Werk

Titel: Zeitschrift für Mathematik und Physik

Verlag: Teubner

Jahr: 1876

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 MATH I, 755:21

Werk Id: PPN599415665_0021

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN599415665_0021|LOG_0025

Kleinere Mittheilungen.

XIII. Die Bewegung materieller Punkte auf vorgeschriebenen beweglichen Bahnen.

§ 1.

Denkt man sich mit der Bahn B (einer Fläche F oder Curve C) des materiellen Punktes P, dessen Masse stets als Einheit genommen werden soll, ein rechtwinkliges System ($\mathfrak{S}$) oder ($\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$) fest verbunden, so wird jeder Bewegung von B eine Bewegung von ($\mathfrak{S}$) entsprechen und umgekehrt. Die unendliche Mannichfaltigkeit der möglichen Bewegungen von B wird der unendlichen Mannichfaltigkeit der Bewegungen von ($\mathfrak{S}$) äquivalent sein. Es wird mithin die Bewegung von B eine völlig willkürliche genannt werden dürfen, sobald man ($\mathfrak{S}$) völlig freie Beweglichkeit gegeben hat.

Dies aber wird erreicht, wenn man einestheils dem Anfangspunkte O' des Systems ($\mathfrak{S}$) jede mögliche Bewegung gestattet, anderntheils jede mögliche Rotation von ($\mathfrak{S}$) um O' zulässt. — Hat nun O', bezogen auf ein festes rechtwinkliges System (S) oder (x, y, z), die Coordinaten x_1, y_1, z_1, denkt man sich ferner durch O' zu irgend einer Zeit t ein dem (S) paralleles System (Σ) oder (ξ, η, ζ) gelegt, so wird jede mögliche Bewegung von ($\mathfrak{S}$), also auch von B berücksichtigt sein, wenn man einestheils die Grössen x_1, y_1, z_1 beliebige Functionen der Zeit sein lässt, anderntheils das System ($\mathfrak{S}$) auf das System (Σ) durch die bekannten Transformationsformeln, als welche hier die Euler'schen benutzt werden sollen, so bezieht, dass man die darin vorkommenden Winkel ψ, ϑ, φ willkürliche Functionen der Zeit sein lässt. — Hier bedeutet ψ den Winkel, welchen der Grundschnitt der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene in der $\xi\eta$-Ebene mit der ξ-Axe bildet, ϑ den Neigungswinkel der Ebene xy zur Ebene $\xi\eta$, φ den Winkel, welchen die Axe der $\mathfrak{x}$ mit jenem Grundschnitte einschliesst. Man kann jene Formeln auch für $\vartheta = 0$ beibehalten; sie stimmen dann mit den Formeln der ebenen Geometrie überein, wenn man nur noch dem ψ das entgegengesetzte Vorzeichen giebt, was nach der Ableitungsart (Leroy, Analyt. Geometrie des Raumes, übers. v. Kauffmann, § 89 Anm.) selbstverständlich ist.

Man bewahrt also die volle Allgemeinheit, wenn man die Coordinaten x, y, z von P durch folgende Gleichungen definirt:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) + a_1 \mathfrak{x} + b_1 \mathfrak{y} + c_1 \mathfrak{z}, \\ y &= \psi(t) + a_2 \mathfrak{x} + b_2 \mathfrak{y} + c_2 \mathfrak{z}, \\ z &= \chi(t) + a_3 \mathfrak{x} + b_3 \mathfrak{y} + c_3 \mathfrak{z}, \end{aligned}$$

wo die a, b, c die Coefficienten der Euler'schen Formeln sind und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ noch den Gleichungen der Bahn B, bezogen auf ($\mathfrak{S}$), zu genügen haben.

§ 2.

Von den mechanischen Principien hat nur das d'Alembert'sche Geltung. Es ist vortheilhaft, die zweite der von Lagrange gegebenen Formen dieses Princips anzuwenden. Zu diesem Behufe sind für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ independente Coordinaten q einzuführen, an Anzahl 2, wenn B eine Fläche, 1, wenn B eine Curve ist. Dann wird die Lage von P bestimmt durch Gleichungen von folgender Form:

$$\begin{aligned} x &= A_1(t, q_1, q_2), \\ y &= A_2(t, q_1, q_2), \\ z &= A_3(t, q_1, q_2). \end{aligned}$$

Bildet man nun den Ausdruck für die lebendige Kraft, führt die in der Lagrange'schen Formel vorgeschriebenen Differentiationen aus, setzt, wie üblich, $\frac{\partial U}{\partial q} = Q$, so entsteht nach einigen Vereinfachungen die folgende erste Bewegungsgleichung, der die andere ganz analog ist:

$$q''_1 \left(\frac{\partial A}{\partial q_1}\right)^2 + q''_2 \frac{\partial A}{\partial q_1} \frac{\partial A}{\partial q_2} + q'_1 \frac{\partial A}{\partial q_1} \frac{d\frac{\partial A}{\partial q_1}}{dt} + \frac{\partial A}{\partial q_1} \frac{d\frac{\partial A}{\partial t}}{dt} + q'_2 \frac{\partial A}{\partial q_1} \frac{d\frac{\partial A}{\partial q_2}}{dt} - Q_1 \mathrel{=\!\!\mid\!\!=} 0.$$

Hier ist, wie auch im Folgenden stets, durch die Accente die Differentiation nach der Zeit, durch das Zeichen $\mathrel{=\!\!\mid\!\!=}$ aber, statt des Gleichheitszeichens, das nur durch ein A ohne Index angedeutete Vorkommen dreigliedriger Summen links bezeichnet.

Für die Integration der Bewegungsgleichungen ist es von Wichtigkeit, die Fälle kennen zu lernen, in welchen diese Gleichungen linear sind und in welchen sie t nicht explicite enthalten.

§ 3.

Damit q'^2_1, q'^2_2, q'_1, q'_2 in den Bewegungsgleichungen nicht vorkommen, müssen folgende sechs Gleichungen erfüllt sein:

1) $\Sigma \frac{\partial A}{\partial q_1} \frac{\partial^2 A}{\partial q_1^2} = 0,$ 2) $\Sigma \frac{\partial A}{\partial q_1} \frac{\partial^2 A}{\partial q_2^2} = 0,$ 3) $\Sigma \frac{\partial A}{\partial q_1} \frac{\partial^2 A}{\partial q_1 \partial q_2} = 0,$

$$1^*)\ \Sigma\frac{\partial A}{\partial q_2}\frac{\partial^2 A}{\partial q_2^2}=0,\qquad 2^*)\ \Sigma\frac{\partial A}{\partial q_2}\frac{\partial^2 A}{\partial q_1^2}=0,\qquad 3^*)\ \Sigma\frac{\partial A}{\partial q_2}\frac{\partial^2 A}{\partial q_1\,\partial q_2}=0,$$

wo die Summation über die A zu erstrecken ist. — Mit Berücksichtigung der zwischen den a, b, c des § 1 bestehenden Beziehungen lassen sich diese Bedingungen durch die folgenden ersetzen:

$$1)\ \Sigma\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q_1}\right)^2 \text{ darf kein } q_1,\qquad 1^*)\ \Sigma\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q_2}\right)^2 \text{ kein } q_2 \text{ enthalten},$$

$$2)\ \Sigma\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q_1}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial q_2^2}=0,\qquad 2^*)\ \Sigma\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q_2}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial q_1^2}=0,$$

$$3)\ \Sigma\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q_1}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial q_1\,\partial q_2}=0,\qquad 3^*)\ \Sigma\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q_2}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial q_1\,\partial q_2}=0.$$

Hier repräsentirt $\mathfrak{x}$ die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$.

Von algebraischen Functionen kann diesen Bedingungen nur genügt werden durch die Form

$$\mathfrak{x}=\lambda q_1+\mu q_2+\nu,$$

wo λ, μ, ν beliebige Constante sind. Hierdurch wird, wie nach Elimination der, resp. des q ersichtlich ist, die Bahn als eine Ebene oder eine Gerade qualificirt.

Sonst wird den Bedingungen nur noch genügt, wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die folgende Form haben:

$$\mathfrak{x}=k\cos(\lambda q_1+\mu q_2+\nu)+k_1,$$
$$\mathfrak{y}=k\sin(\lambda q_1+\mu q_2+\nu)+k_2,$$
$$\mathfrak{z}=\alpha q_1+\beta q_2+\gamma,$$

oder sich durch Transformation auf diese Form bringen lassen. Die k, λ, μ, ν, α, β, γ sind wieder Constante. Hierdurch aber wird die Bahn von P entweder als die Fläche eines Kreiscylinders oder als eine auf einer solchen verzeichnete Curve definirt.

Man hat mithin folgendes Resultat:

Die Bewegungsgleichungen sind linear, wenn die Bahn des Punktes P eine Gerade oder eine Ebene, oder die Fläche eines Kreiscylinders oder eine auf einer solchen Fläche verzeichnete Curve ist.

Es hängt also nur von den geometrischen Eigenschaften der Bahn ab, ob die Gleichungen zu den linearen gehören oder nicht.

§ 4.

Es ist ferner für die Integration der Bewegungsgleichungen von Wichtigkeit, die Fälle auszusondern, wo die Zeit nicht explicite in diesen Gleichungen erscheint. Damit nun zunächst t nicht in den $\mathfrak{Q}$ stehe, werden die Kraftcomponenten X, Y, Z sowohl von t, als den q frei sein müssen. Dann wird

$$\mathfrak{Q}=X\frac{\partial A_1}{\partial q}+Y\frac{\partial A_2}{\partial q}+Z\frac{\partial A_3}{\partial q},$$

wo t nur noch in den Derivirten $\frac{\partial A}{\partial q}$ stehen könnte.

Dies aber findet zunächst dann nicht statt, wenn jedes A in zwei additive Theile α und a derart zerfällt, dass α nur t, a nur die q enthält. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann t nur noch vorkommen in

$$\Sigma\frac{\partial A}{\partial q}\frac{d\frac{\partial A}{\partial t}}{dt},$$

was nach unserer Annahme übergeht in

$$\Sigma\frac{\partial a}{\partial q}\frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Dieses Glied aber ist dann von t frei, wenn die α algebraische Functionen von t, aber von keinem höheren als dem zweiten Grade sind. Nun sind die α mit den Functionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ des § 1 zu identificiren und man erhält folgendes Resultat:

Die Zeit kommt dann nicht explicite in den Bewegungsgleichungen vor, wenn der Punkt P von constanten Kräften beeinflusst wird und die Bahn B eine ausschliesslich translatorische Bewegung hat, die mit constanter Beschleunigung – welche auch Null sein kann — erfolgt.

Gleichzeitig sieht man, dass, wenn die Beschleunigung, mit der B fortschreitet, Null, also die Geschwindigkeit constant ist, diese letztere Constante gar nicht in die Bewegungsgleichungen eintritt, also auf die relative Bewegung von P ohne Einfluss ist.

Bei einer nicht ausschliesslich translatorischen Bewegung von B enthalten zwar ebenfalls die α kein q, aber die a sowohl die q, als auch t. — Schliesst man nun den Fall aus, dass X, Y, Z gleichzeitig Null sind, so wird die Bedingung dafür, dass die $\mathfrak{Q}$ t nicht explicite enthalten, entweder die sein, dass die eine der Kraftcomponenten, z. B. X, verschwindet, während $\frac{\partial A_2}{\partial q}$ und $\frac{\partial A_3}{\partial q}$ kein t enthalten, oder die, dass zwei Kraftcomponenten, z. B. X und Y, Null werden, während $\frac{\partial A_3}{\partial q}$ von t frei ist.

Da aber im ersteren Falle t sofort in $\left(\frac{\partial A_1}{\partial q}\right)^2$ auftritt, so ist nur der zweite in Betracht zu ziehen. In diesem letzteren sind, da

$$A_3=\chi(t)+\zeta$$

und ζ von t frei ist, alle um O möglichen Rotationen der Bahn B oder des Systems ($\mathfrak{S}$) auf solche um die ζ-Axe eingeschränkt. Lässt man nun die $\mathfrak{z}$-Axe mit dieser und folglich die Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ mit der Ebene der $\xi\eta$ zusammenfallen, so ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$x = A_1 = \varphi(t) + \mathfrak{x}\cos\psi - \mathfrak{y}\sin\psi,$$
$$y = A_2 = \psi(t) + \mathfrak{x}\sin\psi + \mathfrak{y}\cos\psi,$$
$$z = A_3 = \chi(t) + \mathfrak{z}.$$

Weiter ergiebt sich, dass nunmehr

$$\Sigma \frac{\partial A}{\partial q_1}\frac{\partial A}{\partial q_2} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q_1}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q_2} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial q_1}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial q_2} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q_1}\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q_2}$$

t nicht explicite enthält, während

$$\Sigma \frac{\partial A}{\partial q}\frac{d\frac{\partial A}{\partial t}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q}[\varphi''(t)\cos\psi + \psi''(t)\sin\psi] + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial q}[\psi''(t)\cos\psi - \varphi''(t)\sin\psi]$$
$$+ \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q}\chi''(t) - \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q}[\mathfrak{x}\psi'^2 + \mathfrak{y}'\psi' + \mathfrak{y}\psi''] + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial q}[\mathfrak{x}'\psi' + \mathfrak{x}\psi'' - \mathfrak{y}\psi'^2]$$

wird.

Damit hier t nicht erscheine, ist zunächst nothwendig, dass ψ' eine Constante ω, ferner, dass $\chi(t)$ eine algebraische Function von t und von keinem höheren als dem zweiten Grade sei. Endlich aber müssen die Ausdrücke

$$\varphi''(t)\cos\psi + \psi''(t)\sin\psi \quad \text{und} \quad \psi''(t)\cos\psi - \varphi''(t)\sin\psi$$

von t frei sein. Diese Ausdrücke gehen durch $\varphi(t) = k\cos\lambda$ und $\psi(t) = k\sin\lambda$ über in

$$\cos(\lambda-\psi)[k'' - k\lambda'^2] - \sin(\lambda-\psi)[k\lambda'' + 2k'\lambda']$$

und

$$\cos(\lambda-\psi)[k\lambda'' + 2k'\lambda'] + \sin(\lambda-\psi)[k'' - k\lambda'^2].$$

Enthält hier $(\lambda-\psi)$ die Zeit explicite, so muss für unsern Fall

$$k\lambda'' + 2k'\lambda' = 0 \quad \text{und} \quad k'' - k\lambda'^2 = 0$$

sein. Dadurch wird eine gewisse Curve $(\varkappa)$ definirt, welche die Bahn von O', resp. die Projection dieser Bahn in die Ebene der xy darstellt.

Unterscheidet sich hingegen λ von ψ nur um eine Constante — die man dann auch gleich Null supponiren darf —, so hat man nur noch dem k einen constanten Werth beizulegen, um zu bewirken, dass in den obigen Ausdrücken t nicht steht.

Es zeigt sich nun auch leicht, dass unter diesen Voraussetzungen t auch in den übrigen Gliedern der Bewegungsgleichungen nicht explicite vorkommt. Wir haben also folgendes Resultat:

Von den nicht ausschliesslich translatorischen Bewegungen der Bahn B ist, mit der Ausnahme $(\varkappa)$, die Rotation mit constanter Winkelgeschwindigkeit um eine feste Axe, längs welcher allein Kräfte wirken dürfen, eine Rotation, mit welcher ein constant beschleunigtes Fortschreiten in der Richtung jener Axe verbunden sein kann, die einzige, unter deren Voraussetzung t nicht explicite in den Bewegungsgleichungen erscheint.

Somit ist die Art der Probleme, bei welchen die Hauptschwierigkeit bei der Integration der Bewegungsgleichungen, das explicite Vorkommen der Zeit in denselben, nicht vorhanden ist, völlig bestimmt. Es kommt hierbei also nur auf die mechanischen Eigenschaften des Systems an.

Minden i. Westf. R. Mischer, Gymnasiallehrer.

XIV. Zur Definition des bestimmten Integrals durch den Grenzwerth einer Summe

bemerkt Herr P. du Bois-Reymond mit Recht, dass in dem Riemann-Dirichlet'schen Beweise, den ich in meine Schrift „Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale", Halle, bei L. Nebert, aufgenommen habe, der Nachweis fehlt, dass man nicht blos dann, wenn man die Zerlegung des Intervalles dadurch immer weiter treibt, dass man die Theile einer vorhandenen Theilung wieder theilt, und so fort, sondern auch dann, wenn man die Theile in beliebiger Weise kleiner werden lässt, z. B. indem man das Intervall in gleiche Theile theilt und für die Theilungszahl grössere und grössere Primzahlen nimmt, in welchem Falle kein Theilpunkt einer späteren Theilung mit der früheren zusammenfällt — einen und denselben Grenzwerth der Summe erhalte. Es ist hierzu nöthig, das Resultat für eine beliebige Theilung mit dem für eine specielle, z. B. für die durch fortgesetztes Halbiren entstandene zu vergleichen. Da für das einfache Integral ein von diesem Mangel freier Beweis durch Herrn du Bois-Reymond bereits vorhanden ist, derselbe Vorwurf aber auch den Existenzbeweis des Doppelintegrals trifft, so will ich hier den letzteren ergänzen. Dabei bediene ich mich zur Darstellung von Zahlengebieten zweier Veränderlichen der bekannten graphischen Terminologie, bei welcher x, y rechtwinklige Coordinaten einer Ebene sind.

Die Definition des Doppelintegrals habe ich in meiner Schrift so ausgesprochen:

Zerlegt man ein Gebiet T der xy-Ebene (welches der Einfachheit wegen zusammenhängend und einfach-zusammenhängend angenommen werden mag) in n Theile $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$, Flächenelemente genannt, welche der Bedingung unterworfen sind, in allen ihren Ausdehnungen und also auch ihrem Flächeninhalte nach kleiner als eine bestimmte vorgegebene Grösse ω zu sein, und ist die obere Grenze einer in T gegebenen Function $f(x, y)$ G_μ in τ_μ, die untere g_μ, und ist ξ_μ eine zwischen 0 und 1 gelegene Zahl, so versteht man unter dem über das Gebiet T ausgedehnten Integral

$$\int f(x, y)\, dT$$

den Grenzwerth, den man erhält, wenn in dem Ausdrucke

$$\sum_{1(\mu)}^{n} \tau_\mu [g_\mu + \xi_\mu (G_\mu - g_\mu)],$$

in dem die τ alle kleiner als ω sind, ω der Grenze Null zustrebt.

Dieser Grenzwerth hat aber dann einen Sinn, wenn die kritische Summe

$$\sum_{1(\mu)}^{n} \tau_\mu (G_\mu - g_\mu)$$

mit abnehmenden ω der Grenze Null zustrebt.

Zuerst zeigen wir dies für den Fall, in welchem das Kleinerwerden dadurch bewirkt wird, dass eine vorhandene Theilung $\tau_1^1, \tau_2^1, \ldots \tau^1_{n^1}$, in welcher die Theile kleiner als ω_1 sind, dadurch abgeändert wird, dass die τ^1 auf dieselbe Weise in Elemente zerlegt werden, welche kleiner als ω_2 sind. Die neuen Theile $\tau_1^2, \tau_2^2, \ldots \tau^2_{n^2}$ sind dann so beschaffen, dass die Begrenzungen der $\tau_1^1, \tau_2^1, \ldots$ sämmtlich einen Theil der Begrenzungen von $\tau_1^2, \tau_2^2, \ldots$ bilden, aber nicht umgekehrt. So fährt man fort. Ist nun, wenn μ den Summationsbuchstaben bedeutet,

$$\Sigma \tau^1_\mu G^1_\mu = A_1,\quad \Sigma \tau^2_\mu G^2_\mu = A_2, \ldots \Sigma \tau^\nu_\mu G^\nu_\mu = A_\nu, \ldots,$$
$$\Sigma \tau^1_\mu g^1_\mu = B_1,\quad \Sigma \tau^2_\mu g^2_\mu = B_2, \ldots \Sigma \tau^\nu_\mu g^\nu_\mu = B_\nu, \ldots,$$

so beweist man in derselben Weise, wie es beim einfachen Integral geschieht, dass $A_1, A_2, \ldots$ eine abnehmende (wenigstens nicht zunehmende), $B_1, B_2, \ldots$ eine zunehmende (wenigstens nicht abnehmende) Zahlenreihe bilden, und dass $A_\nu \geq B_\nu$ ist, woraus einmal folgt, dass beide Grössen einer bestimmten endlichen Grenze A, bez. B zustreben, und dann noch, weil $A_\nu - B_\nu$ der kritischen, der Voraussetzung nach mit wachsendem ν verschwindenden Summe gleich ist, dass $A = B$ sein muss. Da $A_{\nu+1} \leq A_\nu$, $B_{\nu+1} \geq B_\nu$ sein muss, so kann man ν so gross annehmen oder, mit anderen Worten, die Theilung so weit treiben, dass, wie nun auch die τ^ν in $\tau^{\nu+1}$ getheilt werden, oder wie auch die Theilung weiter getrieben wird, A_ν, B_ν von A beliebig wenig verschieden sind.

Da aber

$$\sum_\mu \{\tau^\nu_\mu g^\nu_\mu + \xi^\nu_\mu (G^\nu_\mu - g^\nu_\mu)\} = B_\nu + \xi (A_\nu - B_\nu)$$

zwischen A_ν und B_ν liegt, so nähert sich dieser Ausdruck ebenfalls A, oder der Grenzwerth ist von der Wahl der ξ^ν_μ unabhängig.

Nun ist zunächst zu erweisen, dass derselbe Grenzwerth erhalten wird, wenn man eine andere Theilung von T, zuerst in $t^1_1, t_2^1, t_3^1, \ldots$, dann in $t_1^2, t_2^2, t_3^2, \ldots$ unter derselben Bedingung als vorhin vornimmt, ob dann

$$\Sigma t_\mu [g_\mu + \xi_\mu (G_\mu - g_\mu)] \text{ oder, was hinreicht, } \Sigma t_\mu G_\mu$$

demselben Grenzwerth A zustrebt. Angenommen dieser Grenzwerth sei A', und

$$\Sigma\tau^\nu\; G^\nu{}_\mu = A_\nu, \quad \Sigma\tau^\lambda{}_\mu G^\lambda{}_\mu = A'_\lambda,$$

so kann man ν, λ so gross annehmen, dass $A_\nu = A + \xi\sigma$, $A'_\lambda = A' + \xi'\sigma$ ist, wenn σ beliebig klein vorgegeben wird, und ξ ξ' zwischen Null und Eins liegen.

Legt man nun die zu τ^ν und t^λ gehörigen Theilungsnetze gleichzeitig auf T und bezeichnet (irgendwie gezählt) die hierdurch entstehenden, vollständig durch Theile des Netzes τ^ν und des Netzes t^λ begrenzten Elemente mit $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$, ..., so ist

$$\Sigma \mathfrak{t}_\mu G_\mu = S$$

sowohl kleiner oder gleich $A + \xi\sigma$, als auch kleiner oder gleich $A' + \xi'\sigma$, und sowohl grösser als A, als auch grösser als A', weil die $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, ... als eine weitere Theilung der τ^ν ebenso wie der t^λ angesehen werden können. Also ist

$$A + \xi\sigma \geqq S \geqq A, \quad A' + \xi'\sigma \geqq S \geqq A'.$$

Da also sich A und A' von S um weniger als σ unterscheiden können, so können sich A und A' nur um weniger als 2σ unterscheiden; sie müssen also, da σ beliebig klein angenommen werden kann, gleich sein.

Nun muss noch gezeigt werden, dass auch bei beliebiger Abnahme der τ derselbe Grenzwerth erreicht wird.

Es sei

$$\Sigma t^\nu{}_\mu G^\nu{}_\mu = A_\nu = A + \xi\sigma$$

und die Theilung so weit getrieben oder ν so gross genommen, dass, wenn σ eine beliebig kleine vorgegebene Grösse bedeutet, ξ zwischen 0 und 1 liegt. Hierauf werde die beliebige Theilung τ zugleich mit t auf T gelegt. Dann kann man die Theilung τ so weit treiben, dass der Flächeninhalt der Summe aller derjenigen τ, durch welche irgend ein Theil der Begrenzung der t hindurchgeht oder sie auch nur berührt, kleiner als $\sigma : M$ wird, wenn M die obere Grenze des absoluten Betrages der Werthe von $f(x, y)$ in T ist; denn man kann offenbar diesen Flächeninhalt beliebig klein machen. Der Beitrag, den die Elemente τ, welche Begrenzungsstücke von t enthalten, zur Gesammtsumme

$$\Sigma\tau_\mu G_\mu$$

liefern, ist dann, absolut genommen, kleiner als σ.

Legt man beide Theilungen übereinander, so erhält man eine Theilung $\mathfrak{t}$ und es ist

$$\Sigma \mathfrak{t}_\mu G_\mu = A_\nu - \xi'\sigma = A + (\xi - \xi')\sigma, \quad (0 \leqq \xi' \leqq \xi \leqq 1),$$

weil die Theilung $\mathfrak{t}$ als eine weitere Theilung der t angesehen werden kann. Der Beitrag aller Flächentheile $\mathfrak{t}$, welche Begrenzungsstücke von t enthalten, ist, absolut genommen, jedenfalls kleiner als σ. Folglich ist der Beitrag der Theile τ, die keine Begrenzung von t enthalten, mindestens gleich $A + (\xi - \xi')\sigma - \sigma$, höchstens gleich $A + (\xi - \xi')\sigma + \sigma$, und nimmt man die Theile τ hinzu, welche Begrenzungsstücke von t enthalten, deren Beitrag zwischen $-\sigma$ und $+\sigma$ liegt, so ist die Gesammtsumme mindestens gleich $A-3\sigma$, höchstens gleich $A+2\sigma$ und, da σ beliebig klein angenommen werden kann, die Grenze derselben gleich A, w. z. b. w.

Auf die von Herrn du Bois-Reymond in dieser Zeitschrift über meine „Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale" veröffentlichte Kritik will ich nicht eingehen, obgleich ich in vielen Punkten nicht damit übereinstimmen kann. Das dort gegebene Beispiel eines (wie es dort genannt wird) bedingt convergenten Integrals, dessen Element sein Zeichen nicht unendlich oft wechsele, ist verdruckt.

Freiburg i. B., October 1875. J. Thomae.

XV. Ueber eine zahlentheoretische Spielerei.

Die Herstellung solcher Kärtchen, wie sie Herr Prof. Cantor auf S. 134 der hist.-literar. Abtheilung des vorigen Jahrganges beschreibt, wurde bereits im Jahre 1859 den Secundanern des hiesigen Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums bei Gelegenheit der geometrischen Reihen gezeigt. Herr Prof. Schellbach ging nämlich von der Identität aus

$$\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdot\frac{1-x^{16}}{1-x^8}\cdot\frac{1-x^{32}}{1-x^{16}}=\frac{1-x^{32}}{1-x},$$

woraus sich ergiebt

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{31},$$

und zeigte so, dass sich die Zahlen von 1 bis 31 sämmtlich durch die Potenzen 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 und 2^4 darstellen lassen, da ja auf der linken Seite nur diese Potenzen von 2 als Exponenten des x auftreten, rechts aber als solche alle ganzen Zahlen bis 31. Er fügte hinzu, dass ein Kaufmann mit 5 Gewichtsstücken alle Gewichte von 1 bis 31 wiegen könne.

Ebenso ergiebt sich die Darstellung aller Zahlen von 1 bis 63 durch $2^0, 2^1, \ldots 2^5$, die aller Zahlen von 1 bis 127 durch $2^0, 2^1, \ldots 2^6$, d. h. mit Hilfe von 7 Kärtchen lassen sich alle ganzen Zahlen von 1 bis 127 errathen u. s. f. Allgemein giebt die Gleichung

$$\prod_{\nu=0}^{\nu=n}(1+x^{2^\nu})=\sum_{\varrho=0}^{\varrho=2^{n+1}-1}x^\varrho$$

sofort das Bildungsgesetz solcher Kärtchen. Es kommt z. B. 2^r in allen Zahlen von den Formen $2^{r+1}.n+2^r$, $2^{r+1}.n+2^r+1$ bis $2^{r+1}.n+2^{r+1}-1$ vor.

Eine zweite Sorte von Kärtchen ist die umstehende; sie ist, wie man leicht sieht, analog aus den Potenzen von 3 gebildet. Hier muss man aber den Betreffenden, dem die Kärtchen hingehalten werden, fragen, ob die gedachte Zahl schwach oder stark gedruckt ist. Im ersteren Falle nimmt man die der Karte entsprechende Potenz von 3 mit positivem, im andern Falle mit negativem Vorzeichen. Z. B. $49=+3^4-3^3-3^2$

$+3^1+3^0$. Der Beweis, dass sich alle Zahlen 1, 2 bis $\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)$ durch die positiv oder negativ genommenen Potenzen 3^0, 3^1 bis 3^n darstellen lassen, ergiebt sich aus der Identität

$$\frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1-x^9}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^{27}}{1-x^9}\cdots\frac{1-x^{3^{n+1}}}{1-x^{3^n}}=\frac{1-x^{3^{n+1}}}{1-x}.$$

Aus dieser folgt nämlich

$$(1+x+x^2)(1+x^3+x^6)(1+x^9+x^{18})\dots(1+x^{3^n}+x^{2.3^n})=1+x+x^2+\dots+x^{3^n},$$

und wenn man beiderseits durch $x^{\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)}$ dividirt,

$$(x^{-1}+1+x^1)(x^{-3}+1+x^3)(x^{-9}+1+x^9)\dots(x^{-3^n}+1+x^{3^n})$$
$$=x^{-\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)}+\dots+x^{-2}+x^{-1}+1+x^1+x^2+\dots+x^{\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)}.$$

Also haben wir für unsere Karten ($n=4$)

$$(x^{-1}+1+x^1)(x^{-3}+1+x^3)(x^{-9}+1+x^9)(x^{-27}+1+x^{27})(x^{-81}+1+x^{81})$$
$$=x^{-121}+x^{-120}+\dots+x^{-2}+x^{-1}+1+x^1+x^2+\dots+x^{120}+x^{121},$$

d. h. die Darstellung aller Zahlen von 1 bis 121 durch die positiv oder negativ genommenen Potenzen 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4.

I.				II.				III.				IV.				V.			
1	**32**	**62**	**92**	2	**32**	**61**	93	5	35	64	93	14	35	**55**	102	41	62	82	102
2	34	64	94	3	**33**	65	94	6	36	65	94	15	36	**56**	103	42	63	83	103
4	**35**	**65**	**95**	4	**34**	66	**95**	7	37	66	**95**	16	37	**57**	104	43	64	84	104
5	37	67	97	**5**	38	67	**96**	8	38	67	**96**	17	38	**58**	105	44	65	85	105
7	**38**	**68**	**98**	**6**	39	**68**	**97**	9	39	**68**	**97**	18	39	**59**	106	45	66	86	106
8	40	70	100	**7**	40	**69**	101	10	40	**69**	**98**	19	40	**60**	107	46	67	87	107
10	**41**	**71**	**101**	11	**41**	**70**	102	11	**41**	**70**	**99**	20	**41**	**61**	108	47	68	88	108
11	43	73	103	12	**42**	74	103	12	**42**	**71**	**100**	21	**42**	**62**	109	48	69	89	109
13	**44**	**74**	**104**	13	**43**	75	**104**	13	**43**	**72**	**101**	22	**43**	**63**	110	49	70	90	110
14	46	76	106	**14**	47	76	**105**	**14**	**44**	**73**	**102**	23	**44**	**64**	111	50	71	91	111
16	**47**	**77**	**107**	**15**	48	**77**	**106**	**15**	**45**	**74**	**103**	24	**45**	**65**	112	51	72	92	112
17	49	79	109	**16**	49	**78**	110	**16**	**46**	**75**	113	25	**46**	**66**	113	52	73	93	113
19	**50**	**80**	**110**	20	**50**	**79**	111	**17**	**47**	**76**	114	26	**47**	**67**	114	53	74	94	114
20	52	82	112	21	**51**	83	112	**18**	**48**	86	115	27	**48**	95	115	54	75	95	115
22	**53**	**83**	**113**	22	**52**	84	**113**	**19**	**49**	87	116	28	**49**	96	116	55	76	96	116
23	55	85	115	**23**	56	85	**114**	**20**	59	88	117	29	**50**	97	117	56	77	97	117
25	**56**	**86**	**116**	**24**	57	**86**	**115**	**21**	60	89	118	30	**51**	98	118	57	78	98	118
26	58	88	118	**25**	58	**87**	119	**22**	61	90	119	31	**52**	99	119	58	79	99	119
28	**59**	**89**	**119**	29	**59**	**88**	120	32	62	91	120	32	**53**	100	120	59	80	100	120
29	61	91	121	30	**60**	92	121	33	63	92	121	33	**54**	101	121	60	81	101	121
31				31				34				34				61			

Aus der allgemeinen Gleichung

$$\prod_{\nu=0}^{\nu=n}(x^{-3^\nu}+1+x^{3^\nu})=\sum_{\varrho=-\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)}^{\varrho=\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)}x^\varrho$$

ergiebt sich, dass z. B. $+3^r$ auftritt in allen Zahlen von den Formen $3^{r+1}.n+\frac{1}{2}(3^r+1)$, $3^{r+1}.n+\frac{1}{2}(3^r+1)+1$ bis $3^{r+1}.n+\frac{1}{2}(3^{r+1}-1)$, und -3^r in denen von den Formen $3^{r+1}.n-\frac{1}{2}(3^{r+1}-1)$, $3^{r+1}.n-\frac{1}{2}(3^{r+1}-1)+1$ bis $3^{r+1}.n-\frac{1}{2}(3^r+1)$.

Berlin. Dr. Felix Müller.