Werk

Titel: Zeitschrift für Mathematik und Physik

Verlag: Teubner

Jahr: 1876

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 MATH I, 755:21

Werk Id: PPN599415665_0021

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN599415665_0021|LOG_0029

XI.

Ueber Curven auf Rotationsflächen.

Von

Dr. Biehringer,

Professor an der königl. Industrieschule zu Nürnberg.

(Fortsetzung.)

Nr. 14. Mit Hilfe der am Schlusse von Nr. 2 gegebenen Bemerkungen lassen sich sehr schnell die Gleichungen von Curven auf Rotationsflächen auffinden, die in anderer Weise, wie dort, bestimmt sind. Es sollen einige solche Fälle betrachtet und zunächst festgesetzt werden, dass neben $\partial z_t = F$ noch $\partial x_t^2 + \partial y_t^2 + \partial z_t^2 = S^2$ gegeben ist. F und S können beliebige Functionen von t vorstellen, dabei soll aber F keinen Coordinatenwerth, S höchstens z enthalten. Die übrigen Stücke werden wie in Nr. 1 angenommen. Denkt man sich das in Nr. 1 näher bezeichnete Elementendreieck, so ist hier durch $\sqrt{\partial x_t^2 + \partial y_t^2 + \partial z_t^2}\,dt = S\,dt$ die Hypotenuse und durch $\sqrt{1 + \partial f_z^2}\,.\,\partial z_t\,.\,d = \sqrt{1 + \partial f_z^2}\,.\,F\,.\,dt$ die eine Kathete gegeben; demnach wird die andere Kathete $= \sqrt{S^2 - (1 + \partial f_z^2) F^2}\,dt$. Wird sodann durch φ der Stellungswinkel der Projection des Radius vectors in der xy-Ebene gegen die x-Axe vorgestellt und das Vorzeichen des letztern Ausdruckes der Drehrichtung des φ entsprechend genommen, so ist

$$d\varphi = \frac{\sqrt{S^2 - (1 + \partial f_z^2) F^2}}{f}\,.\,dt,$$

folglich

1)
$$\varphi = \int \frac{\sqrt{S^2 - (1 + \partial f_z^2) F^2}}{f}\,dt.$$

Hierzu kommen noch die Gleichungen

2)
$$\varrho = f_z$$

und

3)
$$z = \int F\,dt.$$

Für Axencoordinaten ist wieder $x = f\,.\cos\varphi$ und $y = f\,.\sin\varphi$.

Sämmtliche Betrachtungen, welche über die Curve der Nr. 1 angestellt wurden, lassen sich auch hier in Anwendung bringen, sobald statt des frühern P der Ausdruck $\sqrt{S^2-(1+\partial f_z^{\,2})\,F^2}$ genommen wird.

Ist statt des Elements des z das Element $M\,dt$ des Meridians gegeben, so tritt an die Stelle der Gleichung 3) die andere

$$\int\sqrt{1+\partial f_z^{\,2}}\,dz=\int M\,dt.$$

Lässt man bei der ursprünglichen Curve die Wurzel der Gleichung 1) einmal durchweg positiv, das andere Mal durchweg negativ sein, so erhält man zwei Curven, welche in denselben gegenseitigen Beziehungen stehen, wie die Curven I und II der Nr. 5. An einer Stelle, wo $S^2=(1+\partial f_z^{\,2})\,F^2$ ist, wo also die Curve den Meridian berührt, kann man ohne Beeinträchtigung der Stetigkeit das Vorzeichen der Wurzel wechseln lassen und dann durch gleichzeitigen umgekehrten Wechsel abermals zwei Curven erhalten, die in denselben Beziehungen, wie I und II in Nr. 5 stehen. In den Fällen, in welchen die Wurzel an der bezeichneten Stelle das Vorzeichen behält, entsteht dort ein Maximum oder Minimum des φ-Werthes; in den anderen Fällen findet dies nicht statt, jedoch erhält die Curve in Bezug auf den Meridian einen Wendepunkt. — Sind durchweg die Constanten der Integrale entsprechend bestimmt, so wird jede der Curven durch den Punkt, bei welchem die Wurzel gleich Null wird, in zwei Theile getheilt, von denen jeder den Meridian zu diesem Punkte berührt und von denen diejenigen Theile, welche zu den Curven mit unveränderlichen Vorzeichen der Wurzel gehören, zugleich auch Theile der andern Curve sind. — Sobald die Wurzel öfter Null wird, kann man den Wechsel des Vorzeichens derselben auf verschiedene Arten eintreten lassen und dadurch gleichviel verschiedene Curven bekommen, die sich wieder paarweise wie I und II verhalten und bei analoger Bestimmung der Constanten ebenso, wie oben, aus den Theilen der Curven zusammengesetzt werden können, bei welchen die Wurzel ihr Vorzeichen behält.

In den obigen Gleichungen ist auch die Lösung der Aufgabe enthalten, die Curve zu finden, welche ein Punkt beschreibt, der sich auf der Rotationsfläche mit einer gegebenen Geschwindigkeit S und zugleich parallel der z-Axe mit einer Geschwindigkeit F fortbewegt. Ueberhaupt findet hier auch Nr. 11 mit den bereits bezeichneten Modificationen Anwendung. Bei gegebenem M tritt an die Stelle der Geschwindigkeit längs der z-Axe die längs des Meridians.

Nr. 15. Um eine weitere Anwendung der Bemerkungen der Nr. 2 zu zeigen, sollen die Gleichungen einer Curve der Rotationsfläche aufgesucht werden, bei welcher jedes, irgend einem t- oder z-Werth folgende Element die zu diesem t-Werth gehörige Diagonale eines Parallelogramms bildet, dessen eine Seite das entsprechende Element einer gegebenen Curve auf der Rotationsfläche, und dessen andere Seite ein bestimmtes Element des Parallelkreises zu z ist. Man könnte das Element der Curve auch als die dritte Seite eines Dreiecks aus den zwei zusammenstossenden Seiten des bezeichneten Parallelogramms hinstellen. Das Element des Parallelkreises sei, wie in Nr. 1, durch $P\,dt$ gegeben und der positiven oder negativen Drehrichtung des φ entsprechend zu nehmen, je nachdem $P\,dt$ positiv oder negativ ist; die gegebene Linie sei die der vorigen Nummer und die Rotationsfläche bestimmt durch $x^2+y^2=f_z{}^2$.

Unter den Voraussetzungen, welche eben in Bezug auf das Vorzeichen des Elements des Parallelkreises, und welche in der vorigen Nummer in Bezug auf das Vorzeichen der Projection des Elements der gegebenen Curve auf den Parallelkreis angegeben wurden, kann bemerkt werden, dass die Projection des Elements unserer gesuchten Curve auf den fraglichen Kreis gleich der Summe der entsprechenden Projectionen von den anderen Elementen ist und dass durch das Vorzeichen dieser Summe zugleich die Drehrichtung des Elements in Bezug auf die xy-Ebene bestimmt wird. Da ausserdem f den Radius des erwähnten Parallelkreises vorstellt, so ist mit Berücksichtigung von Nr. 14 nacheinander

$$d\varphi=\frac{P\,dt+\sqrt{S^2-(1+\partial f_z{}^2)F^2}\,.\,dt}{f}$$

oder

1) $$\varphi=\int\frac{P+\sqrt{S^2-(1+\partial f_z{}^2)F^2}}{f}\,dt.$$

Hierzu treten noch

2) $$\varrho=f_z$$

und

3) $$z=\int F\,dt.$$

Im Allgemeinen lässt sich wieder bemerken, dass sämmtliche Betrachtungen über die Curve der Nr. 1 hier ebenfalls Giltigkeit haben, sobald $P+\sqrt{S^2-(1+\partial f_z{}^2)F^2}$ statt des dortigen P genommen wird.

Zu den verschiedenen Entstehungsarten, welche auch hier nach Nr. 11 in Anwendung kommen können, lassen sich mehrere neue hinzufügen. Es soll in dieser Beziehung nur angegeben werden, dass die gefundene Curve durch einen Punkt beschrieben werden kann, der sich auf der gegebenen, mit einer Winkelgeschwindigkeit $=\frac{P}{f}$ um die z-Axe gedrehten Curve, den Gleichungen derselben entsprechend fortbewegt. Die nämliche Curve wird auch erhalten, wenn die gegebene Curve feststeht und dafür die Rotationsfläche mit einer Winkelgeschwindigkeit $=-\frac{P}{f}$ um die z-Axe rotirt.

Lässt man ebenso, wie in Nr. 14, die Wurzel an passender Stelle das Vorzeichen wechseln, so kann man zu denselben F-, P- und S-Werthen verschiedene Curven erhalten. In Bezug auf die Paare dieser Linien, bei welchen die Wurzel an denselben Stellen das Vorzeichen wechselt, soll nur angegeben werden, dass die Curve der Nr. 1 bei diesen Linien die nämliche Rolle spielt, wie der Meridian bei den entsprechenden Linien der Nr. 14, und dass daher auch jedes Paar dieser Linien symmetrisch gegen die Curve der Nr. 1 liegt. Es ist leicht, die Bedingungen anzugeben, für welche diese Linien in die der Nr. 1 oder 14 übergehen.

Bei gegebenem Fortschreiten des Punktes längs des Meridians tritt wieder $\int \sqrt{1+\partial f_z^2}\, dz = \int M\, dt$ an die Stelle der Gleichung 3).

In den Gleichungen der Curve bestimmt $\int \frac{\sqrt{S^2-(1+\partial f_z^2)F^2}}{f}\, dt$ den φ-Werth der gegebenen Curve. Ist nun durch $x = x'_t$, $y = y'_t$, $z = z'_t$ eine beliebige Curve auf der Rotationsfläche gegeben, wo x'_t, y'_t, z'_t beliebige Function von t vorstellen, welche aber der Gleichung $x^2 + y^2 = f_z^2$ Genüge leisten, und soll mit dieser Curve die Linie dieses Paragraphen bestimmt werden, so darf man nur berücksichtigen, dass $arctang\, \frac{y'}{x'}$ ebenfalls den φ-Werth der gegebenen Curve vorstellt und dass der z-Werth durch die Drehung um die Axe keine Aenderuug erleidet. Man erhält deshalb in diesem Falle die Gleichungen

$$\varphi = \int \frac{P}{f}\, dt + arctang\, \frac{y'}{x'}, \quad \varrho = f_z, \quad z = z'_t.$$

Wäre der φ-Werth der gegebenen Curve $= \varphi'_t$ bekannt, so wäre

$$\varphi = \int \frac{P}{f}\, dt + \varphi'_t.$$

Durch die aufgestellten Gleichungen ist es nicht nur möglich, jede Curve zu bestimmen, die auf die gegebene Art erzeugt gedacht wird, sondern es kann auch, weil diese Gleichungen jede Curve auf der Rotationsfläche bestimmen können, rückwärts geschlossen werden, wie die angegebenen Bewegungen beschaffen sein müssen, damit die daraus hervorgehende Linie eine verlangte wird. Nimmt man, wie in Nr. 8, $f'_{x,y,z} = 0$ als zweite Bestimmungsgleichung der verlangten Curve, so müssen z. B. die aus $x = f\, cos\varphi$, $y = f\, sin\varphi$, $z = z'_t$ erhaltenen Werthe auch dieser Gleichung Genüge leisten. Man erhält dadurch für $\int \frac{P}{f}\, dt$, x'_t, y'_t, z'_t neben $x^2 + y^2 = f^2$ noch eine zweite Bedingungsgleichung, so dass zur vollständigen Bestimmung der Grössen noch irgend zwei Voraussetzungen gemacht werden können. Einfacher gestalten sich wieder die Bedingungen, wenn die gegebene Curve durch die windschiefe Fläche $\varphi = \varphi_z$ mit bestimmt wird.

In praktischen Fällen ist zwar bei der letztbestimmten Art der Erzeugung einer verlangten Linie die Führung des beschreibenden Punktes eine complicirtere, als die in Nr. 11 längs der z-Axe, jedoch ist nicht zu vergessen, dass durch geeignete Annahme der willkürlichen Voraussetzungen die Bewegung des Punktes auf der Leitcurve eine einfache, z. B. eine gleichförmige werden kann. Allerdings setzt dieses Verfahren durch die Hereinziehung der Leitcurve selbst die Zeichnung einer Curve auf der Rotationsfläche voraus, aber in speciellen Fällen kann letzteres möglicherweise keine Schwierigkeiten bereiten.

Nr. 16. Wenn man sich den zeichnenden Punkt der Nr. 11 mit einer Geraden fest verbunden denkt, welche, die z-Axe senkrecht schneidend, in der Ebene des Meridians fortbewegt wird, der zu dem Anfangswerth von φ gehört, so schneidet diese Gerade die sich vorschriftsgemäss drehende Rotationsfläche nach der dort bestimmten Curve. Diese Fortbewegung der Geraden kann nun auch dadurch eingeleitet werden, dass man sie an einer Curve, welche nur in der genannten Meridianebene liegt, so fortgleiten lässt, dass sich der Schnittpunkt mit der z-Axe dem $z = \int F\,dt$ entsprechend fortbewegt. Man kann als Leitcurve der Geraden jede Linie dieser Ebene nehmen, die sich über den Intervall $z = \int F\,dt$ erstreckt, und kann eben deswegen wieder an diese Linien gewisse Forderungen stellen, die sich z. B. auf die Fortführung der Geraden an der Curve beziehen. So kann verlangt werden, die Gerade soll an der Curve gleichförmig fortgleiten und man erhält dann zur Bestimmung der Curve in der xz-Ebene die Bedingungen $z = \int F\,dt$ und $\sqrt{\partial x_t^2 + \partial z_t^2} = A$, wo A constant ist. Dieselben Bedingungen blieben, wenn A auch irgend eine Function von t, x oder z wird, wenn also die Geschwindigkeit auf der Curve sich ändert.

Zu analogen Folgerungen wird man geführt, wenn in Nr. 15 statt des an der gegebenen Curve fortgleitenden Punktes wieder die Gerade genommen wird, welche durch den Punkt geht und die z-Axe senkrecht schneidet. Letztere bleibt jedoch in diesem Falle nicht in einer Meridianebene, sondern sie beschreibt eine windschiefe Fläche. Bei gleichförmigem Fortschreiten der Geraden an einer Curve der windschiefen Fläche erhält man für diese Linie neben der Gleichung der Fläche noch die Bedingungen $\partial z_t = F$ und $\sqrt{\partial x_t^2 + \partial y_t^2 + \partial z_t^2} = A$, wo A eine Constante vorstellt. Die Gleichung der windschiefen Fläche ist für eine gegebene Curve leicht zu bestimmen.

Man sieht endlich noch ein, dass die Gleichungen der Nr. 15 auch dann noch richtig sind, wenn die dortigen x'_t, y'_t, z'_t sich auf eine Curve beziehen, die nicht in der Rotationsfläche liegt, und wenn die Curve zu bestimmen ist, nach welcher die bezeichnete, die z-Axe senkrecht schneidende Gerade die sich drehende Rotationsfläche trifft.

Nr. 17. Es sollen nun einige Beispiele über diese Curven durchgeführt werden. Der zeichnende Punkt bewege sich auf der Rotationsfläche in der Richtung der jeweiligen Parallelkreise mit einer constanten Winkelgeschwindigkeit $= +\omega$ oder, was dasselbe ist, die Rotationsfläche drehe sich mit dem System um die z-Axe mit der Winkelgeschwindigkeit $= -\omega$; die durch den zeichnenden Punkt gehende, die z-Axe stets senkrecht schneidende Gerade werde durch einen andern Punkt geführt, der sich gleichförmig auf der Peripherie eines Kreises bewegt, dessen Mittelpunkt im Ursprunge liegt; es soll nun bestimmt werden, welche Curve auf der Rotationsfläche hierdurch entsteht.

Um den Kreis und die Bewegung des Punktes auf demselben zu bestimmen, sei r der Radius, ν' der Winkel der X-Axe mit dem Radius vector der Stelle, an welcher der bewegte Punkt durch die xy-Ebene und auf die Seite tritt, wo die $+z$-Axe liegt, ψ die Winkelgeschwindigkeit des Punktes im Kreise, θ endlich der Winkel der Kreisebene mit der xy-Ebene. ψ soll bei $t = t'$ gleich Null sein, dort mit der aufsteigenden Knotenlinie zusammenfallen und in der Richtung der Kreisbewegung gezählt werden. θ sei genau genommen der Winkel, der an der aufsteigenden Knotenlinie von dem Theile der Kreisebene nach der $+z$-Axe hin und von dem Theile der xy-Ebene gebildet wird, welcher sich im Sinne der positiven Drehrichtung erstreckt.

Bei unseren gegebenen Stücken ist es möglich, das φ'_t und z'_t der Nr. 15 sehr rasch und damit auch die Gleichung der Curve zu erhalten. Zunächst ist der Winkel des Radius des Kreispunktes mit der aufsteigenden Knotenlinie zur Zeit $t = \psi(t-t')$; die Projection dieses Winkels auf die xy-Ebene wird bestimmt durch $tang\, \nu = tang[\psi(t-t')].cos\,\theta$, folglich wird $\nu = arctang[tang(\psi(t-t')).cos\,\theta]$ und es ist deshalb $\varphi'_t = \nu + \nu'$. — $arctang$ ist bei $t = t'$ als Null anzunehmen. Berücksichtigen wir noch weiter, dass $\int \frac{p}{f}\, dt = \int_{t'}^{t} \omega\, dt = \omega(t-t')$ und $z'_t = r\, sin[\psi(t-t')].sin\,\theta$ ist, so erhalten wir als Gleichungen der Curve

$$\varrho = f_z, \quad \varphi = \omega(t-t') + \nu' + arctang[tang(\psi(t-t')).cos\,\theta],$$
$$z = r\, sin[\psi(t-t')].sin\,\theta.$$

Würden wir die Zeit dann zu zählen anfangen, wenn sich der Punkt im aufsteigenden Knoten befindet, ferner durch diesen Punkt die $+X$-Axe legen, so würden die obigen Gleichungen übergehen in

$$\varrho = f_z, \quad \varphi = \omega t + arctang[tang\,\psi t \,.\, cos\,\theta], \quad z = r\,sin\,\psi t \,.\, sin\,\theta.$$

Für $\theta = 90^0$ erhalten wir die entsprechenden Resultate der Nr. 12; für $\theta = 0$ erhält man die Bewegung auf dem Parallelkreise der xy-Ebene und es wird $\varphi = (\omega + \psi)t$.

Bei ungleichförmiger Bewegung auf dem Parallelkreise und ungleichförmiger Drehung der Rotationsfläche treten an die Stelle von $\psi(t-t')$ und $\omega(t-t')$ bezüglich $\int_{t'}^{t} \psi\, dt$ und $\int_{t'}^{t} \omega\, dt$.

Ist statt der Winkelgeschwindigkeit ψ die Geschwindigkeit v des Punktes auf dem Kreise gegeben, so ist $\psi = \frac{vt}{r}$ oder $\int \psi\, dt = \frac{t}{r} \int v\, dt$ zu setzen.

Die Ablenkung durch die Umdrehung der Erde.

Nr. 18. Auch in dem letzten Beispiele kann man analog der Nr. 13 die Geschwindigkeit auf dem Parallelkreise aus zwei Theilen zusammengesetzt denken, den einen Theil constant annehmen und der Umdrehungsgeschwindigkeit des Anfangspunktes entsprechen, den andern Theil veränderlich sein und durch die Rotation der Fläche hervorbringen lassen. Das daselbst behandelte Beispiel liefert unter gleichen Voraussetzungen in Bezug auf p und ω in dem jetzigen Falle die Gleichungen

$$\varrho = f_z, \quad z = r\,sin\frac{vt}{r} \,.\, sin\,\theta,$$

$$\varphi = p \int \frac{1}{f}\, dt - \omega t + arctang\left[tang\frac{vt}{r} \,.\, cos\,\theta\right] = \frac{2\pi}{\tau}\left(f' \int \frac{1}{f}\, dt - t\right) + arctang\left[tang\frac{vt}{r}\, cos\,\theta\right].$$

Würde in dem letzten Falle die Rotationsfläche eine Kugel sein, die ihren Mittelpunkt im Ursprunge hat, und der Kreis, der die zur z-Axe senkrechte Gerade leitet, den Radius der Kugel erhalten, endlich $\tau = 24.60.60$ werden, so gingen die Gleichungen der Curve über in

$$\varrho = \sqrt{r^2 - z^2}, \quad z = r\,sin\frac{vt}{r}\, sin\,\theta,$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{24.60.60}\left(\int \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2\frac{vt}{r}\, sin^2\theta}} - t\right) + arctang\left[tang\frac{vt}{r} \,.\, cos\,\theta\right].$$

Diese Gleichungen würden, wenn wir die Erde als Kugel betrachten die Bahn bestimmen, welche ein Körper beschreibt, der den Aequator unter dem Winkel θ mit einer Geschwindigkeit v schneidet. Der Körper soll dabei die Umdrehungsgeschwindigkeit des Aequators und, abgesehen von der Rotation der Erde, auch die Geschwindigkeit v auf den durch θ bestimmten grössten Kreis festhalten. Durch die Geschwindigkeit v und ihren Winkel θ mit dem Aequator wäre die Aufgabe noch keine bestimmte; sie wird es erst dadurch, dass man die ganze Bahn vorschreibt, welche der Körper ohne Umdrehung der Erde beschreiben würde. Auf Grund des Beharrungsvermögens und der Wirkung der Schwere kann man diese Bahn als eben und durch den Mittelpunkt gehend betrachten. Dass hier von etwa vorhandenen Bewegungswiderständen Umgang genommen wurde, ist selbstverständlich. Für $\theta = 90^0$ erhalten wir den in Nr. 13 behandelten Fall. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 \frac{vt}{r} . sin^2 \theta}} dt$ ist ein elliptisches Integral der ersten Gattung.

Ist die Geschwindigkeit v keine sehr beträchtliche, so ist v im Vergleich zu r klein und man kann bis zu nicht allzugrossen t-Werthen setzen

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1 - sin^2 \frac{vt}{r} . sin^2 \theta}} = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2 t^2}{r^2} . sin^2 \theta}} dt = \frac{r}{v \sin \theta} arcsin \left(\frac{vt}{r} . \sin \theta \right),$$

wodurch wird

$$\varphi = \frac{2\pi}{24.60.60} \left[\frac{r}{v \sin \theta} . arcsin \left(\frac{vt}{r} \sin \theta \right) - t \right] + arctang \left[tang \frac{vt}{r} . \cos \theta \right].$$

Eine andere Näherungsformel wird mit den gewöhnlichen Hilfsmitteln der Analysis erhalten, wenn man auf $\frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 \frac{vt}{r} . sin^2 \theta}}$ den Binomialsatz anwendet, statt $sin \frac{vt}{r}$ die nach $\frac{vt}{r}$ fortschreitende Reihe setzt, nach $\frac{vt}{r}$ ordnet, quadrirt und integrirt. Man erhält dann bis zur fünften Potenz von t das Resultat

$$\varphi = \frac{2\pi t . sin^2 \theta}{24.60.60} \left[\tfrac{1}{6} . \frac{v^2 t^2}{r^2} + \tfrac{1}{120} . \frac{v^4 t^4}{r^4} (9 \sin^2 \theta - 4) \right] + arctang \left[tang \frac{vt}{r} . \cos \theta \right].$$

Der erste Theil von φ bestimmt hier die Ablenkung von der ursprünglichen Richtung, welche durch die Umdrehung der Erde veranlasst wird. Die positive Drehrichtung des φ oder die des p geht am Aequator von Westen nach Osten und hierfür ist der genannte Theil immer positiv; ist daher θ spitz, oder geht die Geschwindigkeit v auch nach der Seite hin, so wird φ durch die Umdrehung der Erde vermehrt; im andern Falle wird sein absoluter Werth vermindert. — Die Abweichung auf dem Parallelkreise würde sich in Längenmass ergeben, wenn man den fraglichen Theil von φ mit dem Radius des Parallelkreises der Stelle multiplicirt. Letzterer wird dadurch erhalten, dass man für das angenommene t, oder für $vt = s$, wo s den zurückgelegten Weg vermöge der Geschwindigkeit v bezeichnet, das z berechnet und in $f = \sqrt{r^2 - z^2}$ einsetzt.

Obwohl die obige Integration nicht in endlicher Form ausgeführt wurde, so lassen sich doch in Bezug auf die Ablenkung durch die Umdrehung der Erde einige allgemein giltige Schlüsse ziehen. Zunächst ist aus der Form der integrirten Reihe ersichtlich, dass der Werth der Ablenkung nicht blos von $vt = s$ oder von dem vermöge der Geschwindigkeit v zurückgelegten Wege abhängig ist, sondern besonders noch von t, also von der Zeit, die der Körper zur Zurücklegung des Weges braucht. Setzt man zu dem Ende $vt = s$ in die Reihe, so wird die Ablenkung

$$\frac{2\pi t \sin^2\theta}{24.60.60}\left[\tfrac{1}{6}\cdot\frac{s^2}{r^2} + \tfrac{1}{120}\cdot\frac{s^4}{r^4}(q \sin^2\theta - 4)\right].$$

Der Ausdruck in der Klammer bleibt für das nämliche s und θ stets derselbe, folglich ist unter dieser Voraussetzung die Ablenkung proportional dem t. Hat man deshalb für gewisse s, θ und t die Ablenkung berechnet, so kann sie für dieselben s und θ, aber für ein anderes t unmittelbar gefunden werden.

Zu ähnlichen Resultaten wird man geführt, wenn man die Integration nach t in unserem obigen Integral mit Hilfe von $z = r \sin\frac{vt}{r} . \sin\theta$ in eine solche nach z verwandelt; man erhält dann für unsere Ablenkung den Ausdruck

$$\frac{2\pi}{24.60.60}\left(\frac{1}{v \sin\theta}\int_0^z \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{r^2 \sin^2\theta}\right)}}\,dz - \frac{r}{v}\, arcsin\,\frac{z}{r \sin v}\right).$$

Von diesem Integral existirt natürlich wieder keine geschlossene Form. Denken wir uns dasselbe mittels Reihen bestimmt, so erhalten wir eine solche, die nach z fortschreitet, und es kann der ganze Ausdruck gegeben werden durch

$$\frac{2\pi}{24.60.60}\cdot\frac{1}{v}\cdot T,$$

wo T eine Function von z, r und θ vorstellt.

Dieses T bleibt für dasselbe r, θ und z, also bis zu demselben Parallelkreis immer das nämliche; es wird daher die Ablenkung umgekehrt proportional dem v, also um so grösser, je langsamer sich der Körper unter sonst gleichen Umständen bis zu dem Parallelkreise zu z bewegt, und umgekehrt. Mit Berücksichtigung dessen, dass $vt = s$, ist das jetzige Resultat eine Bestätigung des obigen.

Sollte bestimmt werden, unter welchem Winkel θ der Körper bei gegebener Geschwindigkeit v abgehen müsste, um trotz des Einflusses der Umdrehung der Erde an eine bestimmte Stelle zu gelangen, so wären in den beiden Gleichungen für z und φ die letzten beiden Grössen und v gegeben und θ gesucht. Man hätte deshalb aus den beiden Gleichungen des t zu eliminiren und dann nach θ aufzulösen. Es ist klar, dass sich diese Aufgabe wieder nur annähernd lösen lässt und für *arctang* auch die entsprechende Reihe zu setzen ist

Nr. 19. Man kann die letzte Aufgabe verallgemeinern und die Curve zu bestimmen suchen, welche ein Körper beschreibt, der auf der Kugel unter irgend einem Winkel α gegen den Parallelkreis des Ausgangspunktes — also unter dem Winkel $90-\alpha$ gegen den Meridian — mit der unveränderlichen Geschwindigkeit v bewegt wird und trotz der Umdrehung der Kugel auf dem grössten Kreise zu bleiben sucht, der durch die anfängliche Richtung des v geht.

Um hier theils die Bewegung, theils die Lage des Coordinatensystems genauer zu bestimmen, desgleichen eine möglichste Uebereinstimmung mit den vorausgegangenen Betrachtungen und eine leichte Verwendbarkeit der Resultate für den Ort des Ausgangspunktes zu erzielen, werde festgesetzt, dass die xz-Ebene durch den Ausgangspunkt gehe, die $+z$-Axe mit v nach derselben Seite hin liege oder, was dasselbe ist, die Projection von v auf die z-Axe die Richtung der $+z$-Axe habe und dass Winkel α spitz oder stumpf zu nehmen sei, je nachdem die Projection von v auf die xy-Ebene die positive oder negative Drehrichtung hat. Für die Ausgangsstelle ist $y=0$; ihre geographische Breite sei β, folglich wird $z'=r\sin\beta$ und $f'=r\cos\beta$. Ausserdem werde daselbst noch $t=0$ angenommen. Liegt der Ausgangspunkt auf der Seite der negativen z-Axe, so ist β negativ zu nehmen.

Ganz entsprechend dem Anfange der Nr. 18 erhalten wir bei analoger Bezeichnung $v=\operatorname{arctang}\left(\operatorname{tang}\frac{vt}{r}.\cos\theta\right)$, wo θ den Winkel unserer Kreisebene mit der xy-Ebene vorstellt. Alsdann wird in gleicher Weise $z=r\sin\left(\frac{vt}{r}+\mu\right).\sin\theta$. Das μ ist hier der Winkel, den der Radius des Ausgangspunktes mit der aufsteigenden Knotenlinie der Bahn in der xy-Ebene bildet, und positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem es auf der Seite der $+$ oder der $-z$-Axe liegt. θ und μ sind vorerst noch unbekannt und müssen den gegebenen Stücken gemäss bestimmt werden. θ wird durch folgende Betrachtung erhalten. Denkt man sich durch den Anfangspunkt ein Loth L zur Ebene der Bahn gelegt, also L senkrecht zu dem v und r des Ausgangspunktes, so liegt dieses L in der Tangentialebene dieses Punktes, weil ja diese auch zu r senkrecht ist. In diese Tangentialebene fallen ausserdem noch v, dm' und dp', d. h. die Geschwindigkeit, das Element des Meridians und das des Parallelkreises der bewussten Stelle. Nun ist aber zugleich $dm'\perp dp'$ und $L\perp v$, folglich ist $\angle L$, $dm' = \angle dp'$, $v = \alpha$. Nimmt man hierzu noch eine Parallele Z' durch den Ausgangspunkt zur z-Axe, so ist Winkel Z', $L = \theta =$ dem gesuchten Winkel unserer Bahnebene mit der xy-Ebene; endlich ist Winkel dm', $Z' =$ dem Winkel von dem r des Ausgangspunktes mit der xy-Ebene $=$ der geographischen Breite des Punktes oder gleich β. Die Linien L, dm' und Z' bilden demnach ein Dreikant mit den Seiten α, θ und β. Dieses Dreikant hat dazu noch an dm' oder dem θ gegenüber einen rechten Winkel, weil die dm', Z'-Ebene mit der xz-Ebene und die dm', L-Ebene mit der Tangentialebene zusammenfällt und die Tangentialebene auf der xz-Ebene senkrecht steht. Es findet sich daher $\cos\theta = \cos\beta \,.\, \cos\alpha = \cos\alpha \,.\, \frac{\sqrt{r^2 - z'^2}}{r} = \cos\alpha \,.\, \frac{f'}{r}$. — Um das μ zu erhalten, denken wir uns durch z' eine Ebene senkrecht zur Knotenlinie gelegt und das Stück des Schnittes dieser Ebene mit der Bahnebene zwischen dem Ausgangspunkte und der Knotenlinie mit n bezeichnet, dann ist $\sin\mu = \frac{n}{r}$ und $n = \frac{z'}{\sin\theta}$, also $\sin\mu = \frac{z'}{r\sin\theta} = \frac{\sin\beta}{\sin\theta}$ und

$$\mu = \arcsin\frac{z'}{r\sin\theta} = \arcsin\frac{z}{r\sqrt{1-\cos^2\beta\,.\,\cos^2\alpha}} = \arcsin\frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\cos^2\beta\,.\,\cos^2\alpha}}$$
$$= \operatorname{arctang}\frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\alpha}.$$

Hat demnach, wie in Nr. 18, die Kugel noch eine constante Winkelgeschwindigkeit $= -\omega$, oder hat bei feststehender Kugel der auf unserer Bahn fortschreitende Punkt noch eine Geschwindigkeit $+ f\omega$ in der Richtung der Parallelkreise, so werden die Gleichungen der beschriebenen Curve

1) $$\varrho = f_z,$$

2) $$z = r\sin\left(\frac{vt}{r} + \mu\right) . \sin\theta,$$

3) $$\varphi = \omega t + \operatorname{arctang}\left(\operatorname{tang}\frac{vt}{r} . \cos\theta\right).$$

Den zwei letzten Gleichungen kann man noch nachfolgende Formen geben:

$$z = r\sin\left(\frac{vt}{r} + \mu\right) . \sin\theta = \sin\left(\frac{vt}{r} + \arcsin\frac{z'}{\sqrt{r'^2 - f'^2\cos^2\alpha}}\right) . \sqrt{r^2 - f'^2\cos^2\alpha}$$

2) $$= f' . \sin\frac{vt}{r} . \sin\delta + z' . \cos\frac{vt}{r}$$

$$= r\sin\left(\frac{vt}{r} + \arcsin\frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\cos^2\alpha . \cos^2\beta}}\right)\sqrt{1-\cos^2\alpha . \cos^2\beta}$$

$$= r\left(\sin\frac{vt}{r} . \cos\alpha . \cos\beta + \cos\frac{vt}{r} . \sin\beta\right),$$

$$3)\quad \varphi = \omega t + arctang\left[\frac{f'}{r}.\cos\alpha.\,tang\,\frac{vt}{r}\right] = \omega t + arctang\left[\cos\alpha.\cos\beta.\,tang\,\frac{vt}{r}\right].$$

Die ersteren Formeln sind dann am Platze, wenn das z', und die letzteren, wenn das β, die geographische Breite des Ausgangspunktes, bekannt ist.

Es hat nun auch keine Schwierigkeiten, das φ_z oder die Gleichung der windschiefen Fläche zu finden, deren Schnitt mit der Rotationsfläche die verlangte Curve ist. Aus der zweiten Gleichung ergiebt sich nämlich

$$t = \frac{r}{v}\left(arcsin\,\frac{z}{r\sin\theta} - arcsin\,\frac{z'}{r\sin\theta}\right)$$
$$= \frac{r}{v}\,arctang\,\frac{z\sqrt{r^2\sin^2\theta - z'^2} - z'\sqrt{r^2\sin^2\theta - z^2}}{zz' + \sqrt{(r^2\sin^2\theta - z^2)(r^2\sin^2\theta - z'^2)}},$$

und dies in die Gleichung von φ eingesetzt, giebt

$$\varphi = \frac{r\omega}{v}\,arctang\,\frac{z\sqrt{r^2\sin^2\theta - z'^2} - z'\sqrt{r^2\sin^2\theta - z^2}}{zz' + \sqrt{(r^2\sin^2\theta - z^2)(r^2\sin^2\theta - z'^2)}}$$
$$+\,arctang\left[\cos\theta\,\frac{z\sqrt{r^2\sin^2\theta - z'^2} - z'\sqrt{r^2\sin^2\theta - z^2}}{zz' + \sqrt{(r^2\sin^2\theta - z^2)(r^2\sin^2\theta - z'^2)}}\right].$$

Man könnte hieraus noch θ und z' mit Hilfe der Beziehungen $\cos\theta = \cos\alpha.\cos\beta$ und $z' = r\sin\beta$ fortschaffen und durch β und α ersetzen. Am einfachsten gestaltet sich der Ausdruck durch die Einführung des μ; hier wird $z' = r\sin\theta.\sin\mu$, $\sqrt{r^2\sin^2\theta - z'^2} = r\sin\theta.\cos\mu$, daher

$$\frac{z\sqrt{r^2\sin^2\theta - z'^2} - z'\sqrt{r^2\sin^2\theta - z^2}}{zz' + \sqrt{(r^2\sin^2\theta - z^2)(r^2\sin^2\theta - z'^2)}} = \frac{z - tang\,\mu\sqrt{r^2\sin^2\theta - z^2}}{z\,tang\,\mu + \sqrt{r^2\sin^2\theta - z^2}}.$$

Hier kann auch unmittelbar $t = \frac{r}{v}\left(arctang\,\frac{z}{\sqrt{r^2\sin^2\theta - z^2}} - \mu\right)$ gesetzt werden. Für $z' = 0$ oder $\mu = 0$ erhalten wir die Gleichung der windschiefen Fläche für die Curve der Nr. 17. Die dortigen Schlussbemerkungen können auch hierher übertragen werden.

Nr. 20. Passen wir die gegenwärtigen Verhältnisse, ähnlich wie es in Nr. 13 und 18 geschehen ist, den Vorgängen auf unserer Erdoberfläche an, wo ein Körper die Umdrehungsgeschwindigkeit

$$p = f'\omega = \frac{2f'\pi}{24.60.60}$$

seines Ausgangspunktes hat und auf jedem Parallelkreise beizubehalten sucht, er also auf dem Parallelkreise schon aus diesem Grunde um $p - f\omega$ fortschreitet, so erhalten wir die Lösung der Aufgabe: Welche Bahn beschreibt ein Körper unter dem Einflusse der Umdrehung der Erde, der auf derselben mit einer Geschwindigkeit v unter irgend einem Winkel α mit dem von Westen nach Osten gerichteten Parallelkreise der Anfangsstelle bewegt wird?

Auch hier soll, wie in den entsprechenden Fällen der früheren Nummern, die Aufgabe dadurch zu einer bestimmten gemacht werden, dass wir aus den dort geltend gemachten Gründen annehmen, der Körper beschreibe ohne Rücksichtnahme auf die Rotation den durch v bestimmten grössten Kreis und die parallele Verschiebung sei auf die Rotationsgeschwindigkeit, welche der Körper von seinem Ausgangspunkte mitbringt, ohne weiteren Einfluss. Von den Widerständen wird wieder Umgang genommen. Die positive Drehrichtung von OX nach OY gehe von Westen nach Osten; alle übrigen Bestimmungen sollen der Nr. 18 entsprechen. Die Gleichung für z bleibt vollständig unverändert, weil die Rotationsgeschwindigkeit darauf ohne Einfluss ist; desgleichen die Gleichung der Rotationsfläche. Es ist daher, wie in Nr. 19:

$$1)\qquad \varrho = f_z,$$

$$2)\qquad z = r\sin\left(\frac{vt}{r} + \mu\right).\sin\theta,$$

und dabei wieder

$$\mu = arcsin\frac{z'}{r\sin\theta} = arcsin\frac{tang\,\beta}{\sin\alpha},\qquad \cos\theta = \frac{f'}{r}\cos\alpha = \cos\beta\,.\cos\alpha.$$

Nur für φ erhält man weil

$$\omega = \frac{p - f\omega}{f} = \frac{f'.2\pi}{f.24.60.60} - \frac{2\pi}{24.60.60} = \frac{2\pi}{24.60.60}\left(\frac{f'}{f} - 1\right) \text{ ist:}$$

$$3)\qquad \varphi = \frac{2\pi}{24.60.60}\left(f'\int_0^t \frac{dt}{f} - t\right) + arctang\left[tang\frac{vt}{r}.\cos\theta\right].$$

In der letzten Gleichung ist wegen der Kugelgestalt der Erde

$$f'\int_0^t \frac{1}{f}\,dt = f'\int_0^t \frac{1}{\sqrt{r^2 - z^2}}\,dt = \frac{f'}{r}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{vt}{r} + \mu\right)\sin^2\theta}}\,dt$$

$$= \frac{f'}{rv\sin\theta}\int_{z'}^{z} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}\cdot\sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2\sin^2\theta}}}\,dz.$$

Dieses letzte Integral wird für dieselben z-Werthe unter sonst gleichen Umständen das nämliche, und deshalb der erste Theil von φ oder die Ablenkung durch die Umdrehung der Erde zwischen denselben Parallelkreisen umgekehrt proportional dem v, also wieder um so grösser, je langsamer sich der Körper bewegt, und umgekehrt.

Durch Einsetzen der obigen t-Werthe

$$t = \frac{r}{v}\left(arcsin\frac{z}{r\sin\theta} - arcsin\frac{z'}{r\sin\theta}\right) \text{ etc.}$$

in die Gleichung für φ erhält man unmittelbar und in ähnlicher Form, wie in Nr. 19, die Gleichung der windschiefen Fläche φ_z.

Das Integral $\frac{f'}{r}\int\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{vt}{r}+\mu\right).\sin^2\theta}}dt$ ist im Allgemeinen ein elliptisches und in geschlossener Form nicht angebbar. Es sollen deshalb in einer der in Nr. 18 entsprechenden Weise verschiedene Näherungswerthe für den Fall bestimmt werden, dass $\frac{vt}{r}$ klein ist. Zu dem Ende entwickeln wir $\sin\left(\frac{vt}{r}+\mu\right)$, berücksichtigen, dass $\sin\mu=\frac{\sin\beta}{\sin\theta}$, $\cos\mu=\frac{\sin\alpha.\cos\beta}{\sin\theta}$ und $f'=r\cos\beta$ und erhalten auf diese Art statt des letzten Integralausdruckes

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\frac{vt}{r}(\tan^2\beta-\sin^2\alpha)-\sin\frac{2vt}{r}.\sin\alpha.\tan\beta}}.$$

Setzen wir statt $\sin\frac{vt}{r}$ und $\sin\frac{2vt}{r}$ die Sinusreihe, so erhalten wir vermittelst des Binomialsatzes und wenn $\tan^2\beta-\sin^2\alpha=A$ und $\sin\alpha.\tan\beta=B$ gesetzt wird, für das letzte Integral

$$t+\tfrac{1}{2}Bt.\frac{vt}{r}+\tfrac{1}{6}t(-A+3B^2).\frac{v^2t^2}{r^2}+\tfrac{1}{24}t.B(-4-9A+15B^2).\frac{v^3t^3}{r^3}$$
$$+\tfrac{1}{120}t(4A+9A^2-48B^2-90AB^2+105B^4).\frac{v^4t^4}{r^4}\cdots\cdot$$

Unter der Voraussetzung, dass nur bis zur fünften Potenz von t gegangen werden soll, erhält man demnach

$$\begin{aligned}\varphi=\frac{2\pi t}{24.60.60}\Big[&\tfrac{1}{2}B.\frac{vt}{r}+\tfrac{1}{6}(-A+3B^2).\frac{v^2t^2}{r^2}+\tfrac{1}{24}B(-4-9A+15B^2).\frac{v^3t^3}{r^3}\\ &+\tfrac{1}{120}(4A+9A^2-48B^2-90AB^2+105B^4).\frac{v^4t^4}{r^4}\Big]\\ &+\operatorname{arctang}\left[\tan\frac{vt}{r}.\cos\alpha.\cos\beta\right].\end{aligned}\tag{3}$$

Zu bemerken ist hierbei, dass β nicht zu nahe an 90^0 oder der Ausgangspunkt nicht zu nahe an den Polen liegen darf, und dass $\frac{vt}{r}$ oder das Verhältniss des Weges auf dem vorgeschriebenen grössten Kreise zum Radius der Erde nicht zu gross sein darf.

Für $\beta=0$ wird $\alpha=\theta$, $A=-\sin^2\alpha=-\sin^2\theta$, $B=0$ und geht die Formel in die über, welche für die entsprechende Bewegung in Nr. 18 erhalten wurde.

In Uebereinstimmung mit dem Obigen ergiebt sich zunächst aus der letzten Gleichung für φ, dass die Aenderung des φ-Werthes durch die

Erdrotation für dieselben Werthe von $vt = s$ proportional dem t ist, und dass sie wieder bei gleichen s-Werthen wegen $t = \frac{s}{v}$ auch umgekehrt proportional dem v, also um so grösser wird, je langsamer sich der Körper bewegt. Das Vorzeichen des ersten Gliedes von φ oder der bewussten Ablenkung wird, da v und t absolut zu nehmen sind, durch das Vorzeichen von B bedingt. Nun liegt nach unseren Bestimmungen α immer zwischen 0 und 180^0 und ist deshalb $\sin\alpha$ stets positiv, daher wird $B = \sin\alpha \,.\, \tang\beta$ mit β positiv und negativ. Befindet sich der Ausgangspunkt auf der nördlichen Hemisphäre und ist v nach Norden gerichtet, so haben wir nach unseren Bestimmungen z' und β' positiv zu nehmen; es wird dann B positiv und die Ablenkung macht sich im Sinne der positiven Drehrichtung oder von Westen nach Osten geltend. Das $\operatorname{arctang}\left[\tang\frac{vt}{r} \,.\, \cos\alpha \,.\, \cos\beta\right]$ wird deshalb durch die Axendrehung der Erde vermehrt, wenn α spitz oder $\cos\alpha$ positiv ist, oder wenn die Bewegung in nordöstlicher Richtung eingeleitet wird; es wird sein absoluter Werth vermindert, wenn α stumpf, also $\cos\alpha$ negativ ist, oder wenn die ursprüngliche Bewegung in nordwestlicher Richtung vor sich geht. Ist v bei unserem Ausgangspunkte nach Süden gerichtet, so ist z' und β' negativ zu nehmen und wird dadurch B und unsere Ablenkung negativ oder sie wirkt im Sinne der negativen Drehrichtung, von Osten nach Westen. Wird hierzu α spitz oder geht die Bewegung v nach Südost, so wird $\operatorname{arctang}\left[\tang\frac{vt}{r} \,.\, \cos\alpha \,.\, \cos\beta\right]$ positiv und dasselbe durch den negativen Werth der Ablenkung vermindert, oder der Körper geht weniger nach Osten hin, als ohne Umdrehung der Erde. Im Falle α hier stumpf ist und daher die Bewegung in südwestlicher Richtung eingeleitet wird, ist unsere *arctang* negativ und ihr absoluter Werth wird durch die Ablenkung vergrössert oder die Bewegung wird westlicher. Am einfachsten lässt sich der Einfluss der Ablenkung übersehen, wenn man sich einen Beobachter am Ausgangspunkte denkt, der seine vordere Seite der Richtung des v zuwendet; die Ablenkung findet dann nach der rechten Seite des Beobachters statt Es hält nicht schwer, diese Bemerkungen auf den Fall zu übertragen, wo der Ausgangspunkt auf der südlichen Hemisphäre liegt; hier macht sich in Bezug auf unsern Beobachter die ablenkende Wirkung der Umdrehung nach links geltend. Sonst ist noch zu bemerken, dass, weil in der Reihe nur $\sin\alpha$ vorkommt, die Ablenkung für α und $180 - \alpha$ dieselbe bleibt.

Andere, doch weniger verlässige Näherungswerthe für die Ablenkung würde man erhalten, wenn man

$$\sqrt{1 + \sin^2\frac{vt}{r}(\tang^2\beta - \sin^2\alpha) - \sin\frac{2vt}{r} \,.\, \sin\alpha \,.\, \tang\beta}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{2vt}{r} \,.\, \sin\alpha \,.\, \tang\beta + \frac{v^2t^2}{r^2}(\tang^2\beta - \sin^2\alpha)}$$

setzte und das Integral des reciproken Werthes dieser Wurzel in geschlossener Form aufsuchte; doch würde sich hier kein richtiger Massstab für den Grad der Annäherung ergeben.

Aus der Form des Integrals in

$$\int_0^t \frac{\cos\beta}{\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{vt}{r}+\mu\right)\sin^2\theta}}\,dt - t$$

$$=\int_0^t \frac{\cos\beta}{\sqrt{1-\left(\sin\frac{vt}{r}\,.\,\sin\alpha\,.\,\cos\beta \pm \cos\frac{vt}{r}\sin\beta\right)^2}}\,dt - t,$$

wo im Nenner + zu nehmen ist, wenn β positiv sein soll, und — im andern Falle, ist, wenn man sich das Integral in die Differentialsumme zerlegt denkt, sofort ersichtlich, dass für dieselbe geographische Breite mit nicht zu grossem vt bei $\alpha = 0$ oder π diese Summe ein Minimum und für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ein Maximum ist. Es ist daher auch im ersten Falle oder wenn die anfängliche Bewegung in der Richtung des Parallelkreises erfolgt, die Abweichung am kleinsten, und im zweiten Falle, wo die anfängliche Bewegung in der Richtung des Meridians stattfindet, am grössten. Auch das ist noch unmittelbar ersichtlich, dass für den Fall des negativen β, oder der Bewegung nach Süden in unseren Gegenden, das Maximum zwischen denselben Parallelkreisen und damit die Abweichung nicht so beträchtlich ist, als für das positive β oder für die Bewegung nach Norden. Aehnliches gilt auch für die Abweichungen bei südlicher und nördlicher Bewegung für die anderen Werthe des α. Gleiche Resultate für nicht zu grosse Strecken ergiebt die Annäherungsgleichung für φ. Letztere lässt ausserdem noch ersehen, dass unter sonst gleichen Umständen die Ablenkung um so grösser wird, je grösser β ist, d. h. je näher der Ausgangspunkt dem Pole liegt.

Die oben aus den Formeln bestimmten Ablenkungsrichtungen stimmen mit dem Drehungsgesetz der Winde überein. Auch die übrigen Resultate können mit dem Verhalten der Winde in Zusammenhang gebracht werden. Ein schwächerer Wind würde nach denselben auf gleicher Strecke eine grössere Ablenkung erfahren, als ein stärkerer. Entsteht irgendwo eine Luftverdünnung, strömt die Luft von dem Nachbarorte zu, der den höchsten Barometerstand hat, und rückt sie wegen dieses Abflusses mehr und mehr von entfernteren Stellen nach, so muss sich im Allgemeinen am ursprünglichen Orte die Richtung des Windes im Sinne des Drehungsgesetzes ändern, weil die später ankommenden Luftschichten einen grössern Weg zurückzulegen haben und dadurch eine stärkere

Ablenkung erfahren. Rückt der Ersatz von Osten oder Westen her, so wird die Aenderung der Richtung am langsamsten, kommt er von Norden oder Süden, am schnellsten erfolgen. West- und Ostwind werden also am längsten, Nord- und Südwind am kürzesten ihre Richtung beibehalten. Endlich findet noch der Umschlag der Richtung auf der nördlichen Erdhälfte schneller bei der Bewegung nach Norden statt, als bei der Bewegung nach Süden, in höheren Breiten eher als in niederen.

Nr. 21. Betrachten wir zuerst den Fall weiter, in dem $\alpha = 0$ oder 180^0 ist, also die anfängliche Bewegung in der Richtung des Parallelkreises stattfindet. Unser Integral geht hier über in

$$\int_0^t \frac{\cos\beta}{\sqrt{1-\cos^2\frac{vt}{r}\sin^2\beta}}\,dt = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\frac{vt}{r}\,tang^2\beta}}\,dt$$

und kann wieder nicht in geschlossener Form bestimmt werden. In der Reihe der Nr. 20 wird für diesen Fall $A = tang^2\beta$, $B = 0$, so dass man erhält

$$\text{3)}\quad \begin{aligned}\varphi = \frac{2\pi t}{24.60.60}\,.\,tang^2\beta\,.\,\frac{v^2t^2}{r^2}\left[-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{120}\,.\,\frac{v^2t^2}{r^2}(4+9\,tang^2\beta)\ldots\right]\\ + arctang\left[tang\frac{vt}{r}\,.\cos\beta\right].\end{aligned}$$

Durch Vergleichung mit der Nr. 18 und der dortigen Reihe für $\int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{vt}{r}\,.\,\sin^2\theta}}$ ergiebt sich, dass beide Resultate in einander übergehen müssen, wenn $tang^2\beta = -\sin^2\theta$ gesetzt wird. Die Resultate müssen in der That aus dem Grunde eine gewisse Uebereinstimmung zeigen, weil unser jetziger specieller Fall auch der der Nr. 18 ist und nur die Ausgangspunkte und die Lagen der Coordinatensysteme in beiden Fällen verschieden sind. Es überrascht auf den ersten Anblick, dass in unserem jetzigen Falle überhaupt eine Ablenkung vorhanden ist, doch liegt der Grund für letztere darin, dass der Punkt sich ohne Einfluss der Erdrotation nicht auf dem Parallelkreise, sondern auf dem grössten Kreise der Erde bewegen würde, welcher durch die anfängliche Geschwindigkeit geht.

Die Ablenkung ist unter unseren Voraussetzungen, wo das erste Glied der Reihe über das Vorzeichen entscheidet, negativ oder wirkt im Sinne von Osten nach Westen; sie wirkt also ebenso, wie wenn der Körper bei uns nach Süden bewegt würde. Dies ist insofern erklärlich, als der Körper im nächsten Moment nach dem Beginne der Bewegung den Parallelkreis verlässt und sich auf seinem grössten Kreise nach Süden wendet. Abgesehen von $\frac{vt}{r}$ sind die nachfolgenden Glieder der Reihe von um so grösserem Einfluss, je grösser β, die geographische Breite des Ausgangspunktes ist. Im Uebrigen kann selbst bis $\beta = 70^0$ und $vt = 100000^m$ nahezu

$$\varphi = \frac{-2\pi t}{24.60.60} \cdot \tfrac{1}{6} \, tang^2\beta \, . \, \frac{v^2t^2}{r^2} + arctang\left[tang\frac{vt}{r} \, . \, cos\beta\right]$$

gesetzt werden, und kann man mit einem entsprechenden Grade der Annäherung noch setzen

$$arctang\left[tang\frac{vt}{r} \, . \, cos\beta\right] = \frac{vt}{r} \, . \, cos\beta\left(1 + \tfrac{1}{3} \, . \, \frac{v^2t^2}{r^2}\right) sin^2\beta.$$

Nr. 22. In dem Falle, wo $\alpha = \frac{\pi}{2}$, also die anfängliche Bewegung in der Richtung des Meridians stattfindet, wird unser Integral

$$= \int \frac{cos\beta}{cos\left(\frac{vt}{r} + \beta\right)} dt,$$

daher in geschlossener Form bestimmbar. Man erhält hier

$$3) \qquad \varphi = \frac{2\pi t}{24.60.60}\left(\frac{r\,cos\beta}{vt} \, Log \, \frac{tang\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right]}{tang\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} - \frac{vt}{2r}\right]} - 1\right).$$

$arctang\left[tang\frac{vt}{r} \, . \, cos\beta \, . \, cos\alpha\right]$ fällt hier ganz weg. Für die Bewegung südwärts ist in unseren Breiten β negativ zu nehmen. Multiplicirt man das φ mit $r.cos\left(\frac{vt}{r} + \beta\right)$, d. h. mit dem Radius des Parallelkreises der Stelle zu t, so erhält man den Abstand und die Ablenkung des bewegten Punktes vom anfänglichen Meridian, und zwar auf den entsprechenden Parallelkreisen und in Längeneinheiten gemessen.

Unsere Reihe für φ geht in diesem Falle über in

$$\varphi = \frac{2\pi t}{24.60.60}\left(\tfrac{1}{2} \, tang\beta \, . \, \frac{vt}{r} + \tfrac{1}{6}(1 + 2\,tang^2\beta) \, . \, \frac{v^2t^2}{r^2} \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{24} \, tang\beta \, (5 + 6 \, . \, tang^2\beta) \, . \, \frac{v^3t^3}{r^3} \ldots\right);$$

sie kann natürlich auch unmittelbar aus dem geschlossenen Integral hergeleitet werden.

Setzt man $vt = 100000^m$, $\beta = 70^0$, so liefert der obere Klammernausdruck des φ den Werth 0,022263, und die zwei ersten Glieder der Reihe des letzten Ausdruckes für φ liefern 0,022240598. Für $\beta = -70^0$, also für die Bewegung nach Süden, wird der erstere Werth $= -0{,}020939$ und der andere $= -0{,}02091668$. Man sieht hieraus, dass bis zur vierten Decimalstelle eine vollständige Uebereinstimmung der beiderseitigen Werthe stattfindet. Diese Uebereinstimmung muss noch grösser werden, wenn $vt < 100000^{m}$ und $\beta < 70^0$ ist, weil in diesem Falle die Reihe mehr convergirt. Wir können nach diesen Beispielen mit einem beträchtlichen Grade der Annäherung für diese Fälle setzen

$$\varphi = \frac{2\pi t}{24.60.60}\left(\tfrac{1}{2}\, tang\,\beta \,.\, \frac{vt}{r} + \tfrac{1}{6}(1 + 2\, tang^2\beta)\,.\, \frac{v^2t^2}{r^2}\right).$$

Dieser Ausdruck ist nicht nur für weitere Schlussfolgerungen innerhalb der gegebenen Grenzen, sondern auch für numerische Bestimmungen dem Ausdrucke mit dem geschlossenen Integral entschieden vorzuziehen. Die logarithmischen Tabellen behalten nämlich für den letztgenannten Ausdruck selbst bei verhältnissmässig kleinen Werthen von vt noch einen grossen Grad der Genauigkeit, während in diesen Fällen $tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$ und $tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} - \frac{vt}{2r}\right)$ so nahe liegen, dass die Tabellen keine genauen Differenzen mehr ergeben und kleine Unterschiede in den Werthen der Logarithmen — und zwar bei demselben vt — das Gesammtresultat um Beträchtliches ändern. Beispielsweise soll hier nur erwähnt werden, dass bei $vt = 1000^{m}$ oder $\frac{vt}{2r} = \frac{\pi}{40000} = 16{,}2''$ und $\beta = 70^0$ der fragliche Ausdruck mit Benutzung der siebenstelligen Logarithmen $= 0{,}001401$ wird, und dass er, wenn zur Annäherung $16{,}2'' = 16''$ gesetzt werden, $-0{,}9881755$ liefert. Umgekehrt verhält sich natürlich die Sache, wenn grosse Werthe von vt in Betracht kommen. Ausserdem lässt der Näherungswerth wieder alle die hierher gehörigen Bemerkungen erkennen, welche am Schlusse der Nr. 20 im Allgemeinen ausgesprochen wurden.

Weil unser jetziger Fall im Allgemeinen eine geschlossene Integration zulässt und insofern von allgemeiner Bedeutung ist, als die Entstehung der Winde vorwiegend in der Richtung von Norden nach Süden und umgekehrt stattfindet, indem in dieser Richtung im Allgemeinen die grössten Temperaturdifferenzen herrschen, so wollen wir denselben noch etwas weiter verfolgen. Die drei Gleichungen der Curve sind:

$$1)\qquad \varrho = f_z,$$

$$2)\qquad z = r\, sin\left(\frac{vt}{r} + \beta\right),$$

$$3)\qquad \varphi = \frac{2\pi t}{24.60.60}\left(\frac{r\cos\beta}{vt}\, Log\, \frac{tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)}{tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} - \frac{vt}{2r}\right)} - 1\right).$$

Wollten wir bestimmen, bis zu welcher Zeit der Körper bei gegebenem v und β unter dem Einflusse der Erddrehung einen Umlauf vollendet, so hätten wir in der Gleichung 3) $\varphi = 2\pi$ zu setzen und nach t

aufzulösen. Dies kann nun nicht ausgeführt werden, ebenso wenig die Aufgabe, bis zu welcher Zeit ein gewisser Meridian überhaupt von dem Körper erreicht wird. Dagegen lässt sich aus der Gleichung 2) sofort bestimmen, wann der Körper an einem bestimmten Parallelkreise ankommt; man darf nur $\frac{vt}{r}+\beta$ gleich der geographischen Breite des Parallels setzen und nach t auflösen.

Ist zu bestimmen, unter welchem Winkel der Körper den Parallelkreis bis zu einem gewissen z-Werthe schneidet, so erhält man zu dem Ende

$$tang\,\delta=\frac{dm}{dp}=\frac{\partial z_t\sqrt{1+\partial f_z^2}}{\partial\varphi_t\sqrt{r^2-z^2}}.$$

Bei der Kugel ist

$$\sqrt{1+\partial f_z^2}=\frac{r}{\sqrt{r^2-z^2}}=\frac{1}{cos\left(\frac{vt}{r}+\beta\right)},\quad \partial z_t=v\,.\,cos\left(\frac{vt}{r}+\beta\right),$$

$$\partial\varphi_t=\frac{2\pi}{24.60.60}\left(\frac{cos\beta}{cos\left(\frac{vt}{r}+\beta\right)}-1\right),$$

daher

$$tang\,\delta=\frac{24.60.60.v}{2r\pi\left(cos\beta-cos\left(\beta+\frac{vt}{r}\right)\right)}.$$

Auch die Geschwindigkeit ist bestimmbar, mit welcher der Körper irgend einen Parallelkreis durchschneidet. Diese Geschwindigkeit ist nämlich

$$c=\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{dm^2+dp^2}}{dt}=\sqrt{(1+\partial f_z^2)\,\partial z_t^2+f^2\,\partial\varphi_t^2}.$$

Bei der Kugel findet sich dieser Werth entsprechend dem Vorausgegangenen

$$c=\sqrt{v^2+\left[\frac{2r\pi}{24.60.60}\left(cos\beta-cos\left(\frac{vt}{r}+\beta\right)\right)\right]^2}.$$

Hat man δ schon voraus bestimmt, so ergiebt sich

$$c=\frac{dm}{dt\,.\,sin\,\delta}=\frac{\sqrt{1+\partial f_z^2}\,.\,\partial z_t}{sin\,\delta}=\frac{v}{sin\,\delta}.$$

Letzteres Resultat kann unmittelbar erhalten werden, wenn man erwägt, dass die Umdrehung der Erde nicht im Stande ist, dem Körper eine Geschwindigkeit in der Richtung des Meridians zu ertheilen, dass diese Geschwindigkeit deshalb stets $=v$ bleibt und die wirkliche Geschwindigkeit daher $=\frac{v}{sin\,\delta}$ werden muss. Ebenso ergiebt sich die erste Formel für c unmittelbar daraus, dass das c sich zusammensetzt aus v und dem Ueberschusse der Rotationsgeschwindigkeiten der Stellen zu $\frac{vt}{r}+\beta$ und β.

Wird β negativ genommen, so erhält man die Gleichungen der Curve für die Bewegung gegen den Aequator hin. Letzterer wird erreicht, wenn $z=0$, also $\frac{vt}{r}-\beta=0$ oder $t=\frac{r\beta}{v}$ ist. Man erhält für diese Stelle

$$\varrho=r,\quad \varphi z=0,\quad \varphi=\frac{2\pi r}{24.60.60.v}\left(\cos\beta\, Log\, tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)-\beta\right),$$

$$tang\,\delta=\frac{v.24.60.60}{2r\pi(\cos\beta-1)},\quad c=\frac{v}{\sin\delta}.$$

$tang\,\delta$ ist hier negativ, δ demnach stumpf, oder c geht nach Südwesten hin.

Wächst t so, dass $\frac{vt}{r}-\beta=\beta$, also $t=\frac{2\beta r}{v}$ wird, so ist

$$\varrho=r\cos\beta,\quad z=r\sin\beta,\quad \varphi=\frac{2\pi r}{24.60.60.v}\left(\cos\beta\, Log\frac{tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}{tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}-2\beta\right),$$

$$tang\,\delta=\infty \text{ oder } \delta=90^0,\quad c=v.$$

Aus $\frac{tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}{tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}=tang^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)$ folgt noch

$$\varphi=\frac{4r\pi}{24.60.60.v}\left(\cos\beta\, Log\, tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)-\beta\right),$$

d. h. φ doppelt so gross als bis zum Aequatorschnitt. Nach diesen Resultaten und weil $tang\,\delta$ für $\frac{vt}{r}>\beta$ abnimmt, muss die Richtung des Körpers nach dem Passiren des Aequators sich der Meridianrichtung wieder nähern und dann mit ihr zusammenfallen, wenn der Parallelkreis erreicht ist, der auf der andern Seite des Aequators liegt und mit dem Anfangsparallel übereinstimmt. Da für diese Stelle $\partial\varphi_t=0$ ist, so hat hier φ ein Minimum oder Maximum; aus dem leicht zu ermittelnden $\partial^2\varphi_t$, sowie aus der Natur der Sache ergiebt sich, dass für $t=\frac{2\beta r}{v}$ Ersteres stattfindet. Von dieser Stelle an wendet sich der Körper wieder östlicher und hält gegen den Südpol hin eine Bewegung ein, die auf der andern Hemisphäre der entspricht, welche der Körper annimmt, wenn er bei uns mit der Geschwindigkeit v nach dem Nordpole bewegt wird. Dass die Bewegung von unserem Standpunkte aus nach Norden in nordöstlicher und nach Süden zuerst in südwestlicher Richtung stattfindet, wurde bereits im Allgemeinen ermittelt. Nimmt man, ähnlich wie bei den Windrichtungen, die Bezeichnung von der Himmelsrichtung her, von welcher der Körper anrückt, so ist die erste Bewegung eine von Südwesten und die andere eine von Nordosten herkommende.

Um auf einige Zahlenbeispiele überzugehen, setzen wir voraus, dass $v = 10^{\mathrm{m}}$, $\beta = 50^0$ sei; dann ergiebt sich für t bei je 1^0 Breitendifferenz $\frac{vt}{r} + 50^0 = 51^0$, $\frac{vt}{r} - 50^0 = -49^0$, also t stets $= \frac{r}{v} \cdot \frac{\pi}{180} = 3$ Std. 5 Min. $11\frac{1}{9}$ Sec. Für 5^0, 10^0 Breitendifferenz erhält man die fünf- oder zehnfache Zeit. Der Aequator wird erreicht in 6 Tag. 10 Std. $19\frac{1}{4}$ Min., der südliche Parallel von 50^0 in der doppelten Zeit.

Bei der Bewegung nach Norden findet sich für die Breiten von 55^0, 60^0 das φ bezüglich $= 13{,}28^0$ und $59{,}37^0$. Von Mainz aus gerechnet, würde der Weg über Königsberg, Tilsit und den nördlichen Theil des Uralgebirges gehen. Bei der Bewegung nach Süden erhielte man für die Breiten von 45^0 und 40^0 die φ-Werthe $-11{,}003^0$ und $-40{,}5^0$, also wird der Weg von Mainz etwas nordwärts von Bordeaux und gegen die Insel Flores hinführen. Der Aequator wird erreicht bei $\varphi = -591{,}554^0$, also nach einem vollständigen Umlauf noch $231{,}5^0$ westlich von dem Meridian zu Mainz, oder $205{,}5^0$ westlich von Ferro, mithin nördlich von Neu-Guinea. Die südliche Richtung stellt sich wieder ein bei $-2.591{,}554^0 = -1183{,}108^0$, oder nach drei Umläufen und bei dem Meridian $+77{,}1^0$ westlich von dem zu Ferro, also ungefähr 20^0 westlich vom Golf von Trinidad in Patagonien. Von dort ist die Bewegung nach dem Südpol analog beschaffen, geht jedoch in südöstlicher Richtung vor sich, wie bei uns nordöstlich nach dem Nordpol. — Die Winkel δ mit den entsprechenden, nach Osten gerichteten Parallelkreisen sind für die Breiten von 55^0 und 60^0 bezüglich $17^0\,19'\,57''$ und $8^0\,36'\,7''$ oder die Bewegung findet bald fast in östlicher Richtung statt, für die Breiten 45^0, 40^0, 0^0 bezüglich $161^0\,26'\,12''$, $170^0\,3'\,37''$ und $176^0\,32'\,23''$, oder die Bewegung geht bald in eine fast westliche oder von Osten herkommende über. Es darf hier nicht überraschen, dass der Winkel von 90^0 rasch so grosse Aenderungen erleidet; der Ueberschuss oder das Zurückbleiben der Umdrehungsgeschwindigkeit für die nachfolgenden Stellen der Erde ist in Bezug auf die Geschwindigkeit von 10^{m} bald so bedeutend, dass die Richtung der letzteren sehr schnell beträchtlich abgeändert wird. Rein östlich oder westlich würde die Bewegung erst am Pol werden können, weil nur hier $\partial \dot{z_t} = v \cos\left(\frac{vt}{r} + \beta\right)$ gleich Null wird.

Endlich erhält man für die Geschwindigkeiten an den Stellen zu 55^0 und 60^0 $33{,}58995^{\mathrm{m}}$ und $66{,}85882^{\mathrm{m}}$; für die an den Stellen zu 45^0, 40^0, 0^0 entsprechend $31{,}4117^{\mathrm{m}}$, $57{,}93341^{\mathrm{m}}$ und $165{,}686^{\mathrm{m}}$. Diese Geschwindigkeit nimmt auf der südlichen Hemisphäre in analoger Weise ab und wird bei 50^0 südlicher Breite wieder 10^{m}. Aus $c = \frac{v}{\sin\delta}$ ist dazu sofort ersichtlich, dass c bei $\delta = 90^0$ ein Minimum ist und dass es immer dasselbe wird, so oft δ denselben oder den Supplementswerth erhält.

Die Abweichung in Längenmass wird erhalten, wenn man den φ-Werth mit dem zugehörigen f multiplicirt.

Statt des obigen Körpers kann man sich wieder eine bewegte Luftschicht denken. Ist hier auch der Widerstand ein sehr beträchtlicher und treten auch noch andere Einflüsse auf, die wir in unserer Formel nicht berücksichtigten, so ist doch aus unseren Ergebnissen zu ersehen, wie rasch unter Umständen die Richtung des Windes durch die Umdrehung der Erde verändert wird und wie durch den Zuwachs von Geschwindigkeit von dieser Seite her etwaige Verluste, die durch die vorhandenen Widerstände entstehen, nicht blos gedeckt, sondern sogar übertroffen werden können und wie daher eine factische Vermehrung der Geschwindigkeit eintreten muss.

Die oben berührte Bewegung auf der südlichen Hemisphäre, wo sich an der Stelle der zweiten Nordrichtung die Bewegung vom Aequator her und gegen den Pol hin unmittelbar aneinander anschliessen, lässt vermuthen, dass auch für unsere Gegenden die Bahnen der Bewegungen nach Süden und Norden miteinander in Verbindung gebracht werden können. Wir lassen zu dem Ende auch negative Werthe von t in den Gleichungen für z und φ zu. Man erhält dann bei der Bewegung nach Norden für diese t-Werthe die Gleichungen — t ist dann nur absolut zu nehmen —

$$z = r\,sin\left(\beta - \frac{vt}{r}\right), \quad \varphi = \frac{2\pi}{24.60.60}\left(\frac{r\cos\beta}{v}\,Log\,\frac{tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}{tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}+\frac{vt}{2r}\right)}+t\right).$$

Durch Vergleichung dieser Werthe mit den Werthen der Bewegung nach Süden, oder mit

$$z = r\,sin\left(\frac{vt}{r} - \beta\right), \quad \varphi = \frac{2\pi}{24.60.60}\left(\frac{r\cos\beta}{v}\,Log\,\frac{tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}{tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}-\frac{vt}{2r}\right)}-t\right)$$

und in Berücksichtigung dessen, dass $tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}$ etc. ist, dass z in beiden Fällen wegen der entgegengesetzten Lage der z-Axe für dieselben Parallelkreise entgegengesetzte Vorzeichen erhält, ergiebt sich, dass man im ersten Falle für jeden negativen Werth von t oder für jeden beliebigen Parallelkreis den gleichen und entgegengesetzten φ-Werth erhält, als im zweiten Falle für den entsprechenden positiven t-Werth oder für den gleichen Parallelkreis. Die Curve der Bewegung nach Norden für die negativen t-Werthe liegt daher mit der Curve der Bewegung nach Süden für die positiven t-Werthe symmetrisch gegen den Meridian zu $t = 0$. Die Geschwindigkeit c und der Winkel δ dieser

Geschwindigkeit mit dem Parallelkreise sind entsprechend einander gleich und es findet nur die Bewegung in beiden Fällen in entgegengesetzter Richtung statt. Während also die Bewegung nach Norden für die positiven t-Werthe in nordöstlicher Richtung mit wachsender Geschwindigkeit weiter geht, kommt sie für die negativen t-Werthe von südöstlicher Richtung her und nimmt ihre Geschwindigkeit ab. Aehnlich giebt die Gleichung für die Bewegung nach Süden in Bezug auf φ gleiche und entgegengesetzte Werthe von denen der Bewegung nach Norden, erstere für negative und letztere für positive t-Werthe genommen, so dass auch hier eine symmetrische Lage der zwei Curven gegen den Meridian zu $t = 0$ vorhanden ist. Die für positive t-Werthe stets schneller nach Südwesten gehende Bewegung kommt hier von Nordwesten her und wird langsamer. Auf diese Art erhält man überhaupt zwei Bahnen, die symmetrisch gegen den Meridian zu $t = 0$ liegen und bei welchen die Punkte zu den positiven t-Werthen der einen mit den Punkten zu den absolut gleichen, aber negativen t-Werthen der andern Bahn auf den gleichen Parallelkreisen liegen.

Durch die zulässige Verwendung der obigen Zahlenresultate erhielten wir sofort, dass der von Mainz über Tilsit etc. weitergehende Körper von Peterwardein und Baku, und dass der südwärts gehende Körper, welcher Bordeaux berührt, von der Südspitze von Grönland und dem Nordcanal der irischen See herkommen müsste. Alle übrigen Schlüsse sind nach den obigen Bemerkungen leicht auf die neuen Zweige der Curve zu übertragen.

Es hält nun nicht schwer, die Curve eines Körpers für den Fall zu bestimmen, dass derselbe an einer bestimmten Stelle der Erdoberfläche in einer beliebigen tangentiellen Richtung mit einer gewissen Geschwindigkeit ankommt und sich überhaupt nach unseren jetzigen Gesetzen bewegt. Aus $v = c.\sin\delta$, wo c und δ als gegebene Grössen anzunehmen sind, ergiebt sich die Geschwindigkeit v in der Richtung des Meridians. Liegt v etwa nach Norden hin und ist β' die geographische Breite des Beobachtungsortes, so hat man $\beta + \frac{vt}{r} = \beta'$ zu setzen und es kann folglich aus $\tang\delta = \frac{v.24.60.60}{2r\pi(\cos\beta - \cos\beta')}$ das β, d. h. die geographische Breite des Ortes ermittelt werden, wo der Körper sich nur nach Norden bewegt und gewissermassen die Bewegung entstanden ist. $\beta + \frac{vt}{r} = \beta'$ giebt die Zeit t, die verflossen ist, bis der Körper von der Ursprungsstelle nach dem Beobachtungsorte gelangte. Durch Einsetzen des gefundenen t-, β- und v-Werthes in die Gleichung für φ erhält man auch die geographische Länge der Ursprungsstelle. In ähnlicher Weise ergeben sich durch Substitution der gefundenen v- und β-Werthe in die Gleichungen für z und φ die Gleichungen der Bewegungscurve überhaupt, und ist dabei nur zu beachten, dass dann das t von dem Moment an gerechnet wird, in dem die Bewegung eine rein nördliche war.

Auch für die letzten Resultate wollen wir ein Zahlenbeispiel angeben. An einem Orte in der Nähe von Bern, dessen nördliche Breite 47^0 und östliche Länge 25^0 ist, wehe ein Südwestwind, welcher mit der Ostrichtung des Parallelkreises einen Winkel von 30^0 bildet, eine Geschwindigkeit von 20^m hat und bei seinem Fortschreiten unseren Bedingungen entspricht; dann erhalten wir, weil in dem Falle $c = 20$, $\beta' = 47^0$, $\delta = 30^0$ ist, nach dem Obigen für die anfängliche, nach Norden gerichtete Geschwindigkeit v desselben 10^m, für die geographische Breite β' der Ursprungsstelle $43^0\,59'\,39''$, für die Zeit t, welche der Wind bis zu dem genannten Orte braucht, 9 St. 16 Min. 38 Sec., und endlich für den φ-Werth dieses Ortes, wenn von der Ursprungsstelle an gerechnet wird, $= 3{,}72^0$. Die letztgenannte Stelle liegt demnach $3{,}72^0$ westlicher als unser gegebener Ort, oder unter $22{,}28^0$ westlicher Länge und ungefähr 44^0 nördlicher Breite, mithin zwischen Nimes und Avignon. Wollte man untersuchen, ob irgend ein anderer Ort auch von diesem bestimmten Winde berührt wird, ohne gerade die ganze Bewegungscurve verfolgen zu müssen, so setzt man in $\beta + \frac{vt}{r} = \beta''$ statt β'' die geographische Breite dieses Ortes, bestimmt daraus t und nun mit Hilfe der Gleichung für φ das letztere und die geographische Länge dazu. Stimmt diese Länge mit der des Ortes überein, so geht der Wind über den Ort weg; ist sie grösser oder kleiner als letztere, so geht der Wind entsprechend östlich oder westlich vorüber. Wenn nun auch bei Luftströmungen sich noch viele Einflüsse geltend machen, welche in unseren Formeln nicht berücksichtigt sind, und daher die obigen Resultate keine absolute Giltigkeit in Anspruch nehmen können, so geben uns dieselben doch einen Fingerzeig, in welch hervorragender Weise die Schweiz von den Wärmeverhältnissen des waldlosen und oft stark erhitzten südlichen Frankreichs beeinflusst werden muss. Es soll nicht gerade behauptet und müsste erst durch Beobachtung ermittelt werden, dass der Ursprung des Föhn dahin verlegt werden muss, aber gewiss ist, dass die beiden Gebiete in abgeschwächter Weise sich ähnlich wie die Aequator- und Polargegenden verhalten müssen.

Es scheint in dem Obigen ganz allgemein die Aufgabe gelöst zu sein, die Bahn eines Körpers zu bestimmen, der unter irgend einem Winkel δ gegen den Parallelkreis mit einer beliebigen Geschwindigkeit c bewegt wird; dem ist aber nicht so. Die Anwendbarkeit unserer Gleichungen setzt voraus, dass der Körper unabhängig von der Umdrehung der Erde eine bestimmte Geschwindigkeit v in der Richtung des Meridians erhält und diese Geschwindigkeit auf allen Meridianen beizubehalten sucht. Die erste Aufgabe ist, wie schon erwähnt wurde, an und für sich eine unbestimmte und führt mit der weitern, der Trägheit der Körper angepassten Bedingung der ebenen Bahn bei nicht rotirender Erde, auf elliptische Integrale.

Nr. 23. In Nr. 20 wurde bereits hervorgehoben, dass das Integral des Ausdruckes für φ allgemein in geschlossener Form nicht angebbar ist und daselbst eine nach Potenzen von $\frac{vt}{r}$ fortschreitende Reihe für dieses Integral aufgestellt. Bezüglich dieser Reihe wurde in Nr. 22 unter der Voraussetzung, dass $\alpha = 90^0$ ist, nachgewiesen, dass bis zu einer beträchtlichen Breite und bedeutendem Werthe von vt — es wurde $\beta = 70^0$ und $vt = 100000^m$ angenommen — die zwei ersten Glieder der Reihe numerische Resultate geben, die für die Anwendung innerhalb der Grenzen hinreichend genau sind. Die Grösse der Reihe $A = tang^2\beta - sin^2\alpha$ hat in dem Falle bei unveränderlichem β ihren kleinsten, die Grösse $B = tang\,\beta\,.\,sin\,\alpha$ ihren grössten Werth. Auch in dem andern extremen Falle, wo $\alpha = 0$ ist, und A seinen grössten und B den kleinsten Werth erhält, genügen nach Nr. 21 diese Glieder für numerische Bestimmungen. Erwägt man nun, dass A und B oder Potenzen dieser Grössen meist nur als Summanden in den Factoren der Glieder der Reihe vorkommen, dass bei geringeren Breiten A und B unter allen Umständen kleiner sind und ihr Einfluss gegen den von $\frac{vt}{r}$ zurücktritt, dass bei höheren Breiten und $\alpha \lesseqgtr 90^0$ B kleiner als der Maximalwerth $tang\,\beta$ ist und der Werth von A dem Minimalwerthe $tang^2\beta - 1$ verhältnissmässig immer näher rückt, so scheint der Schluss gerechtfertigt zu sein, dass in allen Fällen bis zu beträchtlicher Breite und grösseren Werthen von vt die zwei ersten Glieder der Reihe zu numerischen Bestimmungen genügen. Setzen wir noch statt $arctang$ die bis zu gleichen Potenzen von $\frac{vt}{r}$ gehenden Glieder der Reihe oder

$$arctang\left[tang\frac{vt}{r}\,.\,cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta\right] = \frac{vt}{r}\,.\,cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta\left[1 + \frac{v^2t^2}{r^2}\,.\,\frac{1 - cos^2\alpha\,.\,cos^2\beta}{3}\right],$$

wo wir uns auch mit dem ersten Gliede begnügen könnten, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\varphi = \frac{2\pi t}{24.60.60}&\left[\tfrac{1}{2}sin\,\alpha\,.\,tang\,\beta\,.\,\frac{vt}{r} + \tfrac{1}{6}(sin^2\alpha - tang^2\beta + 3\,sin^2\alpha\,.\,tang^2\beta)\,.\,\frac{v^2t^2}{r^2}\right]\\ 3)\qquad &+ \frac{vt}{r}\,.\,cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta\left[1 + \frac{v^2t^2}{r^2}\,.\,\frac{1 - cos^2\alpha\,.\,cos^2\beta}{3}\right].\end{aligned}$$

Das erste Glied des rechten Ausdruckes bestimmt die Aenderung des φ-Werthes, welche durch die Umdrehung der Erde entsteht. Zu dieser Gleichung sind aus Nr. 20 noch $z = r\left(sin\frac{vt}{r}\,.\,sin\,\alpha\,.\,cos\,\beta + cos\frac{vt}{r}\,.\,sin\,\beta\right)$, oder mit derselben Annäherung wie oben

2) $$z = r\left(\frac{vt}{r}\sin\alpha.\cos\beta + \sin\beta\left(1-\frac{v^2t^2}{2r^2}\right)\right)$$

und endlich

3) $$f^2 = \sqrt{r^2 - z^2}$$

zu nehmen.

Sollten die verschiedenen Grössen so bestimmt werden, dass der Körper durch eine bestimmte Stelle geht, die durch die geographische Breite β' und in Bezug auf die Ausgangsstelle durch die geographische Länge φ' bestimmt ist, so hätte man in den obigen Gleichungen φ' statt φ und $r\cos\beta'$ statt z zu setzen. Hierdurch erhielte man zwei Gleichungen zwischen den Grössen v, t und α, so dass eine dieser Grössen unter gewissen Beschränkungen beliebig gewählt werden könnte. Z. B. ergiebt sich aus der Natur der Verhältnisse, dass das α beim Wirken der Erdrotation und bei der Bewegung nach Norden in unseren Breiten sich entweder grösser ergeben wird, oder grösser angenommen werden muss als beim Wegfallen dieser Rotationswirkung. Bei der Bewegung nach Süden verhält sich α umgekehrt. Zu den gleichen Schlüssen führt eine algebraische Betrachtung, bei welcher ausser der obigen Gleichung für φ noch die berücksichtigt wird, die nur das zweite Glied der rechten Seite enthält und den Fall ohne Erddrehung bestimmt. Auch die Werthe von α sind ausgeschlossen, bei welchen vt zu gross würde und daher unsere Näherungsgleichungen nicht mehr ausreichen. Aehnlich ergiebt sich auf doppelte Weise, dass, wenn man etwa $vt = s$ einführt und diesem s einen nicht allzugrossen Werth beilegt, α nur dann bestimmbar ist, wenn s mindestens $= r(\beta' - \beta)$ ist. Die Gleichung für $z = r\cos\beta'$ giebt in diesem Falle α, die Gleichung für φ hierzu das t und $s = vt$ endlich das v. Sehr einfache Resultate können erhalten werden, wenn man sich in den Gleichungen für z und φ nur mit den Gliedern der ersten Dimension von $\frac{vt}{r}$ begnügt, die immer noch einem bedeutenden Grade der Annäherung entsprechen. Geometrisch genommen, liegt im letzten Falle vt in der Tangentialebene der Kugel, welche der Ausgangsstelle entspricht. Die wirkliche Länge der durchlaufenen Strecke könnte nur mit Hilfe der Rectificationsformel

$$L = \int_0^t \sqrt{f^2\,\partial\varphi_t^2 + (1 + \partial f_z^2)\,\partial z_t^2}\,dt$$

bestimmt werden, und könnten hierbei wieder die obigen Näherungsformeln für z und φ Anwendung finden.

Sollte die Abweichung vermöge der Erdumdrehung in Längenmass erhalten werden, so hätte man zu berücksichtigen, dass diese Umdrehung auf den z-Werth keinen Einfluss äussert, dass daher die genannte Längenabweichung nur auf dem Parallelkreise zu z liegt und mithin $= f$ oder

$\sqrt{r^2-z^2}$-mal der Aenderung des φ-Werthes durch die Umdrehung der Erde oder gleich $\sqrt{r^2-z^2}$-mal dem ersten Gliede in der obigen Gleichung für φ ist. Begnügt man sich mit dem Gliede $\frac{1}{2} \sin\alpha . \operatorname{tang}\beta . \frac{vt}{r}$ und setzt entsprechend $z = r\left(\sin\beta + \sin\alpha . \cos\beta . \frac{vt}{r}\right)$, so wird die genannte Längenabweichung auf dem Parallelkreise

$$f\varphi' = r\sqrt{1-\left(\sin\beta + \sin\alpha . \cos\beta . \frac{vt}{r}\right)^2} . \frac{2\pi t}{24.60.60} . \tfrac{1}{2} \sin\alpha . \operatorname{tang}\beta . \frac{vt}{r}.$$

Für die geographische Breite $\beta = 50^0$ der Ausgangsstelle, für $vt = 10000^m$ und bei einer rein nordöstlichen oder rein nordwestlichen Anfangsrichtung der Bewegung oder bei $\alpha = 45^0$ und 135^0 findet sich $f\varphi' = 0{,}1967 . t^{\,m}$. Die Bewegung nach südöstlicher oder südwestlicher Richtung, für welche wieder $\alpha = 45^0$ oder 135^0 und $\beta = -50^0$ zu setzen ist, liefert $f\varphi' = -0{,}1973 . t^m$. Wäre gleichzeitig noch $v = 500^m$, also etwa gleich der Geschwindigkeit einer Kanonenkugel, so wird $t = 20$, und wäre $f\varphi'$ in einem Falle $= 3{,}934^m$ und im andern Falle $= -3{,}946^m$ — eine wohl zu berücksichtigende Distanz. Für $vt = 1000^m$ ergeben sich numerische Werthe, die nahezu $\frac{1}{10}$ der obigen sind.

Am Schlusse der Nr. 20 wurden in Bezug auf die hierher gehörigen φ-Aenderungen verschiedene allgemeine Bemerkungen gemacht; dieselben können zum Theil ohne Weiteres auf die Längenabweichung in die Richtung der Parallelkreise übertragen werden, so z. B. die über den Einfluss der Zeit t, die über die auf der nördlichen Erdhälfte nach rechts und auf der südlichen nach links gehende Lage der Abweichung gegen den nachsehenden Beobachter und die über die Gleichheit der Ablenkung für α und $180-\alpha$. Ebenso ergiebt sich unmittelbar, dass die Abweichung in Längenmass bei der reinen Bewegung nach Süden in unseren Gegenden ein Maximum ist, weil hier ein Maximum der φ-Aenderung noch mit dem grössten Werthe von f multiplicirt wird. Dagegen wird bei der rein nördlichen Bewegung die grösste φ-Aenderung mit dem kleinsten Werthe von f multiplicirt und entscheidet erst eine unmittelbare Untersuchung, ob die Abweichung in Längenmass in der That noch ein Maximum bleibt. Bezüglich des Minimums tritt ebenfalls keine Aenderung ein. Ob die Bewegung nach Süden in unseren Breiten unter sonst gleichen Umständen im Allgemeinen eine kleinere Längenabweichung liefert, als die nach Norden, ist wieder fraglich, weil im ersten Falle die kleinere φ-Aenderung mit einem grössern f und im zweiten Falle die grössere φ-Aenderung mit einem kleinern f multiplicirt wird. Entwickelt man zur Entscheidung dieser Frage $\sqrt{r^2-z^2} = r\sqrt{1-\left(\sin\frac{vt}{r}\sin\alpha . \cos\beta + \cos\frac{vt}{r}\sin\beta\right)^2}$ in die nach $\frac{vt}{r}$ fortschreitende Reihe

$$r\cos\beta\left(1-\frac{vt}{r}\sin\alpha.\tang\beta+\tfrac{1}{2}(\tang^2\beta-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha.\tang^2\beta).\frac{v^2t^2}{r^2}\ldots\right)$$

und multiplicirt diese Reihe mit dem ersten Theile der Reihe von φ in Nr. 19, so erhält man für unsere Abweichung in Längenmass bei der Bewegung nach Norden

$$f\varphi'=\frac{2r\pi t}{24.60.60}\cos\beta.\left[\tfrac{1}{2}\sin\alpha.\tang\beta.\frac{vt}{r}-\tfrac{1}{6}(\tang^2\beta-\sin^2\alpha).\frac{v^2t^2}{r^2}\ldots\right].$$

Für die Bewegung nach Süden ist β negativ zu nehmen. Man sieht hieraus, dass unter unseren Convergenzbedingungen und in unseren Breiten, wo stets $\tang\beta > \sin\alpha$ ist, die Längenabweichung bei der nördlichen Bewegung unter sonst gleichen Umständen sich entgegengesetzt verhält als die φ-Aenderung, d. h. kleiner als bei der südlichen Bewegung ist. Dies Resultat bleibt so lange bestehen, als unter allen Breiten, die grösser als 45^0 sind, von selbst $\tang\beta > \sin\alpha$ ist, als bei $\beta < 45^0$ noch immer diese Bedingung erfüllt sein kann, und schlägt erst in das Gegentheil um, wenn in Gegenden von $\beta < 45^0$, $\sin\alpha > \tang\beta$ ist. Für ein gegebenes β kann das α, welches hier die Grenze bildet, genau bestimmt werden.

Lässt man es bei einer Genauigkeit bis zur ersten Potenz von $\frac{vt}{r}$ bewendet sein, so erhält man für unsere Abweichung

$$f\varphi'=\frac{\pi t}{24.60.60}.\sin\alpha.\sin\beta.vt.$$

Wie schon durch den Umstand angedeutet ist, dass dieser Ausdruck kein r enthält, stellt dieser Ausdruck die Ablenkung unter der annähernden Voraussetzung vor, dass vt gerade ist und der ganze Vorgang in der Tangentialebene zur Ausgangsstelle stattfindet. Hier stellt in der That $\sin\alpha.\sin\beta.vt$ die Aenderung des Radius des Parallelkreises und $\frac{\pi t}{24.60.60}$ den in t zurückgelegten Winkel der Winkelgeschwindigkeit der Erde vor und beide zusammen multiplicirt müssen die verlangte Abweichung geben. Es ist nämlich, wenn f den Radius des Parallelkreises der Anfangsstelle und $f-\varDelta f$ den der Schlussstelle bezeichnet, die fragliche Abweichung $f.\frac{\pi t}{24.60.60}-(f-\varDelta f)\frac{\pi t}{24.60.60}=\frac{\pi t}{24.60.60}.\varDelta f$, oder die ebengenannte. Umgekehrt kann auf diesem Wege schnell die obige Formel unmittelbar erhalten werden.

Bei der letzten Formel ist begreiflicherweise, wenn vom Vorzeichen abgesehen wird, eine Verschiedenheit der Abweichung bei der Bewegung nach Norden oder Süden nicht vorhanden, weil der Unterschied dieser Abweichung erst im darauffolgenden und weggelassenen Gliede beginnt. Bei der Bewegung nach Osten oder Westen erscheint hier aus gleichen Gründen gar kein Ablenkungswerth. Die obigen Bemerkungen über die

Maxima und Minima sind sofort ersichtlich. Sonst gilt noch — und dieses Resultat behält seine Giltigkeit auch bei Berücksichtigung von mehr Gliedern der Reihe —, dass die Abweichung um so grösser, je grösser β ist, d. h. in höheren Breiten grösser als in der Nähe des Aequators. Ein sehr bemerkenswerthes Resultat ist noch, dass β und α miteinander vertauscht werden können, ohne dass unser Ausdruck sich ändert. Wird also an einem Orte mit der geographischen Breite β ein Körper unter dem Winkel α gegen den Parallelkreis bewegt, so ist nach unserer Näherungsformel die Ablenhung dieselbe, als wenn der Körper an einem Orte mit der Breite α unter dem Winkel β gegen den Parallelkreis bewegt wird.

Hat man den Ausdruck $\frac{\pi}{24.60.60} \cdot \sin\alpha$ für alle möglichen α-Werthe berechnet, so lässt sich sofort für ein gegebenes t, vt und β auf die Ablenkung schliessen. Es hält auch nicht schwer, die Lösung geometrisch darzustellen. Zu dem Ende construirt man ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\frac{\pi}{24.60.60} = 0{,}00003636$ und dem $\angle\beta$ der geographischen Breite, betrachtet die dem Winkel β gegenüberliegende Kathete als Hypotenuse eines neuen Dreiecks und giebt diesem noch den Winkel α, oder, wenn α stumpf sein sollte, den Winkel $180-\alpha$ — die dem Winkel α gegenüberliegende Kathete giebt dann, in dem Verhältnisse $1:vt^2$ oder $1:st$ vergrössert, die verlangte Ablenkung. Führt man von vornherein einen Weg von 1000^{m} ein, so ist die erste Hypotenuse $= 0{,}03636^{\text{m}}$ zu setzen und die letzte Kathete in dem Verhältnisse $1:\frac{st}{1000}$ zu vergrössern, um in der Zeichnung sofort die Ablenkung in ihrer wirklichen Grösse zu erhalten.

Um auch einige Zahlenbeispiele zu berühren, sollen die Ablenkungen mit Hilfe der letztgenannten Formel für $\beta = 50^0$, $s = 1000^{\text{m}}$ und $\alpha = 0$ oder 45^0 oder 90^0 angegeben werden. Es ergiebt sich bei der Bewegung nach Norden und Süden, entsprechend den drei Winkeln und abgesehen vom Vorzeichen, welches südwärts negativ ist, $f\varphi' = 0$ oder $0{,}0196958^{\text{m}}.t$ oder $0{,}02785416^{\text{m}}.t$. Das zweite Glied der Reihe für $f\varphi'$ ist, wie unmittelbar ersehen werden kann, bei $\alpha = 0$ am grössten und bei $\alpha = 90^0$ am kleinsten. Man erhält für dieses Glied in unseren drei Fällen die entsprechenden Werthe $-0{,}000001738^{\text{m}}.t$ oder $-0{,}0000011262^{\text{m}}.t$ oder $-0{,}00000051432^{\text{m}}.t$ und daher für die Bewegung nach Norden

$$-0{,}000001738^{\text{m}}.t, \quad +0{,}01969474^{\text{m}}.t, \quad +0{,}02785365^{\text{m}}.t,$$

für die Bewegung nach Süden

$$-0{,}000001738^{\text{m}}.t, \quad -0{,}019697^{\text{m}}.t, \quad -0{,}02785467^{\text{m}}.t.$$

Bei $\alpha = 135^0$ sind die Ablenkungen ebenso gross wie bei $\alpha = 45^0$. Diese Werthe lassen sofort die Richtigkeit der obigen allgemeinen Bemerkungen über die Grösse der Ablenkung erkennen. Wenn $vt = 10000^m$ angenommen wird, so sind die Werthe aus dem ersten Gliede 10 mal und die aus dem zweiten Gliede 100 mal grösser. Für eine Flintenkugel, welche etwa 3 Sec. zum Durchfliegen der 1000^m braucht, wäre die Ablenkung dreimal so gross, als oben angegeben wurde, also z. B. bei der reinen Bewegung nach Norden oder Süden $c. 8^{cm}$, für eine Kanonenkugel, welche 5000^m in 15 Sec. zurücklegt, 75 mal so gross, mithin unter den obigen Umständen $c. 2{,}1^m$.

Eine Bestätigung erhalten die obigen Resultate, wenn man $\beta = 0$ setzt, oder die Bewegung vom Aequator aus erfolgt. Hier wird für $\alpha = 0$, wie es sein muss, auch das zweite Glied der Reihe und also die ganze Ablenkung $= 0$; dann wird für alle anderen α das zweite Glied, welches hier allein die Ablenkung bestimmt, positiv, und vermehrt demnach, der Wirklichkeit entsprechend, die Ablenkung stets den Winkel φ.

Die Abweichung senkrecht zur Richtung der Anfangsgeschwindigkeit ist für den ersten Fall der Annäherung leicht zu bestimmen; sie ist nämlich gleich der Abweichung auf dem Parallelkreis mal $\sin\alpha$, also gleich $\frac{\pi t}{24.60\,60} \sin^2\alpha . \sin\beta . vt$. Bei genauer Bestimmung würde man statt des rechtwinkligen ebenen Dreiecks ein ebenso beschaffenes sphärisches Dreieck erhalten und daraus die Abweichung bestimmen müssen.

Es wurde schon mehrmals angedeutet, dass unsere Formeln, ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand, auch die Ablenkung von Geschossen durch die Umdrehung der Erde geben. Dies ist, streng genommen, nur unter den letzten Voraussetzungen der Fall, wo die Ablenkungscurve in die Tangentialebene des Ausgangspunktes fällt; denn hier kann die Wirkung der Schwere stets senkrecht zu dieser Ebene, also die Bahn des Körpers, abgesehen von anderen Einflüssen, als eine Parabel, und die horizontale Geschwindigkeit, unseren Voraussetzungen gemäss, als constant betrachtet werden. Die oben betrachtete Curve stellt hier die Projection der Curve im Raume vor und die letztere wird erhalten, wenn man in den Punkten der Projectionscurve Senkrechte zu der Tangentialebene errichtet und sie gleich den Lothen macht, welche die reine Parabelbahn zur gleichen Zeit hätte. Aus denselben Gründen wird durch die obige Formel die Ablenkung eines Geschosses für den Moment des Auffallens bestimmt, wenn man statt v eine horizontale Seitengeschwindigkeit, also $e . \cos\gamma$ setzt, wo e die anfängliche Wurfgeschwindigkeit und γ den Elevationswinkel bezeichnet, und statt t die Zeit, die der Körper braucht, um wieder herab zur Erde zu gelangen. Hier ergiebt sich nun sofort das bemerkenswerthe Resultat, dass, wenn nach einem bestimmten Ziele geschossen wird, also $vt = s$ ein gegebenes ist, die Ablenkung um so grösser wird, je grösser der Elevationswinkel ist. Unabhängig von e folgt nämlich aus $t = \sqrt{\frac{2 s . \tang\gamma}{g}}$

für ein grösseres γ ein grösseres t und damit die grössere Abweichung von dem Ziele. Im Zusammenhange damit steht, dass von den zwei Werthen, welche sich aus $\frac{gs}{e^2} = \sin 2\gamma$, bei $gs < e^2$ und gegebenen c und s für γ ergeben, der Werth zwischen 45 und 90^0 im Vergleich zum Werthe zwischen 0 und 45^0 ein soviel mal grösseres t und daher eine soviel mal grössere Ablenkung giebt, als die *cotang* des Winkels zwischen 0 und 45^0 angiebt. Man kann nun für die Längenabweichung aus

$$f\varphi' = \frac{\pi t}{24.60.60} . e . \sin\alpha . \sin\beta . \cos\gamma . t,$$

dann aus $s = e . \cos\gamma . t$ und $t = \frac{2e}{g} \sin\gamma$ verschiedene Formeln angeben, wenn man aus den zwei letzten Gleichungen zwei der Grössen e, t, γ sucht und die Werthe in den ersten Ausdruck einsetzt oder nur eine der letzten Gleichungen verwendet.

In Betreff der umgekehrten Aufgabe, nämlich α, v oder t so zu bestimmen, dass der Körper unter dem Einflusse der Erddrehung an eine bestimmte Stelle kommt, wurden hierher gehörige Aufgaben schon zu Anfang unserer Nummer betrachtet. Man könnte jedoch noch statt des dortigen φ' und β' die Grössen s' und α', d. h. die wirkliche Entfernung des vorgeschriebenen Zieles und den Winkel α', oder den Winkel der Richtung dahin mit dem Parallelkreise einführen. Die dieser Aufgabe zu Grunde liegenden Gleichungen wären dann für unsern ersten Grad der Annäherung, wo die Curve auf der Tangentialebene liegt,

1) $$s'^2 = s^2 + (f\varphi')^2 + 2s(f\varphi') . \cos\alpha,$$

2) $$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{s}{s'}$$

oder

1) $$s'^2 = v^2 t^2 \left(1 + \left(\frac{\pi t}{24.60.60}\right)^2 . \sin^2\alpha . \sin^2\beta + \frac{2\pi t}{24.60.60} . \sin\alpha . \cos\alpha . \sin\beta\right),$$

2) $$\sin\alpha = \frac{s' . \sin\alpha'}{vt}.$$

Man hätte also wieder zwei Gleichungen zwischen den drei Unbekannten v, t und α, so dass wieder eine beliebig gewählt werden könnte. Nimmt man dazu noch den Wurf und die Wurfgleichungen, oder

3) $$v = e . \cos\gamma$$

und

4) $$t = \frac{2e}{g} . \sin\gamma$$

hinzu, so hat man vier Gleichungen mit fünf Unbekannten. Bei gegebenem e, d. h. bei gegebener Geschwindigkeit des Projectils, lassen sich alle anderen Grössen bestimmen. Von besonderer Bedeutung ist hierbei der Werth von α, weil $\alpha - \alpha'$ den Winkel bestimmt, um den die Richtung des Geschützes von der Richtung nach dem Ziele abweichen muss, damit letzteres getroffen wird. Diese Abweichung liegt auf der Nordhälfte der Erde dem Schiessenden zu linken Seite. Es unterliegt keiner Schwierigkeit, die Gleichung zur Bestimmung von α herzuleiten; dieselbe ist jedoch von so complicirter Gestalt, dass sich keine weiteren einfachen Bemerkungen an das knüpfen lassen, was in dieser Beziehung schon erwähnt wurde.

Wollte man die zweiten Beziehungen auf den Wurf anwenden, so wäre es angemessener, statt der parabolischen Wurfbahn eine elliptische zu setzen. Das Fortschreiten der Projection des geworfenen Körpers auf dem grössten Kreise der Bahnebene, in welcher der Körper ohne Einfluss der Erddrehung bleibt, würde dann jedoch nicht mehr mit gleichförmiger Geschwindigkeit, sondern dem zweiten Kepler'schen Gesetze entsprechend stattfinden. Es wären also unsere letzten Formeln, welche dieses gleichförmige Fortschreiten voraussetzen, hier gar nicht mehr anwendbar. Wir wollen in einer spätern Nummer auf diesen Fall wieder zurückkommen.

Nr. 24. Weil die Aufgabe in Nr. 19 dadurch eine gewisse Bedeutung erlangt, dass die ebene Bahn und die constante Geschwindigkeit v den Forderungen des Beharrungsvermögens entsprechen, so sollen hier noch die dortigen Gleichungen dadurch verallgemeinert werden, dass man statt der Kugel irgend eine Rotationsfläche setzt. Die ursprüngliche Kreisbahn des Körpers geht dann in die ebene Bahn über, nach welcher die Ebene, die den Ursprung und die anfängliche Richtung des v enthält, die Rotationsfläche schneidet. Der Ursprung kann irgendwo auf der Rotationsaxe liegen. Sämmtliche Bestimmungen und Bezeichnungen der Nr. 19 in Bezug auf den Anfangszustand, die Lage des Coordinatensystems etc. sollen hier beibehalten werden. Analog den Nrn. 18 und 19 erhält man hier zur Bestimmung unserer Curve die Gleichungen

1) $$\varrho = f_z,$$

2) $$z = r \sin(\psi_t + \mu) . \sin\theta,$$

3) $$\varphi = \int_0^t \omega\, dt + \operatorname{arctang}[\operatorname{tang}\psi_t . \cos\theta].$$

In diesen Gleichungen müssen jedoch erst r, μ, ψ und θ den neuen Verhältnissen gemäss bestimmt werden. Zunächst ist $r = \sqrt{z^2 + f^2}$; dann ist, wie früher, $\mu = \arcsin \frac{z'}{r' \sin\theta} = \arcsin \frac{z'}{\sin\theta \sqrt{z'^2 + f'^2}}$, wo z', f' etc. sich auf den Anfangspunkt beziehen. Aus $r^2\, d\psi^2 + dr^2 = v^2\, dt^2$ folgt weiter

$$d\psi = \sqrt{\frac{v^2\,dt^2 - dr^2}{r^2}}$$

und

$$\psi = \int_0^t \sqrt{\frac{v^2 - (\partial(\sqrt{f^2+z^2})_t)^2}{f^2+z^2}}\,dt = \int_0^t \frac{\sqrt{v^2(f^2+z^2) - (f\,\partial f_z + z)^2\,\partial z_t^2}}{f^2+z^2}\,dt.$$

Endlich ergiebt sich θ auf folgende Weise. Die Normalgleichung der Bahnebene sei $x.\cos\lambda + y.\cos\mu + z.\cos\nu = 0$, wo λ, μ und ν unbekannt sind und $\nu = \theta$ wird. Diese Ebene geht durch den Ausgangspunkt und muss deshalb sein

4) $$f'\cos\lambda + z'\cos\nu = 0.$$

Die Anfangsgeschwindigkeit v bildet mit den drei Axen die Winkel α', β', γ', deren Cosinusse gleich sind $\cos\alpha' = \frac{dx'}{v\,dt} = \frac{df'}{v\,dt} = \frac{\partial f'_z\,dz'}{v\,dt}$, $\cos\beta' = \frac{dy'}{v\,dt} = \cos\alpha$ und $\cos\gamma' = \frac{dz'}{v\,dt}$; dabei ist $dz'^2 + \partial f_{z'}^2\,dz'^2 = v^2\sin^2\alpha.dt^2$, also $dz' = \frac{v\sin\alpha.dt}{\sqrt{1+\partial f_{z'}^2}}$. Nun liegt aber unsere Anfangsgeschwindigkeit in der Bahn, mithin giebt

5) $$\cos\lambda.\frac{\partial f_{z'}}{v\,dt}.\frac{v\sin\alpha.dt}{\sqrt{1+\partial f_{z'}^2}} + \cos\mu.\cos\alpha + \cos\gamma.\frac{v\sin\alpha.dt}{v\,dt\sqrt{1+\partial f_{z'}^2}} = 0.$$

Dazu kommt noch die Richtungsgleichung

6) $$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1.$$

Eliminirt man aus den Gleichungen 4), 5) und 6) das λ und μ, so erhält man

$$\cos\nu = \cos\theta = \frac{f'\sqrt{1+\partial f_{z'}^2}}{\sqrt{(z'^2+f'^2)(1+\partial f_{z'}^2) + (z'\,\partial f_{z'} - f')^2.\,tang^2\alpha}}.$$

Es ist nun auch leicht, daraus $\sin\theta$ zu bestimmen.

Setzt man den Werth von ψ in die Gleichung 2) für z ein, so erhält man

2) $$z = \sqrt{f^2+z^2}\,\sin\left(\int_0^t \frac{\sqrt{v^2(f^2+z^2) - (f\,\partial f_z + z)^2\,\partial z_t^2}}{f^2+z^2}\,dt + \mu\right)\sin\theta.$$

Diese Gleichung ist nur scheinbar nach z aufgelöst, weil die rechte Seite noch z, ja sogar noch ∂z_t enthält. Es ist daher zunächst z zu bestimmen, zumal auch noch ψ und φ sich erst mit Hilfe des z erhalten lassen. Zu dem Ende lösen wir in der letzten Gleichung zunächst nach dem Integral auf, leiten auf beiden Seiten nach t ab und suchen aus der erhaltenen Differentialgleichung ∂z_t; es wird dann

$$\partial z_t = v \sqrt{\frac{(f^2+z^2)(f^2 sin^2\theta - z^2 cos^2\theta)}{f^2(f-z\,\partial f_z)^2 + (f\,\partial f_z + z)^2 (f^2 sin^2\theta - z^2 cos^2\theta)}}$$

und daraus

$$2)\quad t = \frac{1}{v}\int\limits_0^z \sqrt{\frac{f^2(f-z\,\partial f_z)^2 + (f\,\partial f_z + z)^2(f^2 sin^2\theta - z^2 cos^2\theta)}{(f^2+z^2)(f^2 sin^2\theta - z^2 cos^2\theta)}}\,dz.$$

Um z zu finden, dürfte die letzte Gleichung nur nach z aufgelöst werden.

Aus der Gleichung $z = \sqrt{f^2+z^2}\,.\,sin(\psi+\mu)\,.\,sin\,\theta$ lässt sich ψ und damit das zugehörige Integral finden. Es ergiebt sich hier

$$\psi = \int\limits_0^t \frac{\sqrt{v^2(f^2+z^2) - (f\,\partial f_z^{\,2} + z^2)\,\partial z_t^{\,2}}}{f^2+z^2}\,dt$$

$$= arcsin\,\frac{z}{sin\,\theta\sqrt{f^2+z^2}} - arcsin\,\frac{z'}{sin\,\theta\sqrt{f'^2+z'^2}},$$

ein Resultat, dessen Richtigkeit unmittelbar ersichtlich ist. Wollte man die Function von t für ψ haben, so müsste der vorher bezeichnete z-Werth eingesetzt werden.

Das Einsetzen des oben bestimmten ψ-Werthes in die Gleichung 3) giebt in ähnlicher Weise wie in Nr. 19

$$3)\quad \varphi = \int\limits_0^t \omega\,dt$$

$$+\, arctang\left(\frac{z\sqrt{f'^2 sin^2\theta - z'^2 cos^2\theta} - z'\sqrt{f^2 sin^2\theta - z^2 cos^2\theta}}{z z' + \sqrt{(f'^2 sin^2\theta - z'^2 cos^2\theta)(f^2 sin^2\theta - z^2 cos^2\theta)}}\,.\,cos\,\theta\right).$$

Wird in die letzte Gleichung noch statt t die in der letzten Gleichung 2) gefundene Function von z eingesetzt, so erhält man die Gleichung der windschiefen Fläche, die in Verbindung mit der Rotationsfläche die verlangte Curve bestimmt. Sonst ist noch einfach zu übersehen, wie sich die Formeln gestalten, wenn v nicht constant, sondern eine Function von t oder z ist.

Setzt man $f^2+z^2=r^2$ und ω constant, so gehen unsere Resultate in die der Nr. 19 über.

Für die ursprüngliche Bewegung längs des Meridians ist $\alpha = 90^0$ und wird $cos\,\theta = 0$ oder $\theta = 90^0$, dann $t = \frac{1}{v}\int\limits_0^z \sqrt{1+\partial f_z^{\,2}}\,.\,dz$. Letzteres Resultat kann aus $\sqrt{\partial z_t^2 + \partial f_z^{\,2}\,.\,\partial z_t^2} = v$ unmittelbar erhalten werden. Weiter wird

$$\psi = arcsin \frac{z}{\sqrt{f^2+z^2}} - arcsin \frac{z'}{\sqrt{f'^2+z'^2}}$$

und endlich

$$\varphi = \int_0^t \omega \, dt.$$

Der andere Fall, wo $\alpha = 0$ ist, giebt keine so einfachen Resultate.

Auch die Aufgabe der Nr. 20 kann sofort den jetzt gegebenen Stücken angepasst werden, wenn man in der Gleichung 3) für φ statt ω den Ausdruck $\frac{p - f\omega}{f} = \omega \frac{f' - f}{f}$ setzt. Die beiden anderen Gleichungen für t oder z und ϱ bleiben dieselben, wie oben.

(Schluss folgt.)