, dass $\sigma_m$ zwischen die Grenzen

$$\left(S_m \mp 0{,}6745 \sqrt{\frac{S_{2m} - S^2_m}{n}}\right)$$

fallen werde, gerade $\frac{1}{2}$.

Bildet man zur Probe das Integral von $\varphi(\sigma_m)_n \delta_m$ für $\sigma_m$ von Null bis $\infty$, wobei $(S_m - \sigma_m)$ von $S_m$ bis $-\infty$ geht, so erhält man zwar nicht genau, aber doch sehr nahe eins, indem der daran fehlende Betrag des Integrals von $S_m$ bis $+\infty$ nur sehr wenig beträgt.

Wenn wir nun in 34) noch die Relationen 6) substituiren, so ist zu bedenken, dass nur sehr kleine $(S_m - \sigma_m)$, also auch nur sehr kleine $v_m$ eine merkliche Wahrscheinlichkeit haben. Man darf daher abgekürzt setzen

$$\sigma_m = S_m\,(1 + m\,v_m)\,,\quad \delta_m = m\,S_m\,d\,v_m$$

und erhält damit aus 34)

$$35)\qquad \varphi(v_m)_n\,d\,v_m = \sqrt{\frac{n\,m^2 S^2_m}{2\,\pi\,(S_{2\,m} - S^2_m)}}\,e^{-\frac{n\,m^2 S^2 m}{2\,(S_{2\,m} - S^2 m)}\,v^2 m}\,d\,v_m;$$

es befolgen hiernach auch die $v_m$ um so genauer das Gauss'sche Gesetz, je grösser $n$ ist. Die Präcision ergiebt sich für dieselben gleich $\sqrt{\dfrac{n\,m^2 S^2_m}{2\,(S_{2\,m} - S^2_m)}}$ und die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{2}$, dass $\sqrt[m]{\sigma_m}$ zwischen die Grenzen falle

$$36)\qquad \sqrt[m]{S_m}\left(1 \mp 0{,}6745\sqrt{\frac{S_{2\,m} - S^2_m}{n\,m^2 S^2_m}}\right).$$

Den in der Parenthese stehenden Ausdruck mit dem Vorzeichen $\mp$ werden wir, wie früher, kurz $v_m$ nennen.

## § 6. Constante Fehlerwahrscheinlichkeit; $n$ sehr gross.

Hier ist $S_m = \dfrac{a^m}{m+1}$, womit 36) giebt

$$37)\qquad \sqrt[m]{S_m}\left(1 \mp \frac{0{,}6745}{\sqrt{n\,(2\,m+1)}}\right).$$

Zum Vergleiche mit dem Täfelchen I) für $n = 1, 2$ und $m = 1, 2, 3$ führen wir diese Werthe in 37) ein und erhalten damit, correspondirend mit I), folgendes Täfelchen der $v_m$:

I*)

| | $n = 1.$ | $n = 2.$ |
|---|---|---|
| $m = 1$ | 0,39 | 0,28 |
| 2 | 0,30 | 0,21 |
| 3 | 0,25 | 0,18 |

woraus hervorgeht, dass für kleinere Exponenten $m$ schon wenige Beobachtungen $n$ ausreichen, um Formel 37) anwenden zu dürfen. Die Annäherung ist offenbar hinsichtlich dieser Formel allein eine viel grössere, als hinsichtlich der Function $\varphi(\sigma_m)$, resp. $\varphi(v_m)$ an das Gauss'sche Gesetz.

Die Formel 37) bestätigt nun für viele Beobachtungen, was früher schon für wenige gefunden wurde: Es ist die Wahrscheinlichkeit dass die $\sqrt[m]{\sigma_m}$ mit der $\sqrt[m]{S_m}$ zusammenfallen werde, um so grösser, je grösser der Exponent $m$ angenommen wird.

Wenn nun der wahrscheinliche Beobachtungsfehler unbekannt ist und man will ihn (oder einfacher den Maximalfehler $a$) aus einem gegebenen $\sigma_m$ berechnen nach der Formel

38) $$a=\sqrt[m]{(m+1)\,\sigma_m},$$

welche Formel annimmt, dass $\sigma_m$ gerade $S_m$ sei, so ist es vortheilhaft, $m$ thunlichst gross anzunehmen. Wie sich aber hierzu die günstigsten Hypothesen über $a$ bei gegebenen $\varepsilon$ verhalten, soll weiterhin untersucht werden.

## § 7. Gauss'sches Fehlergesetz; $n$ sehr gross.

Hier ist $S_m=\dfrac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{h^m\sqrt{\pi}}$ und daher

39) $$S_1=\frac{1}{h\sqrt{\pi}};\qquad S_m=\frac{1.2.3\ldots\left(\frac{m-1}{2}\right)}{h^m\sqrt{\pi}},\quad m \text{ ungerade};$$
$$S_{2p}=\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2^p\,h^{2p}},\quad m=2p.$$

Setzt man zur Abkürzung

39*) $$S_m=\frac{\alpha}{h^m},\quad S_{2m}=\frac{\beta}{h^{2m}},$$

so ergiebt sich nun anstatt 36)

40) $$\sqrt[m]{S_m}\left(1\mp 0{,}6745\sqrt{\frac{\beta-\alpha^2}{n\,m^2\,\alpha^2}}\right).$$

Um zu sehen, welche Annäherung dieser Ausdruck für kleine $n$ bietet, setzen wir darin $m=1$ bis 3 für $n=1$ und 2 und erhalten damit folgendes, dem Täfelchen II correspondirende Täfelchen der wahrscheinlichen Grenzen $\nu_m$:

II*)

| | $n=1.$ | $n=2.$ |
|---|---|---|
| $m=1$ | 0,510 | 0,360 |
| 2 | 0,477 | 0,337 |
| 3 | 0,497 | 0,352 |

Hiernach ist die Annäherung der Formel 40) schon für kleinere $n$ jedenfalls eine bedeutende wie sich ebenfalls bei constanter Fehlerwahrscheinlichkeit fand. Gegen diesen Fall zeigt sich aber der Unterschied, dass die zweiten Fehlerpotenzen die engsten Grenzen $\mp\nu_m$ geben: Es ist die Wahrscheinlichkeit, dass die $\sqrt[m]{\sigma_m}$ mit der $\sqrt[m]{S_m}$ zusammenfallen werde, am grössten für den Exponenten $m=2$. Gauss gab zu diesem Satze, der hier für kleines und grosses $n$ bewiesen ist, die Formel 40) unter Voraussetzung eines grossen $n$ und wandte dieselbe auf $m=1$ bis 6 an. Es bleibt bei Betrachtung der betreffenden

$\nu_m$ kein Zweifel, dass mit weiter wachsendem $m$ auch $\nu_m$ weiter zunehmen werde; immerhin könnte schliesslich einmal eine Aenderung dieser Verhältnisse eintreten. Doch ist dies nicht der Fall, wie sich leicht zeigen lässt. Setzt man nämlich, da es sich nur um grössere $m$ handeln kann, in dem Ausdrucke für $S_m$ näherungsweise, aber doch sehr nahe richtig $\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)=\sqrt{2\pi}\left(\frac{m+1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}e^{-\frac{m+1}{2}}$ (vergl. § 4), so geht 40) über in

$$41)\qquad \sqrt[m]{S_m}\left(1\mp 0{,}6745\sqrt{\frac{1}{nm^2}\left[\sqrt{\frac{e}{2}}\left(\frac{2m+1}{m+1}\right)^m-1\right]}\right)$$

und man sieht sofort, dass der Radicand der Quadratwurzel mit wachsendem $m$ immer rascher wächst.

Nach dem Vorhergehenden ist es bei unbekannter Präcision $h$ am vortheilhaftesten, sich des Durchschnitts $\sigma_2$ der zweiten Potenzen gegebener Fehler zu bedienen, um $h$ zu berechnen. Man wird, indem man annimmt, es sei $\sigma_2$ gerade $S_2$, setzen

$$42)\qquad h=\frac{1}{\sqrt{2\,\sigma_2}}.$$

## § 8. Constante Fehlerwahrscheinlichkeit; verschiedene Hypothesen.

In den bisherigen Betrachtungen wurde, soweit es sich um die Ermittelung des Maximalfehlers $a$ handelte, angenommen, dass ein gegebenes $\sigma_m$ für $S_m$ genommen werde. Diese Hypothese, dass $\sigma_m$ gerade $S_m$ sei, ist in der That die praktisch bequemste und allein durchführbare. Aber die beste ist es nicht immer. Darauf wird man schon dadurch aufmerksam, dass bei bekanntem $a$ die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens für $\sigma_m=S_m$ nur ein Maximum bei sehr grossen $n$ ist, nicht aber bei kleinen $n$.

Um zur besten Hypothese, aus einem bestimmten $\sigma_m$ $a$ zu berechnen, zu gelangen, differenziren wir 34) nach $a$ und setzen den Differentialquotienten gleich Null. Je grösser $n$ ist, um so genauer wird für die beste Hypothese $a=\sqrt[m]{(m+1)\,\sigma_m}$, mit der frühern Rechnung nach 38) übereinstimmend.

Für kleine $m$ fehlt aber diese Uebereinstimmung. Die Formeln 7) lehren, dass bei $n=1$ am besten $a=\sqrt[m]{\sigma_m}$, d. i. gleich dem einen gegebenen $\varepsilon$ zu setzen ist [und hier würde die Formel 38) $a=\varepsilon\sqrt[m]{(m+1)}$ setzen]. Die Formeln 9) bis 11) zeigen ferner, dass bei $n=2$ und $m=1$ bis 3 am besten $a=\sqrt[m]{2\,\sigma_m}$, d. i $\sqrt[m]{\varepsilon_1{}^m+\varepsilon_2{}^m}$ zu nehmen ist (Formel 38) würde geben $a=\sqrt[m]{(\varepsilon_1{}^m+\varepsilon_2{}^m)\frac{m+1}{2}}$. Wie nun die Berechnung von $a$ aus $\sigma_m$ für $n>2$ nach der besten Hypothese sich gestaltet, lässt sich ohne mühsame Untersuchung nicht angeben. Daher muss man eben im Allgemeinen zur praktisch bequemen Hypothese zurückkehren und nach 38) rechnen.

Immerhin hat diese Formel 38) aber den Mangel, dass sie $a$ kleiner ergeben kann, als den grössten der gegebenen Fehler $\varepsilon$. Nennen wir diesen $\varepsilon_M$, so muss nothwendig $a \geqq \varepsilon_M$ gewählt werden. Es zeigt sich nun wieder, dass auch in dieser Beziehung mit wachsendem $m$ die Hypothese 38) günstiger wird. Denn offenbar ist $\lim_{m=\infty}\sqrt[m]{(m+1)\sigma_m}=\varepsilon_M$, indem man zunächst schreiben kann

$$\sqrt[m]{(m+1)\sigma_m}=\varepsilon_M\sqrt[m]{\frac{m+1}{n}\left[1+\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_M}\right)^m+\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_M}\right)^m+\ldots\right]}$$

und nun erkennt, dass der Factor von $\varepsilon_M$ gegen eins convergirt.

Die Annahme $a=\varepsilon_M$ ist hiernach unter den besten Hypothesen zur Berechnung von $a$ aus irgend einem $\sigma_m$ die vortheilhafteste. Sie ist aber überhaupt die absolut günstigste Hypothese. Denn sie allein giebt für die Wahrscheinlichkeit des Eintretens der wirklich begangenen Fehler $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$, d. h. also für $\frac{1}{a^n}$ ein Maximum.

## § 9. **Gauss'sches Fehlergesetz; verschiedene Hypothesen.**

Die bisherigen Untersuchungen drehten sich auch bei dem Gauss'schen Fehlergesetz, soweit die Berechnung der Präcision $h$ in Frage kam, um die Annahme, dass $\sigma_m$ mit $S_m$ zusammenfalle. In der That ist diese Hypothese die praktisch bequemste für die Ermittelung von $h$ aus $\sigma_m$; aber sie ist ebenfalls nicht immer die beste Hypothese, was schon der Umstand vermuthen lässt, dass nur für grosses $n$ der wahrscheinlichste Werth von $\sigma_m$ mit $S_m$ zusammenfällt, während er für kleine $n$ nach unseren früheren Entwickelungen von $S_m$ verschieden ist.

Um zur besten Hypothese, aus einem gegebenen $\sigma_m$ die Präcision $h$ zu berechnen, zu gelangen, hat man, wie früher durch Differentiation von 34) nach $h^m$, in welche Formel zunächst für $S_m$ und $S_{2m}$ die Werthe nach 39*) einzuführen sind, die Bedingung

$$1=\frac{n\alpha\sigma_m}{\beta-\alpha^2}h^m\left(\frac{\sigma_m}{\alpha}h^m-1\right)$$

und hieraus folgt für $h^m$ mit mehr oder weniger Annäherung an die Strenge

43) $$h^m=\frac{\alpha}{\sigma_m}\left(1+\frac{\beta-\alpha^2}{\alpha^2 n}\right) \text{ und } h^m=\frac{\alpha}{\sigma_m}.$$

Hiernach wird man in der That am besten thun, sobald $n$ gross ist, ein gegebenes $\sigma_m$ für $S_m$ zu nehmen und $h$ nach der Formel

$$44) \qquad h = \sqrt[m]{\frac{\alpha}{\sigma_m}}$$

zu berechnen. Ist aber $n$ klein, so wird (ausgenommen für den Exponenten $m = 2$) die beste Hypothese eine andere:

Die Formeln 15) lassen erkennen, dass bei $n = 1$ statt 44) besser angenommen werden musste

$$45) \qquad h = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt[m]{\sigma^2_m}}}, \text{ d. i. } \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}}.$$

Complicirter werden die Rechnungen zur Ableitung der Ausdrücke für $m \geqq 2$ und man sieht sich genöthigt, von der besten Hypothese abzugehen und durchaus Formel 44) anzuwenden. Diese praktisch bequeme Hypothese scheint sich überdies der besten Hypothese rasch zu nähern. Man hat z. B. für den interessantesten Fall $m = 1$

bei $n = 1$ nach 44) $h = \frac{0,564}{\varepsilon}$, dagegen besser nach 45) $h = \frac{0,707}{\varepsilon}$;

„ $n = 2$ „ „ $h = \frac{2.0,564}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$, „ „ „ 17) $h = \frac{2.0,628}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$.

Wenn nun $h$ nach Formel 44) berechnet werden soll und man hat die Wahl des Exponenten $m$ frei, so ist's nach § 7 am vortheilhaftesten, mit den zweiten Potenzen zu rechnen. Hieraus folgt natürlich noch gar nicht, dass diese Rechnung die absolut günstigste Hypothese über $h$ ergiebt; denn sobald die $n$ Beobachtungsfehler $\varepsilon$ einzeln bekannt sind, könnte ja auch eine andere Function der $\varepsilon$, als gerade ein $\sigma_m$, zur genannten Hypothese führen. Nun, bekanntlich ist von Gauss gezeigt worden, dass der Durchschnitt der zweiten Potenzen zur absolut günstigsten Hypothese führt, weil dafür die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens der gegebenen $\varepsilon$ ein Maximum wird.

## § 10. Gauss'sches Fehlergesetz; wahrscheinlicher Fehler der Hypothesen.

Die Untersuchungen des § 7 lassen nur im Allgemeinen den relativen Werth der Berechnung von $h$ aus verschiedenen $\sigma_m$ nach Formel 44) erkennen. Es ist erwünscht, den wahrscheinlichen Fehler dieser Hypothesen zu erfahren. Nach 34) ist aber mit Rücksicht auf 39*) die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese über $h$ proportional

$$h^m e^{-\frac{n(\alpha - h^m \sigma_m)^2}{2(\beta - \alpha^2)}}.$$

Bezeichnen wir nun den nach 43) berechneten $h$-Werth mit $H$ und setzen im Allgemeinen $h = H + \lambda$, so giebt der vorige Ausdruck mit Weglassung der von $\lambda$ unabhängigen Theile

$$46)\qquad \left(1+\frac{\lambda}{H}\right)^m e^{-\frac{n\alpha^2}{2(\beta-\alpha^2)}\left(\frac{\sigma_m}{\alpha}(H+\lambda)^m-1\right)^2}.$$

Da nun hier ein grosses $n$ Voraussetzung ist, so haben nur sehr kleine $\lambda$ eine in Betracht kommende Wahrscheinlichkeit; man hat daher in zureichender Näherung

$$\left(1+\frac{\lambda}{H}\right)^m = e^{\frac{m\lambda}{H}-\frac{m\lambda^2}{2H^2}},$$

ferner unter Substitution des ersten der Ausdrücke 43)

$$\frac{\sigma_m}{\alpha}(H+\lambda)^m = 1+\frac{m\lambda}{H}+\frac{m(m-1)\lambda^2}{2H^2}+\frac{\beta-\alpha^2}{\alpha^2 n}$$

und daraus in gleicher Annäherung

$$\left(\frac{\sigma_m}{\alpha}(H+\lambda)^m-1\right)^2 = \frac{m^2\lambda^2}{H^2}+2\frac{\beta-\alpha^2}{\alpha^2 n}\left(\frac{m\lambda}{H}+\frac{m(m-1)\lambda^2}{2H^2}\right).$$

Damit geht 46) über in

$$e^{-\frac{nm^2\alpha^2}{2H^2(\beta-\alpha^2)}\lambda^2-\frac{m^2\lambda^2}{2H^2}};$$

hierin darf man aber den zweiten Theil des Exponenten noch gegen den ersten vernachlässigen. Jetzt findet man ohne Weiteres als Wahrscheinlichkeit, dass der richtige Werth von $h$ zwischen $(H+\lambda)$ und $(H+\lambda+d\lambda)$ fällt, den Werth

$$47)\qquad \begin{gathered}\frac{K}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{nm^2\alpha^2}{2H^2(\beta-\alpha^2)}\lambda^2}d\lambda,\\ K=\sqrt{\pi}:\int_{-H}^{\infty}e^{-\frac{nm^2\alpha^2}{2H^2(\beta-\alpha^2)}\lambda^2}d\lambda=\sqrt{\frac{nm^2\alpha^2}{2H^2(\beta-\alpha^2)}}.\end{gathered}$$

Der letzte Ausdruck für $K$ ist unter der hier sehr unerheblichen Vernachlässigung berechnet, dass die untere Integralgrenze $-H$ auf $-\infty$ ausgedehnt wurde. Ein Blick auf 47) zeigt $K$ in der Bedeutung als Präcision, welche zu den Abweichungen $\lambda$ gehört, und somit ist die Wahrscheinlichkeit gerade $\frac{1}{2}$, dass der richtige Werth von $h$ zwischen die Grenzen falle

$$48)\qquad \sqrt[m]{\frac{\alpha}{\sigma_m}}\left(1\mp 0{,}6745\sqrt{\frac{\beta-\alpha^2}{nm^2\alpha^2}}\right).$$

Soweit es die Parenthese angeht, stimmt 48) mit 40) überein. Bezüglich der Bedeutung von 48) darf nicht unbetont bleiben, dass sie ein gegebenes $\sigma_m$ voraussetzt, aus welchem die Präcision berechnet wird, und dass dabei die Werthe der Beobachtungsfehler $\varepsilon$ im Einzelnen unbeachtet bleiben, wie es ja eigentlich der Fall ist. Würde man mittelst der Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der $n$ Beobachtungsfehler einen dem 48) entsprechenden Ausdruck ermitteln, so würde dieser eine andere Gestalt annehmen; er würde aber (wie mir scheint) keinen praktischen Werth haben. Uebrigens gehen für $\sigma_2$ beide Ausdrücke ineinander über. 48) giebt alsdann

$$\sqrt{\frac{1}{2\sigma_2}}\left(1 \mp \frac{0{,}4769}{\sqrt{n}}\right)$$

übereinstimmend mit den von Gauss über die absolut günstige Hypothese gegebenen wahrscheinlichen Grenzen.

Um noch zu sehen, wie sich 48) für kleine $n$ verhält, betrachten wir den Fall $n = 1$ im Anschluss an die Formeln 15). Die Wahrscheinlichkeit der Hypothese $h$ bei gegebenem $\sigma_m$ ist hier proportional

$$h e^{-h^2 \sigma_m^{\frac{2}{m}}}$$

und daher die Wahrscheinlichkeit, dass die Präcision zwischen $h$ und $h + dh$ liegt, gleich

$$K h e^{-h^2 \sigma_m^{\frac{2}{m}}} dh,$$

$$K = 1 : \int_0^\infty h e^{-h^2 \sigma_m^{\frac{2}{m}}} dh = 2 \sigma_m^{\frac{2}{m}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit ist ferner gerade $\frac{1}{2}$, dass der richtige Werth von $h$ zwischen die Grenzen

49) $$\sqrt[m]{\frac{\alpha}{\sigma_m}}\,(1 \mp \nu'_m)$$

falle, wobei, wie leicht zu finden ist, $\nu'_m$ der Bedingung Genüge zu leisten hat:

50) $$e^{-\alpha^{\frac{2}{m}}(1-\nu'_m)^2} - e^{-\alpha^{\frac{2}{m}}(1+\nu'_m)^2} = \frac{1}{2}.$$

Hieraus hat man folgende Werthe, denen wir die entsprechenden nach 48) an die Seite stellen:

III)

| $n = 1$. | Werth $\nu'_m$ | | Werth $\nu'_m \sqrt[m]{\alpha}\sqrt{2}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $m$. | nach 50). 1. | nach 48). 2. | nach 50). 3. | nach 48). 4. |
| 1 | 0,589 | 0,510 | 0,470 | 0,407 |
| 2 | 0,440 | 0,477 | 0,440 | 0,477 |
| 3 | 0,382 | 0,497 | 0,446 | 0,580 |

Die Colonnen 3 und 4 enthalten die Werthe $\nu'_m$, multiplicirt mit einer Grösse, welche dem Werthe von $h$, wie er aus 48) folgt, proportional ist, wobei zu beachten, dass im vorliegenden Falle die $\sqrt[m]{\sigma_m} = \varepsilon$ wird und daher die $h$-Werthe nur noch von den $\alpha$ abhängen. Während sonach für $n=1$ die mittelst verschiedener Exponenten $m$ berechneten $h$-Werthe in einem von $\varepsilon$ unabhängigen Verhältnisse stehen, ist für $n>1$ dies nicht mehr der Fall und auch das Verhältniss allgemein nicht mehr angebbar. Im Allgemeinen wird man daher die Güte der Bestimmung von $h$ nach den $\nu'_m$ beurtheilen, dagegen im besondern Falle $n=1$ noch auf das angegebene Verhältniss der $h$-Werthe Rücksicht nehmen (wie in Col. 3 geschehen). Vergleichbar sind nach meiner Ansicht überdies die entsprechenden Werthe der Colonnen 3 und 2 (nicht 4, welche nur der Vollständigkeit halber beigefügt ist); man darf darnach wohl eine rasche Annäherung von 48) an die Strenge mit wachsendem $n$ erwarten.

---

## Bemerkung.

Herr Mees hat S. 126 flg. des XXI. Bandes dieser Zeitschrift auf meine Aeusserung S. 300, XX über seinen frühern Aufsatz geantwortet. Dieser Antwort gegenüber genügt es, wiederum auf meine ebenerwähnte Aeusserung hinzuweisen und Herrn Mees daran zu erinnern, dass ich selbst in meinem Buche auf eine gewisse Unvollständigkeit eines Beweises aufmerksam mache, mir also die Priorität einer „Warnung“ verbleibt. Zu den Mängeln meines Buches rechne ich selbstverständlich die betreffende Stelle nicht — indem ich nämlich aus praktischen Gründen der jüngern Gauss'schen Darstellung der Ausgleichungsrechnung im Wesentlichen folgte, musste ich nothwendig auch deren Lücken in Kauf nehmen, die selbst durch lange Untersuchungen nicht vollständig ausfüllbar sind, aber doch Erwähnung verdienen, und zwar auch in einem Lehrbuche. Gestattet eine nur auf das Gauss'sche Fehlergesetz gebaute Ausgleichungstheorie gerade in dem streitigen Punkte auch eine weit befriedigendere Lösung, so verbleiben doch auch einer solchen Theorie noch Lücken genug, um im Hinblick auf den weit complicirteren mathematischen Apparat und die engeren Grenzen der Giltigkeit derselben nicht der andern Darstellungsweise den Vorzug geben zu können.

HELMERT.