8/8

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

21. Jahrgang. 4. Heft.

Mit 1 lithographirten Tafel.

Ausgegeben am 25. Juli 1876.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1876.

XI.

Ueber Curven auf Rotationsflächen.

Von

Dr. Biehringer,

Professor an der königl. Industrieschule zu Nürnberg.

(Fortsetzung.)

Nr. 14. Mit Hilfe der am Schlusse von Nr. 2 gegebenen Bemerkungen lassen sich sehr schnell die Gleichungen von Curven auf Rotationsflächen auffinden, die in anderer Weise, wie dort, bestimmt sind. Es sollen einige solche Fälle betrachtet und zunächst festgesetzt werden, dass neben $\partial z_t = F$ noch $\partial x_t^2 + \partial y_t^2 + \partial z_t^2 = S^2$ gegeben ist. F und S können beliebige Functionen von t vorstellen, dabei soll aber F keinen Coordinatenwerth, S höchstens z enthalten. Die übrigen Stücke werden wie in Nr. 1 angenommen. Denkt man sich das in Nr. 1 näher bezeichnete Elementendreieck, so ist hier durch $\sqrt{\partial x_t^2 + \partial y_t^2 + \partial z_t^2}\, dt = S\, dt$ die Hypotenuse und durch $\sqrt{1 + \partial f_z^2} . \partial z_t . d = \sqrt{1 + \partial f_z^2} . F . dt$ die eine Kathete gegeben; demnach wird die andere Kathete $= \sqrt{S^2 - (1 + \partial f_z^2) F^2}\, dt$. Wird sodann durch φ der Stellungswinkel der Projection des Radius vectors in der xy-Ebene gegen die x-Axe vorgestellt und das Vorzeichen des letztern Ausdruckes der Drehrichtung des φ entsprechend genommen, so ist

$$d\varphi = \frac{\sqrt{S^2 - (1 + \partial f_z^2) F^2}}{f} . dt,$$

folglich

1)
$$\varphi = \int \frac{\sqrt{S^2 - (1 + \partial f_z^2) F^2}}{f}\, dt.$$

Hierzu kommen noch die Gleichungen

2)
$$\varrho = f_z$$

und

3)
$$z = \int F\, dt.$$

Für Axencoordinaten ist wieder $x = f . \cos\varphi$ und $y = f . \sin\varphi$.

Sämmtliche Betrachtungen, welche über die Curve der Nr. 1 angestellt wurden, lassen sich auch hier in Anwendung bringen, sobald statt des frühern P der Ausdruck $\sqrt{S^2-(1+\partial f_z^2)F^2}$ genommen wird.

Ist statt des Elements des z das Element $M\,dt$ des Meridians gegeben, so tritt an die Stelle der Gleichung 3) die andere

$$\int\sqrt{1+\partial f_z^2}\,dz=\int M\,dt.$$

Lässt man bei der ursprünglichen Curve die Wurzel der Gleichung 1) einmal durchweg positiv, das andere Mal durchweg negativ sein, so erhält man zwei Curven, welche in denselben gegenseitigen Beziehungen stehen, wie die Curven I und II der Nr. 5. An einer Stelle, wo $S^2=(1+\partial f_z^2)F^2$ ist, wo also die Curve den Meridian berührt, kann man ohne Beeinträchtigung der Stetigkeit das Vorzeichen der Wurzel wechseln lassen und dann durch gleichzeitigen umgekehrten Wechsel abermals zwei Curven erhalten, die in denselben Beziehungen, wie I und II in Nr. 5 stehen. In den Fällen, in welchen die Wurzel an der bezeichneten Stelle das Vorzeichen behält, entsteht dort ein Maximum oder Minimum des φ-Werthes; in den anderen Fällen findet dies nicht statt, jedoch erhält die Curve in Bezug auf den Meridian einen Wendepunkt. — Sind durchweg die Constanten der Integrale entsprechend bestimmt, so wird jede der Curven durch den Punkt, bei welchem die Wurzel gleich Null wird, in zwei Theile getheilt, von denen jeder den Meridian zu diesem Punkte berührt und von denen diejenigen Theile, welche zu den Curven mit unveränderlichen Vorzeichen der Wurzel gehören, zugleich auch Theile der andern Curve sind. — Sobald die Wurzel öfter Null wird, kann man den Wechsel des Vorzeichens derselben auf verschiedene Arten eintreten lassen und dadurch gleichviel verschiedene Curven bekommen, die sich wieder paarweise wie I und II verhalten und bei analoger Bestimmung der Constanten ebenso, wie oben, aus den Theilen der Curven zusammengesetzt werden können, bei welchen die Wurzel ihr Vorzeichen behält.

In den obigen Gleichungen ist auch die Lösung der Aufgabe enthalten, die Curve zu finden, welche ein Punkt beschreibt, der sich auf der Rotationsfläche mit einer gegebenen Geschwindigkeit S und zugleich parallel der z-Axe mit einer Geschwindigkeit F fortbewegt. Ueberhaupt findet hier auch Nr. 11 mit den bereits bezeichneten Modificationen Anwendung. Bei gegebenem M tritt an die Stelle der Geschwindigkeit längs der z-Axe die längs des Meridians.

Nr. 15. Um eine weitere Anwendung der Bemerkungen der Nr. 2 zu zeigen, sollen die Gleichungen einer Curve der Rotationsfläche aufgesucht werden, bei welcher jedes, irgend einem t- oder z-Werth folgende Element die zu diesem t-Werth gehörige Diagonale eines Parallelogramms bildet, dessen eine Seite das entsprechende Element einer gegebenen Curve auf der Rotationsfläche, und dessen andere Seite ein bestimmtes Element des Parallelkreises zu z ist. Man könnte das Element der Curve auch als die dritte Seite eines Dreiecks aus den zwei zusammenstossenden Seiten des bezeichneten Parallelogramms hinstellen. Das Element des Parallelkreises sei, wie in Nr. 1, durch $P\,dt$ gegeben und der positiven oder negativen Drehrichtung des φ entsprechend zu nehmen, je nachdem $P\,dt$ positiv oder negativ ist; die gegebene Linie sei die der vorigen Nummer und die Rotationsfläche bestimmt durch $x^2+y^2=f_z^{\,2}$.

Unter den Voraussetzungen, welche eben in Bezug auf das Vorzeichen des Elements des Parallelkreises, und welche in der vorigen Nummer in Bezug auf das Vorzeichen der Projection des Elements der gegebenen Curve auf den Parallelkreis angegeben wurden, kann bemerkt werden, dass die Projection des Elements unserer gesuchten Curve auf den fraglichen Kreis gleich der Summe der entsprechenden Projectionen von den anderen Elementen ist und dass durch das Vorzeichen dieser Summe zugleich die Drehrichtung des Elements in Bezug auf die xy-Ebene bestimmt wird. Da ausserdem f den Radius des erwähnten Parallelkreises vorstellt, so ist mit Berücksichtigung von Nr. 14 nacheinander

$$d\varphi=\frac{P\,dt+\sqrt{S^2-(1+\partial f_z^{\,2})\,F^2}\,.\,dt}{f}$$

oder

1) $$\varphi=\int\frac{P+\sqrt{S^2-(1+\partial f_z^{\,2})\,F^2}}{f}\,dt.$$

Hierzu treten noch

2) $$\varrho=f_z$$

und

3) $$z=\int F\,dt.$$

Im Allgemeinen lässt sich wieder bemerken, dass sämmtliche Betrachtungen über die Curve der Nr. 1 hier ebenfalls Giltigkeit haben, sobald $P+\sqrt{S^2-(1+\partial f_z^{\,2})\,F^2}$ statt des dortigen P genommen wird.

Zu den verschiedenen Entstehungsarten, welche auch hier nach Nr. 11 in Anwendung kommen können, lassen sich mehrere neue hinzufügen. Es soll in dieser Beziehung nur angegeben werden, dass die gefundene Curve durch einen Punkt beschrieben werden kann, der sich auf der gegebenen, mit einer Winkelgeschwindigkeit $=\frac{P}{f}$ um die z-Axe gedrehten Curve, den Gleichungen derselben entsprechend fortbewegt. Die nämliche Curve wird auch erhalten, wenn die gegebene Curve feststeht und dafür die Rotationsfläche mit einer Winkelgeschwindigkeit $=-\frac{P}{f}$ um die z-Axe rotirt.

Lässt man ebenso, wie in Nr. 14, die Wurzel an passender Stelle das Vorzeichen wechseln, so kann man zu denselben F-, P- und S-Werthen verschiedene Curven erhalten. In Bezug auf die Paare dieser Linien, bei welchen die Wurzel an denselben Stellen das Vorzeichen wechselt, soll nur angegeben werden, dass die Curve der Nr. 1 bei diesen Linien die nämliche Rolle spielt, wie der Meridian bei den entsprechenden Linien der Nr. 14, und dass daher auch jedes Paar dieser Linien symmetrisch gegen die Curve der Nr. 1 liegt. Es ist leicht, die Bedingungen anzugeben, für welche diese Linien in die der Nr. 1 oder 14 übergehen.

Bei gegebenem Fortschreiten des Punktes längs des Meridians tritt wieder $\int\sqrt{1+\partial f_z^2}\,dz=\int M\,dt$ an die Stelle der Gleichung 3).

In den Gleichungen der Curve bestimmt $\int\frac{\sqrt{S^2-(1+\partial f_z^2)F^2}}{f}\,dt$ den φ-Werth der gegebenen Curve. Ist nun durch $x=x'_t$, $y=y'_t$, $z=z'_t$ eine beliebige Curve auf der Rotationsfläche gegeben, wo x'_t, y'_t, z'_t beliebige Function von t vorstellen, welche aber der Gleichung $x^2+y^2=f_z^2$ Genüge leisten, und soll mit dieser Curve die Linie dieses Paragraphen bestimmt werden, so darf man nur berücksichtigen, dass $arctang\,\frac{y'}{x'}$ ebenfalls den φ-Werth der gegebenen Curve vorstellt und dass der z-Werth durch die Drehung um die Axe keine Aenderuug erleidet. Man erhält deshalb in diesem Falle die Gleichungen

$$\varphi=\int\frac{P}{f}\,dt+arctang\,\frac{y'}{x'},\quad \varrho=f_z,\quad z=z'_t.$$

Wäre der φ-Werth der gegebenen Curve $=\varphi'_t$ bekannt, so wäre

$$\varphi=\int\frac{P}{f}\,dt+\varphi'_t.$$

Durch die aufgestellten Gleichungen ist es nicht nur möglich, jede Curve zu bestimmen, die auf die gegebene Art erzeugt gedacht wird, sondern es kann auch, weil diese Gleichungen jede Curve auf der Rotationsfläche bestimmen können, rückwärts geschlossen werden, wie die angegebenen Bewegungen beschaffen sein müssen, damit die daraus hervorgehende Linie eine verlangte wird. Nimmt man, wie in Nr. 8, $f'_{x,y,z}=0$ als zweite Bestimmungsgleichung der verlangten Curve, so müssen z. B. die aus $x=f\cos\varphi$, $y=f\sin\varphi$, $z=z'_t$ erhaltenen Werthe auch dieser Gleichung Genüge leisten. Man erhält dadurch für $\int\frac{P}{f}\,dt$, x'_t, y'_t, z'_t neben $x^2+y^2=f^2$ noch eine zweite Bedingungsgleichung, so dass zur vollständigen Bestimmung der Grössen noch irgend zwei Voraussetzungen gemacht werden können. Einfacher gestalten sich wieder die Bedingungen, wenn die gegebene Curve durch die windschiefe Fläche $\varphi = \varphi_z$ mit bestimmt wird.

In praktischen Fällen ist zwar bei der letztbestimmten Art der Erzeugung einer verlangten Linie die Führung des beschreibenden Punktes eine complicirtere, als die in Nr. 11 längs der z-Axe, jedoch ist nicht zu vergessen, dass durch geeignete Annahme der willkürlichen Voraussetzungen die Bewegung des Punktes auf der Leitcurve eine einfache, z. B. eine gleichförmige werden kann. Allerdings setzt dieses Verfahren durch die Hereinziehung der Leitcurve selbst die Zeichnung einer Curve auf der Rotationsfläche voraus, aber in speciellen Fällen kann letzteres möglicherweise keine Schwierigkeiten bereiten.

Nr. 16. Wenn man sich den zeichnenden Punkt der Nr. 11 mit einer Geraden fest verbunden denkt, welche, die z-Axe senkrecht schneidend, in der Ebene des Meridians fortbewegt wird, der zu dem Anfangswerth von φ gehört, so schneidet diese Gerade die sich vorschriftsgemäss drehende Rotationsfläche nach der dort bestimmten Curve. Diese Fortbewegung der Geraden kann nun auch dadurch eingeleitet werden, dass man sie an einer Curve, welche nur in der genannten Meridianebene liegt, so fortgleiten lässt, dass sich der Schnittpunkt mit der z-Axe dem $z = \int F\,dt$ entsprechend fortbewegt. Man kann als Leitcurve der Geraden jede Linie dieser Ebene nehmen, die sich über den Intervall $z = \int F\,dt$ erstreckt, und kann eben deswegen wieder an diese Linien gewisse Forderungen stellen, die sich z. B. auf die Fortführung der Geraden an der Curve beziehen. So kann verlangt werden, die Gerade soll an der Curve gleichförmig fortgleiten und man erhält dann zur Bestimmung der Curve in der xz-Ebene die Bedingungen $z = \int F\,dt$ und $\sqrt{\partial x_t^2 + \partial z_t^2} = A$, wo A constant ist. Dieselben Bedingungen blieben, wenn A auch irgend eine Function von t, x oder z wird, wenn also die Geschwindigkeit auf der Curve sich ändert.

Zu analogen Folgerungen wird man geführt, wenn in Nr. 15 statt des an der gegebenen Curve fortgleitenden Punktes wieder die Gerade genommen wird, welche durch den Punkt geht und die z-Axe senkrecht schneidet. Letztere bleibt jedoch in diesem Falle nicht in einer Meridianebene, sondern sie beschreibt eine windschiefe Fläche. Bei gleichförmigem Fortschreiten der Geraden an einer Curve der windschiefen Fläche erhält man für diese Linie neben der Gleichung der Fläche noch die Bedingungen $\partial z_t = F$ und $\sqrt{\partial x_t^2 + \partial y_t^2 + \partial z_t^2} = A$, wo A eine Constante vorstellt. Die Gleichung der windschiefen Fläche ist für eine gegebene Curve leicht zu bestimmen.

Man sieht endlich noch ein, dass die Gleichungen der Nr. 15 auch dann noch richtig sind, wenn die dortigen x'_t, y'_t, z'_t sich auf eine Curve beziehen, die nicht in der Rotationsfläche liegt, und wenn die Curve zu bestimmen ist, nach welcher die bezeichnete, die z-Axe senkrecht schneidende Gerade die sich drehende Rotationsfläche trifft.

Nr. 17. Es sollen nun einige Beispiele über diese Curven durchgeführt werden. Der zeichnende Punkt bewege sich auf der Rotationsfläche in der Richtung der jeweiligen Parallelkreise mit einer constanten Winkelgeschwindigkeit $= + \omega$ oder, was dasselbe ist, die Rotationsfläche drehe sich mit dem System um die z-Axe mit der Winkelgeschwindigkeit $= - \omega$; die durch den zeichnenden Punkt gehende, die z-Axe stets senkrecht schneidende Gerade werde durch einen andern Punkt geführt, der sich gleichförmig auf der Peripherie eines Kreises bewegt, dessen Mittelpunkt im Ursprunge liegt; es soll nun bestimmt werden, welche Curve auf der Rotationsfläche hierdurch entsteht.

Um den Kreis und die Bewegung des Punktes auf demselben zu bestimmen, sei r der Radius, ν' der Winkel der X-Axe mit dem Radius vector der Stelle, an welcher der bewegte Punkt durch die xy-Ebene und auf die Seite tritt, wo die $+z$-Axe liegt, ψ die Winkelgeschwindigkeit des Punktes im Kreise, θ endlich der Winkel der Kreisebene mit der xy-Ebene. ψ soll bei $t = t'$ gleich Null sein, dort mit der aufsteigenden Knotenlinie zusammenfallen und in der Richtung der Kreisbewegung gezählt werden. θ sei genau genommen der Winkel, der an der aufsteigenden Knotenlinie von dem Theile der Kreisebene nach der $+z$-Axe hin und von dem Theile der xy-Ebene gebildet wird, welcher sich im Sinne der positiven Drehrichtung erstreckt.

Bei unseren gegebenen Stücken ist es möglich, das φ'_t und z'_t der Nr. 15 sehr rasch und damit auch die Gleichung der Curve zu erhalten. Zunächst ist der Winkel des Radius des Kreispunktes mit der aufsteigenden Knotenlinie zur Zeit $t = \psi(t-t')$; die Projection dieses Winkels auf die xy-Ebene wird bestimmt durch $tang\, \nu = tang[\psi(t-t')].cos\,\theta$, folglich wird $\nu = arctang[tang(\psi(t-t')).cos\,\theta]$ und es ist deshalb $\varphi'_t = \nu + \nu'$. — $arctang$ ist bei $t = t'$ als Null anzunehmen. Berücksichtigen wir noch weiter, dass $\int \frac{p}{f}\, dt = \int_{t'}^{t} \omega\, dt = \omega(t-t')$ und $z'_t = r\, sin[\psi(t-t')].sin\,\theta$ ist, so erhalten wir als Gleichungen der Curve

$$\varrho = f_z, \quad \varphi = \omega(t-t') + \nu' + arctang[tang(\psi(t-t')).cos\,\theta],$$
$$z = r\, sin[\psi(t-t')].sin\,\theta.$$

Würden wir die Zeit dann zu zählen anfangen, wenn sich der Punkt im aufsteigenden Knoten befindet, ferner durch diesen Punkt die $+X$-Axe legen, so würden die obigen Gleichungen übergehen in

$$\varrho = f_z, \quad \varphi = \omega t + arctang[tang\,\psi t . \cos\theta], \quad z = r \sin\psi t . \sin\theta.$$

Für $\theta = 90^0$ erhalten wir die entsprechenden Resultate der Nr. 12; für $\theta = 0$ erhält man die Bewegung auf dem Parallelkreise der xy-Ebene und es wird $\varphi = (\omega + \psi)t$.

Bei ungleichförmiger Bewegung auf dem Parallelkreise und ungleichförmiger Drehung der Rotationsfläche treten an die Stelle von $\psi(t-t')$ und $\omega(t-t')$ bezüglich $\int\limits_{t'}^{t} \psi\, dt$ und $\int\limits_{t'}^{t} \omega\, dt$.

Ist statt der Winkelgeschwindigkeit ψ die Geschwindigkeit v des Punktes auf dem Kreise gegeben, so ist $\psi = \frac{vt}{r}$ oder $\int \psi\, dt = \frac{t}{r}\int v\, dt$ zu setzen.

Die Ablenkung durch die Umdrehung der Erde.

Nr. 18. Auch in dem letzten Beispiele kann man analog der Nr. 13 die Geschwindigkeit auf dem Parallelkreise aus zwei Theilen zusammengesetzt denken, den einen Theil constant annehmen und der Umdrehungsgeschwindigkeit des Anfangspunktes entsprechen, den andern Theil veränderlich sein und durch die Rotation der Fläche hervorbringen lassen. Das daselbst behandelte Beispiel liefert unter gleichen Voraussetzungen in Bezug auf p und ω in dem jetzigen Falle die Gleichungen

$$\varrho = f_z, \quad z = r \sin\frac{vt}{r} . \sin\theta,$$

$$\varphi = p\int \frac{1}{f}\, dt - \omega t + arctang\left[tang\frac{vt}{r} . \cos\theta\right] = \frac{2\pi}{\tau}\left(f'\int \frac{1}{f}\, dt - t\right) + arctang\left[tang\frac{vt}{r} \cos\theta\right].$$

Würde in dem letzten Falle die Rotationsfläche eine Kugel sein, die ihren Mittelpunkt im Ursprunge hat, und der Kreis, der die zur z-Axe senkrechte Gerade leitet, den Radius der Kugel erhalten, endlich $\tau = 24.60.60$ werden, so gingen die Gleichungen der Curve über in

$$\varrho = \sqrt{r^2 - z^2}, \quad z = r \sin\frac{vt}{r} \sin\theta,$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{24.60.60}\left(\int \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{vt}{r}\sin^2\theta}} - t\right) + arctang\left[tang\frac{vt}{r} . \cos\theta\right].$$

Diese Gleichungen würden, wenn wir die Erde als Kugel betrachten die Bahn bestimmen, welche ein Körper beschreibt, der den Aequator unter dem Winkel θ mit einer Geschwindigkeit v schneidet. Der Kör per soll dabei die Umdrehungsgeschwindigkeit des Aequators und, abgesehen von der Rotation der Erde, auch die Geschwindigkeit v auf den durch θ bestimmten grössten Kreis festhalten. Durch die Geschwindigkeit v und ihren Winkel θ mit dem Aequator wäre die Aufgabe noch keine bestimmte; sie wird es erst dadurch, dass man die ganze Bahn vorschreibt, welche der Körper ohne Umdrehung der Erde beschreiben würde. Auf Grund des Beharrungsvermögens und der Wirkung der Schwere kann man diese Bahn als eben und durch den Mittelpunkt gehend betrachten. Dass hier von etwa vorhandenen Bewegungswiderständen Umgang genommen wurde, ist selbstverständlich. Für $\theta = 90^0$ erhalten wir den in Nr. 13 behandelten Fall. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 \frac{vt}{r} . sin^2 \theta}} dt$ ist ein elliptisches Integral der ersten Gattung.

Ist die Geschwindigkeit v keine sehr beträchtliche, so ist v im Vergleich zu r klein und man kann bis zu nicht allzugrossen t-Werthen setzen

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1 - sin^2 \frac{vt}{r} . sin^2 \theta}} = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2 t^2}{r^2} . sin^2 \theta}} dt = \frac{r}{v \sin \theta} arcsin \left(\frac{vt}{r} . \sin \theta \right),$$

wodurch wird

$$\varphi = \frac{2\pi}{24.60.60} \left[\frac{r}{v \sin \theta} . arcsin \left(\frac{vt}{r} \sin \theta \right) - t \right] + arctang \left[tang \frac{vt}{r} . \cos \theta \right].$$

Eine andere Näherungsformel wird mit den gewöhnlichen Hilfsmitteln der Analysis erhalten, wenn man auf $\frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 \frac{vt}{r} . sin^2 \theta}}$ den Binomialsatz anwendet, statt $sin \frac{vt}{r}$ die nach $\frac{vt}{r}$ fortschreitende Reihe setzt, nach $\frac{vt}{r}$ ordnet, quadrirt und integrirt. Man erhält dann bis zur fünften Potenz von t das Resultat

$$\varphi = \frac{2\pi t . sin^2 \theta}{24.60.60} \left[\tfrac{1}{6} . \frac{v^2 t^2}{r^2} + \tfrac{1}{120} . \frac{v^4 t^4}{r^4} (9 \, sin^2 \theta - 4) \right] + arctang \left[tang \frac{vt}{r} . \cos \theta \right].$$

Der erste Theil von φ bestimmt hier die Ablenkung von der ursprünglichen Richtung, welche durch die Umdrehung der Erde veranlasst wird. Die positive Drehrichtung des φ oder die des p geht am Aequator von Westen nach Osten und hierfür ist der genannte Theil immer positiv; ist daher θ spitz, oder geht die Geschwindigkeit v auch nach der Seite hin, so wird φ durch die Umdrehung der Erde vermehrt; im andern Falle wird sein absoluter Werth vermindert. — Die Abweichung auf dem Parallelkreise würde sich in Längenmass ergeben, wenn man den fraglichen Theil von φ mit dem Radius des Parallelkreises der Stelle multiplicirt. Letzterer wird dadurch erhalten, dass man für das angenommene t, oder für $vt = s$, wo s den zurückgelegten Weg vermöge der Geschwindigkeit v bezeichnet, das z berechnet und in $f = \sqrt{r^2 - z^2}$ einsetzt.

Obwohl die obige Integration nicht in endlicher Form ausgeführt wurde, so lassen sich doch in Bezug auf die Ablenkung durch die Umdrehung der Erde einige allgemein giltige Schlüsse ziehen. Zunächst ist aus der Form der integrirten Reihe ersichtlich, dass der Werth der Ablenkung nicht blos von $vt = s$ oder von dem vermöge der Geschwindigkeit v zurückgelegten Wege abhängig ist, sondern besonders noch von t, also von der Zeit, die der Körper zur Zurücklegung des Weges braucht. Setzt man zu dem Ende $vt = s$ in die Reihe, so wird die Ablenkung

$$\frac{2\pi t \sin^2\theta}{24.60.60}\left[\frac{1}{6}\cdot\frac{s^2}{r^2} + \frac{1}{120}\cdot\frac{s^4}{r^4}(q \sin^2\theta - 4)\right].$$

Der Ausdruck in der Klammer bleibt für das nämliche s und θ stets derselbe, folglich ist unter dieser Voraussetzung die Ablenkung proportional dem t. Hat man deshalb für gewisse s, θ und t die Ablenkung berechnet, so kann sie für dieselben s und θ, aber für ein anderes t unmittelbar gefunden werden.

Zu ähnlichen Resultaten wird man geführt, wenn man die Integration nach t in unserem obigen Integral mit Hilfe von $z = r \sin\frac{vt}{r} . \sin\theta$ in eine solche nach z verwandelt; man erhält dann für unsere Ablenkung den Ausdruck

$$\frac{2\pi}{24.60.60}\left(\frac{1}{v \sin\theta}\int_0^z \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{r^2\sin^2\theta}\right)}}\,dz - \frac{r}{v}\arcsin\frac{z}{r \sin v}\right).$$

Von diesem Integral existirt natürlich wieder keine geschlossene Form. Denken wir uns dasselbe mittels Reihen bestimmt, so erhalten wir eine solche, die nach z fortschreitet, und es kann der ganze Ausdruck gegeben werden durch

$$\frac{2\pi}{24.60.60}\cdot\frac{1}{v}\cdot T,$$

wo T eine Function von z, r und θ vorstellt.

Dieses T bleibt für dasselbe r, θ und z, also bis zu demselben Parallelkreis immer das nämliche; es wird daher die Ablenkung umgekehrt proportional dem v, also um so grösser, je langsamer sich der Körper unter sonst gleichen Umständen bis zu dem Parallelkreise zu z bewegt, und umgekehrt. Mit Berücksichtigung dessen, dass $vt = s$, ist das jetzige Resultat eine Bestätigung des obigen.

Sollte bestimmt werden, unter welchem Winkel θ der Körper bei gegebener Geschwindigkeit v abgehen müsste, um trotz des Einflusses der Umdrehung der Erde an eine bestimmte Stelle zu gelangen, so wären in den beiden Gleichungen für z und φ die letzten beiden Grössen und v gegeben und θ gesucht. Man hätte deshalb aus den beiden Gleichungen des t zu eliminiren und dann nach θ aufzulösen. Es ist klar, dass sich diese Aufgabe wieder nur annähernd lösen lässt und für *arctang* auch die entsprechende Reihe zu setzen ist

Nr. 19. Man kann die letzte Aufgabe verallgemeinern und die Curve zu bestimmen suchen, welche ein Körper beschreibt, der auf der Kugel unter irgend einem Winkel α gegen den Parallelkreis des Ausgangspunktes — also unter dem Winkel $90-\alpha$ gegen den Meridian — mit der unveränderlichen Geschwindigkeit v bewegt wird und trotz der Umdrehung der Kugel auf dem grössten Kreise zu bleiben sucht, der durch die anfängliche Richtung des v geht.

Um hier theils die Bewegung, theils die Lage des Coordinatensystems genauer zu bestimmen, desgleichen eine möglichste Uebereinstimmung mit den vorausgegangenen Betrachtungen und eine leichte Verwendbarkeit der Resultate für den Ort des Ausgangspunktes zu erzielen, werde festgesetzt, dass die xz-Ebene durch den Ausgangspunkt gehe, die $+z$-Axe mit v nach derselben Seite hin liege oder, was dasselbe ist, die Projection von v auf die z-Axe die Richtung der $+z$-Axe habe und dass Winkel α spitz oder stumpf zu nehmen sei, je nachdem die Projection von v auf die xy-Ebene die positive oder negative Drehrichtung hat. Für die Ausgangsstelle ist $y=0$; ihre geographische Breite sei β, folglich wird $z'=r\sin\beta$ und $f'=r\cos\beta$. Ausserdem werde daselbst noch $t=0$ angenommen. Liegt der Ausgangspunkt auf der Seite der negativen z-Axe, so ist β negativ zu nehmen.

Ganz entsprechend dem Anfange der Nr. 18 erhalten wir bei analoger Bezeichnung $v = arctang\left(tang\frac{vt}{r}.\cos\theta\right)$, wo θ den Winkel unserer Kreisebene mit der xy-Ebene vorstellt. Alsdann wird in gleicher Weise $z = r\sin\left(\frac{vt}{r}+\mu\right).\sin\theta$. Das μ ist hier der Winkel, den der Radius des Ausgangspunktes mit der aufsteigenden Knotenlinie der Bahn in der xy-Ebene bildet, und positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem es auf der Seite der $+$ oder der $-z$-Axe liegt. θ und μ sind vorerst noch unbekannt und müssen den gegebenen Stücken gemäss bestimmt werden. θ wird durch folgende Betrachtung erhalten. Denkt man sich durch den Anfangspunkt ein Loth L zur Ebene der Bahn gelegt, also L senkrecht zu dem v und r des Ausgangspunktes, so liegt dieses L in der Tangentialebene dieses Punktes, weil ja diese auch zu r senkrecht ist. In diese Tangentialebene fallen ausserdem noch v, dm' und dp', d. h. die Geschwindigkeit, das Element des Meridians und das des Parallelkreises der bewussten Stelle. Nun ist aber zugleich $dm' \perp dp'$ und $L \perp v$, folglich ist $\angle L$, $dm' = \angle dp'$, $v = \alpha$. Nimmt man hierzu noch eine Parallele Z' durch den Ausgangspunkt zur z-Axe, so ist Winkel $Z', L = \theta =$ dem gesuchten Winkel unserer Bahnebene mit der xy-Ebene; endlich ist Winkel $dm', Z' =$ dem Winkel von dem r des Ausgangspunktes mit der xy-Ebene $=$ der geographischen Breite des Punktes oder gleich β. Die Linien L, dm' und Z' bilden demnach ein Dreikant mit den Seiten α, θ und β. Dieses Dreikant hat dazu noch an dm' oder dem θ gegenüber einen rechten Winkel, weil die dm', Z'-Ebene mit der xz-Ebene und die dm', L-Ebene mit der Tangentialebene zusammenfällt und die Tangentialebene auf der xz-Ebene senkrecht steht. Es findet sich daher $\cos\theta = \cos\beta \, . \, \cos\alpha = \cos\alpha \, . \, \frac{\sqrt{r^2 - z'^2}}{r} = \cos\alpha \, . \, \frac{f'}{r}$. — Um das μ zu erhalten, denken wir uns durch z' eine Ebene senkrecht zur Knotenlinie gelegt und das Stück des Schnittes dieser Ebene mit der Bahnebene zwischen dem Ausgangspunkte und der Knotenlinie mit n bezeichnet, dann ist $\sin\mu = \frac{n}{r}$ und $n = \frac{z'}{\sin\theta}$, also $\sin\mu = \frac{z'}{r\sin\theta} = \frac{\sin\beta}{\sin\theta}$ und

$$\mu = \arcsin\frac{z'}{r\sin\theta} = \arcsin\frac{z}{r\sqrt{1-\cos^2\beta\, . \,\cos^2\alpha}} = \arcsin\frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\cos^2\beta\, . \,\cos^2\alpha}}$$
$$= \operatorname{arctang}\frac{\tang\beta}{\sin\alpha}.$$

Hat demnach, wie in Nr. 18, die Kugel noch eine constante Winkelgeschwindigkeit $= -\omega$, oder hat bei feststehender Kugel der auf unserer Bahn fortschreitende Punkt noch eine Geschwindigkeit $+f\omega$ in der Richtung der Parallelkreise, so werden die Gleichungen der beschriebenen Curve

$$1)\qquad \varrho = f_z,$$

$$2)\qquad z = r\sin\left(\frac{vt}{r} + \mu\right) . \sin\theta,$$

$$3)\qquad \varphi = \omega t + \operatorname{arctang}\left(\tang\frac{vt}{r} . \cos\theta\right).$$

Den zwei letzten Gleichungen kann man noch nachfolgende Formen geben:

$$z = r\sin\left(\frac{vt}{r} + \mu\right) . \sin\theta = \sin\left(\frac{vt}{r} + \arcsin\frac{z'}{\sqrt{r'^2 - f'^2\cos^2\alpha}}\right) . \sqrt{r^2 - f'^2\cos^2\alpha}$$

$$2)\qquad = f' . \sin\frac{vt}{r} . \sin\delta + z' . \cos\frac{vt}{r}$$

$$= r\sin\left(\frac{vt}{r} + \arcsin\frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\cos^2\alpha . \cos^2\beta}}\right)\sqrt{1-\cos^2\alpha . \cos^2\beta}$$

$$= r\left(\sin\frac{vt}{r} . \cos\alpha . \cos\beta + \cos\frac{vt}{r} . \sin\beta\right),$$

$$3)\quad \varphi = \omega t + arctang\left[\frac{f'}{r}.\cos\alpha.\tang\frac{vt}{r}\right] = \omega t + arctang\left[\cos\alpha.\cos\beta.\tang\frac{vt}{r}\right].$$

Die ersteren Formeln sind dann am Platze, wenn das z', und die letzteren, wenn das β, die geographische Breite des Ausgangspunktes, bekannt ist.

Es hat nun auch keine Schwierigkeiten, das φ_z oder die Gleichung der windschiefen Fläche zu finden, deren Schnitt mit der Rotationsfläche die verlangte Curve ist. Aus der zweiten Gleichung ergiebt sich nämlich

$$t = \frac{r}{v}\left(\arcsin\frac{z}{r\sin\theta} - \arcsin\frac{z'}{r\sin\theta}\right)$$

$$= \frac{r}{v}\, arctang\frac{z\sqrt{r^2\sin^2\theta - z'^2} - z'\sqrt{r^2\sin^2\theta - z^2}}{zz' + \sqrt{(r^2\sin^2\theta - z^2)(r^2\sin^2\theta - z'^2)}},$$

und dies in die Gleichung von φ eingesetzt, giebt

$$\varphi = \frac{r\omega}{v}\, arctang\frac{z\sqrt{r^2\sin^2\theta - z'^2} - z'\sqrt{r^2\sin^2\theta - z^2}}{zz' + \sqrt{(r^2\sin^2\theta - z^2)(r^2\sin^2\theta - z'^2)}}$$

$$+ arctang\left[\cos\theta\frac{z\sqrt{r^2\sin^2\theta - z'^2} - z'\sqrt{r^2\sin^2\theta - z^2}}{zz' + \sqrt{(r^2\sin^2\theta - z^2)(r^2\sin^2\theta - z'^2)}}\right].$$

Man könnte hieraus noch θ und z' mit Hilfe der Beziehungen $\cos\theta = \cos\alpha.\cos\beta$ und $z' = r\sin\beta$ fortschaffen und durch β und α ersetzen. Am einfachsten gestaltet sich der Ausdruck durch die Einführung des μ; hier wird $z' = r\sin\theta.\sin\mu$, $\sqrt{r^2\sin^2\theta - z'^2} = r\sin\theta.\cos\mu$, daher

$$\frac{z\sqrt{r^2\sin^2\theta - z'^2} - z'\sqrt{r^2\sin^2\theta - z^2}}{zz' + \sqrt{(r^2\sin^2\theta - z^2)(r^2\sin^2\theta - z'^2)}} = \frac{z - \tang\mu\sqrt{r^2\sin^2\theta - z^2}}{z\tang\mu + \sqrt{r^2\sin^2\theta - z^2}}.$$

Hier kann auch unmittelbar $t = \frac{r}{v}\left(arctang\frac{z}{\sqrt{r^2\sin^2\theta - z^2}} - \mu\right)$ gesetzt werden. Für $z' = 0$ oder $\mu = 0$ erhalten wir die Gleichung der windschiefen Fläche für die Curve der Nr. 17. Die dortigen Schlussbemerkungen können auch hierher übertragen werden.

Nr. 20. Passen wir die gegenwärtigen Verhältnisse, ähnlich wie es in Nr. 13 und 18 geschehen ist, den Vorgängen auf unserer Erdoberfläche an, wo ein Körper die Umdrehungsgeschwindigkeit

$$p = f'\omega = \frac{2f'\pi}{24.60.60}$$

seines Ausgangspunktes hat und auf jedem Parallelkreise beizubehalten sucht, er also auf dem Parallelkreise schon aus diesem Grunde um $p - f\omega$ fortschreitet, so erhalten wir die Lösung der Aufgabe: Welche Bahn beschreibt ein Körper unter dem Einflusse der Umdrehung der Erde, der auf derselben mit einer Geschwindigkeit v unter irgend einem Winkel α mit dem von Westen nach Osten gerichteten Parallelkreise der Anfangsstelle bewegt wird?

Auch hier soll, wie in den entsprechenden Fällen der früheren Nummern, die Aufgabe dadurch zu einer bestimmten gemacht werden, dass wir aus den dort geltend gemachten Gründen annehmen, der Körper beschreibe ohne Rücksichtnahme auf die Rotation den durch v bestimmten grössten Kreis und die parallele Verschiebung sei auf die Rotationsgeschwindigkeit, welche der Körper von seinem Ausgangspunkte mitbringt, ohne weiteren Einfluss. Von den Widerständen wird wieder Umgang genommen. Die positive Drehrichtung von OX nach OY gehe von Westen nach Osten; alle übrigen Bestimmungen sollen der Nr. 18 entsprechen. Die Gleichung für z bleibt vollständig unverändert, weil die Rotationsgeschwindigkeit darauf ohne Einfluss ist; desgleichen die Gleichung der Rotationsfläche. Es ist daher, wie in Nr. 19:

$$1) \qquad \varrho = f_z,$$

$$2) \qquad z = r \sin\left(\frac{vt}{r} + \mu\right) . \sin\theta,$$

und dabei wieder

$$\mu = \arcsin \frac{z'}{r \sin\theta} = \arcsin \frac{\tang\beta}{\sin\alpha}, \quad \cos\theta = \frac{f'}{r} \cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\alpha.$$

Nur für φ erhält man weil

$$\omega = \frac{p - f\omega}{f} = \frac{f' . 2\pi}{f . 24.60.60} - \frac{2\pi}{24.60.60} = \frac{2\pi}{24.60.60}\left(\frac{f'}{f} - 1\right) \text{ ist:}$$

$$3) \qquad \varphi = \frac{2\pi}{24.60.60}\left(f' \int_0^t \frac{dt}{f} - t\right) + \operatorname{arctang}\left[\tang \frac{vt}{r} . \cos\theta\right].$$

In der letzten Gleichung ist wegen der Kugelgestalt der Erde

$$f' \int_0^t \frac{1}{f} dt = f' \int_0^t \frac{1}{\sqrt{r^2 - z^2}} dt = \frac{f'}{r} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{vt}{r} + \mu\right) \sin^2\theta}} dt$$

$$= \frac{f'}{rv \sin\theta} \int_{z'}^{z} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}} . \sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2 \sin^2\theta}}} dz.$$

Dieses letzte Integral wird für dieselben z-Werthe unter sonst gleichen Umständen das nämliche, und deshalb der erste Theil von φ oder die Ablenkung durch die Umdrehung der Erde zwischen denselben Parallelkreisen umgekehrt proportional dem v, also wieder um so grösser, je langsamer sich der Körper bewegt, und umgekehrt.

Durch Einsetzen der obigen t-Werthe

$$t = \frac{r}{v}\left(\arcsin \frac{z}{r \sin\theta} - \arcsin \frac{z'}{r \sin\theta}\right) \text{ etc.}$$

in die Gleichung für φ erhält man unmittelbar und in ähnlicher Form, wie in Nr. 19, die Gleichung der windschiefen Fläche φ_z.

Das Integral $\frac{f'}{r}\int\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{vt}{r}+\mu\right).\sin^2\theta}}\,dt$ ist im Allgemeinen ein elliptisches und in geschlossener Form nicht angebbar. Es sollen deshalb in einer der in Nr. 18 entsprechenden Weise verschiedene Näherungswerthe für den Fall bestimmt werden, dass $\frac{vt}{r}$ klein ist. Zu dem Ende entwickeln wir $\sin\left(\frac{vt}{r}+\mu\right)$, berücksichtigen, dass $\sin\mu=\frac{\sin\beta}{\sin\theta}$, $\cos\mu=\frac{\sin\alpha.\cos\beta}{\sin\theta}$ und $f'=r\cos\beta$ und erhalten auf diese Art statt des letzten Integralausdruckes

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\frac{vt}{r}(\tang^2\beta-\sin^2\alpha)-\sin\frac{2vt}{r}.\sin\alpha.\tang\beta}}.$$

Setzen wir statt $\sin\frac{vt}{r}$ und $\sin\frac{2vt}{r}$ die Sinusreihe, so erhalten wir vermittelst des Binomialsatzes und wenn $\tang^2\beta-\sin^2\alpha=A$ und $\sin\alpha.\tang\beta=B$ gesetzt wird, für das letzte Integral

$$t+\tfrac{1}{2}Bt.\frac{vt}{r}+\tfrac{1}{6}t(-A+3B^2).\frac{v^2t^2}{r^2}+\tfrac{1}{24}t.B(-4-9A+15B^2).\frac{v^3t^3}{r^3}$$
$$+\tfrac{1}{120}t(4A+9A^2-48B^2-90AB^2+105B^4).\frac{v^4t^4}{r^4}.\ldots.$$

Unter der Voraussetzung, dass nur bis zur fünften Potenz von t gegangen werden soll, erhält man demnach

$$\varphi=\frac{2\pi t}{24.60.60}\Big[\tfrac{1}{2}B.\frac{vt}{r}+\tfrac{1}{6}(-A+3B^2).\frac{v^2t^2}{r^2}+\tfrac{1}{24}B(-4-9A+15B^2).\frac{v^3t^3}{r^3}$$
$$\text{3)}\qquad+\tfrac{1}{120}(4A+9A^2-48B^2-90AB^2+105B^4).\frac{v^4t^4}{r^4}\Big]$$
$$+\operatorname{arctang}\left[\tang\frac{vt}{r}.\cos\alpha.\cos\beta\right].$$

Zu bemerken ist hierbei, dass β nicht zu nahe an 90^0 oder der Ausgangspunkt nicht zu nahe an den Polen liegen darf, und dass $\frac{vt}{r}$ oder das Verhältniss des Weges auf dem vorgeschriebenen grössten Kreise zum Radius der Erde nicht zu gross sein darf.

Für $\beta=0$ wird $\alpha=\theta$, $A=-\sin^2\alpha=-\sin^2\theta$, $B=0$ und geht die Formel in die über, welche für die entsprechende Bewegung in Nr. 18 erhalten wurde.

In Uebereinstimmung mit dem Obigen ergiebt sich zunächst aus der letzten Gleichung für φ, dass die Aenderung des φ-Werthes durch die

Erdrotation für dieselben Werthe von $vt = s$ proportional dem t ist, und dass sie wieder bei gleichen s-Werthen wegen $t = \frac{s}{v}$ auch umgekehrt proportional dem v, also um so grösser wird, je langsamer sich der Körper bewegt. Das Vorzeichen des ersten Gliedes von φ oder der bewussten Ablenkung wird, da v und t absolut zu nehmen sind, durch das Vorzeichen von B bedingt. Nun liegt nach unseren Bestimmungen α immer zwischen 0 und 180^0 und ist deshalb $\sin\alpha$ stets positiv, daher wird $B = \sin\alpha \,.\, \tang\beta$ mit β positiv und negativ. Befindet sich der Ausgangspunkt auf der nördlichen Hemisphäre und ist v nach Norden gerichtet, so haben wir nach unseren Bestimmungen z' und β' positiv zu nehmen; es wird dann B positiv und die Ablenkung macht sich im Sinne der positiven Drehrichtung oder von Westen nach Osten geltend. Das $\operatorname{arctang}\left[\tang\frac{vt}{r} \,.\, \cos\alpha \,.\, \cos\beta\right]$ wird deshalb durch die Axendrehung der Erde vermehrt, wenn α spitz oder $\cos\alpha$ positiv ist, oder wenn die Bewegung in nordöstlicher Richtung eingeleitet wird; es wird sein absoluter Werth vermindert, wenn α stumpf, also $\cos\alpha$ negativ ist, oder wenn die ursprüngliche Bewegung in nordwestlicher Richtung vor sich geht. Ist v bei unserem Ausgangspunkte nach Süden gerichtet, so ist z' und β' negativ zu nehmen und wird dadurch B und unsere Ablenkung negativ oder sie wirkt im Sinne der negativen Drehrichtung, von Osten nach Westen. Wird hierzu α spitz oder geht die Bewegung v nach Südost, so wird $\operatorname{arctang}\left[\tang\frac{vt}{r} \,.\, \cos\alpha \,.\, \cos\beta\right]$ positiv und dasselbe durch den negativen Werth der Ablenkung vermindert, oder der Körper geht weniger nach Osten hin, als ohne Umdrehung der Erde. Im Falle α hier stumpf ist und daher die Bewegung in südwestlicher Richtung eingeleitet wird, ist unsere *arctang* negativ und ihr absoluter Werth wird durch die Ablenkung vergrössert oder die Bewegung wird westlicher. Am einfachsten lässt sich der Einfluss der Ablenkung übersehen, wenn man sich einen Beobachter am Ausgangspunkte denkt, der seine vordere Seite der Richtung des v zuwendet; die Ablenkung findet dann nach der rechten Seite des Beobachters statt. Es hält nicht schwer, diese Bemerkungen auf den Fall zu übertragen, wo der Ausgangspunkt auf der südlichen Hemisphäre liegt; hier macht sich in Bezug auf unsern Beobachter die ablenkende Wirkung der Umdrehung nach links geltend. Sonst ist noch zu bemerken, dass, weil in der Reihe nur $\sin\alpha$ vorkommt, die Ablenkung für α und $180-\alpha$ dieselbe bleibt.

Andere, doch weniger verlässige Näherungswerthe für die Ablenkung würde man erhalten, wenn man

$$\sqrt{1 + \sin^2\frac{vt}{r}\,(\tang^2\beta - \sin^2\alpha) - \sin\frac{2vt}{r} \,.\, \sin\alpha \,.\, \tang\beta}$$
$$= \sqrt{1 - \frac{2vt}{r} \,.\, \sin\alpha \,.\, \tang\beta + \frac{v^2t^2}{r^2}\,(\tang^2\beta - \sin^2\alpha)}$$

setzte und das Integral des reciproken Werthes dieser Wurzel in geschlossener Form aufsuchte; doch würde sich hier kein richtiger Massstab für den Grad der Annäherung ergeben.

Aus der Form des Integrals in

$$\int_0^t \frac{\cos\beta}{\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{vt}{r}+\mu\right)\sin^2\theta}}\,dt - t$$

$$= \int_0^t \frac{\cos\beta}{\sqrt{1-\left(\sin\frac{vt}{r}\,.\,\sin\alpha\,.\,\cos\beta \pm \cos\frac{vt}{r}\sin\beta\right)^2}}\,dt - t,$$

wo im Nenner $+$ zu nehmen ist, wenn β positiv sein soll, und $-$ im andern Falle, ist, wenn man sich das Integral in die Differentialsumme zerlegt denkt, sofort ersichtlich, dass für dieselbe geographische Breite mit nicht zu grossem vt bei $\alpha = 0$ oder π diese Summe ein Minimum und für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ein Maximum ist. Es ist daher auch im ersten Falle oder wenn die anfängliche Bewegung in der Richtung des Parallelkreises erfolgt, die Abweichung am kleinsten, und im zweiten Falle, wo die anfängliche Bewegung in der Richtung des Meridians stattfindet, am grössten. Auch das ist noch unmittelbar ersichtlich, dass für den Fall des negativen β, oder der Bewegung nach Süden in unseren Gegenden, das Maximum zwischen denselben Parallelkreisen und damit die Abweichung nicht so beträchtlich ist, als für das positive β oder für die Bewegung nach Norden. Aehnliches gilt auch für die Abweichungen bei südlicher und nördlicher Bewegung für die anderen Werthe des α. Gleiche Resultate für nicht zu grosse Strecken ergiebt die Annäherungsgleichung für φ. Letztere lässt ausserdem noch ersehen, dass unter sonst gleichen Umständen die Ablenkung um so grösser wird, je grösser β ist, d. h. je näher der Ausgangspunkt dem Pole liegt.

Die oben aus den Formeln bestimmten Ablenkungsrichtungen stimmen mit dem Drehungsgesetz der Winde überein. Auch die übrigen Resultate können mit dem Verhalten der Winde in Zusammenhang gebracht werden. Ein schwächerer Wind würde nach denselben auf gleicher Strecke eine grössere Ablenkung erfahren, als ein stärkerer. Entsteht irgendwo eine Luftverdünnung, strömt die Luft von dem Nachbarorte zu, der den höchsten Barometerstand hat, und rückt sie wegen dieses Abflusses mehr und mehr von entfernteren Stellen nach, so muss sich im Allgemeinen am ursprünglichen Orte die Richtung des Windes im Sinne des Drehungsgesetzes ändern, weil die später ankommenden Luftschichten einen grössern Weg zurückzulegen haben und dadurch eine stärkere

Ablenkung erfahren. Rückt der Ersatz von Osten oder Westen her, so wird die Aenderung der Richtung am langsamsten, kommt er von Norden oder Süden, am schnellsten erfolgen. West- und Ostwind werden also am längsten, Nord- und Südwind am kürzesten ihre Richtung beibehalten. Endlich findet noch der Umschlag der Richtung auf der nördlichen Erdhälfte schneller bei der Bewegung nach Norden statt, als bei der Bewegung nach Süden, in höheren Breiten eher als in niederen.

Nr. 21. Betrachten wir zuerst den Fall weiter, in dem $\alpha = 0$ oder 180^0 ist, also die anfängliche Bewegung in der Richtung des Parallelkreises stattfindet. Unser Integral geht hier über in

$$\int_0^t \frac{\cos\beta}{\sqrt{1-\cos^2\frac{vt}{r}\sin^2\beta}}\,dt = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\frac{vt}{r}\,tang^2\beta}}\,dt$$

und kann wieder nicht in geschlossener Form bestimmt werden. In der Reihe der Nr. 20 wird für diesen Fall $A = tang^2\beta$, $B = 0$, so dass man erhält

$$3)\quad \begin{aligned}\varphi = {} & \frac{2\pi t}{24.60.60}\,.\,tang^2\beta\,.\,\frac{v^2t^2}{r^2}\left[-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{120}\,.\,\frac{v^2t^2}{r^2}(4+9\,tang^2\beta)\ldots\right]\\ & + arctang\left[tang\,\frac{vt}{r}\,.\cos\beta\right].\end{aligned}$$

Durch Vergleichung mit der Nr. 18 und der dortigen Reihe für $\int\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{vt}{r}\,.\sin^2\theta}}$ ergiebt sich, dass beide Resultate in einander übergehen müssen, wenn $tang^2\beta = -\sin^2\theta$ gesetzt wird. Die Resultate müssen in der That aus dem Grunde eine gewisse Uebereinstimmung zeigen, weil unser jetziger specieller Fall auch der der Nr. 18 ist und nur die Ausgangspunkte und die Lagen der Coordinatensysteme in beiden Fällen verschieden sind. Es überrascht auf den ersten Anblick, dass in unserem jetzigen Falle überhaupt eine Ablenkung vorhanden ist, doch liegt der Grund für letztere darin, dass der Punkt sich ohne Einfluss der Erdrotation nicht auf dem Parallelkreise, sondern auf dem grössten Kreise der Erde bewegen würde, welcher durch die anfängliche Geschwindigkeit geht.

Die Ablenkung ist unter unseren Voraussetzungen, wo das erste Glied der Reihe über das Vorzeichen entscheidet, negativ oder wirkt im Sinne von Osten nach Westen; sie wirkt also ebenso, wie wenn der Körper bei uns nach Süden bewegt würde. Dies ist insofern erklärlich, als der Körper im nächsten Moment nach dem Beginne der Bewegung den Parallelkreis verlässt und sich auf seinem grössten Kreise nach Süden wendet. Abgesehen von $\frac{vt}{r}$ sind die nachfolgenden Glieder der Reihe von um so grösserem Einfluss, je grösser β, die geographische Breite des Ausgangspunktes ist. Im Uebrigen kann selbst bis $\beta = 70^0$ und $vt = 100000^{\text{m}}$ nahezu

$$\varphi = \frac{-2\pi t}{24.60.60} \cdot \tfrac{1}{6}\, tang^2\beta \,.\, \frac{v^2 t^2}{r^2} + arctang\left[tang\frac{vt}{r}\,.\,cos\,\beta\right]$$

gesetzt werden, und kann man mit einem entsprechenden Grade der Annäherung noch setzen

$$arctang\left[tang\frac{vt}{r}\,.\,cos\,\beta\right] = \frac{vt}{r}\,.\,cos\,\beta\left(1 + \tfrac{1}{3}\,.\,\frac{v^2 t^2}{r^2}\right) sin^2\beta.$$

Nr. 22. In dem Falle, wo $\alpha = \frac{\pi}{2}$, also die anfängliche Bewegung in der Richtung des Meridians stattfindet, wird unser Integral

$$= \int \frac{cos\,\beta}{cos\left(\frac{vt}{r} + \beta\right)}\,dt,$$

daher in geschlossener Form bestimmbar. Man erhält hier

$$3)\qquad \varphi = \frac{2\pi t}{24.60.60}\left(\frac{r\,cos\,\beta}{vt}\,Log\,\frac{tang\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right]}{tang\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} - \frac{vt}{2r}\right]} - 1\right).$$

$arctang\left[tang\frac{vt}{r}\,.\,cos\,\beta\,.\,cos\,\alpha\right]$ fällt hier ganz weg. Für die Bewegung südwärts ist in unseren Breiten β negativ zu nehmen. Multiplicirt man das φ mit $r.cos\left(\frac{vt}{r} + \beta\right)$, d. h. mit dem Radius des Parallelkreises der Stelle zu t, so erhält man den Abstand und die Ablenkung des bewegten Punktes vom anfänglichen Meridian, und zwar auf den entsprechenden Parallelkreisen und in Längeneinheiten gemessen.

Unsere Reihe für φ geht in diesem Falle über in

$$\varphi = \frac{2\pi t}{24.60.60}\left(\tfrac{1}{2}\, tang\,\beta\,.\,\frac{vt}{r} + \tfrac{1}{6}(1 + 2\,tang^2\beta)\,.\,\frac{v^2t^2}{r^2} + \tfrac{1}{24}\,tang\,\beta\,(5 + 6\,.\,tang^2\beta)\,.\,\frac{v^3t^3}{r^3}\ldots\right);$$

sie kann natürlich auch unmittelbar aus dem geschlossenen Integral hergeleitet werden.

Setzt man $vt = 100000^{\text{m}}$, $\beta = 70^0$, so liefert der obere Klammernausdruck des φ den Werth 0,022263, und die zwei ersten Glieder der Reihe des letzten Ausdruckes für φ liefern 0,022240598. Für $\beta = -70^0$, also für die Bewegung nach Süden, wird der erstere Werth $= -0{,}020939$ und der andere $= -0{,}02091668$. Man sieht hieraus, dass bis zur vierten Decimalstelle eine vollständige Uebereinstimmung der beiderseitigen Werthe stattfindet. Diese Uebereinstimmung muss noch grösser werden, wenn $vt < 100000^m$ und $\beta < 70^0$ ist, weil in diesem Falle die Reihe mehr convergirt. Wir können nach diesen Beispielen mit einem beträchtlichen Grade der Annäherung für diese Fälle setzen

$$\varphi = \frac{2\pi t}{24.60.60}\left(\tfrac{1}{2}\, tang\,\beta \,.\, \frac{vt}{r} + \tfrac{1}{6}(1 + 2\, tang^2 \beta) \,.\, \frac{v^2 t^2}{r^2}\right).$$

Dieser Ausdruck ist nicht nur für weitere Schlussfolgerungen innerhalb der gegebenen Grenzen, sondern auch für numerische Bestimmungen dem Ausdrucke mit dem geschlossenen Integral entschieden vorzuziehen. Die logarithmischen Tabellen behalten nämlich für den letztgenannten Ausdruck selbst bei verhältnissmässig kleinen Werthen von vt noch einen grossen Grad der Genauigkeit, während in diesen Fällen $tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$ und $tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} - \frac{vt}{2r}\right)$ so nahe liegen, dass die Tabellen keine genauen Differenzen mehr ergeben und kleine Unterschiede in den Werthen der Logarithmen — und zwar bei demselben vt — das Gesammtresultat um Beträchtliches ändern. Beispielsweise soll hier nur erwähnt werden, dass bei $vt = 1000^m$ oder $\frac{vt}{2r} = \frac{\pi}{40000} = 16{,}2''$ und $\beta = 70^0$ der fragliche Ausdruck mit Benutzung der siebenstelligen Logarithmen $= 0{,}001401$ wird, und dass er, wenn zur Annäherung $16{,}2'' = 16''$ gesetzt werden, $-0{,}9881755$ liefert. Umgekehrt verhält sich natürlich die Sache, wenn grosse Werthe von vt in Betracht kommen. Ausserdem lässt der Näherungswerth wieder alle die hierher gehörigen Bemerkungen erkennen, welche am Schlusse der Nr. 20 im Allgemeinen ausgesprochen wurden.

Weil unser jetziger Fall im Allgemeinen eine geschlossene Integration zulässt und insofern von allgemeiner Bedeutung ist, als die Entstehung der Winde vorwiegend in der Richtung von Norden nach Süden und umgekehrt stattfindet, indem in dieser Richtung im Allgemeinen die grössten Temperaturdifferenzen herrschen, so wollen wir denselben noch etwas weiter verfolgen. Die drei Gleichungen der Curve sind:

$$1)\qquad \varrho = f_z,$$

$$2)\qquad z = r\, sin\left(\frac{vt}{r} + \beta\right),$$

$$3)\qquad \varphi = \frac{2\pi t}{24.60.60}\left(\frac{r\cos\beta}{vt}\, Log \frac{tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)}{tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} - \frac{vt}{2r}\right)} - 1\right).$$

Wollten wir bestimmen, bis zu welcher Zeit der Körper bei gegebenem v und β unter dem Einflusse der Erddrehung einen Umlauf vollendet, so hätten wir in der Gleichung 3) $\varphi = 2\pi$ zu setzen und nach t

aufzulösen. Dies kann nun nicht ausgeführt werden, ebenso wenig die Aufgabe, bis zu welcher Zeit ein gewisser Meridian überhaupt von dem Körper erreicht wird. Dagegen lässt sich aus der Gleichung 2) sofort bestimmen, wann der Körper an einem bestimmten Parallelkreise ankommt; man darf nur $\frac{vt}{r}+\beta$ gleich der geographischen Breite des Parallels setzen und nach t auflösen.

Ist zu bestimmen, unter welchem Winkel der Körper den Parallelkreis bis zu einem gewissen z-Werthe schneidet, so erhält man zu dem Ende

$$tang\,\delta=\frac{dm}{dp}=\frac{\partial z_t\sqrt{1+\partial f_z{}^2}}{\partial\varphi_t\sqrt{r^2-z^2}}.$$

Bei der Kugel ist

$$\sqrt{1+\partial f_z{}^2}=\frac{r}{\sqrt{r^2-z^2}}=\frac{1}{cos\left(\frac{vt}{r}+\beta\right)},\quad \partial z_t=v\,.\,cos\left(\frac{vt}{r}+\beta\right),$$

$$\partial\varphi_t=\frac{2\pi}{24.60.60}\left(\frac{cos\beta}{cos\left(\frac{vt}{r}+\beta\right)}-1\right),$$

daher

$$tang\,\delta=\frac{24.60.60.v}{2r\pi\left(cos\beta-cos\left(\beta+\frac{vt}{r}\right)\right)}.$$

Auch die Geschwindigkeit ist bestimmbar, mit welcher der Körper irgend einen Parallelkreis durchschneidet. Diese Geschwindigkeit ist nämlich

$$c=\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{dm^2+dp^2}}{dt}=\sqrt{(1+\partial f_z{}^2)\,\partial z_t{}^2+f^2\,\partial\varphi_t{}^2}.$$

Bei der Kugel findet sich dieser Werth entsprechend dem Vorausgegangenen

$$c=\sqrt{v^2+\left[\frac{2r\pi}{24.60.60}\left(cos\,\beta-cos\left(\frac{vt}{r}+\beta\right)\right)\right]^2}.$$

Hat man δ schon voraus bestimmt, so ergiebt sich

$$c=\frac{dm}{dt\,.\,sin\,\delta}=\frac{\sqrt{1+\partial f_z{}^2}\,.\,\partial z_t}{sin\,\delta}=\frac{v}{sin\,\delta}.$$

Letzteres Resultat kann unmittelbar erhalten werden, wenn man erwägt, dass die Umdrehung der Erde nicht im Stande ist, dem Körper eine Geschwindigkeit in der Richtung des Meridians zu ertheilen, dass diese Geschwindigkeit deshalb stets $=v$ bleibt und die wirkliche Geschwindigkeit daher $=\frac{v}{sin\,\delta}$ werden muss. Ebenso ergiebt sich die erste Formel für c unmittelbar daraus, dass das c sich zusammensetzt aus v und dem Ueberschusse der Rotationsgeschwindigkeiten der Stellen zu $\frac{vt}{r}+\beta$ und β.

Wird β negativ genommen, so erhält man die Gleichungen der Curve für die Bewegung gegen den Aequator hin. Letzterer wird erreicht, wenn $z=0$, also $\frac{vt}{r}-\beta=0$ oder $t=\frac{r\beta}{v}$ ist. Man erhält für diese Stelle

$$\varrho=r,\quad \varphi z=0,\quad \varphi=\frac{2\pi r}{24.60.60.v}\left(\cos\beta\, Log\, tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)-\beta\right),$$

$$tang\,\delta=\frac{v.24.60.60}{2r\pi(\cos\beta-1)},\quad c=\frac{v}{\sin\delta}.$$

$tang\,\delta$ ist hier negativ, δ demnach stumpf, oder c geht nach Südwesten hin.

Wächst t so, dass $\frac{vt}{r}-\beta=\beta$, also $t=\frac{2\beta r}{v}$ wird, so ist

$$\varrho=r\cos\beta,\quad z=r\sin\beta,\quad \varphi=\frac{2\pi r}{24.60.60.v}\left(\cos\beta\, Log\frac{tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}{tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}-2\beta\right),$$

$$tang\,\delta=\infty \text{ oder } \delta=90^0,\quad c=v.$$

Aus $\frac{tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}{tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}=tang^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)$ folgt noch

$$\varphi=\frac{4r\pi}{24.60.60.v}\left(\cos\beta\, Log\, tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)-\beta\right),$$

d. h. φ doppelt so gross als bis zum Aequatorschnitt. Nach diesen Resultaten und weil $tang\,\delta$ für $\frac{vt}{r}>\beta$ abnimmt, muss die Richtung des Körpers nach dem Passiren des Aequators sich der Meridianrichtung wieder nähern und dann mit ihr zusammenfallen, wenn der Parallelkreis erreicht ist, der auf der andern Seite des Aequators liegt und mit dem Anfangsparallel übereinstimmt. Da für diese Stelle $\partial\varphi_t=0$ ist, so hat hier φ ein Minimum oder Maximum; aus dem leicht zu ermittelnden $\partial^2\varphi_t$, sowie aus der Natur der Sache ergiebt sich, dass für $t=\frac{2\beta r}{v}$ Ersteres stattfindet. Von dieser Stelle an wendet sich der Körper wieder östlicher und hält gegen den Südpol hin eine Bewegung ein, die auf der andern Hemisphäre der entspricht, welche der Körper annimmt, wenn er bei uns mit der Geschwindigkeit v nach dem Nordpole bewegt wird. Dass die Bewegung von unserem Standpunkte aus nach Norden in nordöstlicher und nach Süden zuerst in südwestlicher Richtung stattfindet, wurde bereits im Allgemeinen ermittelt. Nimmt man, ähnlich wie bei den Windrichtungen, die Bezeichnung von der Himmelsrichtung her, von welcher der Körper anrückt, so ist die erste Bewegung eine von Südwesten und die andere eine von Nordosten herkommende.

Um auf einige Zahlenbeispiele überzugehen, setzen wir voraus, dass $v = 10^m$, $\beta = 50^0$ sei; dann ergiebt sich für t bei je 1^0 Breitendifferenz $\frac{vt}{r} + 50^0 = 51^0$, $\frac{vt}{r} - 50^0 = -49^0$, also t stets $= \frac{r}{v} \cdot \frac{\pi}{180} = 3$ Std. 5 Min. $11\frac{1}{9}$ Sec. Für 5^0, 10^0 Breitendifferenz erhält man die fünf- oder zehnfache Zeit. Der Aequator wird erreicht in 6 Tag. 10 Std. $19\frac{1}{4}$ Min., der südliche Parallel von 50^0 in der doppelten Zeit.

Bei der Bewegung nach Norden findet sich für die Breiten von 55^0, 60^0 das φ bezüglich $= 13{,}28^0$ und $59{,}37^0$. Von Mainz aus gerechnet, würde der Weg über Königsberg, Tilsit und den nördlichen Theil des Uralgebirges gehen. Bei der Bewegung nach Süden erhielte man für die Breiten von 45^0 und 40^0 die φ-Werthe $-11{,}003^0$ und $-40{,}5^0$, also wird der Weg von Mainz etwas nordwärts von Bordeaux und gegen die Insel Flores hinführen. Der Aequator wird erreicht bei $\varphi = -591{,}554^0$, also nach einem vollständigen Umlauf noch $231{,}5^0$ westlich von dem Meridian zu Mainz, oder $205{,}5^0$ westlich von Ferro, mithin nördlich von Neu-Guinea. Die südliche Richtung stellt sich wieder ein bei $-2.591{,}554^0 = -1183{,}108^0$, oder nach drei Umläufen und bei dem Meridian $+77{,}1^0$ westlich von dem zu Ferro, also ungefähr 20^0 westlich vom Golf von Trinidad in Patagonien. Von dort ist die Bewegung nach dem Südpol analog beschaffen, geht jedoch in südöstlicher Richtung vor sich, wie bei uns nordöstlich nach dem Nordpol. — Die Winkel δ mit den entsprechenden, nach Osten gerichteten Parallelkreisen sind für die Breiten von 55^0 und 60^0 bezüglich $17^0 19' 57''$ und $8^0 36' 7''$ oder die Bewegung findet bald fast in östlicher Richtung statt, für die Breiten 45^0, 40^0, 0^0 bezüglich $161^0 26' 12''$, $170^0 3' 37''$ und $176^0 32' 23''$, oder die Bewegung geht bald in eine fast westliche oder von Osten herkommende über. Es darf hier nicht überraschen, dass der Winkel von 90^0 rasch so grosse Aenderungen erleidet; der Ueberschuss oder das Zurückbleiben der Umdrehungsgeschwindigkeit für die nachfolgenden Stellen der Erde ist in Bezug auf die Geschwindigkeit von 10^m bald so bedeutend, dass die Richtung der letzteren sehr schnell beträchtlich abgeändert wird. Rein östlich oder westlich würde die Bewegung erst am Pol werden können, weil nur hier $\partial \dot{z_t} = v \cos\left(\frac{vt}{r} + \beta\right)$ gleich Null wird.

Endlich erhält man für die Geschwindigkeiten an den Stellen zu 55^0 und 60^0 $33{,}58995^m$ und $66{,}85882^m$; für die an den Stellen zu 45^0, 40^0, 0^0 entsprechend $31{,}4117^m$, $57{,}93341^m$ und $165{,}686^m$. Diese Geschwindigkeit nimmt auf der südlichen Hemisphäre in analoger Weise ab und wird bei 50^0 südlicher Breite wieder 10^m. Aus $c = \frac{v}{\sin \delta}$ ist dazu sofort ersichtlich, dass c bei $\delta = 90^0$ ein Minimum ist und dass es immer dasselbe wird, so oft δ denselben oder den Supplementswerth erhält.

Die Abweichung in Längenmass wird erhalten, wenn man den φ-Werth mit dem zugehörigen f multiplicirt.

Statt des obigen Körpers kann man sich wieder eine bewegte Luftschicht denken. Ist hier auch der Widerstand ein sehr beträchtlicher und treten auch noch andere Einflüsse auf, die wir in unserer Formel nicht berücksichtigten, so ist doch aus unseren Ergebnissen zu ersehen, wie rasch unter Umständen die Richtung des Windes durch die Umdrehung der Erde verändert wird und wie durch den Zuwachs von Geschwindigkeit von dieser Seite her etwaige Verluste, die durch die vorhandenen Widerstände entstehen, nicht blos gedeckt, sondern sogar übertroffen werden können und wie daher eine factische Vermehrung der Geschwindigkeit eintreten muss.

Die oben berührte Bewegung auf der südlichen Hemisphäre, wo sich an der Stelle der zweiten Nordrichtung die Bewegung vom Aequator her und gegen den Pol hin unmittelbar aneinander anschliessen, lässt vermuthen, dass auch für unsere Gegenden die Bahnen der Bewegungen nach Süden und Norden miteinander in Verbindung gebracht werden können. Wir lassen zu dem Ende auch negative Werthe von t in den Gleichungen für z und φ zu. Man erhält dann bei der Bewegung nach Norden für diese t-Werthe die Gleichungen — t ist dann nur absolut zu nehmen —

$$z = r\,sin\left(\beta - \frac{vt}{r}\right), \quad \varphi = \frac{2\pi}{24.60.60}\left(\frac{r\cos\beta}{v}\,Log\,\frac{tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}{tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}+\frac{vt}{2r}\right)}+t\right).$$

Durch Vergleichung dieser Werthe mit den Werthen der Bewegung nach Süden, oder mit

$$z = r\,sin\left(\frac{vt}{r} - \beta\right), \quad \varphi = \frac{2\pi}{24.60.60}\left(\frac{r\cos\beta}{v}\,Log\,\frac{tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}{tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}-\frac{vt}{2r}\right)}-t\right)$$

und in Berücksichtigung dessen, dass $tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}$ etc.

ist, dass z in beiden Fällen wegen der entgegengesetzten Lage der z-Axe für dieselben Parallelkreise entgegengesetzte Vorzeichen erhält, ergiebt sich, dass man im ersten Falle für jeden negativen Werth von t oder für jeden beliebigen Parallelkreis den gleichen und entgegengesetzten φ-Werth erhält, als im zweiten Falle für den entsprechenden positiven t-Werth oder für den gleichen Parallelkreis. Die Curve der Bewegung nach Norden für die negativen t-Werthe liegt daher mit der Curve der Bewegung nach Süden für die positiven t-Werthe symmetrisch gegen den Meridian zu $t = 0$. Die Geschwindigkeit c und der Winkel δ dieser

Geschwindigkeit mit dem Parallelkreise sind entsprechend einander gleich und es findet nur die Bewegung in beiden Fällen in entgegengesetzter Richtung statt. Während also die Bewegung nach Norden für die positiven t-Werthe in nordöstlicher Richtung mit wachsender Geschwindigkeit weiter geht, kommt sie für die negativen t-Werthe von südöstlicher Richtung her und nimmt ihre Geschwindigkeit ab. Aehnlich giebt die Gleichung für die Bewegung nach Süden in Bezug auf φ gleiche und entgegengesetzte Werthe von denen der Bewegung nach Norden, erstere für negative und letztere für positive t-Werthe genommen, so dass auch hier eine symmetrische Lage der zwei Curven gegen den Meridian zu $t=0$ vorhanden ist. Die für positive t-Werthe stets schneller nach Südwesten gehende Bewegung kommt hier von Nordwesten her und wird langsamer. Auf diese Art erhält man überhaupt zwei Bahnen, die symmetrisch gegen den Meridian zu $t=0$ liegen und bei welchen die Punkte zu den positiven t-Werthen der einen mit den Punkten zu den absolut gleichen, aber negativen t-Werthen der andern Bahn auf den gleichen Parallelkreisen liegen.

Durch die zulässige Verwendung der obigen Zahlenresultate erhielten wir sofort, dass der von Mainz über Tilsit etc. weitergehende Körper von Peterwardein und Baku, und dass der südwärts gehende Körper, welcher Bordeaux berührt, von der Südspitze von Grönland und dem Nordcanal der irischen See herkommen müsste. Alle übrigen Schlüsse sind nach den obigen Bemerkungen leicht auf die neuen Zweige der Curve zu übertragen.

Es hält nun nicht schwer, die Curve eines Körpers für den Fall zu bestimmen, dass derselbe an einer bestimmten Stelle der Erdoberfläche in einer beliebigen tangentiellen Richtung mit einer gewissen Geschwindigkeit ankommt und sich überhaupt nach unseren jetzigen Gesetzen bewegt. Aus $v=c.\sin\delta$, wo c und δ als gegebene Grössen anzunehmen sind, ergiebt sich die Geschwindigkeit v in der Richtung des Meridians. Liegt v etwa nach Norden hin und ist β' die geographische Breite des Beobachtungsortes, so hat man $\beta+\frac{vt}{r}=\beta'$ zu setzen und es kann folglich aus $\tang\delta=\frac{v.24.60.60}{2r\pi(\cos\beta-\cos\beta')}$ das β, d. h. die geographische Breite des Ortes ermittelt werden, wo der Körper sich nur nach Norden bewegt und gewissermassen die Bewegung entstanden ist. $\beta+\frac{vt}{r}=\beta'$ giebt die Zeit t, die verflossen ist, bis der Körper von der Ursprungsstelle nach dem Beobachtungsorte gelangte. Durch Einsetzen des gefundenen t-, β- und v-Werthes in die Gleichung für φ erhält man auch die geographische Länge der Ursprungsstelle. In ähnlicher Weise ergeben sich durch Substitution der gefundenen v- und β-Werthe in die Gleichungen für z und φ die Gleichungen der Bewegungscurve überhaupt, und ist dabei nur zu beachten, dass dann das t von dem Moment an gerechnet wird, in dem die Bewegung eine rein nördliche war.

Auch für die letzten Resultate wollen wir ein Zahlenbeispiel angeben. An einem Orte in der Nähe von Bern, dessen nördliche Breite 47^0 und östliche Länge 25^0 ist, wehe ein Südwestwind, welcher mit der Ostrichtung des Parallelkreises einen Winkel von 30^0 bildet, eine Geschwindigkeit von 20^m hat und bei seinem Fortschreiten unseren Bedingungen entspricht; dann erhalten wir, weil in dem Falle $c = 20$, $\beta' = 47^0$, $\delta = 30^0$ ist, nach dem Obigen für die anfängliche, nach Norden gerichtete Geschwindigkeit v desselben 10^m, für die geographische Breite β' der Ursprungsstelle $43^0\,59'\,39''$, für die Zeit t, welche der Wind bis zu dem genannten Orte braucht, 9 St. 16 Min. 38 Sec., und endlich für den φ-Werth dieses Ortes, wenn von der Ursprungsstelle an gerechnet wird, $= 3{,}72^0$. Die letztgenannte Stelle liegt demnach $3{,}72^0$ westlicher als unser gegebener Ort, oder unter $22{,}28^0$ westlicher Länge und ungefähr 44^0 nördlicher Breite, mithin zwischen Nimes und Avignon. Wollte man untersuchen, ob irgend ein anderer Ort auch von diesem bestimmten Winde berührt wird, ohne gerade die ganze Bewegungscurve verfolgen zu müssen, so setzt man in $\beta + \frac{vt}{r} = \beta''$ statt β'' die geographische Breite dieses Ortes, bestimmt daraus t und nun mit Hilfe der Gleichung für φ das letztere und die geographische Länge dazu. Stimmt diese Länge mit der des Ortes überein, so geht der Wind über den Ort weg; ist sie grösser oder kleiner als letztere, so geht der Wind entsprechend östlich oder westlich vorüber. Wenn nun auch bei Luftströmungen sich noch viele Einflüsse geltend machen, welche in unseren Formeln nicht berücksichtigt sind, und daher die obigen Resultate keine absolute Giltigkeit in Anspruch nehmen können, so geben uns dieselben doch einen Fingerzeig, in welch hervorragender Weise die Schweiz von den Wärmeverhältnissen des waldlosen und oft stark erhitzten südlichen Frankreichs beeinflusst werden muss. Es soll nicht gerade behauptet und müsste erst durch Beobachtung ermittelt werden, dass der Ursprung des Föhn dahin verlegt werden muss, aber gewiss ist, dass die beiden Gebiete in abgeschwächter Weise sich ähnlich wie die Aequator- und Polargegenden verhalten müssen.

Es scheint in dem Obigen ganz allgemein die Aufgabe gelöst zu sein, die Bahn eines Körpers zu bestimmen, der unter irgend einem Winkel δ gegen den Parallelkreis mit einer beliebigen Geschwindigkeit c bewegt wird; dem ist aber nicht so. Die Anwendbarkeit unserer Gleichungen setzt voraus, dass der Körper unabhängig von der Umdrehung der Erde eine bestimmte Geschwindigkeit v in der Richtung des Meridians erhält und diese Geschwindigkeit auf allen Meridianen beizubehalten sucht. Die erste Aufgabe ist, wie schon erwähnt wurde, an und für sich eine unbestimmte und führt mit der weitern, der Trägheit der Körper angepassten Bedingung der ebenen Bahn bei nicht rotirender Erde, auf elliptische Integrale.

Nr. 23. In Nr. 20 wurde bereits hervorgehoben, dass das Integral des Ausdruckes für φ allgemein in geschlossener Form nicht angebbar ist und daselbst eine nach Potenzen von $\frac{vt}{r}$ fortschreitende Reihe für dieses Integral aufgestellt. Bezüglich dieser Reihe wurde in Nr. 22 unter der Voraussetzung, dass $\alpha = 90^0$ ist, nachgewiesen, dass bis zu einer beträchtlichen Breite und bedeutendem Werthe von vt — es wurde $\beta = 70^0$ und $vt = 100000^m$ angenommen — die zwei ersten Glieder der Reihe numerische Resultate geben, die für die Anwendung innerhalb der Grenzen hinreichend genau sind. Die Grösse der Reihe $A = tang^2 \beta - sin^2 \alpha$ hat in dem Falle bei unveränderlichem β ihren kleinsten, die Grösse $B = tang\,\beta \,.\, sin\,\alpha$ ihren grössten Werth. Auch in dem andern extremen Falle, wo $\alpha = 0$ ist, und A seinen grössten und B den kleinsten Werth erhält, genügen nach Nr. 21 diese Glieder für numerische Bestimmungen. Erwägt man nun, dass A und B oder Potenzen dieser Grössen meist nur als Summanden in den Factoren der Glieder der Reihe vorkommen, dass bei geringeren Breiten A und B unter allen Umständen kleiner sind und ihr Einfluss gegen den von $\frac{vt}{r}$ zurücktritt, dass bei höheren Breiten und $\alpha \lesseqgtr 90^0$ B kleiner als der Maximalwerth $tang\,\beta$ ist und der Werth von A dem Minimalwerthe $tang^2 \beta - 1$ verhältnissmässig immer näher rückt, so scheint der Schluss gerechtfertigt zu sein, dass in allen Fällen bis zu beträchtlicher Breite und grösseren Werthen von vt die zwei ersten Glieder der Reihe zu numerischen Bestimmungen genügen. Setzen wir noch statt *arctang* die bis zu gleichen Potenzen von $\frac{vt}{r}$ gehenden Glieder der Reihe oder

$$arctang\left[tang\frac{vt}{r}\,.\,cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta\right] = \frac{vt}{r}\,.\,cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta\left[1 + \frac{v^2t^2}{r^2}\,.\,\frac{1 - cos^2\alpha\,.\,cos^2\beta}{3}\right],$$

wo wir uns auch mit dem ersten Gliede begnügen könnten, so erhalten wir

$$3)\quad \begin{aligned} \varphi = \frac{2\pi t}{24.60.60}&\left[\tfrac{1}{2} sin\,\alpha\,.\,tang\,\beta\,.\,\frac{vt}{r} + \tfrac{1}{6}(sin^2\alpha - tang^2\beta + 3\,sin^2\alpha\,.\,tang^2\beta)\,.\,\frac{v^2t^2}{r^2}\right] \\ &+ \frac{vt}{r}\,.\,cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta\left[1 + \frac{v^2t^2}{r^2}\,.\,\frac{1 - cos^2\alpha\,.\,cos^2\beta}{3}\right]. \end{aligned}$$

Das erste Glied des rechten Ausdruckes bestimmt die Aenderung des φ-Werthes, welche durch die Umdrehung der Erde entsteht. Zu dieser Gleichung sind aus Nr. 20 noch $z = r\left(sin\frac{vt}{r}\,.\,sin\,\alpha\,.\,cos\,\beta + cos\frac{vt}{r}\,.\,sin\,\beta\right)$, oder mit derselben Annäherung wie oben

2) $$z = r\left(\frac{v\,t}{r}\,\sin\alpha\,.\cos\beta + \sin\beta\left(1 - \frac{v^2 t^2}{2\,r^2}\right)\right)$$

und endlich

3) $$f^2 = \sqrt{r^2 - z^2}$$

zu nehmen.

Sollten die verschiedenen Grössen so bestimmt werden, dass der Körper durch eine bestimmte Stelle geht, die durch die geographische Breite β' und in Bezug auf die Ausgangsstelle durch die geographische Länge φ' bestimmt ist, so hätte man in den obigen Gleichungen φ' statt φ und $r\cos\beta'$ statt z zu setzen. Hierdurch erhielte man zwei Gleichungen zwischen den Grössen v, t und α, so dass eine dieser Grössen unter gewissen Beschränkungen beliebig gewählt werden könnte. Z. B. ergiebt sich aus der Natur der Verhältnisse, dass das α beim Wirken der Erdrotation und bei der Bewegung nach Norden in unseren Breiten sich entweder grösser ergeben wird, oder grösser angenommen werden muss als beim Wegfallen dieser Rotationswirkung. Bei der Bewegung nach Süden verhält sich α umgekehrt. Zu den gleichen Schlüssen führt eine algebraische Betrachtung, bei welcher ausser der obigen Gleichung für φ noch die berücksichtigt wird, die nur das zweite Glied der rechten Seite enthält und den Fall ohne Erddrehung bestimmt. Auch die Werthe von α sind ausgeschlossen, bei welchen vt zu gross würde und daher unsere Näherungsgleichungen nicht mehr ausreichen. Aehnlich ergiebt sich auf doppelte Weise, dass, wenn man etwa $vt = s$ einführt und diesem s einen nicht allzugrossen Werth beilegt, α nur dann bestimmbar ist, wenn s mindestens $= r(\beta' - \beta)$ ist. Die Gleichung für $z = r\cos\beta'$ giebt in diesem Falle α, die Gleichung für φ hierzu das t und $s = vt$ endlich das v. Sehr einfache Resultate können erhalten werden, wenn man sich in den Gleichungen für z und φ nur mit den Gliedern der ersten Dimension von $\frac{vt}{r}$ begnügt, die immer noch einem bedeutenden Grade der Annäherung entsprechen. Geometrisch genommen, liegt im letzten Falle vt in der Tangentialebene der Kugel, welche der Ausgangsstelle entspricht. Die wirkliche Länge der durchlaufenen Strecke könnte nur mit Hilfe der Rectificationsformel

$$L = \int_0^t \sqrt{f^2\,\partial\varphi_t^2 + (1 + \partial f_z^2)\,\partial z_t^2}\,dt$$

bestimmt werden, und könnten hierbei wieder die obigen Näherungsformeln für z und φ Anwendung finden.

Sollte die Abweichung vermöge der Erdumdrehung in Längenmass erhalten werden, so hätte man zu berücksichtigen, dass diese Umdrehung auf den z-Werth keinen Einfluss äussert, dass daher die genannte Längenabweichung nur auf dem Parallelkreise zu z liegt und mithin $= f$ oder

$\sqrt{r^2-z^2}$-mal der Aenderung des φ-Werthes durch die Umdrehung der Erde oder gleich $\sqrt{r^2-z^2}$-mal dem ersten Gliede in der obigen Gleichung für φ ist. Begnügt man sich mit dem Gliede $\frac{1}{2} \sin\alpha . \tang\beta . \frac{vt}{r}$ und setzt entsprechend $z = r\left(\sin\beta + \sin\alpha . \cos\beta . \frac{vt}{r}\right)$, so wird die genannte Längenabweichung auf dem Parallelkreise

$$f\varphi' = r\sqrt{1-\left(\sin\beta + \sin\alpha . \cos\beta . \frac{vt}{r}\right)^2} . \frac{2\pi t}{24.60.60} . \tfrac{1}{2} \sin\alpha . \tang\beta . \frac{vt}{r}.$$

Für die geographische Breite $\beta = 50^0$ der Ausgangsstelle, für $vt = 10000^{\mathrm{m}}$ und bei einer rein nordöstlichen oder rein nordwestlichen Anfangsrichtung der Bewegung oder bei $\alpha = 45^0$ und 135^0 findet sich $f\varphi' = 0{,}1967 . t^{\mathrm{m}}$. Die Bewegung nach südöstlicher oder südwestlicher Richtung, für welche wieder $\alpha = 45^0$ oder 135^0 und $\beta = -50^0$ zu setzen ist, liefert $f\varphi' = -0{,}1973 . t^{\mathrm{m}}$. Wäre gleichzeitig noch $v = 500^{\mathrm{m}}$, also etwa gleich der Geschwindigkeit einer Kanonenkugel, so wird $t = 20$, und wäre $f\varphi'$ in einem Falle $= 3{,}934^{\mathrm{m}}$ und im andern Falle $= -3{,}946^{\mathrm{m}}$ — eine wohl zu berücksichtigende Distanz. Für $vt = 1000^{\mathrm{m}}$ ergeben sich numerische Werthe, die nahezu $\frac{1}{10}$ der obigen sind.

Am Schlusse der Nr. 20 wurden in Bezug auf die hierher gehörigen φ-Aenderungen verschiedene allgemeine Bemerkungen gemacht; dieselben können zum Theil ohne Weiteres auf die Längenabweichung in die Richtung der Parallelkreise übertragen werden, so z. B. die über den Einfluss der Zeit t, die über die auf der nördlichen Erdhälfte nach rechts und auf der südlichen nach links gehende Lage der Abweichung gegen den nachsehenden Beobachter und die über die Gleichheit der Ablenkung für α und $180-\alpha$. Ebenso ergiebt sich unmittelbar, dass die Abweichung in Längenmass bei der reinen Bewegung nach Süden in unseren Gegenden ein Maximum ist, weil hier ein Maximum der φ-Aenderung noch mit dem grössten Werthe von f multiplicirt wird. Dagegen wird bei der rein nördlichen Bewegung die grösste φ-Aenderung mit dem kleinsten Werthe von f multiplicirt und entscheidet erst eine unmittelbare Untersuchung, ob die Abweichung in Längenmass in der That noch ein Maximum bleibt. Bezüglich des Minimums tritt ebenfalls keine Aenderung ein. Ob die Bewegung nach Süden in unseren Breiten unter sonst gleichen Umständen im Allgemeinen eine kleinere Längenabweichung liefert, als die nach Norden, ist wieder fraglich, weil im ersten Falle die kleinere φ-Aenderung mit einem grössern f und im zweiten Falle die grössere φ-Aenderung mit einem kleinern f multiplicirt wird. Entwickelt man zur Entscheidung dieser Frage $\sqrt{r^2-z^2} = r\sqrt{1-\left(\sin\frac{vt}{r} \sin\alpha . \cos\beta + \cos\frac{vt}{r} \sin\beta\right)^2}$ in die nach $\frac{vt}{r}$ fortschreitende Reihe

$$r\cos\beta\left(1-\frac{vt}{r}\sin\alpha\,.\,tang\,\beta+\tfrac{1}{2}(tang^2\beta-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\,.\,tang^2\beta)\,.\,\frac{v^2t^2}{r^2}\cdots\right)$$

und multiplicirt diese Reihe mit dem ersten Theile der Reihe von φ in Nr. 19, so erhält man für unsere Abweichung in Längenmass bei der Bewegung nach Norden

$$f\varphi'=\frac{2r\pi t}{24.60.60}\cos\beta\,.\left[\tfrac{1}{2}\sin\alpha\,.\,tang\,\beta\,.\,\frac{vt}{r}-\tfrac{1}{6}(tang^2\beta-\sin^2\alpha)\,.\,\frac{v^2t^2}{r^2}\cdots\right].$$

Für die Bewegung nach Süden ist β negativ zu nehmen. Man sieht hieraus, dass unter unseren Convergenzbedingungen und in unseren Breiten, wo stets $tang\,\beta > \sin\alpha$ ist, die Längenabweichung bei der nördlichen Bewegung unter sonst gleichen Umständen sich entgegengesetzt verhält als die φ-Aenderung, d. h. kleiner als bei der südlichen Bewegung ist. Dies Resultat bleibt so lange bestehen, als unter allen Breiten, die grösser als 45^0 sind, von selbst $tang\,\beta > \sin\alpha$ ist, als bei $\beta < 45^0$ noch immer diese Bedingung erfüllt sein kann, und schlägt erst in das Gegentheil um, wenn in Gegenden von $\beta < 45^0$, $\sin\alpha > tang\,\beta$ ist. Für ein gegebenes β kann das α, welches hier die Grenze bildet, genau bestimmt werden.

Lässt man es bei einer Genauigkeit bis zur ersten Potenz von $\frac{vt}{r}$ bewendet sein, so erhält man für unsere Abweichung

$$f\varphi'=\frac{\pi t}{24.60.60}\,.\,\sin\alpha\,.\,\sin\beta\,.\,vt.$$

Wie schon durch den Umstand angedeutet ist, dass dieser Ausdruck kein r enthält, stellt dieser Ausdruck die Ablenkung unter der annähernden Voraussetzung vor, dass vt gerade ist und der ganze Vorgang in der Tangentialebene zur Ausgangsstelle stattfindet. Hier stellt in der That $\sin\alpha.\sin\beta.vt$ die Aenderung des Radius des Parallelkreises und $\frac{\pi t}{24.60.60}$ den in t zurückgelegten Winkel der Winkelgeschwindigkeit der Erde vor und beide zusammen multiplicirt müssen die verlangte Abweichung geben. Es ist nämlich, wenn f den Radius des Parallelkreises der Anfangsstelle und $f-\varDelta f$ den der Schlussstelle bezeichnet, die fragliche Abweichung $f.\frac{\pi t}{24.60.60}-(f-\varDelta f)\frac{\pi t}{24.60.60}=\frac{\pi t}{24.60.60}.\varDelta f$, oder die ebengenannte. Umgekehrt kann auf diesem Wege schnell die obige Formel unmittelbar erhalten werden.

Bei der letzten Formel ist begreiflicherweise, wenn vom Vorzeichen abgesehen wird, eine Verschiedenheit der Abweichung bei der Bewegung nach Norden oder Süden nicht vorhanden, weil der Unterschied dieser Abweichung erst im darauffolgenden und weggelassenen Gliede beginnt. Bei der Bewegung nach Osten oder Westen erscheint hier aus gleichen Gründen gar kein Ablenkungswerth. Die obigen Bemerkungen über die

Maxima und Minima sind sofort ersichtlich. Sonst gilt noch — und dieses Resultat behält seine Giltigkeit auch bei Berücksichtigung von mehr Gliedern der Reihe —, dass die Abweichung um so grösser, je grösser β ist, d. h. in höheren Breiten grösser als in der Nähe des Aequators. Ein sehr bemerkenswerthes Resultat ist noch, dass β und α miteinander vertauscht werden können, ohne dass unser Ausdruck sich ändert. Wird also an einem Orte mit der geographischen Breite β ein Körper unter dem Winkel α gegen den Parallelkreis bewegt, so ist nach unserer Näherungsformel die Ablenhung dieselbe, als wenn der Körper an einem Orte mit der Breite α unter dem Winkel β gegen den Parallelkreis bewegt wird.

Hat man den Ausdruck $\frac{\pi}{24.60.60}.\sin\alpha$ für alle möglichen α-Werthe berechnet, so lässt sich sofort für ein gegebenes t, vt und β auf die Ablenkung schliessen. Es hält auch nicht schwer, die Lösung geometrisch darzustellen. Zu dem Ende construirt man ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\frac{\pi}{24.60.60} = 0{,}00003636$ und dem $\angle\beta$ der geographischen Breite, betrachtet die dem Winkel β gegenüberliegende Kathete als Hypotenuse eines neuen Dreiecks und giebt diesem noch den Winkel α, oder, wenn α stumpf sein sollte, den Winkel $180-\alpha$ — die dem Winkel α gegenüberliegende Kathete giebt dann, in dem Verhältnisse $1:vt^2$ oder $1:st$ vergrössert, die verlangte Ablenkung. Führt man von vornherein einen Weg von 1000^{m} ein, so ist die erste Hypotenuse $= 0{,}03636^{\text{m}}$ zu setzen und die letzte Kathete in dem Verhältnisse $1:\frac{st}{1000}$ zu vergrössern, um in der Zeichnung sofort die Ablenkung in ihrer wirklichen Grösse zu erhalten.

Um auch einige Zahlenbeispiele zu berühren, sollen die Ablenkungen mit Hilfe der letztgenannten Formel für $\beta = 50^0$, $s = 1000^{\text{m}}$ und $\alpha = 0$ oder 45^0 oder 90^0 angegeben werden. Es ergiebt sich bei der Bewegung nach Norden und Süden, entsprechend den drei Winkeln und abgesehen vom Vorzeichen, welches südwärts negativ ist, $f\varphi' = 0$ oder $0{,}0196958^{\text{m}}.t$ oder $0{,}02785416^{\text{m}}.t$. Das zweite Glied der Reihe für $f\varphi'$ ist, wie unmittelbar ersehen werden kann, bei $\alpha = 0$ am grössten und bei $\alpha = 90^0$ am kleinsten. Man erhält für dieses Glied in unseren drei Fällen die entsprechenden Werthe $-0{,}000001738^{\text{m}}.t$ oder $-0{,}0000011262^{\text{m}}.t$ oder $-0{,}00000051432^{\text{m}}.t$ und daher für die Bewegung nach Norden

$$-0{,}000001738^{\text{m}}.t,\quad +0{,}01969474^{\text{m}}.t,\quad +0{,}02785365^{\text{m}}.t,$$

für die Bewegung nach Süden

$$-0{,}000001738^{\text{m}}.t,\quad -0{,}019697^{\text{m}}.t,\quad -0{,}02785467^{\text{m}}.t.$$

Bei $\alpha = 135^0$ sind die Ablenkungen ebenso gross wie bei $\alpha = 45^0$. Diese Werthe lassen sofort die Richtigkeit der obigen allgemeinen Bemerkungen über die Grösse der Ablenkung erkennen. Wenn $vt = 10000^{m}$ angenommen wird, so sind die Werthe aus dem ersten Gliede 10 mal und die aus dem zweiten Gliede 100 mal grösser. Für eine Flintenkugel, welche etwa 3 Sec. zum Durchfliegen der 1000^{m} braucht, wäre die Ablenkung dreimal so gross, als oben angegeben wurde, also z. B. bei der reinen Bewegung nach Norden oder Süden $c. 8^{cm}$, für eine Kanonenkugel, welche 5000^{m} in 15 Sec. zurücklegt, 75 mal so gross, mithin unter den obigen Umständen $c. 2,1^{m}$.

Eine Bestätigung erhalten die obigen Resultate, wenn man $\beta = 0$ setzt, oder die Bewegung vom Aequator aus erfolgt. Hier wird für $\alpha = 0$, wie es sein muss, auch das zweite Glied der Reihe und also die ganze Ablenkung $= 0$; dann wird für alle anderen α das zweite Glied, welches hier allein die Ablenkung bestimmt, positiv, und vermehrt demnach, der Wirklichkeit entsprechend, die Ablenkung stets den Winkel φ.

Die Abweichung senkrecht zur Richtung der Anfangsgeschwindigkeit ist für den ersten Fall der Annäherung leicht zu bestimmen; sie ist nämlich gleich der Abweichung auf dem Parallelkreis mal $\sin\alpha$, also gleich $\frac{\pi t}{24.60\,60} \sin^2\alpha . \sin\beta . vt$. Bei genauer Bestimmung würde man statt des rechtwinkligen ebenen Dreiecks ein ebenso beschaffenes sphärisches Dreieck erhalten und daraus die Abweichung bestimmen müssen.

Es wurde schon mehrmals angedeutet, dass unsere Formeln, ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand, auch die Ablenkung von Geschossen durch die Umdrehung der Erde geben. Dies ist, streng genommen, nur unter den letzten Voraussetzungen der Fall, wo die Ablenkungscurve in die Tangentialebene des Ausgangspunktes fällt; denn hier kann die Wirkung der Schwere stets senkrecht zu dieser Ebene, also die Bahn des Körpers, abgesehen von anderen Einflüssen, als eine Parabel, und die horizontale Geschwindigkeit, unseren Voraussetzungen gemäss, als constant betrachtet werden. Die oben betrachtete Curve stellt hier die Projection der Curve im Raume vor und die letztere wird erhalten, wenn man in den Punkten der Projectionscurve Senkrechte zu der Tangentialebene errichtet und sie gleich den Lothen macht, welche die reine Parabelbahn zur gleichen Zeit hätte. Aus denselben Gründen wird durch die obige Formel die Ablenkung eines Geschosses für den Moment des Auffallens bestimmt, wenn man statt v eine horizontale Seitengeschwindigkeit, also $e.\cos\gamma$ setzt, wo e die anfängliche Wurfgeschwindigkeit und γ den Elevationswinkel bezeichnet, und statt t die Zeit, die der Körper braucht, um wieder herab zur Erde zu gelangen. Hier ergiebt sich nun sofort das bemerkenswerthe Resultat, dass, wenn nach einem bestimmten Ziele geschossen wird, also $vt = s$ ein gegebenes ist, die Ablenkung um so grösser wird, je grösser der Elevationswinkel ist. Unabhängig von e folgt nämlich aus $t = \sqrt{\frac{2s.\tang\gamma}{g}}$

für ein grösseres γ ein grösseres t und damit die grössere Abweichung von dem Ziele. Im Zusammenhange damit steht, dass von den zwei Werthen, welche sich aus $\frac{gs}{e^2} = \sin 2\gamma$, bei $gs < e^2$ und gegebenen c und s für γ ergeben, der Werth zwischen 45 und 90° im Vergleich zum Werthe zwischen 0 und 45° ein soviel mal grösseres t und daher eine soviel mal grössere Ablenkung giebt, als die *cotang* des Winkels zwischen 0 und 45° angiebt. Man kann nun für die Längenabweichung aus

$$f\varphi' = \frac{\pi t}{24.60.60} \cdot e . \sin\alpha . \sin\beta . \cos\gamma . t,$$

dann aus $s = e . \cos\gamma . t$ und $t = \frac{2e}{g} \sin\gamma$ verschiedene Formeln angeben, wenn man aus den zwei letzten Gleichungen zwei der Grössen e, t, γ sucht und die Werthe in den ersten Ausdruck einsetzt oder nur eine der letzten Gleichungen verwendet.

In Betreff der umgekehrten Aufgabe, nämlich α, v oder t so zu bestimmen, dass der Körper unter dem Einflusse der Erddrehung an eine bestimmte Stelle kommt, wurden hierher gehörige Aufgaben schon zu Anfang unserer Nummer betrachtet. Man könnte jedoch noch statt des dortigen φ' und β' die Grössen s' und α', d. h. die wirkliche Entfernung des vorgeschriebenen Zieles und den Winkel α', oder den Winkel der Richtung dahin mit dem Parallelkreise einführen. Die dieser Aufgabe zu Grunde liegenden Gleichungen wären dann für unsern ersten Grad der Annäherung, wo die Curve auf der Tangentialebene liegt,

1) $$s'^2 = s^2 + (f\varphi')^2 + 2s(f\varphi') . \cos\alpha,$$

2) $$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{s}{s'}$$

oder

1) $$s'^2 = v^2 t^2 \left(1 + \left(\frac{\pi t}{24.60.60}\right)^2 . \sin^2\alpha . \sin^2\beta + \frac{2\pi t}{24.60.60} . \sin\alpha . \cos\alpha . \sin\beta\right),$$

2) $$\sin\alpha = \frac{s' . \sin\alpha'}{vt}.$$

Man hätte also wieder zwei Gleichungen zwischen den drei Unbekannten v, t und α, so dass wieder eine beliebig gewählt werden könnte. Nimmt man dazu noch den Wurf und die Wurfgleichungen, oder

3) $$v = e . \cos\gamma$$

und

4) $$t = \frac{2e}{g} . \sin\gamma$$

hinzu, so hat man vier Gleichungen mit fünf Unbekannten. Bei gegebenem e, d. h. bei gegebener Geschwindigkeit des Projectils, lassen sich alle anderen Grössen bestimmen. Von besonderer Bedeutung ist hierbei der Werth von α, weil $\alpha - \alpha'$ den Winkel bestimmt, um den die Richtung des Geschützes von der Richtung nach dem Ziele abweichen muss, damit letzteres getroffen wird. Diese Abweichung liegt auf der Nordhälfte der Erde dem Schiessenden zu linken Seite. Es unterliegt keiner Schwierigkeit, die Gleichung zur Bestimmung von α herzuleiten; dieselbe ist jedoch von so complicirter Gestalt, dass sich keine weiteren einfachen Bemerkungen an das knüpfen lassen, was in dieser Beziehung schon erwähnt wurde.

Wollte man die zweiten Beziehungen auf den Wurf anwenden, so wäre es angemessener, statt der parabolischen Wurfbahn eine elliptische zu setzen. Das Fortschreiten der Projection des geworfenen Körpers auf dem grössten Kreise der Bahnebene, in welcher der Körper ohne Einfluss der Erddrehung bleibt, würde dann jedoch nicht mehr mit gleichförmiger Geschwindigkeit, sondern dem zweiten Kepler'schen Gesetze entsprechend stattfinden. Es wären also unsere letzten Formeln, welche dieses gleichförmige Fortschreiten voraussetzen, hier gar nicht mehr anwendbar. Wir wollen in einer spätern Nummer auf diesen Fall wieder zurückkommen.

Nr. 24. Weil die Aufgabe in Nr. 19 dadurch eine gewisse Bedeutung erlangt, dass die ebene Bahn und die constante Geschwindigkeit v den Forderungen des Beharrungsvermögens entsprechen, so sollen hier noch die dortigen Gleichungen dadurch verallgemeinert werden, dass man statt der Kugel irgend eine Rotationsfläche setzt. Die ursprüngliche Kreisbahn des Körpers geht dann in die ebene Bahn über, nach welcher die Ebene, die den Ursprung und die anfängliche Richtung des v enthält, die Rotationsfläche schneidet. Der Ursprung kann irgendwo auf der Rotationsaxe liegen. Sämmtliche Bestimmungen und Bezeichnungen der Nr. 19 in Bezug auf den Anfangszustand, die Lage des Coordinatensystems etc. sollen hier beibehalten werden. Analog den Nrn. 18 und 19 erhält man hier zur Bestimmung unserer Curve die Gleichungen

$$1) \qquad \varrho = f_z,$$

$$2) \qquad z = r \sin(\psi_t + \mu) . \sin\theta,$$

$$3) \qquad \varphi = \int_0^t \omega \, dt + arctang[tang \psi_t . \cos\theta].$$

In diesen Gleichungen müssen jedoch erst r, μ, ψ und θ den neuen Verhältnissen gemäss bestimmt werden. Zunächst ist $r = \sqrt{z^2 + f^2}$; dann ist, wie früher, $\mu = \arcsin \frac{z'}{r' \sin\theta} = \arcsin \frac{z'}{\sin\theta \sqrt{z'^2 + f'^2}}$, wo z', f' etc. sich auf den Anfangspunkt beziehen. Aus $r^2 \, d\psi^2 + dr^2 = v^2 \, dt^2$ folgt weiter

$$d\psi = \sqrt{\frac{v^2\,dt^2 - dr^2}{r^2}}$$

und

$$\psi = \int_0^t \sqrt{\frac{v^2 - (\partial(\sqrt{f^2+z^2})_t)^2}{f^2+z^2}}\,dt = \int_0^t \frac{\sqrt{v^2(f^2+z^2) - (f\,\partial f_z + z)^2\,\partial z_t^2}}{f^2+z^2}\,dt.$$

Endlich ergiebt sich θ auf folgende Weise. Die Normalgleichung der Bahnebene sei $x.\cos\lambda + y.\cos\mu + z.\cos\nu = 0$, wo λ, μ und ν unbekannt sind und $\nu = \theta$ wird. Diese Ebene geht durch den Ausgangspunkt und muss deshalb sein

4) $$f'\cos\lambda + z'\cos\nu = 0.$$

Die Anfangsgeschwindigkeit v bildet mit den drei Axen die Winkel α', β', γ', deren Cosinusse gleich sind $\cos\alpha' = \frac{dx'}{v\,dt} = \frac{df'}{v\,dt} = \frac{\partial f'_z\,dz'}{v\,dt}$, $\cos\beta' = \frac{dy'}{v\,dt} = \cos\alpha$ und $\cos\gamma' = \frac{dz'}{v\,dt}$; dabei ist $dz'^2 + \partial f_{z'}^2\,dz'^2 = v^2\sin^2\alpha.dt^2$, also $dz' = \frac{v\sin\alpha.dt}{\sqrt{1+\partial f_{z'}^2}}$. Nun liegt aber unsere Anfangsgeschwindigkeit in der Bahn, mithin giebt

5) $$\cos\lambda.\frac{\partial f_{z'}}{v\,dt}.\frac{v\sin\alpha.dt}{\sqrt{1+\partial f_{z'}^2}} + \cos\mu.\cos\alpha + \cos\gamma.\frac{v\sin\alpha.dt}{v\,dt\sqrt{1+\partial f_{z'}^2}} = 0.$$

Dazu kommt noch die Richtungsgleichung

6) $$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1.$$

Eliminirt man aus den Gleichungen 4), 5) und 6) das λ und μ, so erhält man

$$\cos\nu = \cos\theta = \frac{f'\sqrt{1+\partial f_{z'}^2}}{\sqrt{(z'^2+f'^2)(1+\partial f_{z'}^2) + (z'\,\partial f_{z'} - f')^2.\,tang^2\alpha}}.$$

Es ist nun auch leicht, daraus $\sin\theta$ zu bestimmen.

Setzt man den Werth von ψ in die Gleichung 2) für z ein, so erhält man

2) $$z = \sqrt{f^2+z^2}\sin\left(\int_0^t \frac{\sqrt{v^2(f^2+z^2) - (f\,\partial f_z + z)^2\,\partial z_t^2}}{f^2+z^2}\,dt + \mu\right)\sin\theta.$$

Diese Gleichung ist nur scheinbar nach z aufgelöst, weil die rechte Seite noch z, ja sogar noch ∂z_t enthält. Es ist daher zunächst z zu bestimmen, zumal auch noch ψ und φ sich erst mit Hilfe des z erhalten lassen. Zu dem Ende lösen wir in der letzten Gleichung zunächst nach dem Integral auf, leiten auf beiden Seiten nach t ab und suchen aus der erhaltenen Differentialgleichung ∂z_t; es wird dann

$$\partial z_t = v \sqrt{\frac{(f^2+z^2)(f^2 sin^2\theta - z^2 cos^2\theta)}{f^2(f - z\,\partial f_z)^2 + (f\,\partial f_z + z)^2 (f^2 sin^2\theta - z^2 cos^2\theta)}}$$

und daraus

$$2)\quad t = \frac{1}{v}\int\limits_0^z \sqrt{\frac{f^2(f-z\,\partial f_z)^2 + (f\,\partial f_z + z)^2(f^2 sin^2\theta - z^2 cos^2\theta)}{(f^2+z^2)(f^2 sin^2\theta - z^2 cos^2\theta)}}\, dz.$$

Um z zu finden, dürfte die letzte Gleichung nur nach z aufgelöst werden.

Aus der Gleichung $z = \sqrt{f^2+z^2}\,.\,sin(\psi+\mu)\,.\,sin\,\theta$ lässt sich ψ und damit das zugehörige Integral finden. Es ergiebt sich hier

$$\psi = \int\limits_0^t \frac{\sqrt{v^2(f^2+z^2) - (f\,\partial f_z{}^2 + z^2)\,\partial z_t{}^2}}{f^2+z^2}\, dt$$

$$= arcsin\frac{z}{sin\,\theta\sqrt{f^2+z^2}} - arcsin\frac{z'}{sin\,\theta\sqrt{f'^2+z'^2}},$$

ein Resultat, dessen Richtigkeit unmittelbar ersichtlich ist. Wollte man die Function von t für ψ haben, so müsste der vorher bezeichnete z-Werth eingesetzt werden.

Das Einsetzen des oben bestimmten ψ-Werthes in die Gleichung 3) giebt in ähnlicher Weise wie in Nr. 19

$$3)\quad \varphi = \int\limits_0^t \omega\, dt$$

$$+ arctang\left(\frac{z\sqrt{f'^2 sin^2\theta - z'^2 cos^2\theta} - z'\sqrt{f^2 sin^2\theta - z^2 cos^2\theta}}{z z' + \sqrt{(f'^2 sin^2\theta - z'^2 cos^2\theta)(f^2 sin^2\theta - z^2 cos^2\theta)}}\,.\,cos\,\theta\right).$$

Wird in die letzte Gleichung noch statt t die in der letzten Gleichung 2) gefundene Function von z eingesetzt, so erhält man die Gleichung der windschiefen Fläche, die in Verbindung mit der Rotationsfläche die verlangte Curve bestimmt. Sonst ist noch einfach zu übersehen, wie sich die Formeln gestalten, wenn v nicht constant, sondern eine Function von t oder z ist.

Setzt man $f^2+z^2 = r^2$ und ω constant, so gehen unsere Resultate in die der Nr. 19 über.

Für die ursprüngliche Bewegung längs des Meridians ist $\alpha = 90^0$ und wird $cos\,\theta = 0$ oder $\theta = 90^0$, dann $t = \frac{1}{v}\int\limits_0^z \sqrt{1+\partial f_z{}^2}\,.\,dz.$ Letzteres Resultat kann aus $\sqrt{\partial z_t{}^2 + \partial f_z{}^2\,.\,\partial z_t{}^2} = v$ unmittelbar erhalten werden. Weiter wird

$$\psi = arcsin \frac{z}{\sqrt{f^2+z^2}} - arcsin \frac{z'}{\sqrt{f'^2+z'^2}}$$

und endlich

$$\varphi = \int_0^t \omega\, dt.$$

Der andere Fall, wo $\alpha = 0$ ist, giebt keine so einfachen Resultate.

Auch die Aufgabe der Nr. 20 kann sofort den jetzt gegebenen Stücken angepasst werden, wenn man in der Gleichung 3) für φ statt ω den Ausdruck $\frac{p-f\omega}{f} = \omega \frac{f'-f}{f}$ setzt. Die beiden anderen Gleichungen für t oder z und ϱ bleiben dieselben, wie oben.

(Schluss folgt.)

XII.

Beziehungen zwischen Meridian- und Contourcurve orthogonal dargestellter Rotationsflächen.

Von

R. MÜLLER,

Studirender der Mathematik am königl. Polytechnikum Dresden.

(Hierzu Taf. V, Fig. 1—9.)

In den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien vom Jahre 1866 giebt Herr Niemtschik folgende Construction der Contouren orthogonal dargestellter Rotationsflächen an: Sind von der Rotationsfläche die Axe AA' und der Meridian M gegeben (Fig. 1), so projicire man die Fläche auf eine zu AA' parallele Verticalebene E und lege diese Projection um die Horizontalspur E' von E in den Grundriss nieder, so dass $A_3A'_3$ die Projection der Axe und der Meridian M die Contour der Rotationsfläche auf der umgelegten Ebene darstellt. Hierauf ziehe man einen beliebigen Parallelkreis $p_3m_3q_3 \perp A_3A'_3$, sowie die Tangente p_3s_3 und die Normale p_3n_3 der Curve M, bestimme die Punkte s_1, s_2, n_1, n_2 auf $A_1A'_1$, resp. $A_2A'_2$, und beschreibe eine Kugel, welche die darzustellende Fläche in dem genannten Parallelkreise berührt, also n zum Mittelpunkte hat. Legt man an die als Grundriss- und Aufrissprojection dieser Kugel auftretenden Kreise von s_1, resp. s_2 aus die Tangenten $s_1\varphi_1$, $s_1\varphi'_1$, $s_2\psi_2$, $s_2\psi'_2$, so sind φ_1 und φ'_1 Punkte der Grundrisscontour, ψ_2 und ψ'_2 Punkte der Aufrisscontour.

Diese Construction kann noch folgendermassen abgeändert werden. Die Punkte φ und φ' sind die Schnittpunkte des grössten horizontalen Kugelkreises mit dem Parallelkreise der Rotationsfläche. Zieht man $n_3\varphi_3$ parallel $A_1A'_1$, so ist $n_3\varphi_3$ die seitliche Projection dieses Kugelkreises und φ_3 diejenige von φ und φ'; mithin erhält man φ_1 und φ'_1, indem $\varphi_3\varphi_1 \perp A_1A'_1$ und $n_1\varphi_1 = n_1\varphi'_1 = n_3p_3$ macht. Die Punkte ψ und ψ' sind ferner die Schnittpunkte des Parallelkreises mit demjenigen grössten Kugelkreise, dessen Ebene parallel zum Aufriss ist. Denkt man sich nun die Grundrissebene parallel zu sich selbst so verschoben, dass $\varphi_1\varphi'_1$ Grundrissspur der Ebene des Parallelkreises wird, so ergiebt sich die

Durchschnittslinie der Ebene des Parallelkreises mit der des Kugelkreises, indem man $n_1 t_1$ und $n_2 t_2$ parallel zur Projectionsaxe zieht und von t_2 auf $A_2 A'_2$ die Senkrechte $t_2 \psi_2$ fällt. Schlägt man alsdann von n_2 aus mit dem Radius $n_3 p_3$ einen Kreis, welcher $t_2 \psi_2$ in ψ_2 und ψ'_2 trifft, so sind ψ_2 und ψ'_2 die gesuchten Contourpunkte*.

Aus dieser Construction folgt, dass φ_3 ein Punkt der seitlichen Projection der auf der Rotationsfläche liegenden Grundrisscontourlinie ist. Es soll überhaupt in den folgenden Betrachtungen diejenige Linie, in welcher die verticalen Projectionsstrahlen die Fläche berühren, Grundrisscontourlinie, die Grundrissprojection derselben aber Grundrisscontourcurve oder Grundrisscontour genannt werden.

Denkt man sich zu allen Punkten n_3 der seitlichen Projectionsebene nach einer der angeführten Methoden alle Punkte φ_1 resp. ψ_2 der Grundriss- resp. Aufrissebene bestimmt, so werde in Zukunft unter Meridiansystem die Gesammtheit aller Punkte der seitlichen Projectionsebene, unter Grundriss- resp. Aufrisscontoursystem die Gesammtheit aller Punkte der Grundriss- resp. Aufrissebene verstanden.

Aus der zuerst angegebenen Construction geht hervor, dass $n_1 \varphi_1$, $n_1 \varphi'_1$, $n_2 \psi_2$, $n_2 \psi'_2$ Normalen der bezüglichen Contourcurven sind. Betrachtet man also die Punkte p_3, q_3, φ_1, φ'_1, ψ_2, ψ'_2 als entsprechende Punkte, so ergiebt sich der Satz: Entsprechende Punkte im Meridian- und Contoursystem besitzen in Bezug auf die Projectionen der Rotationsaxe gleichlange Normalen.

Wie man sofort erkennt, entsprechen nicht allen Punkten der Meridiancurve Punkte der Contourcurven, da s_1 oder s_2, von denen man Tangenten an die betreffenden Kreise zu ziehen hat, innerhalb der letzteren liegen können. Dann werden auch $\varphi_3 \varphi_1$, resp. $t_2 \psi_2$ von den Kreisen nicht mehr geschnitten. — Bezeichnet man den von $A_1 A'_1$ und $A_3 A'_3$ gebildeten spitzen Winkel, d. h. den Neigungswinkel der Rotationsaxe gegen die Grundrissebene, mit h, so besitzen alle Punkte der Meridiancurve, deren Normalen mit $A_3 A'_3$ einen Winkel, kleiner als h, einschliessen, im Grundrisscontoursystem keine entsprechenden Punkte. Diejenigen Punkte der Meridiancurve, deren Normalen mit $A_3 A'_3$ den Winkel h bilden, liefern im Grundrisscontoursystem Punkte auf $A_1 A'_1$.

Eine analoge Beziehung besteht zwischen der Meridian- und Aufrisscontourcurve.

Der Umstand, dass möglicherweise einem Punkte im Meridiansystem gar kein Punkt im Contoursystem entspricht, wird bei den meisten noch zu entwickelnden Sätzen zu berücksichtigen sein, auch wenn derselbe nicht in jedem Falle von Neuem erwähnt werden wird.

* Burmester, Theorie und Darstellung der Beleuchtung etc., Leipzig 1875; S. 114.

Man kann nun auch, wie bisher die Meridiancurve, eine der Contourcurven, z. B. die im Grundrisse, als gegeben betrachten und hierzu die Meridian- und Aufrisscontourcurve bestimmen.

Um z. B. zu dem Punkte φ_1 den entsprechenden p_3 im Meridiansystem zu finden, construire man zunächst die Normale $\varphi_1 n_1$ der Grundrisscontourcurve, ziehe $n_1 n_3$ und $\varphi_1 \varphi_3 \perp A_1 A'_1$, $n_3 \varphi_3$ parallel $A_1 A'_1$, $\varphi_3 p_3 \perp A_3 A'_3$ und mache $p_3 n_3 = \varphi_1 n_1$. Hierbei entspricht jedem Punkte der Grundrisscontour ein Punkt des Meridians, denn es ist stets $n_3 \varphi_3 < n_1 \varphi_1$, folglich um so mehr $m_3 n_3 < n_1 \varphi_1$. — Ist $n_1 \varphi_1$ parallel $A_1 A'_1$, so entspricht dem Punkte φ_1 ein unendlich ferner Punkt im Meridiansystem.

Soll sich ferner zu φ_1 ein Punkt ψ_2 im Aufrisscontoursystem ergeben, so muss $n_2 \mu_2 \leqq n_1 \varphi_1$ sein. Bezeichnet man also die von $A_1 A'_1$ und $A_2 A'_2$ mit der Projectionsaxe gebildeten spitzen Winkel bezüglich mit α und β und $\angle \varphi_1 n_1 s_1$ mit γ, so erhält man für das Vorhandensein des Punktes ψ_2 die Bedingung

$$n_1 \varphi_1 \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \cos\gamma \leqq n_1 \varphi_1 \quad \text{oder} \quad \cos\gamma \leqq \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Hieraus folgt: So lange α kleiner als β ist, entspricht jedem Punkte im Grundrisscontoursystem ein Punkt im Aufrisscontoursystem. Ist dagegen α grösser als β, so entsprechen nicht allen Punkten der Grundrisscontour Punkte der Aufrisscontour; bei

$$\cos\gamma = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

erhält man alsdann einen auf $A_2 A'_2$ gelegenen Punkt.

Die eben angeführte Gleichung liefert eine einfache Bestimmung des auf $A_2 A'_2$ liegenden Punktes der Aufrisscontour, wenn die Grundrisscontour gegeben ist und man sich der seitlichen Projection nicht bedienen will.

Ist α kleiner als β und nur die Grundrisscontour der Rotationsfläche, aber nicht ihr Meridian bekannt, so hat die aus der Grundrisscontour entwickelte Aufrisscontour mit $A_2 A'_2$ keinen Punkt gemein. — Bei α gleich β sind Aufriss- und Grundrisscontour congruent.

In den folgenden Betrachtungen wird es unsere Aufgabe sein, zu gegebenen Meridian- oder Contourcurven die entsprechenden Curven in den beiden anderen Systemen zu bestimmen.

1. Im Meridiansystem sei ein Punkt P_3 im Abstande a von $A_3 A'_3$ gegeben. (Fig. 2.) Da man jeden Punkt als einen unendlich kleinen Kreis, als einen sogenannten Punktkreis, auffassen kann, so folgt hieraus, dass P_3 eine unendlich dünne Ringfläche erzeugen muss. Wie aus der darstellenden Geometrie bekannt ist, projicirt sich aber jede schief-

gestellte Ringfläche als Aequidistante einer Ellipse. Diese Curve muss also in dem vorliegenden Falle für einen Punktkreis in eine Ellipse übergehen. Man gelangt mithin zu dem Satze: Jedem als Punktkreis aufgefassten Punkte im Meridiansystem entspricht eine Ellipse im Contoursystem. Die Halbaxen dieser Ellipse sind a und $a \sin h$ im Grundriss, a und $a \sin v$ im Aufriss, wobei v den Neigungswinkel der Rotationsaxe gegen die Aufrissebene bezeichnet.

Liegt P_3 auf $A_3 A'_3$, so degenerirt auch die Contourellipse in einen auf der betreffenden Projection der Rotationsaxe liegenden Punkt. — Die seitliche Projection der Grundrisscontourlinie fällt mit der durch P_3 gehenden Senkrechten $P_3 Q_3$ zusammen.

Einem zu P_3 symmetrisch liegenden Punkte P'_3 entspricht dieselbe Ellipse im Contoursystem.

Da überhaupt Meridian- und Contourcurve in Bezug auf die Projectionen der Rotationsaxe symmetrisch sind, so wird es in Zukunft genügen, nur eine Hälfte der betreffenden Curven zu betrachten.

In Fig. 2, wie in den folgenden Figuren ist der Einfachheit wegen die Aufrisscontour weggelassen, die Grundrisscontour dagegen in eine bequemere Lage gebracht worden.

Nimmt man umgekehrt im Grundrisscontoursystem einen Punktkreis P_1 in der Entfernung a von $A_1 A'_1$ an (Fig. 3), so erhält man Punkte der Meridiancurve, indem man durch P_1 alle möglichen Normalen zieht und dann die bekannte Construction anwendet. Entspricht der Normale $P_1 Q_1$ die Normale $R_3 Q_3$ der Meridiancurve, und bezeichnet man $R_3 M_3$ mit x und $O_3 M_3$ mit y, so ist

$$M_3 P_3 = Q_3 P_3 \sin h$$

mithin

$$y = Q_3 P_3 \sin h \tan h$$

oder

$$Q_3 P_3 = \frac{y}{\sin h \tan h}$$

und

$$Q_3 M_3 = \frac{y}{\tan^2 h}.$$

Dann ergiebt sich aus $\triangle R_3 M_3 Q_3$

$$x^2 + \frac{y^2}{\tan^4 h} = a^2 + \frac{y^2}{\sin^2 h \tan^2 h}$$

oder

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a \tan h}\right)^2 = 1.$$

Hieraus folgt der Satz: Jedem als Punktkreis aufgefassten Punkte im Contoursystem entspricht eine Hyperbel im Meridiansystem. Der Asymptotenwinkel der vorliegenden Hyperbel beträgt $2h$; $P_1 O_3$ ist die eine Asymptote; die Hauptaxe der Hyperbel steht senkrecht auf $A_3 A'_3$. — Das gewonnene Resultat wird auch durch die Anschauung bestätigt. Bringt man nämlich ein einfaches Rotationshyperboloid in eine solche Lage, dass eine Mantellinie senkrecht auf der Grundrissebene steht, so degenerirt seine Grundrisscontour in zwei Punkte P_1 und P'_1, denn die Projection jeder Mantellinienschaar umhüllt einen Punkt. — Da die vorliegende Fläche ein Rotationshyperboloid ist, so ergiebt sich aus einem später noch zu beweisenden Satze, dass die dem Punkte P_1 entsprechende Aufrisscontourcurve bei $v > h$ oder $\alpha > \beta$ eine Ellipse mit den Halbaxen

$$a \text{ und } a\frac{\sqrt{\sin(v+h)\sin(v-h)}}{\cos h},$$

bei $v = h$ ein Punkt und bei $v < h$ eine Hyperbel sein muss.

Die Gerade $O_3 P_1$ ist zugleich die seitliche Projection der Grundrisscontourlinie, d. h. der beiden verticalen Mantellinien.

2. Hat man im Meridiansystem eine beliebige Curve σ, so entspricht derselben in einem der Contoursysteme eine Curve Σ, und dann stehen σ und Σ in einer interessanten Beziehung, welche jedoch nicht zu den bisher eingehender behandelten geometrischen Beziehungen gehört. Dieselbe ist ein specieller Fall der von Herrn Lie aufgestellten räumlichen Reciprocität. (Siehe die Abhandlung dieses Autors „Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen", im V. Bande der Math. Ann.) Es wird daher nöthig sein, vorerst einige Hauptsätze aus dieser geometrischen Beziehung anzuführen. Herr Lie geht von den Gleichungen aus

$$F_1(xyz\,XYZ) = 0$$

und

$$F_2(xyz\,XYZ) = 0,$$

wobei xyz und XYZ die Punktcoordinaten zweier Räume r und R bedeuten. Durch diese beiden Gleichungen werden die Räume r und R so aufeinander bezogen, dass den Punkten des einen Raumes die Curven eines Complexes im zweiten Raume entsprechen. Complexcurven, die durch einen gegebenen Punkt gehen, entsprechen den Punkten derjenigen Curve, die dem gegebenen Punkte zugeordnet ist. Zwei von Complexcurven umhüllte Curven C und c in R und r stehen in solcher gegenseitiger Beziehung, dass den Punkten der einen diejenigen Complexcurven entsprechen, welche die zweite umhüllen.

Einen speciellen Fall dieser Reciprocität gründet Plücker auf die Interpretation der Gleichung

$$F(xy\,XY) = 0$$

(Analytisch-geometrische Entwickelungen Bd. II, S. 251).

Hierbei bilden die einem Punkte xy in dem einen von zwei ebenen Systemen conjugirte Punkte XY im andern System eine Curve C, die durch die Gleichung

$$F(xy\,XY)=0$$

dargestellt wird, wenn xy als Parameter, XY hingegen als laufende Coordinaten aufgefasst werden. Zu dieser von Plücker behandelten Reciprocität gehört nun auch die Beziehung, welche zwischen Meridian- und Contourcurve orthogonal dargestellter Rotationsflächen stattfindet, und zwar gelten analog den von Herrn Lie aufgestellten folgende Sätze: Den Punkten des Meridiansystems entspricht ein Complex homothetischer Ellipsen im Contoursystem, und den Punkten des Contoursystems ein Hyperbelcomplex im Meridiansystem.

Complexellipsen, die durch einen gegebenen Punkt gehen, entsprechen den Punkten derjenigen Complexhyperbel, welche dem gegebenen Punkte zugeordnet ist, und umgekehrt. Hat man im Meridian- und Contoursystem zwei einander zugeordnete Curven σ und Σ, so entspricht den Punkten von σ ein Ellipsencomplex, welcher Σ einhüllt, und den Punkten von Σ ein Hyperbelcomplex, von dem σ umhüllt wird.

Aus früheren Betrachtungen ergiebt sich ferner: Dem Berührungspunkte mehrerer Meridiancurven ist der Berührungspunkt der entsprechenden Contourcurven zugeordnet; dagegen entsprechen dem Schnittpunkte mehrerer Meridiancurven auf den betreffenden Contourcurven verschiedene Punkte der dem Schnittpunkte zugeordneten Complexellipse, und umgekehrt.

Eine analoge Beziehung besteht zwischen dem Grundriss- und Aufrisscontoursystem.

Ist die Meridiancurve bekannt, so lässt sich in folgender Weise die Contourcurve analytisch bestimmen. Die Gleichung der Meridiancurve sei in Bezug auf einen auf $A_3A'_3$ liegenden Punkt M_3 als Coordinatenanfang und $A_3A'_3$ als Abscissenaxe (Fig. 5)

I) $$y=f(x).$$

Zu einem beliebigen Punkte p_3 dieser Curve mit den Coordinaten x und y werde der entsprechende Punkt φ_1 im Grundrisscontoursystem bestimmt. Die Coordinaten von φ_1 seien für M_1 als Anfangspunkt und $A_1A'_1$ als Abscissenaxe ξ und η. Dann ist wegen der Gleichheit der Normalen p_3n_3 und φ_1n_1

1) $$y\sqrt{1+y'^2}=\eta\sqrt{1+\eta'^2}.$$

Ferner ist

$$n_3m_3=n_1\mu_1\cos h$$

oder

2) $$y y' = \eta \eta' \cos h.$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) folgt durch Elimination von η'

II) $$y^2 (\cos^2 h - y'^2 \sin^2 h) = \eta^2 \cos^2 h.$$

Da

$$\xi = r m_3 + m_3 s$$

($r m_3 s$ parallel $A_1 A'_1$) ist, so ergiebt sich, weil $\angle n_3 p_3 m_3$ als negativ in Rechnung gebracht werden muss,

III) $$x \cos^2 h - y y' \sin^2 h = \xi \cos h.$$

Man erhält nun die Gleichung der Contourcurve, indem man x und y zwischen den Gleichungen I), II) und III) eliminirt. Ein ähnliches Verfahren ist anzuwenden, wenn die Gleichung der Meridiancurve in der unentwickelten Form

$$f(x, y) = 0$$

gegeben ist.

Bezeichnet man $\varphi_3 m_3$ mit $\mathfrak{y}$ und $M_3 m_3$ mit $\mathfrak{x}$, so ist

IV) $$\mathfrak{y} = y y' \tan h$$

und

V) $$\mathfrak{x} = x.$$

Aus I), IV) und V) kann die Gleichung der seitlichen Projection der Grundrisscontourlinie gefunden werden.

3. Eine Gerade im Meridiansystem kann als Mantellinie einer Rotationskegelfläche aufgefasst werden, und hieraus folgt, dass einer Geraden im Meridiansystem eine Gerade im Contoursystem entspricht. Aus naheliegenden Gründen gilt hierbei die Beschränkung, dass alle Meridiangeraden, die mit $A_3 A'_3$ einen Winkel einschliessen, der grösser ist als $(90^0 - h)$, keine entsprechende Contourgerade im Grundrisse besitzen. Schneidet eine Meridiangerade $A_3 A'_3$ unter dem Winkel $(90^0 - h)$, so degenerirt die entsprechende Contourgerade im Grundrisse in einen auf $A_1 A'_1$ liegenden Punkt. — Bezeichnet man den Winkel, den die Meridiangerade mit $A_3 A'_3$ bildet, mit μ, und den, welchen die Grundrisscontourgerade mit $A_1 A'_1$ einschliesst, mit ν, so ist

$$\sin \nu = \frac{\sin \mu}{\cos h}.$$

Parallelen Meridiangeraden entsprechen also parallele Contourgerade. — Gehen mehrere Meridiangerade durch denselben Punkt von $A_3 A'_3$, so treffen die entsprechenden Contourgeraden in einem Punkte von $A_1 A'_1$, resp. $A_2 A'_2$ zusammen.

Mit Rücksicht auf den letzten der unter 2 angeführten Sätze ergiebt sich ferner: Einem Strahlenbüschel im Meridiansystem entspricht im Contoursystem eine Schaar von Tangenten, welche die dem Büschelmittelpunkte zugeordnete Ellipse umhüllen. Als Umkehrung dieses Satzes erhält man: Einem Strahlenbüschel in dem einen Contoursystem entspricht eine Schaar von Hyperbeltangenten im Meridiansystem und eine Schaar von Ellipsen- oder Hyperbeltangenten, oder wieder ein Strahlenbüschel im andern Contoursystem. Die beiden zuletzt angegebenen Sätze lassen sich in folgenden vereinigen: Einem Strahlenbüschel erster Ordnung in dem einen System entsprechen im Allgemeinen Strahlenbüschel zweiter Ordnung in den beiden anderen Systemen.

4. Wählt man als Meridian eine Parabel, deren Axe mit $A_3 A'_3$ zusammenfällt (Fig. 4), so wird ein Rotationsparaboloid erzeugt, und die Contouren dieser Fläche sind bekanntlich im Allgemeinen wieder Parabeln. Der Scheitel T_1 der Grundrisscontourparabel wird gefunden, indem man an den Meridian eine zu $A_1 A'_1$ senkrechte Tangente $T_3 T_1$ legt. — Bezeichnet man den Halbparameter des Paraboloids, also auch des Meridians, mit p, so ergiebt sich aus der Construction, dass die Subnormale, also auch der Halbparameter der Contourparabeln, in Grundriss und Aufriss $p\, sec\, h$, resp. $p\, sec\, v$ sein muss. Diese Beziehung liefert ein Mittel, um ein Rotationsparaboloid ohne Benutzung seitlicher Projection orthogonal darzustellen, wenn gegeben sind die Axe AA', der Scheitel B und der Halbparameter p. Man würde nämlich T_1 finden können, wenn $B_1 T_1$ bekannt wäre. Zieht man nun $B_3 C_3$ parallel und gleich $B_1 T_1$, so ist

$$B_3 C_3 = B_1 T_1 = \frac{p}{2}\, tan\, h\, sin\, h.$$

Hiernach ist $B_1 T_1$ zu construiren. Bequemer ist es jedoch, zunächst den Brennpunkt f_1 der Grundrisscontourparabel zu ermitteln. Dann erhält man

$$B_1 f_1 = T_1 f_1 - B_1 T_1 = \frac{p}{2}\, sec\, h - \frac{p}{2}\, sec\, h\, sin^2 h = \frac{p}{2}\, cos\, h.$$

Es ergiebt sich also folgende Construction: Man mache $\angle A_1 B_1 D = h$, $B_1 D = \frac{p}{2}$, $Df_1 \perp A_1 A'_1$, $DE \perp B_1 D$ und $f_1 T_1 = E B_1$. Im Aufriss hat man analog zu verfahren.

Es kann nun noch erwünscht sein, die dargestellte Fläche durch einen Parallelkreis zu begrenzen, und zwar wiederum ohne Benutzung seitlicher Projection. Soll die als Horizontalprojection des Parallelkreises auftretende Ellipse die Grundrissparabel in dem Punkte P_1 berühren, so ziehe man in P_1 die Normale $P_1 Q$ und fälle auf $A_1 A'_1$ das Loth $P_1 R$. Macht man dann $\angle SQR = h$, $SR \perp SQ$ und $SO_1 \perp A_1 A'_1$, so ist, wenn wir auf Fig. 1 zurückblicken, O_1 Ellipsenmittelpunkt und SO_1 Richtung der grossen Axe. Legt man hierauf in P_1 an die Contourcurve eine Tangente, welche SO_1 in U trifft, und fällt von P_1 auf SO_1 ein Loth

$P_1 V$, so ist UV Subtangente des Punktes P_1 in Bezug auf die Ellipse, deren grosse Halbaxe mit a bezeichnet werde. Dann ist

$$UV = \frac{a^2}{VO_1},$$

also

$$a = \sqrt{\overline{UV} \, . \, \overline{VO_1}}.$$

Hiernach kann a construirt werden. Die kleine Halbaxe ist $a \sin h$. — Die angegebene Construction lässt sich für jede beliebige Curve anwenden. Für den speciellen Fall der Parabel kann man sie natürlich noch vereinfachen.

5. Ist als Meridianfigur eine Ellipse mit der grossen Halbaxe a und der kleinen b gegeben, wobei a mit $A_3 A'_3$ zusammenfällt, so sind die Contourcurven bekanntlich wieder Ellipsen. Für diesen Fall gehen die unter 2 angeführten Gleichungen I), II) und III) über in

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$y^2 \left(\cos^2 h - \frac{b^2 (b^2 - y^2)}{a^2 y^2} \sin^2 h \right) = \eta^2 \cos^2 h,$$

$$x \cos^2 h + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, . \, \frac{b}{a} \, . \, \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sin^2 h = \xi \cos h,$$

und hieraus folgt als Gleichung der Grundrisscontourellipse

$$\frac{\xi^2}{a^2 \cos^2 h + b^2 \sin^2 h} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Diese Gleichung liefert wiederum ein Mittel, um die Contouren des Rotationsellipsoids ohne Benutzung seitlicher Projection zu construiren, wenn der Mittelpunkt M, a und b gegeben sind. (Fig. 5.) Man mache nämlich $\angle DM_1E = h$, $DM_1 = a$, $F_1 M_1 = b$, $DE \perp EM_1$, $F_1 G \perp EM_1$, $EH = GM_1$, $HM_1 = B_1 M_1$. B_1 ist dann der eine Endpunkt der grossen Axe der darzustellenden Ellipse. — Eine analoge Construction ist im Aufrisse anzuwenden, wobei natürlich h mit v vertauscht werden muss.

6. Hat man im Meridiansystem eine Hyperbel, deren Hauptaxe $2a$ mit $A_3 A'_3$ zusammenfällt und deren Nebenaxe $2b$ ist, so lautet die Gleichung der Grundrisscontourcurve

$$\frac{\xi^2}{a^2 \cos^2 h - b^2 \sin^2 h} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Hieraus ergiebt sich wieder eine Construction der Contouren ohne Benutzung seitlicher Projection. Die Contour des getheilten Rotationshyperboloids kann, wie die Gleichung lehrt, unter Umständen imaginär werden.

Für den Fall eines einfachen Rotationshyperboloids erhält man durch Vertauschung von a und b für die Grundrisscontour die Gleichung

$$\frac{\eta^2}{a} + \frac{\xi^2}{a^2 \sin^2 h - b^2 \cos^2 h} = 1.$$

Die Contouren dieser Fläche können also sowohl Ellipsen, als auch Hyperbeln sein.

Aus den unter 2 angegebenen Gleichungen I), IV), V) ergiebt sich, dass die seitliche Projection der Grundrisscontourlinie jeder Rotationsfläche zweiter Ordnung ein Durchmesser der Meridiancurve ist. Derselbe geht durch die Berührungspunkte derjenigen Tangenten des Meridians, die auf $A_1 A'_1$ senkrecht stehen. Da sich die Grundrisscontourlinie auf der verticalen Hilfsebene als Gerade projicirt, so folgt hieraus, dass die Ebene der Grundrisscontourlinie jeder Rotationsfläche zweiter Ordnung auf jener Hilfsebene senkrecht steht. Ein analoger Satz gilt für den Aufriss.

Betrachtet man einen Kegelschnitt, dessen Abscissenaxe mit der Rotationsaxe zusammenfällt, als gegebene Contourcurve und construirt hierzu die Meridiancurve und die zweite Contourcurve, so erhält man in vielen Fällen nur einzelne Theile dieser Curven und nicht den vollständigen, durch Rechnung sich ergebenden Kegelschnitt.

7. Ist im Meridiansystem ein Kreis mit dem Radius r gegeben, dessen Mittelpunkt O_3 von $A_3 A'_3$ um a entfernt ist, so entsteht ein cyklisches Annuloid, und die Contouren dieser Rotationsfläche sind, wie aus der darstellenden Geometrie bekannt ist, bei schiefer Stellung Ellipsenäquidistanten. Einem gegen $A_3 A'_3$ allgemein liegenden Kreise entsprechen also als Contourcurven die Aequidistanten derjenigen Ellipsen, welche dem Mittelpunkte des Kreises zugeordnet sind.

Dem Kreisbogen ed (Fig. 6) entspricht der äussere, dem Bogen bc der innere Theil der Grundrisscontourcurve; die Bögen bd und ce besitzen im Grundrisse keine entsprechenden Curventheile.

Die Rückkehrpunkte P_1, P'_1, Q_1, Q'_1 werden dadurch genauer bestimmt, dass man an die seitliche Projection der Grundrisscontourlinie Tangenten senkrecht zu $A_1 A'_1$ legt.

Die seitliche Projection der Grundrisscontourlinie ist eine Curve vierter Ordnung. Wählt man $A_3 A'_3$ als X- und eine von O_3 auf $A_3 A'_3$ gefällte Senkrechte als Y-Axe, so gehen die Gleichungen I), IV), V) unter 2 über in

$$y = a + \sqrt{r^2 - x^2},$$

$$\mathfrak{y} = y y' \tan h = -(a + \sqrt{r^2 - x^2}) \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \tan h$$

und

$$x = \mathfrak{x},$$

und hieraus folgt als Gleichung der seitlichen Projection der Grundrisscontourlinie

$$(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}\, coth)^2\,(r^2-\mathfrak{x}^2)=a^2\mathfrak{x}^2.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lassen sich die Rückkehrpunkte durch Rechnung bestimmen.

Es sei ferner im Grundrisscontoursystem ein Kreis mit dem Radius r gegeben, dessen Mittelpunkt O_1 von $A_1A'_1$ um $O_1U_1=a$ entfernt ist (Fig. 7), und es soll ermittelt werden, welche Rotationsfläche die Eigenschaft hat, sich im Grundriss als ein, resp. zwei Kreise zu projiciren. Zieht man einen beliebigen Durchmesser $P_1O_1Q_1$ und bestimmt im Meridiansystem zu P_1, O_1, Q_1 die entsprechenden Punkte p, o, q, so ist

$$po=oq=r.$$

Nun ist c bekanntlich ein Punkt der O_1 entsprechenden Hyperbel und pq eine Normale derselben, folglich liegen p und q auf der Aequidistante dieser Hyperbel. Einem Kreise im Contoursystem entspricht also im Meridiansystem die Aequidistante der dem Kreismittelpunkte zugeordneten Hyperbel.

Zieht man in dem Kreise einen Durchmesser $\Omega_1\Omega'_1$ parallel $A_1A'_1$, so gehören zu Ω_1 und Ω'_1 unendlich ferne Punkte der Meridiancurve. Den Kreistangenten $J_1\Omega_1$ und $J'_1\Omega'_1$ entsprechen also im Meridiansystem vier Gerade L_3J_3, $L'_3J'_3$, K_3J_3, $K'_3J'_3$, welche die Hyperbeläquidistante in unendlicher Ferne berühren und mit den Asymptoten der Hyperbel parallel laufen.

Die Contourcurve im Aufrisse ist, wie man durch eine ähnliche Ueberlegung erfährt, die Aequidistante derjenigen Curve, die dem Kreismittelpunkte im Aufrisse entspricht, d. h. Aequidistante einer Ellipse oder Hyperbel, oder ein dem gegebenen congruenter Kreis.

Die Grundrisscontourlinie projicirt sich auf der seitlichen Verticalebene als eine Curve vierter Ordnung, welche mit J_1J_3 und $J'_1J'_3$ den unendlich fernen Punkt gemein hat. Setzt man $\omega_3O_3=\mathfrak{x}$ und $O_3Q_3=\mathfrak{y}$, so ist

$$\mathfrak{x}=O_3R_3\,tan\,h=R_1U_1\,tan\,h=\frac{a\mathfrak{y}\,tan\,h}{\sqrt{r^2-\mathfrak{y}^2}};$$

mithin lautet die Gleichung der seitlichen Projection der Grundrisscontourlinie

$$r^2\mathfrak{x}^2=\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2+a^2\mathfrak{y}^2\,tan^2h$$

oder

$$\frac{r^2}{\mathfrak{y}^2}-\frac{a^2\,tan^2h}{\mathfrak{x}^2}=1.$$

8. Wählt man statt des Kreises einen beliebigen andern Kegelschnitt als Meridianfigur, so ergeben sich je nach der Lage und Gestalt dieses Kegelschnittes ausserordentlich mannichfaltige Contourfiguren. Einer Parabel entspricht z. B. im Contoursystem eine geschlossene Curve, oder eine Curve, welche aus zwei getrennten, in der Unendlichkeit sich tref-

fenden Theilen besteht, je nachdem die Parabelaxe mit $A_3 A'_3$ einen Winkel einschliesst, der grösser ist als $(90^0 - h)$, oder nicht.

Einer Ellipse entspricht eine Contourcurve, die aus zwei geschlossenen Theilen besteht, von denen der eine innerhalb des andern liegt.

Fig. 8 stellt die einer Hyperbel entsprechende Contourcurve dar. Der Meridian ist so gelegt, dass den schwächer gezeichneten Curventheilen und der Asymptote pq kein Theil der Contourfigur entspricht. Der Asymptote mn sind die Geraden $M_1 N_1$ und $M'_1 N'_1$ zugeordnet. Die Contourcurve besteht aus zwei getrennten Aesten, die von $M_1 N_1$ und $M'_1 N'_1$ in der Unendlichkeit berührt werden. B_1, B'_1, E_1, E'_1 sind Culminationspunkte der Contourcurve, P_1 und P'_1 Rückkehrpunkte derselben.

In Fig. 9 ist umgekehrt zu einer Ellipse im Contoursystem die zugehörige Meridianfigur aufgesucht. Dieselbe besteht aus vier getrennten Theilen, von denen je zwei in Bezug auf $A_3 A'_3$ symmetrisch sind. Den auf $A_1 A'_1$ senkrechten Ellipsentangenten $J_1 \Omega_1$ und $J'_1 \Omega'_1$ entsprechen vier Gerade, welche die Meridiancurve asymptotisch berühren. Die Tangenten in den Ellipsenpunkten D_1 und E_1 laufen parallel $A_1 A'_1$, folglich sind d, d', e, e' Culminationspunkte der Meridiancurve. Die seitliche Projection der Grundrisscontourlinie strebt dem unendlich fernen Punhte von $J_1 \Omega_1$ und $J'_1 \Omega'_1$ zu.

Eine Parabel als Contourfigur besitzt immer einen, aber auch nur einen Punkt Ω_1, dessen Tangente $J_1 \Omega_1$ auf $A_1 A'_1$ senkrecht steht. Die entsprechende Meridianfigur setzt sich also aus vier Theilen zusammen, von denen je zwei in Bezug auf $A_3 A_3$ symmetrisch sind. Sie besitzt zwei symmetrisch liegende Asymptoten. Je zwei nicht symmetrische Theile der Meridiancurve haben denjenigen Punkt gemein, welcher dem unendlich fernen Punkte der Parabel entspricht.

Ist im Contoursystem eine Hyperbel gegeben, welche nicht zwei auf $A_1 A'_1$ senkrechte Tangenten hat, so entspricht keinem endlichen Hyperbelpunkte ein unendlich ferner Punkt der Meridiancurve. Dieselbe besitzt also in diesem Falle keine Asymptoten, welche von Hyperbeltangenten senkrecht auf $A_1 A'_1$ herrühren könnten, wohl aber vier Asymptoten, welche den beiden Hyperbelasymptoten entsprechen. Die Meridiancurve besteht mithin aus vier getrennten Theilen, von denen je zwei symmetrisch sind und symmetrische Asymptoten besitzen. Je zwei nicht symmetrische Theile liegen dagegen zwischen denselben, aber auch nicht symmetrischen Asymptoten. — Wählt man die Contourhyperbel so, dass zwei ihrer Tangenten auf $A_1 A'_1$ senkrecht stehen, so erhält man eine aus acht Theilen zusammengesetzte Meridiancurve mit acht Asymptoten.

9. Eine interessante Beziehung zwischen Contour- und Meridiancurve besteht ferner beim L o g a r i t h m o i d. Ist

$$y = b e^{\frac{x}{a}}$$

die Gleichung der Meridiancurve, so erhält man aus den Gleichungen IV) und V) unter 2

$$\mathfrak{y} = b\, e^{\frac{x}{a}} \cdot \frac{b}{a}\, e^{\frac{x}{a}}\, tan\, h$$

oder

$$\mathfrak{y} = \frac{b^2}{a}\, e^{\frac{2x}{a}}\, tan\, h.$$

Hieraus folgt der Satz: Die seitliche Projection der Grundrisscontourlinie des Logarithmoids ist wieder eine logarithmische Linie. Die Contourcurven selbst sind, wie man aus den Gleichungen I), II), III) unter 2 erfährt, nur logarithmische Linien, wenn h, resp. v zu Null wird; andernfalls aber nicht.

XIII.

Ueber ein besonderes Liniencoordinatensystem.

Von

Dr. K. Schwering

in Münster.

---

§ 1.

Man kann mit Recht die Eigenschaften der Curven in metrische und projectivische unterscheiden. Den ersteren, als den in der neueren Geometrie minder bedeutenden, ist bei Salmon, „*Higher plane curves*", das 4. Capitel gewidmet. Zu Anfang desselben hebt der Verfasser hervor, dass die Cartesischen Coordinaten sich den Dreieckscoordinaten gegenüber bei Erforschung der metrischen Eigenschaften der Curven im Allgemeinen im Vortheil befinden. Es erscheint daher wünschenswerth, für die Liniencoordinaten ein System zu besitzen, welches annähernd dieselben Vortheile, wie bei den Punktcoordinaten das Cartesische System, darbietet. Als solches kann ich dasjenige, welches als Coordinaten einer Geraden die reciproken Werthe der auf den Axen abgeschnittenen Strecken nimmt, nicht gelten lassen, weil dasselbe viel zu sehr in den Charakter des Punktcoordinatensystems eingeht und es andererseits durchaus wünschenswerth ist, als Coordinaten nicht reciproke Werthe, sondern direct messbare Strecken zu definiren. Noch weniger dürfte sich der Vorschlag Plücker's empfehlen, als Liniencoordinaten einen der von der fraglichen Geraden auf den Axen bestimmten Abschnitte und die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels derselben zu wählen. Dass das von mir im Folgenden anzugebende System wirklich das angestrebte Ziel erreicht, wage ich nicht zu behaupten; einen Vortheil anderer Art glaube ich aber durch Zugrundelegung desselben bei meinen Vorlesungen mit Sicherheit gewonnen zu haben. Das neue Coordinatensystem ist nämlich von den dem Anfänger bekannten Punktcoordinaten so wesentlich verschieden, dass eine aus Verwechselung der Begriffe resultirende Verwirrung unmöglich wird unddder Lernende das Verschiedene und Gleichartige der beiden Systemarten leichter und klarer einsieht.

Das Coordinatensystem besteht aus zwei parallelen Geraden, die durch ein auf ihnen errichtetes Loth in den Punkten O und Q geschnitten werden. Die Strecke OQ, die Entfernung der beiden Parallelen, nennen wir e, und definiren nun als Coordinaten der Geraden L, welche die Parallelen in den Punkten A und B schneidet, die in derselben Richtung gemessenen Strecken OA und QB. Wir bezeichnen dieselben durch

$$u = OA \text{ und } v = QB$$

und nennen die beiden Parallelen OA und QB mit Rücksicht darauf die U- und V-Axen.

Aus dieser Definition folgt, dass jede im Endlichen liegende Gerade zwei endliche bestimmte Coordinaten besitzt, mit Ausnahme derjenigen, welche den Axen parallel gehen. Diese letzteren haben zwei unendlich grosse Coordinaten, die zu einander in einem bestimmten Verhältnisse stehen, nämlich in demjenigen der Entfernungen der fraglichen Geraden von den Coordinatenaxen. Sie spielen also dieselbe Rolle, wie im Cartesischen Coordinatensystem die Punkte der unendlich fernen Geraden.

Betrachten wir nun die lineare Gleichung

$$1)\qquad \alpha u + \beta v + \gamma = 0.$$

Möge die Gerade u_0, v_0 derselben Genüge thun, so ist durch Subtraction

$$2)\qquad \alpha(u - u_0) + \beta(v - v_0) = 0.$$

Die geometrische Bedeutung von $\alpha:\beta$ ist also das mit umgekehrtem Vorzeichen genommene Verhältniss der Entfernung des Schnittpunktes der beiden Geraden u_1, v_1; u_0, v_0, welche der Gleichung 1) genügen, von den beiden Axen. Soll daher zu einer weiteren Coordinate u die zugehörige v gefunden werden, so haben wir den auf der U-Axe gegebenen Punkt mit dem Schnittpunkte der Geraden u_1, v_1; u_0, v_0 zu verbinden. Alle Geraden, deren Coordinaten u, v die Gleichung 1) befriedigen, laufen also durch jenen Schnittpunkt. Mithin ist 1) die Gleichung eines Punktes.

Wenn die Coefficienten α, β in Gleichung 1) gleiche Vorzeichen haben, so beweist 2), dass $u - u_0$ und $v - v_0$ entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, und daraus leitet man ab, dass der fragliche Punkt innerhalb der beiden Axen liegt. Ist das Vorzeichen von α und β verschieden, so liegt aus dem analogen Grunde der Punkt ausserhalb der beiden Parallelen. Insbesondere bedeutet jede Gleichung

$$3)\qquad u - v = \gamma$$

einen unendlich fernen Punkt.

Um diese Betrachtungen noch genauer zu verfolgen, ziehen wir durch den Punkt 1) eine Parallele zur Geraden (u_0, v_0). Möge dieselbe die Coordinaten $u_0 + A$, $v_0 + A$ haben. Dann findet man

$$\alpha(u_0+A)+\beta(v_0+A)+\gamma=0.$$

Daraus folgt

4) $$A=-\frac{\alpha u_0+\beta v_0+\gamma}{\alpha+\beta}.$$

Damit ist die geometrische Bedeutung der linken Seite von 1) in analoger Weise erschlossen, wie es bei den Punktcoordinaten mit der Gleichung der geraden Linie zu geschehen pflegt. Auch hier kann von einer Normalform der Gleichung 1) die Rede sein. Multiplicirt man 1) mit einem Factor, so dass $\alpha+\beta=1$ wird, so bedeutet die linke Seite von 1):

„Die Entfernung des Punktes 1) von der Geraden u, v, gemessen in der Richtung der Axen.“

Die senkrechte Entfernung des Punktes 1) in der allgemeinen Form von der Geraden (u, v) wird, wie man sich leicht überzeugt, gegeben durch

$$\frac{e}{\sqrt{e^2+(u-v)^2}}\cdot\frac{\alpha u+\beta v+\gamma}{\alpha+\beta}.$$

Hieraus ergiebt sich alsbald die allgemeine Gleichung des Kreises, dessen Mittelpunkt der Punkt 1) und dessen Radius R ist. Sie ist:

5) $$(\alpha u+\beta v+\gamma)^2 e^2=[e^2+(u-v)^2](\alpha+\beta)^2R^2.$$

Stellen wir mit derselben die Gleichung eines Punktes zusammen, so erhält man zwei Werthepaare u, v, die den beiden Tangenten angehören, welche man vom Punkte aus an den Kreis ziehen kann. Diese Werthepaare fallen zusammen, wenn der fragliche Punkt der Kreisperipherie angehört. Dies ist nun der Fall bei den beiden imaginären Punkten

$$u-v=ei,\quad u-v=-ei;$$

deren Gleichungen sind von R und den Coefficienten von 1) unabhängig, sie gehören also allen Kreisen der Ebene an. Sie liegen, wie wir soeben sahen, unendlich fern und spielen unter dem Namen **unendlich ferne Kreispunkte** in der neueren Geometrie eine hervorragende Rolle.

Suchen wir endlich den Inhalt des Dreiecks zu bestimmen, welches von den Punkten $A=0$, $B=0$, $C=0$ gebildet wird. Sei

$$A\equiv a_1u+b_1v+c_1=0,$$
$$B\equiv a_2u+b_2v+c_2=0,$$
$$C=a_3u+b_3v+c_3=0.$$

Nehmen wir an, die Gleichungen seien auf die Normalform gebracht, so dass

$$1=a_1+b_1=a_2+b_2=a_3+b_3,$$

ziehen wir durch A und C Parallele, durch B eine Senkrechte zu den Axen; möge die durch A gegebene Parallele der Dreiecksseite BC im Punkte D begegnen, und der Schnittpunkt der Parallelen durch C mit der Senkrechten durch B möge E heissen. Dann ist der Inhalt des Dreiecks

$$J = \tfrac{1}{2} BE . AD.$$

Möge die Seite BC die Coordinaten u', v' haben, so ist

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2) u' + b_3 c_2 - c_3 b_2 = 0,$$
$$(a_2 b_3 - a_3 b_2) v' + a_2 c_3 - a_3 c_2 = 0.$$

Werden die Werthe u', v' in A für u und v eingesetzt, so ergiebt sich Die Länge AD. Ferner hat man

$$BE : CE = e : v' - u', \quad CE = c_2 - c_3.$$

Setzt man diese Werthe von BE und AD ein, so findet sich

6) $$J = \tfrac{1}{2} e \Sigma \pm a_1 b_2 c_3.$$

§ 2.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades.

Wir schreiben dieselbe in der Form

7) $$a_{11} u^2 + 2 a_{12} uv + a_{22} v^2 + 2 a_{13} u + 2 a_{23} v + a_{33} = 0.$$

Dann beweist man zunächst auf mannigfache Art, dass dieselbe in das System zweier Punkte zerfällt, wenn

8) $$H \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Hiervon überzeugt man sich vielleicht am einfachsten, indem man versucht, die Bedingung anzugeben, unter welcher die Curve zweiter Classe 7) eine Doppeltangente besitzt.

Bei den ferneren hierher gehörigen Discussionen spielt die Betrachtung der parallelen Tangenten die Hauptrolle. Im Allgemeinen besitzt der Kegelschnitt 7) zu jeder gegebenen eine parallele Tangente. Denn ist u, v die gegebene Tangente, so wird $u + \alpha$, $v + \alpha$ die parallele sein, wenn α durch die Gleichung bestimmt wird

9) $$(a_{11} + 2 a_{12} + a_{22}) \alpha + 2 [a_{11} u + a_{12} (u + v) + a_{22} v + a_{13} + a_{23}) = 0.$$

Diese lineare Gleichung ist nur dann unerfüllbar, wenn

10) $$a_{11} + 2 a_{12} + a_{22} = 0.$$

In diesem Falle haben wir also einen Kegelschnitt, der im Endlichen keine parallelen Tangentenpaare besitzt, also eine Parabel vor uns. Die Frage, ob eine Curve zweiter Classe Ellipse oder Hyperbel ist, wird nun durch die Betrachtung der Asymptoten entschieden. Dieselben sind für die erstere Curve reell, für die letztere imaginär.

Damit die Tangente (u, v) Asymptote der Curve werde, muss die ihr unendlich benachbarte Tangente derselben parallel gehen, oder umgekehrt, die parallele Tangente muss mit (u, v) zusammenfallen. Dies tritt, wie 9) beweist, ein, wenn

11) $$a_{11} u + a_{12} (u + v) + a_{22} v + a_{13} + a_{23} = 0$$

wird, denn dann resultirt für α der Werth 0. Die Gleichung 11) hat für sich die Bedeutung der Gleichung eines Punktes, und zwar, da sie in Verbindung mit 7) die Asymptoten liefert, ist sie die Gleichung des Schnittpunktes der Asymptoten, d. h. des Mittelpunktes der Curve. Für die Parabel kann man ihr die Form ertheilen

$$(a_{11}+a_{12})(u-v)+a_{13}+a_{23}=0$$

und diese Form lehrt, dass der Mittelpunkt unendlich fern liegt Setzen wir $u=v$, so wird für die Parabel

$$2a_{13}u+2a_{23}u+a_{33}=0.$$

Sie besitzt demnach nur eine Tangente, welche zu den Coordinatenaxen senkrecht steht, im Endlichen. Dividirt man durch u^2, so lässt sich das Resultat auch dahin aussprechen, dass die unendlich ferne Gerade, deren Coordinaten ja gleich und unendlich gross sind, alle Parabeln der Ebene berührt.

Führen wir die Elimination zwischen 11) und 7) aus, so erkennen wir, dass reelle Wurzeln u, v, also reelle Asymptoten, also die Hyperbel gefunden wird, wenn der Ausdruck

$$(a_{11}+2a_{12}+a_{22})H$$

negativ ist; dass dagegen, wenn derselbe positiv ist, unsere Curve eine Ellipse sein wird.

Die Rechnung kann auch in der Weise geführt werden, dass man die Entscheidung, ob die Curve Ellipse oder Hyperbel ist, durch die Realität ihrer unendlich fernen Punkte führt. Sei die Gleichung des unendlich fernen Punktes

$$u-v=\gamma,$$

so muss das Eliminationsresultat zwei gleiche Wurzeln besitzen. Dies führt für γ zu der quadratischen Gleichung

$$\gamma^2(a^2_{12}-a_{11}a_{22})+2\gamma\{a_{23}(a_{11}+a_{12})-a_{13}(a_{12}+a_{22})\}$$
$$+(a_{13}+a_{23})^2-a_{33}(a_{11}+2a_{12}+a_{22})=0,$$

deren Discriminante die vorhin angegebene ist. Die Rechnung ist nicht so schwierig, als sie beim ersten Anblick scheinen könnte, wenn man nur die durch $a_{11}+2a_{12}+a_{22}$ theilbaren Glieder gleich anfangs bei Seite stellt.

Die Transformation für das Coordinatensystem spielt in der Theorie der Curven zweiter Classe natürlich eine bedeutende Rolle. Wenden wir zunächst einmal die Umformung an

$$u'=\alpha u+\beta v,\quad v'=\gamma u+\delta v,$$

so bedeutet u' die Entfernung des Punktes $\alpha u+\beta v=0$, von der Geraden u, v gemessen nach der Richtung der Coordinatenaxen. Nun liegt aber dieser Punkt in der Linie OQ und somit wird durch die angegebene Transformation eine Verschiebung der Coordinatenaxen parallel mit sich selbst bewirkt, ohne dass dabei das e' mit dem ursprünglichen e übereinzustimmen braucht. Ersetzen wir u' durch $u''+\alpha$, v' durch $v''+\beta$, so wird eine Aenderung des Systems dahin vorgenommen, dass die Punkte O, Q im Allgemeinen aus ihrer zu den Axen festgesetzten bevorzugten Lage treten.

Soll eine Drehung der Axe erfolgen, so erhält man Ausdrücke für u, v, die linear in u', v' sind und ohne Schwierigkeit abgeleitet werden können. Nennen wir die Mittelpunkte O', Q' des neuen Coordinatensystems und haben dieselben die Gleichungen

$$O'\equiv au+bv+c=0, \quad Q'\equiv a_1u+b_1v+c_1=0,$$

dann wird die senkrechte Entfernung derselben

$$e'=\sqrt{(c-c_1)^2+e^2(ab_1-ba_1)^2}$$

und man findet zwischen den alten Coordinaten u, v und den neuen u', v' einer beliebigen Geraden, wenn wir voraussetzen

$$a+b=1, \quad a_1+b_1=1:$$

$$v'=ee'\frac{c+v-a_1(v-u)}{(c-c_1)(v-u)+(a_1-a)e^2}.$$

Analog wird der Ausdruck für u'. Der Nenner ist derselbe.

Nehmen wir die parallelen Scheiteltangenten zu Axen unseres Coordinatensystems, so können wir die Gleichung der Ellipse und Hyperbel in die Form setzen

$$u.v=G.$$

Ist G positiv, so haben wir eine Ellipse, ist es negativ, eine Hyperbel vor uns. Für den Kreis mit dem Radius $r=\frac{1}{2}e$ wird

$$u.v=r^2$$

und daraus erhalten wir eine sehr elegante Construction der Ellipse und Hyperbel mit Hilfe eines Kreises. Bestimmen wir nämlich am Kreise durch eine Reihe von Tangenten Paare u, v und tragen diese Paare dann auf die Axen OU und QV, die eine andere Entfernung von einander haben, ab in gleichem oder entgegengesetztem Sinne, so erhalten wir ersteren Falle eine Ellipse, im zweiten eine Hyperbel. Bemerkenswerth ist dabei die gleichseitige Hyperbel.

Da es mir durchaus fern liegt, eine Theorie der Kegelschnitte, gegründet auf unser Coordinatensystem, zu schreiben, so breche ich die Untersuchungen hier ab, um die Anwendbarkeit des Systems noch bei Erörterungen darzulegen, die einige Curven höherer Ordnung betreffen.

§ 3.

Weitere Anwendungen des Systems.

Nehmen wir die Asymptote der Cissoide zur Axe der v, die durch den Doppelpunkt derselben parallel gehende Gerade zur Axe der u, ferner den Doppelpunkt selbst als den Mittelpunkt O, so wird die Gleichung der Curve in unseren Liniencoordinaten

12) $$v^3 + 27 r^2 u = 0.$$

Dies Resultat finden wir folgendermassen. In Punktcoordinaten kann man die Gleichung der Cissoide schreiben

13) $$x^3 = y^2 (2r - x).$$

Dieselbe ist eine Curve vom Geschlechte (Range, Defecte, Riemann'sche Zahl p) Null, weshalb die Coordinaten als Functionen eines Parameters λ darstellbar sind, nämlich

$$x = \frac{2r\lambda^2}{1+\lambda^2}, \quad y = \frac{2r\lambda^3}{1+\lambda^2}.$$

Demnach wird die Gleichung der Tangente im Punkte, dem der Parameter λ zugehört:

14) $$\lambda(\lambda^2 + 3) x - 2y - 2r\lambda^3 = 0.$$

Andererseits ist die Gleichung der Geraden u, v in unserem Punktcoordinatensystem

15) $$(v-u) x = 2r (y-u).$$

Indem man 14) mit 15) identificirt, folgt zunächst

$$v = 3r\lambda, \quad u = -r\lambda^3$$

und daraus die gesuchte Gleichung 12). Wir wollen dieselbe zur Auffindung der Brennpunkte unserer Curve verwenden.

Man erhält die Brennpunkte einer Curve n^{ter} Classe dadurch, dass man von den beiden unendlich fernen Kreispunkten I und J (Salmon) aus die $2n$ Tangenten an die Curve zieht. Dieselben schneiden sich im Allgemeinen in n^2 Punkten, von denen n reell sind, und diese Punkte heissen Brennpunkte der Curve

Um dieselben für unser Coordinatensystem zu ermitteln, setzen wir

$$u = z + \tfrac{1}{2} e i, \quad v = z - \tfrac{1}{2} e i.$$

Dann resultirt eine Gleichung n^{ten} Grades für z, deren Coefficienten im Allgemeinen complex sein werden. Möge die Auflösung derselben ein Werthepaar u_0, v_0 liefern, welches im Allgemeinen complexe Grössen sind. Nehmen wir dazu die conjugirten Werthe u_1, v_1, so ist die Gleichung

16) $$u(v_0 - v_1) - v(u_0 - u_1) = v_0 u_1 - u_0 v_1$$

die eines reellen Brennpunktes, nämlich des Schnittpunktes einer I-Tangente mit der entsprechenden J-Tangente. (Vergl. hierzu übrigens Siebeck, Crelle's Journal Bd. 64.)

Für die Cissoide erhalten wir als Gleichung, welche z bestimmt,

$$(z + ri)^3 + 27 r^2 (z + ri) = 54 r^2 i.$$

Diese Gleichung besitzt die Doppelwurzel $z + ri = 3ri$ und die einfache $z + ri = -6ri$. Daraus folgt, dass die Curve einen reellen Doppelbrennpunkt und einen reellen einfachen Brennpunkt besitzt.

Dieselben haben die Gleichungen

$$3u = v \text{ und } 3u = 4v.$$

Sie liegen daher auf der Linie OQ oder der X-Axe unseres Punktcoordinatensystems, und zwar in den Entfernungen $x = -r$ und $x = 8r$. Nennen wir die Entfernungen eines Curvenpunktes von den beiden Brennpunkten α und β, so findet man

17) $$\beta^2(\alpha^2 + 3r^2) = (\alpha^2 + 15r^2)^2.$$

Wenden wir uns zur Kardioide, so ist deren Gleichung in Punktcoordinaten bekanntlich

$$(x^2+y^2)^2 - 4rx(x^2+y^2) - 4r^2y^2 = 0.$$

Da dieselbe ebenfalls $p = 0$ hat, so findet man x und y als rationale Functionen eines Parameters λ, nämlich

$$x = \varphi(\lambda) : \psi(\lambda), \quad y = \vartheta(\lambda) : \psi(\lambda),$$

wo

$$\varphi(\lambda) = 4r^3(r^2 - \lambda^2),$$
$$\vartheta(\lambda) = 8r^4\lambda,$$
$$\psi(\lambda) = (r^2 + \lambda^2)^2.$$

Die Gleichung der Tangente wird

$$r(3\lambda^2 - r^2)x - \lambda(3r^2 - \lambda^2)y + 4r^4 = 0,$$

indem ein Factor $r^2 + \lambda^2$ abgeschieden werden kann. Dieser Umstand beweist, dass der Parameter $\lambda = ri$, welcher wegen $\varphi(ri) : \vartheta(ri) = i$ dem unendlich fernen Kreispunkte angehört, einem Rückkehrpunkte unserer Curve entspricht. Nun folgt aus den Plücker'schen Formeln, indem unsere Curve vierter Ordnung drei Rückkehrpunkte besitzt, dass sie von der dritten Classe sein muss. Da die unendlich fernen Kreispunkte Rückkehrpunkte sind, so werden alle neun Brennpunkte zusammenfallen.

Nehmen wir die Doppeltangente der Kardioide — es ist die Linie $0 = 2x + r$ — als Axe der u, die dazu parallele $x = 4r$ als Axe der v, so erhalten wir als Gleichung der Curve in unserem System, dessen OQ die reelle Rückkehrtangente ist,

18) $$v = \frac{24r^2u}{4u^2 - 3r^2}.$$

Da zu jedem u zwei unendlich grosse Werthe von v gehören, so ist die u-Axe in der That Doppeltangente. Die Berührungspunkte haben die Gleichungen $u = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.r$. Schreibt man 18) in der Form

$$4u^2v - 3r^2(v + 8u) = 0,$$

so sehen wir, dass die Gerade OQ die Rolle spielt, welche bei den in Punktcoordinaten gegebenen Curven dem Mittelpunkte zufällt.

Zur Tangente u, v findet man die parallelen Tangenten $u + \alpha$, $v + \alpha$ aus der Gleichung

$$\alpha^2 + (v + 2u)\alpha + u^2 + 2uv - \tfrac{1}{4}.27r^2 = 0.$$

Setzt man das von α unabhängige Glied dieser Gleichung gleich Null, so erhält man die Bedingung, unter welcher zwei parallele Tangenten zusammenfallen. Durch Combination mit der Curvengleichung ergeben sich dann die (nicht reellen) Asymptoten.

Da in unserem Falle $e = \frac{9}{2} r$ ist, so hat man zur Ermittelung des Brennpunktes die Supposition

$$u = z + \tfrac{9}{4} r i, \quad v = z - \tfrac{9}{4} r i.$$

Dann folgt für z die Gleichung $(z + \frac{3}{4} r i)^3 = 0$, also ergiebt sich, wie wir voraussahen, ein einziger Brennpunkt. Derselbe hat die Gleichung

$$2u + v = 0.$$

Er liegt auf der X-Axe in dem Abstande $x = r$; er fällt also mit dem Centrum des festen Kreises, welcher bei Erzeugung der Cardioide als Rollcurve benutzt wird, zusammen.

Kleinere Mittheilungen.

XVI. Ueber die geometrische Darstellung der Zustandsveränderung eines Körpers durch die Wärme nach der mechanischen Wärmetheorie.

(Hierzu Taf. V, Fig. 10—12.)

§ 1. In verschiedenen Aufsätzen, welche der königl. Akademie der Wissenschaften in Stockholm vorgelegt sind, habe ich von einigen Untersuchungen, betreffend die geometrische Darstellung der Zustandsveränderung eines Körpers durch die Wärme nach der mechanischen Wärmetheorie, Bericht erstattet. Ich erlaube mir, einige der gefundenen Resultate mitzutheilen, welche zeigen, dass bemerkenswerthe geometrische Beziehungen stattfinden zwischen den vornehmsten der in der mechanischen Wärmetheorie vorkommenden Quantitäten.

Wir denken uns hierbei, die Gewichtseinheit eines Körpers werde einer unendlich kleinen umkehrbaren Wärmeveränderung unterworfen. Der äussere Druck sei stets normal gegen die Oberfläche; dp, dv und dT mögen die Aenderungen von Druck, Volumen und absoluter Temperatur bezeichnen. Dann kann man bekanntlich setzen

1a) $$dq = \lambda\, dv + \varkappa\, dp,$$

1b) $$dq = l\, dv + c\, dT,$$

1c) $$dq = C\, dT + h\, dp.$$

Hier bezeichnen λ, $\varkappa$, l, c, C und h Functionen der unabhängigen Variabeln v und p. C ist die specifische Wärme bei constantem Drucke, c dieselbe bei constantem Volumen, l die latente Ausdehnungswärme; h kann füglich latente Druckveränderungswärme genannt werden. Wir geben hier die verschiedene Wärmemenge durch die äquivalente Arbeitsmenge an; dq ist dann die elementare Arbeit. Die Zustandsänderung wird nach Clapeyron's bekannter Methode bestimmt.

§ 2. Wir wollen die Gleichung 1a) transformiren, damit sie für die Untersuchung eine bequemere Form erhalte. Das Bogenelement ds von der die Zustandsveränderung darstellenden Curve ist

2) $$ds = \sqrt{dv^2 + dp^2}.$$

Wir setzen

3) $$\frac{dp}{ds} = \sin\varphi, \quad \frac{dv}{ds} = \cos\varphi$$

und weiter

4) $$z = \sqrt{\lambda^2 + \varkappa^2}$$

und

5) $$\frac{\lambda}{z} = \sin\psi, \quad \frac{\varkappa}{z} = \cos\psi.$$

Dann ist

6) $$dq = z(\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi)\,ds = z\sin(\varphi+\psi)\,ds = z\sin\chi\,ds,$$

wenn man annimmt

7) $$\varphi + \psi = \chi.$$

Man findet ohne Schwierigkeit, dass φ der Winkel ist zwischen der Tangente an der Zustandscurve im Punkte vp und der v-Axe, und ψ das Supplement des Winkels zwischen der Tangente im selben Punkte an der adiabatischen Curve und der v-Axe; χ ist der Winkel zwischen beiden Tangenten.

§ 3. Einen analogen Ausdruck kann man für die Veränderung du der innern Arbeit herleiten. Man hat zufolge der bekannten Gleichung

8) $$dq = du + p\,dv,$$

9) $$du\,dq - p\,dv = (\lambda - p)\,dv + \varkappa\,dp.$$

Setzt man hier

10) $$z' = \sqrt{(\lambda-p)^2 + \varkappa^2},$$

11) $$\frac{\lambda - p}{z'} = \sin\psi', \quad \frac{\varkappa}{z} = \cos\psi',$$

so erhält man

12) $$du = z'(\sin\psi'\cos\varphi + \cos\psi'\sin\varphi)\,ds = z'\sin(\varphi+\psi')\,ds = z'\sin\chi'\,ds.$$

Hier ist ψ' das Supplement zum Winkel zwischen der Tangente an der isodynamischen Curve und der v-Axe, χ' der Winkel zwischen dieser Tangente und derjenigen an der die Zustandsveränderung ergebenden Curve.

§ 4. Die Gleichungen 6) und 12) können eine geometrische Auslegung erhalten, welche eine in hohem Grade anschauliche Vorstellung der erwähnten Veränderung giebt.

Man ziehe zu diesem Zwecke zwei gegen einander winkelrechte Linien ab und cd (Fig. 10) durch den Punkt o, welcher den Zustand angiebt, worin der Körper bei Anfang der Veränderung sich befindet; die eine ab dieser Linien wird so gezogen, dass sie die adiabatische Curve im Punkte o tangirt. Mit einem willkürlichen Halbmesser werden zwei gleiche Kreise construirt, welche durch o gehen und deren Mittelpunkte auf der Linie cd liegen. Man ziehe noch zwei andere gegen einander winkelrechte Linien $a'b'$ und $c'd'$, welche auch durch o gehen, und lasse $a'b'$ die isodynamische Curve im erwähnten Punkte berühren. Mit einem Halbmesser, welcher sich zu dem Halbmesser der ersten Kreise verhält wie $z':z$, zeichnet man zwei Kreise durch o und mit den Mittelpunkten auf der Linie $c'd'$. Die also construirte Figur giebt die Geschwindigkeit der Wärmevariation in verschiedenen Richtungen. Man hat kämlich

$$\frac{dq}{ds} = z \sin\chi, \quad \frac{du}{ds} = z' \sin\chi'.$$

Die von o gezogenen Sehnen bestimmen folglich bei einem constanten Werthe ds die Veränderungen, welche die totale und innere Wärmemenge erleidet. So z. B. giebt die Figur, dass bei Veränderung nach*

o1 die totale Wärmemenge constant ist; innere Wärme wird zur Arbeit verwandelt.

o2. Wärme wird aufgenommen von aussen und eine ebenso grosse Veränderung in der innern Wärmemenge findet statt.

o3. Wärme wird aufgenommen und gänzlich zur Arbeit verwandelt; keine Veränderung in der innern Wärme.

o4. Die grösste Veränderung in der totalen Wärmemenge; die innere Wärme wird vermehrt.

o5. Die grösste Veränderung in der innern Wärme.

o6. Aus der aufgenommenen Wärme wird innere Wärme.

§ 5. Man kann eine andere Auslegung der Gleichungen geben, welche als Ausdruck für die Veränderungen, die ein Körper durch die Wärme erleidet, hergeleitet wird.

Sei o (Fig. 11) ein Punkt, welcher den Zustand des Körpers bezeichnet, und od die Tangente zur adiabatischen Curve durch o, ob eine dagegen winkelrechte Linie, deren Länge z ist. Wir betrachten z als eine Kraft, welche auf einen materiellen Punkt in o wirkt, der sich nach der die Zustandsveränderung ergebenden Curve bewegt, während die Kraft z beständig normal gegen die adiabatische Curve durch den Punkt o, wo der bewegliche materielle Punkt sich gelegentlich befindet, gerichtet ist. Man findet aus 6), dass die Arbeit, welche die Kraft z verrichtet, während ihr Angriffspunkt das Bogenelement ds durchläuft, $= dq$ ist. In der That ist der Winkel zwischen der Richtungslinie der Kraft und der Richtung des Wegelements $\frac{\pi}{2} - \chi$, also die erwähnte Arbeit

$$z \cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) ds = z \sin\chi\, ds = dq.$$

Wird $z = ob$ in zwei Componenten oa und oc zerlegt parallel mit den v- und p-Axen, so ist, wenn der Winkel $oba = \psi$ gesetzt wird,

* Die Darstellung ist analog mit Zeuner's bekanntem Diagramm für die Schieberbewegung.

$$13) \qquad oa = z\,\sin\psi = \lambda, \quad oc = z\,\cos\psi = \varkappa.$$

Man findet hieraus, dass die beiden Componenten zu z gerade λ oder $\varkappa$ sind. Dieses zeigt auch die Gleichung 1a), indem, während das Wegelement ds beschrieben wird, dv und dp die Projectionen dieses Elementes nach den Richtungen oa und oc sind.

Sei oe die Tangente zu der isodynamischen Curve durch den Punkt o und sei of dagegen winkelrecht gezogen. Der Winkel ofg ist dann ψ'. Aus der Gleichung 11) erhält man

$$14) \qquad z' = \frac{\varkappa}{\cos\psi'} = \frac{oc}{\cos ofg} = of.$$

Die Linie of stellt also eine Kraft z' vor, welche bei der Bewegung des Punktes o längs der Zustandscurve die innere Arbeit verrichtet. Die mit den p- und v-Axen parallelen Componenten zu z' sind $oc = \varkappa$ und $og = \lambda - p$.

Wenn man sich die Kraft z in zwei Componenten $of = z'$ und $oh = p$ zerlegt denkt, so verrichtet bei der Bewegung des Punktes o die Kraft z' eine Arbeit gleich der innern Arbeit und die Kraft p eine Arbeit gleich der äussern Arbeit während der Zustandsveränderung.

§ 6. Bezeichnet man die Tangente und die Normale der adiabatischen Curve mit T_a und N_a, so ist

$$15) \qquad T_a = -p\frac{ds}{dp}, \quad N_a = \frac{p\,ds}{dv}.$$

Hieraus folgt

$$N_a : T_a = -\,dp : dv.$$

Aber für die erwähnte Curve hat man zufolge der Gleichung 1a)

$$\lambda\,dv + \varkappa\,dp = 0$$

oder

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{\lambda}{\varkappa},$$

also ist für die adiabatische Curve

$$16) \qquad N_a : T_a = \lambda : \varkappa.$$

Die beiden Functionen λ und $\varkappa$ sind daher proportional den Normalen und den Tangenten an der adiabatischen Curve durch den Punkt, welcher den Zustand des Körpers angiebt.

Denkt man sich λ als Normale, $\varkappa$ als Tangente, so findet man noch, dass die Summe der Subnormale und der Subtangente die Function z darstellt.

§ 7. Wenn man in den Gleichungen 1a) und 1c) p constant annimmt, so erhält man

$$dq = \lambda\,dv = C\,dT,$$

woraus folgt

17) $$\frac{C}{\lambda} = \left(\frac{dv}{dT}\right)_p.$$

Ebenso folgt aus den Gleichungen 1a) und 1b), wenn man v constant setzt,

$$dq = \varkappa\, dp = c\, dT$$

oder

18) $$\frac{\varkappa}{c} = \left(\frac{dT}{dp}\right)_v.$$

Endlich erhält man aus den Gleichungen 1b) und 1c), wenn in ihnen T constant angenommen wird,

$$dq = l\, dv = h\, dp$$

oder

19) $$\frac{l}{h} = \left(\frac{dp}{dv}\right)_T.$$

Aber nun ist*

20) $$\left(\frac{dp}{dv}\right)_T \left(\frac{dv}{dT}\right)_p \left(\frac{dT}{dp}\right)_v = -1.$$

Dadurch, dass man die Gleichungen 17), 18), 19) und 20) mit einander vergleicht, findet man

21) $$\frac{C}{c} \cdot \frac{l}{h} \cdot \frac{\varkappa}{\lambda} = -1.$$

Aus den Gleichungen 5) folgt

22) $$\frac{\lambda}{\varkappa} = \tang \psi.$$

Weiter hat man, wenn Θ das Supplement des Winkels bedeutet, welchen die Tangente an der isothermischen Curve mit der v-Axe bildet,

23) $$\tang \Theta = -\left(\frac{dp}{dv}\right)_T = -\frac{l}{h}.$$

Durch Vergleichung zwischen den Gleichungen 21), 22) und 23) bekommt man

24) $$\frac{C}{c} = \frac{\tang \psi}{\tang \Theta}.$$

Diese Gleichung hat eine geometrische Bedeutung. Wenn man nämlich od und oi (Fig. 12) die Tangenten zu den adiabatischen und isothermischen Curven in einem Punkte o vorstellen lässt, entsprechend dem Volumen On und dem Drucke on, so ist

$$\tang \psi = \frac{on}{nd}, \quad \tang \Theta = \frac{on}{ni}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{C}{c} = \frac{ni}{nd}.$$

---

* Clausius, Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie, II, S. 15.

Die specifische Wärme bei constantem Druck verhält sich also zu der specifischen Wärme bei constantem Volumen wie die Subtangenten für die isothermische und die adiabatische Curve.

§ 8. Man hat ferner nach Clausius* mit Anwendung der hier angenommenen Bezeichnungen

$$C - c = T\left(\frac{dv}{dT}\right)_p\left(\frac{dp}{dT}\right)_v, \tag{25}$$

wie auch

$$l = T\left(\frac{dp}{dT}\right)_v, \quad h = -T\left(\frac{dv}{dT}\right)_p. \tag{26}$$

Durch Multiplication der beiden Gleichungen 26) erhält man

$$hl = -T^2\left(\frac{dv}{dT}\right)_p\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$$

und mit Benutzung der Gleichung 25)

$$hl = -T(C-c). \tag{27}$$

§ 9. Zieht man (Fig. 12) eine Linie bs durch den Punkt b winkelrecht gegen die Tangente oi der isothermischen Curve, so giebt die Linie ou die latente Ausdehnungswärme l an und die Linie os die latente Druckveränderungswärme h. Man hat nämlich $\angle oba = \psi$ und $\angle uba = \Theta$, also $\angle obu = \psi - \Theta$, wie auch

$$ob : ou = sin\, bua : sin\, obu = cos\,\Theta : sin(\psi - \Theta),$$

woraus folgt

$$ou = \frac{z\, sin(\psi - \Theta)}{cos\,\Theta}.$$

Setzt man in den Gleichungen 1b) und 6) T constant, so ist

$$\chi = \psi - \Theta$$

und

$$dq = l\, dv = z\, sin(\psi - \Theta)\, ds$$

oder

$$l = \frac{z\, sin(\psi - \Theta)}{\left(\frac{dv}{ds}\right)_T}.$$

Aber nun ist

$$\left(\frac{dv}{ds}\right)_T = cos\,\Theta$$

und folglich

$$l = \frac{z\, sin(\psi - \Theta)}{cos\,\Theta} = ou.$$

In dem rechtwinkligen Dreieck ous ist

$$os = ou\,.\,cot\, osu = l\, cot\,\Theta.$$

Mit Benutzung der Gleichung 23) findet man hieraus

* Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie, II, S. 17.

$$os = -h.$$

Aus den zwei ähnlichen Dreiecken *ous* und *aub* erhält man

$$bu : us = ua : uo,$$

also

$$bu + us : us = ua + uo : uo$$

oder

$$bs : us = ao : uo = \lambda : l.$$

Aber ausserdem ist

$$us : bu = os : ab = -h : \varkappa.$$

Hieraus folgt

$$bs : bu = -\lambda h : \varkappa l$$

oder mit Benutzung der Gleichung 21)

$$\frac{bs}{bu} = \frac{C}{c}.$$

Die beiden gegen die Tangente der isothermischen Curve winkelrechten Geraden bs und bu geben also die relative Grösse von C und c an; werden sie mit C_1 und c_1 bezeichnet, so hat man folglich

28) $$\frac{C_1}{c_1} = \frac{C}{c}.$$

Die Linie ot, welche einen Theil der Tangente an der isothermischen Curve ausmacht, steht in einer bemerkenswerthen Beziehung zu der absoluten Temperatur, dem durch den Punkt o angegebenen Zustande des Körpers entsprechend. Man hat nämlich aus den ähnlichen Dreiecken ous, ots, uab und bcs

$$ot : ou = ab : ub, \quad ot : os = bc : bs.$$

Wird ot mit T_1 bezeichnet, so findet man hieraus

29) $$T_1 = \frac{l\varkappa}{c_1} = -\frac{h\lambda}{C_1}.$$

Aber durch Vergleichung zwischen den Gleichungen 18), 26), 17) und 26) erhält man

30) $$T = \frac{l\varkappa}{c} = -\frac{h\lambda}{C},$$

also ist

31) $$Tc = T_1 c_1, \quad TC = T_1 C_1.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass die doppelten Flächen der Dreiecke obu und abs die Producte Tc und TC darstellen.

§ 10. Die angegebene geometrische Darstellung macht es leicht, mehrere Relationen zwischen verschiedenen Arten der Wärmecapacität herzuleiten.

Weil in der Fig. 12 die Flächen

$$obs = obu + osu$$

und

$$obs = \frac{os \,.\, bc}{2} = -\frac{h\lambda}{2},$$

$$obu = \frac{ou \,.\, ab}{2} = \frac{l\varkappa}{2},$$

$$osu = \frac{ou \,.\, os}{2} = -\frac{lh}{2},$$

so folgt hieraus

$$-\frac{h\lambda}{2} = \frac{l\varkappa}{2} - \frac{lh}{2},$$

eine Gleichung, welche auch in die Form gebracht werden kann

32a) $$l\varkappa + h\lambda = lh$$

oder

32b) $$\frac{\varkappa}{h} + \frac{\lambda}{l} = 1.$$

Die Fläche des Dreiecks osu kann auch durch

$$\frac{ot \,.\, su}{2} = \frac{T_1(C_1 - c_1)}{2}$$

ausgedrückt werden. Man erhält daher mit Benutzung der Gleichung 31)

$$T(C - c) = -hl,$$

eine Gleichung, welche wir in § 8 als Gleichung 27) auf anderem Wege hergeleitet haben.

Aus den ähnlichen Dreiecken osu und csb findet man

$$bs : su = sc : so$$

oder

$$bs - su : su = sc - so : so,$$

also

$$c_1 : C_1 - c_1 = \varkappa : -h$$

oder

33) $$\frac{h}{\varkappa} = -\frac{C_1 - c_1}{c_1} = \frac{C - c}{c}.$$

In derselben Weise findet man

34) $$\frac{\lambda}{l} = \frac{C - c}{C}.$$

G. R. Dahlander.

XVII. Ueber Bertrand's Beweis des Parallelenaxioms.

In dem 6. Hefte vorigen Jahrgangs (S. 454) dieser Zeitschrift hat Herr Becker zum Beweise der Parallelentheorie die Bertrand'sche Methode benützt, in welcher der Winkel definirt ist als der von den beiden Schenkeln begrenzte Ausschnitt der Ebene, und die Anhänger der nichteuklidischen Geometrie, die jenen Beweis nicht als richtig erkennen, aufgefordert, anzugeben, wo der Fehler liege. Als Anhänger der angegriffenen Theorie erlaube ich mir, den Punkt zu bezeichnen, der nach meiner Meinung fehlerhaft ist, besonders auch deshalb, weil er in Bezug auf das formale Rechnen interessant ist.

Nennt man Streifen den Theil der Ebene, der eingeschlossen ist von einer Geraden AA_1 und den beiden auf ihr nach derselben Seite errichteten Senkrechten AB, A_1B_1, so beruht der Bertrand'sche Beweis auf der Unmöglichkeit, dass ein Winkel BAC_1 ganz in dem Streifen BAA_1B_1 liegen könne. Nach Bertrand wird sie folgendermassen erkannt. Gesetzt, der Winkel BAC_1 sei grösser als der n^{te} Theil eines rechten, so lege man die $n-1$ dem Winkel BAC_1 gleichen Winkel C_1AC_2, C_2AC_3, ... $C_{n-1}AC_n$ neben einander, so erhält man einen Winkel BAC_n, der grösser ist als ein rechter, und folglich die Linie AA_1 ganz enthält. Legt man aber neben den Streifen BAA_1B_1 die $n-1$ ihm congruenten $B_1A_1A_2B_2$, $B_2A_2A_3B_3$, ... $B_{n-1}A_{n=1}A_nB_n$, so entsteht ein Streifen BAA_nB_n, der ganz in dem Winkel BAC_n enthalten und folglich kleiner ist als dieser. Somit ist der $n$fache Winkel $BAC_1 = a$ grösser als der $n$fache Streifen $BAA_1B_1 = b$ oder $na > nb$. Daher ist auch, schliesst Bertrand, $a > b$, was mit der Annahme, der Winkel liege ganz im Streifen, im Widerspruch steht. Der Schluss: weil $na > nb$, ist auch $a > b$, ist aber nicht richtig, oder doch wenigstens muss bewiesen werden, dass man so schliessen darf. Wären a und b Zahlen, so wäre der Schluss richtig; aber auch in diesem Falle versteht er sich nicht ohne Beweis von selbst, sondern er wird aus den Definitionen der Addition und des „grösser" hergeleitet. Wieviel mehr ist es nöthig, hier, wo a und b geometrische Grössen sind, bei welchen die durch na, resp. nb ausgedrückte Operation eine rein geometrische ist, zu beweisen, dass man so schliessen darf, wie Bertrand thut. Denn dass jene Folgerung nicht gezogen werden darf, wenn a und b Objecte beliebiger Art, mit beliebig definirten Verknüpfungsgesetzen sind, ist leicht zu zeigen. Operiren wir z. B. statt mit Zahlen, mit Zahlengruppen von je zwei reellen Zahlen. Unter (α, β) und (γ, δ) zwei solche Gruppen (aus den reellen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gebildet) verstanden, sei festgesetzt: es ist $(\alpha, \beta) > (\gamma, \delta)$, wenn $\alpha + \beta > \gamma + \delta$, und es ist $2(\alpha, \beta) = (\alpha^2, \beta^2)$. Ist dann a gleich der Gruppe $(4, -3)$, und b gleich der $(2, 1)$, so ist

$$2a = (16, 9), \quad 2b = (4, 1),$$

also $2a > 2b$, weil $16 + 9 > 4 + 1$. Dagegen ist $a < b$, weil $4 + (-3) < 2 + 1$. Also bestehen hier die Ungleichungen $2a > 2b$ und $a < b$ zusammen.

Ein directer Beweis der Richtigkeit jenes Schlusses fällt nun ersichtlich mit dem Beweise des Parallelenaxioms zusammen; man könnte einen andern zu liefern suchen, indem man constatirte, dass im vorliegenden Falle alle jene Prämissen erfüllt sind, aus welchen rein formell, ohne Rücksicht auf die verknüpften Objecte und die Verknüpfungsgesetze, folgt, dass $na > nb$ auch $a > b$ nach sich zieht. Meines Wissens sind jene Prämissen noch nicht aufgestellt; man kann aber behaupten, dass die Eigenschaften der Geraden und des Winkels, mit welchen man das Parallelenaxiom beweisen will, jene Prämissen nicht erfüllen können. Denn diese Eigenschaften gelten wörtlich auch für die geodätischen Linien und deren Winkel auf der pseudosphärischen Fläche von constantem negativem Krümmungsmasse, und wenn also für die Ebene die Prämissen erfüllt wären, müssten sie es auch für die Pseudosphäre sein. Dass aber für diese der oben bestrittene Satz nicht gilt, ist leicht zu zeigen. Nach Beltrami (*Saggio di interpretatione della geometria non Euclidea*, *Giorn. Mat. Nap.* 1868) kann man die Punkte einer solchen Fläche so auf die Punkte im Innern eines Kreises beziehen, dass sie sich gegenseitig eindeutig entsprechen und jede geodätische Linie der Fläche durch eine gerade Linie in der Ebene des Kreises dargestellt wird. In dem Kreise seien nun zwei aufeinander senkrechte Durchmesser gezogen MP, MQ und ein dritter MR, der den rechten Winkel PMQ halbirt. Wie Beltrami gezeigt, entsprechen diesen drei geodätische Linien, welche sich in dem durch M dargestellten Punkte schneiden und zwei Winkel $= 45^0$ bilden. Sie begrenzen zwei Flächenausschnitte, die durch die Kreissectoren PMR und RMQ abgebildet werden, und miteinander zur Deckung gebracht werden können, weil sie bei M gleiche Winkel haben. Nennen wir einen von ihnen a, so ist der Ausschnitt der Pseudosphäre, der aus beiden gebildet ist, durch $2a$ zu bezeichnen. Dieser wird durch den rechten Winkel PMQ abgebildet. Nun sei $RS \perp MQ$, so ist RS das Bild einer geodätischen Linie, die auf der durch MQ vorgestellten senkrecht steht, und folglich ist $PMSR$ das Bild eines Streifens C der Pseudosphäre, der den Winkel a ganz enthält und daher grösser ist als dieser. Bestimmt man nun auf MQ die Länge $MT = u$ so, dass der ihr entsprechende geodätische Bogen doppelt so gross ist als der durch MS dargestellte, so muss nach den von Beltrami gegebenen Formeln u der Gleichung genügen

$$\frac{R}{2}\, l\, \frac{a+u}{a-u} = 2 \,.\, \frac{R}{2}\, l\, \frac{a + \frac{a}{\sqrt{2}}}{a - \frac{a}{\sqrt{2}}},$$

wo a der Kreisradius ist. Hieraus folgt $u = 0{,}95 \,.\, a$. Also fällt der Punkt T noch in den Kreis. Errichtet man in T die Senkrechte TV, so entspricht der Figur $RSTV$ auf der Fläche ein Streifen, der mit dem durch $PMSR$ abgebildeten zur Deckung gebracht werden kann, weil die Strecken MS, ST gleichen Bogen angehören. Der durch $PMTV$ dargestellte Flächenstreifen ist also $2b$, und es ist ersichtlich, dass er nicht ganz mit dem Winkel $2a$ zusammenfällt, sondern um das durch VTQ abgebildete Stück kleiner ist. Folglich ist $2a > 2b$, obgleich $a < b$ ist. Also ist in diesem

Falle für die Pseudosphäre jener Bertrand'sche Schluss nicht zulässig, und damit ist, wie ich glaube, gezeigt, dass er auch für die Ebene nicht zum Beweise des Parallelenaxioms dienen kann.

Carlsruhe, Januar 1876. J. Lüroth.

XVIII. Die Malfatti'sche Aufgabe für das geradlinige Dreieck.

In ein gegebenes Dreieck sollen drei Kreise so beschrieben werden, dass jeder derselben die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt.

Bezeichnen a, b, c, A, B, C die Seiten und Ecken des gegebenen Dreiecks, x, y, z bezüglich die Abstände der Ecken A, B, C von den Berührungspunkten der die Seiten b und c, c und a, a und b berührenden Kreise und setzt man zur Abkürzung — alle Wurzeln positiv gedacht —

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c)=s,$$

$$\sqrt{\frac{s-a}{s}}=\alpha,\quad \sqrt{\frac{s-b}{s}}=\beta,\quad \sqrt{\frac{s-c}{s}}=\gamma,$$

$$\sqrt{\frac{a}{s}}=\alpha',\quad \sqrt{\frac{b}{s}}=\beta',\quad \sqrt{\frac{c}{s}}=\gamma',$$

so sind die nothwendigen und hinreichenden Gleichungen der Aufgabe

$$1)\quad y+z+2\alpha\sqrt{y}\sqrt{z}=a,$$

$$2)\quad z+x+2\beta\sqrt{z}\sqrt{x}=b,$$

$$3)\quad x+y+2\gamma\sqrt{x}\sqrt{y}=c,$$

wo $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ mit demselben Zeichen zu nehmen sind.

Die erste dieser Gleichungen ergiebt sich, wenn man ausdrückt, dass die Seite a aus den Strecken y, z und dem zwischen den Berührungspunkten der diese Seite berührenden Kreise enthaltenen Stücke besteht. Das letztere wird, wenn die Halbmesser dieser Kreise mit r_2 und r_3 bezeichnet werden,

$$=\sqrt{(r_2+r_3)^2-(r_2-r_3)^2}=2\sqrt{r_2 r_3}$$

oder, den Gleichungen

$$r_2=y\,tg\,\frac{B}{2}=y\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},\quad r_3=z\,tg\,\frac{C}{2}=z\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

zufolge,

$$=2\sqrt{\frac{(s-a)yz}{s}}=2\alpha\sqrt{y}\sqrt{z}.$$

Aehnlich ergeben sich 2) und 3).

Betrachtet man die Gleichung 1) einmal in Bezug auf die Unbekannte $\sqrt{y}$, das andere Mal in Bezug auf die Unbekannte $\sqrt{z}$ als quadratische Gleichung, so ergiebt sich durch Auflösung derselben

$$4)\qquad \sqrt{y}+\alpha\sqrt{z}=\alpha'\sqrt{s-z},$$
$$5)\qquad \sqrt{z}+\alpha\sqrt{y}=\alpha'\sqrt{s-y},$$

und wenn von dem Producte dieser beiden Gleichungen die mit α multiplicirte Gleichung 1) abgezogen wird,

$$(1-\alpha^2)\sqrt{y}\sqrt{z}=\alpha'^2\sqrt{s-y}\sqrt{s-z}-a\alpha$$

oder

$$6)\qquad \sqrt{y}\sqrt{z}-\sqrt{s-y}\sqrt{s-z}=-s\alpha.$$

Multiplicirt man andererseits die aus 4) und 5) folgenden Gleichungen

$$\sqrt{y}=-\alpha\sqrt{z}+\alpha'\sqrt{s-z},$$
$$\sqrt{z}=-\alpha\sqrt{y}+\alpha'\sqrt{s-y}$$

miteinander, so wird

$$\sqrt{y}\sqrt{z}=\alpha^2\sqrt{y}\sqrt{z}-\alpha\alpha'(\sqrt{y}\sqrt{s-z}+\sqrt{z}\sqrt{s-y})+\alpha'^2\sqrt{s-y}\sqrt{s-z}$$

und mit Hilfe von 6)

$$7)\qquad \sqrt{y}\sqrt{s-z}+\sqrt{z}\sqrt{s-y}=s\alpha'.$$

Die Gleichungen 6) und 7) sind am leichtesten in der Verbindung

$$8)\qquad (\sqrt{y}+i\sqrt{s-y})(\sqrt{z}+i\sqrt{s-z})=s(-\alpha+i\alpha')$$

zu behandeln.

Ebenso leitet man aus 2) und 3)

$$9)\qquad (\sqrt{z}+i\sqrt{s-z})(\sqrt{x}+i\sqrt{s-x})=s(-\beta+i\beta'),$$
$$10)\qquad (\sqrt{x}+i\sqrt{s-x})(\sqrt{y}+i\sqrt{s-y})=s(-\gamma+i\gamma')$$

ab.

Die Isolirung der Unbekannten geschieht nun ohne Schwierigkeit. Das Product von 9) und 10) durch 8) dividirt, giebt

$$(\sqrt{x}+i\sqrt{s-x})^2=s\,\frac{(-\beta+i\beta')(-\gamma+i\gamma')}{(-\alpha+i\alpha')}$$

oder, wegen

$$(-\alpha+i\alpha')(-\alpha-i\alpha')=1:$$
$$(\sqrt{x}+i\sqrt{s-x})^2=s(-\alpha-i\alpha')(-\beta+i\beta')(-\gamma+i\gamma'),$$
$$\sqrt{x}+i\sqrt{s-x}=$$
$$\pm\sqrt{s}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}-i\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\beta}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}\right).$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$\pm\sqrt{s}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}-i\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\beta}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$
$$=u+iu',$$
$$\pm\sqrt{s}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}-i\sqrt{\frac{1+\beta}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$
$$=v+iv',$$

$$\pm\sqrt{s}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\beta}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}-i\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$
$$= w + iw',$$

alle Wurzeln positiv gedacht und unter u, v, w die reellen Theile dieser Ausdrücke verstanden, so findet man

11) $$\sqrt{x}=u, \quad \sqrt{y}=v, \quad \sqrt{z}=w.$$

Da überdies

$$(u+iu')(u-iu')=u^2+u'^2=s$$

und demgemäss

$$(u+iu')^2=u^2-u'^2+2iuu'=2u^2-s+2iuu'$$

ist, so wird

$$2u^2-s+2iuu'=s(-\alpha-i\alpha')(-\beta+i\beta')(-\gamma+i\gamma'),$$
$$u^2=\tfrac{1}{2}(s-s\alpha\beta\gamma+s\alpha\beta'\gamma'-s\alpha\beta\gamma'),$$

12) $$x=u^2=\tfrac{1}{2}(s-r+f-g-h)$$

und ebenso

13) $$y=v^2=\tfrac{1}{2}(s-r-f+g-h),$$

14) $$z=w^2=\tfrac{1}{2}(s-r-f-g+h),$$

wo r den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises und f, g, h die Abstände des Mittelpunktes desselben von den Ecken A, B, C vorstellen.

Es ist nun umgekehrt noch zu zeigen, dass die Werthe u, v, w für $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ gesetzt den Gleichungen 1), 2), 3) genügen und dasselbe Zeichen besitzen.

Zunächst folgt aus der Gleichung

$$(v+iv')(w+iw')=s(-\alpha+i\alpha'):$$
$$0=vw-v'w'+s\alpha,$$

und wenn mit $vw+v'w'+s\alpha$ multiplicirt wird,

$$0=(vw+s\alpha)^2-v'^2w'^2=(vw+s\alpha)^2-(s-v^2)(s-w^2)$$
$$=s(v^2+w^2)+2s\alpha vw-s^2(1-\alpha^2),$$

d. h.

$$v^2+w^2+2\alpha vw=a.$$

Ebenso bestätigt man die Gleichungen

$$w^2+u^2+2\beta wu=b, \quad u^2+v^2+2\gamma uv=c.$$

Da nun hiernach und nach 13), 14)

$$2\alpha vw=a-v^2-w^2=r+f-(s-a),$$
$$2\beta wu=b-w^2-u^2=r+g-(s-b),$$
$$2\gamma uv=c-u^2-v^2=r+h-(s-c)$$

und aus geometrischen Gründen

$$r+f>s-a, \quad r+g>s-b, \quad r+h>s-c$$

ist, so müssen vw, wu, uv positiv sein.

Man kann zur Auflösung der Gleichungen 1), 2), 3) auch in folgender Weise gelangen.

Löst man 2) und 3) bezüglich nach $\sqrt{z}$ und $\sqrt{y}$ auf, so wird

$$\sqrt{z} = -\beta\sqrt{x} + \beta'\sqrt{s-x}, \quad \sqrt{y} = -\gamma\sqrt{x} + \gamma'\sqrt{s-x}$$

und hieraus

$$(\beta\gamma' - \gamma\beta')\sqrt{x} = \beta'\sqrt{y} - \gamma'\sqrt{z}, \quad (\beta\gamma' - \gamma\beta')\sqrt{s-x} = \beta\sqrt{y} - \gamma\sqrt{z}.$$

Aus diesen Gleichungen beseitige man x, was einfach durch Quadrirung und Addition erreicht wird. Wird hierauf das Resultat

$$y + z - 2(\beta\gamma + \beta'\gamma')\sqrt{y}\sqrt{z} = s(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2$$

mit der Gleichung 1) zur Bestimmung von $y+z$ verbunden, so ergiebt sich

$$(\alpha + \beta\gamma + \beta'\gamma')(y+z) = s\left(\alpha(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 + \frac{a}{s}(\beta\gamma + \beta'\gamma')\right).$$

Da nun

$$\frac{a}{s} = \alpha'^2 = 1 - \alpha^2$$

und identisch

$$(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 + (\beta\gamma + \beta'\gamma')^2 = (\beta^2 + \beta'^2)(\gamma^2 + \gamma'^2) = 1$$

ist, so wird

$$\begin{aligned} \alpha(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 + \frac{a}{s}(\beta\gamma + \beta'\gamma') &= \alpha - \alpha(\beta\gamma + \beta\gamma')^2 \\ &\quad + \beta\gamma + \beta'\gamma' - \alpha^2(\beta\gamma + \beta'\gamma') \\ &= (\alpha + \beta\gamma + \beta'\gamma')(1 - \alpha\beta\gamma - \alpha\beta'\gamma') \end{aligned}$$

und demzufolge

15) $$y + z = s - s\alpha\beta\gamma - s\alpha\beta'\gamma' = s - r - f.$$

Ebenso findet man

16) $$z + x = s - r - g,$$

17) $$x + y = s - r - h$$

und aus 15), 16), 17)

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(s - r + f - g - h), \\ y &= \tfrac{1}{2}(s - r - f + g - h), \\ z &= \tfrac{1}{2}(s - r - f - g + h). \end{aligned}$$

Krakau. Dr. F. Mertens.

Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

1876 Januar — Juni.

Mathematik, technische und Natur-Wissenschaften.

Frischauf, Dr. **J.**, Professor an der Universität zu Graz, Elemente der absoluten Geometrie. [XI u. 142 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 3. 40.

Günther, Dr. **Siegmund**, vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten und 4 lithographirten Tafeln. gr. 8. [VIII u. 352 S.] Geh. n. ℳ 9. —

Hesse, **Otto**, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung. Revidirt und mit Zusätzen versehen von Dr. **O. Gundelfinger**, a. o. Professor an der Universität zu Tübingen. Dritte Auflage. [XVI u. 546 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 13. —

Jeep, **W.**, Ingenieur und Director der städtischen Baugewerke- und Maschinenbau-Schule der Stadt Sulza, die Verwendung des Eisens beim Hochbau. Mit über 800 Holzschnitten und 14 lithographirten Tafeln. 1.—4. Lieferung. gr. 8. Jede Lieferung n. ℳ 2. 80. Erscheint in 6 Lieferungen à ℳ 2. 80.

Kirchhoff, Dr. **Gustav**, Professor in Berlin, Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. Dritte Lieferung (Schluss der Mechanik). gr. 8. [X u. S. 309—466.] Geh. n. ℳ 4. —

Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik. „Originalberichte der Verfasser", gesammelt und herausgegeben von Dr. **Leo Koenigsberger** und Dr. **Gustav Zeuner.** I. Band 1. Heft [S. 1—128.] gr. 8. geh. n. ℳ 2. 40.

Riemann's, **Bernhard**, gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Herausgegeben unter Mitwirkung von **R. Dedekind** und **H. Weber**. [VIII u. 526 S.] Lex.-8. geh. n. ℳ 16. —

Röthig, Dr. **Oskar**, Oberlehrer an der Friedrichs-Werder'schen Gewerbeschule in Berlin, die Probleme der Brechung und Reflexion. [VIII u. 112 S.] gr. 8. geh. n. M. 2. 80.

Scherling, **Ch.**, Professor am Catharineum in Lübeck, Grundzüge der axonometrischen und schiefen Parallel-Projection. Ein Ergänzungsheft zu jedem Lehrbuch der gewöhnlichen orthogonalen Projection für Realschulen. Mit 5 lithograph. Figurentafeln. [24 S.] 4. geh. n. ℳ 1. —

Steiner's, **Jacob**, Vorlesungen über synthetische Geometrie. Zweiter Theil. Auch unter dem Titel: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften. Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiner's bearbeitet von Dr. **Heinrich Schröter**, Professor der Mathematik an der Universität zu Breslau. Zweite Auflage. Mit 106 Holzschnitten im Text. [XVI u. 535 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 14. —

INHALT.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.