Werk

Titel: Zeitschrift für Mathematik und Physik

Verlag: Teubner

Jahr: 1876

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 MATH I, 755:21

Werk Id: PPN599415665_0021

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN599415665_0021|LOG_0030

XII.

Beziehungen zwischen Meridian- und Contourcurve orthogonal dargestellter Rotationsflächen.

Von

R. Müller,

Studirender der Mathematik am königl. Polytechnikum Dresden.

(Hierzu Taf. V, Fig. 1—9.)

In den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien vom Jahre 1866 giebt Herr Niemtschik folgende Construction der Contouren orthogonal dargestellter Rotationsflächen an: Sind von der Rotationsfläche die Axe AA' und der Meridian M gegeben (Fig. 1), so projicire man die Fläche auf eine zu AA' parallele Verticalebene E und lege diese Projection um die Horizontalspur E' von E in den Grundriss nieder, so dass $A_3A'_3$ die Projection der Axe und der Meridian M die Contour der Rotationsfläche auf der umgelegten Ebene darstellt. Hierauf ziehe man einen beliebigen Parallelkreis $p_3m_3q_3 \perp A_3A'_3$, sowie die Tangente p_3s_3 und die Normale p_3n_3 der Curve M, bestimme die Punkte s_1, s_2, n_1, n_2 auf $A_1A'_1$, resp. $A_2A'_2$, und beschreibe eine Kugel, welche die darzustellende Fläche in dem genannten Parallelkreise berührt, also n zum Mittelpunkte hat. Legt man an die als Grundriss- und Aufrissprojection dieser Kugel auftretenden Kreise von s_1, resp. s_2 aus die Tangenten $s_1\varphi_1$, $s_1\varphi'_1$, $s_2\psi_2$, $s_2\psi'_2$, so sind φ_1 und φ'_1 Punkte der Grundrisscontour, ψ_2 und ψ'_2 Punkte der Aufrisscontour.

Diese Construction kann noch folgendermassen abgeändert werden. Die Punkte φ und φ' sind die Schnittpunkte des grössten horizontalen Kugelkreises mit dem Parallelkreise der Rotationsfläche. Zieht man $n_3\varphi_3$ parallel $A_1A'_1$, so ist $n_3\varphi_3$ die seitliche Projection dieses Kugelkreises und φ_3 diejenige von φ und φ'; mithin erhält man φ_1 und φ'_1, indem $\varphi_3\varphi_1 \perp A_1A'_1$ und $n_1\varphi_1 = n_1\varphi'_1 = n_3p_3$ macht. Die Punkte ψ und ψ' sind ferner die Schnittpunkte des Parallelkreises mit demjenigen grössten Kugelkreise, dessen Ebene parallel zum Aufriss ist. Denkt man sich nun die Grundrissebene parallel zu sich selbst so verschoben, dass $\varphi_1\varphi'_1$ Grundrissspur der Ebene des Parallelkreises wird, so ergiebt sich die

Durchschnittslinie der Ebene des Parallelkreises mit der des Kugelkreises, indem man $n_1 t_1$ und $n_2 t_2$ parallel zur Projectionsaxe zieht und von t_2 auf $A_2 A'_2$ die Senkrechte $t_2 \psi_2$ fällt. Schlägt man alsdann von n_2 aus mit dem Radius $n_3 p_3$ einen Kreis, welcher $t_2 \psi_2$ in ψ_2 und ψ'_2 trifft, so sind ψ_2 und ψ'_2 die gesuchten Contourpunkte*.

Aus dieser Construction folgt, dass φ_3 ein Punkt der seitlichen Projection der auf der Rotationsfläche liegenden Grundrisscontourlinie ist. Es soll überhaupt in den folgenden Betrachtungen diejenige Linie, in welcher die verticalen Projectionsstrahlen die Fläche berühren, Grundrisscontourlinie, die Grundrissprojection derselben aber Grundrisscontourcurve oder Grundrisscontour genannt werden.

Denkt man sich zu allen Punkten n_3 der seitlichen Projectionsebene nach einer der angeführten Methoden alle Punkte φ_1 resp. ψ_2 der Grundriss- resp. Aufrissebene bestimmt, so werde in Zukunft unter Meridiansystem die Gesammtheit aller Punkte der seitlichen Projectionsebene, unter Grundriss- resp. Aufrisscontoursystem die Gesammtheit aller Punkte der Grundriss- resp. Aufrissebene verstanden.

Aus der zuerst angegebenen Construction geht hervor, dass $n_1 \varphi_1$, $n_1 \varphi'_1$, $n_2 \psi_2$, $n_2 \psi'_2$ Normalen der bezüglichen Contourcurven sind. Betrachtet man also die Punkte p_3, q_3, φ_1, φ'_1, ψ_2, ψ'_2 als entsprechende Punkte, so ergiebt sich der Satz: Entsprechende Punkte im Meridian- und Contoursystem besitzen in Bezug auf die Projectionen der Rotationsaxe gleichlange Normalen.

Wie man sofort erkennt, entsprechen nicht allen Punkten der Meridiancurve Punkte der Contourcurven, da s_1 oder s_2, von denen man Tangenten an die betreffenden Kreise zu ziehen hat, innerhalb der letzteren liegen können. Dann werden auch $\varphi_3 \varphi_1$, resp. $t_2 \psi_2$ von den Kreisen nicht mehr geschnitten. — Bezeichnet man den von $A_1 A'_1$ und $A_3 A'_3$ gebildeten spitzen Winkel, d. h. den Neigungswinkel der Rotationsaxe gegen die Grundrissebene, mit h, so besitzen alle Punkte der Meridiancurve, deren Normalen mit $A_3 A'_3$ einen Winkel, kleiner als h, einschliessen, im Grundrisscontoursystem keine entsprechenden Punkte. Diejenigen Punkte der Meridiancurve, deren Normalen mit $A_3 A'_3$ den Winkel h bilden, liefern im Grundrisscontoursystem Punkte auf $A_1 A'_1$.

Eine analoge Beziehung besteht zwischen der Meridian- und Aufrisscontourcurve.

Der Umstand, dass möglicherweise einem Punkte im Meridiansystem gar kein Punkt im Contoursystem entspricht, wird bei den meisten noch zu entwickelnden Sätzen zu berücksichtigen sein, auch wenn derselbe nicht in jedem Falle von Neuem erwähnt werden wird.

---

* Burmester, Theorie und Darstellung der Beleuchtung etc., Leipzig 1875; S. 114.

Man kann nun auch, wie bisher die Meridiancurve, eine der Contourcurven, z. B. die im Grundrisse, als gegeben betrachten und hierzu die Meridian- und Aufrisscontourcurve bestimmen.

Um z. B. zu dem Punkte φ_1 den entsprechenden p_3 im Meridiansystem zu finden, construire man zunächst die Normale $\varphi_1 n_1$ der Grundrisscontourcurve, ziehe $n_1 n_3$ und $\varphi_1 \varphi_3 \perp A_1 A'_1$, $n_3 \varphi_3$ parallel $A_1 A'_1$, $\varphi_3 p_3 \perp A_3 A'_3$ und mache $p_3 n_3 = \varphi_1 n_1$. Hierbei entspricht jedem Punkte der Grundrisscontour ein Punkt des Meridians, denn es ist stets $n_3 \varphi_3 < n_1 \varphi_1$, folglich um so mehr $m_3 n_3 < n_1 \varphi_1$. — Ist $n_1 \varphi_1$ parallel $A_1 A'_1$, so entspricht dem Punkte φ_1 ein unendlich ferner Punkt im Meridiansystem.

Soll sich ferner zu φ_1 ein Punkt ψ_2 im Aufrisscontoursystem ergeben, so muss $n_2 \mu_2 \leqq n_1 \varphi_1$ sein. Bezeichnet man also die von $A_1 A'_1$ und $A_2 A'_2$ mit der Projectionsaxe gebildeten spitzen Winkel bezüglich mit α und β und $\angle \varphi_1 n_1 s_1$ mit γ, so erhält man für das Vorhandensein des Punktes ψ_2 die Bedingung

$$n_1 \varphi_1 \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \cos\gamma \leqq n_1 \varphi_1 \quad \text{oder} \quad \cos\gamma \leqq \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Hieraus folgt: So lange α kleiner als β ist, entspricht jedem Punkte im Grundrisscontoursystem ein Punkt im Aufrisscontoursystem. Ist dagegen α grösser als β, so entsprechen nicht allen Punkten der Grundrisscontour Punkte der Aufrisscontour; bei

$$\cos\gamma = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

erhält man alsdann einen auf $A_2 A'_2$ gelegenen Punkt.

Die eben angeführte Gleichung liefert eine einfache Bestimmung des auf $A_2 A'_2$ liegenden Punktes der Aufrisscontour, wenn die Grundrisscontour gegeben ist und man sich der seitlichen Projection nicht bedienen will.

Ist α kleiner als β und nur die Grundrisscontour der Rotationsfläche, aber nicht ihr Meridian bekannt, so hat die aus der Grundrisscontour entwickelte Aufrisscontour mit $A_2 A'_2$ keinen Punkt gemein. — Bei α gleich β sind Aufriss- und Grundrisscontour congruent.

In den folgenden Betrachtungen wird es unsere Aufgabe sein, zu gegebenen Meridian- oder Contourcurven die entsprechenden Curven in den beiden anderen Systemen zu bestimmen.

1. Im Meridiansystem sei ein Punkt P_3 im Abstande a von $A_3 A'_3$ gegeben. (Fig. 2.) Da man jeden Punkt als einen unendlich kleinen Kreis, als einen sogenannten Punktkreis, auffassen kann, so folgt hieraus, dass P_3 eine unendlich dünne Ringfläche erzeugen muss. Wie aus der darstellenden Geometrie bekannt ist, projicirt sich aber jede schief-

gestellte Ringfläche als Aequidistante einer Ellipse. Diese Curve muss also in dem vorliegenden Falle für einen Punktkreis in eine Ellipse übergehen. Man gelangt mithin zu dem Satze: Jedem als Punktkreis aufgefassten Punkte im Meridiansystem entspricht eine Ellipse im Contoursystem. Die Halbaxen dieser Ellipse sind a und $a \sin h$ im Grundriss, a und $a \sin v$ im Aufriss, wobei v den Neigungswinkel der Rotationsaxe gegen die Aufrissebene bezeichnet.

Liegt P_3 auf $A_3A'_3$, so degenerirt auch die Contourellipse in einen auf der betreffenden Projection der Rotationsaxe liegenden Punkt. — Die seitliche Projection der Grundrisscontourlinie fällt mit der durch P_3 gehenden Senkrechten P_3Q_3 zusammen.

Einem zu P_3 symmetrisch liegenden Punkte P'_3 entspricht dieselbe Ellipse im Contoursystem.

Da überhaupt Meridian- und Contourcurve in Bezug auf die Projectionen der Rotationsaxe symmetrisch sind, so wird es in Zukunft genügen, nur eine Hälfte der betreffenden Curven zu betrachten.

In Fig. 2, wie in den folgenden Figuren ist der Einfachheit wegen die Aufrisscontour weggelassen, die Grundrisscontour dagegen in eine bequemere Lage gebracht worden.

Nimmt man umgekehrt im Grundrisscontoursystem einen Punktkreis P_1 in der Entfernung a von $A_1A'_1$ an (Fig. 3), so erhält man Punkte der Meridiancurve, indem man durch P_1 alle möglichen Normalen zieht und dann die bekannte Construction anwendet. Entspricht der Normale P_1Q_1 die Normale R_3Q_3 der Meridiancurve, und bezeichnet man R_3M_3 mit x und O_3M_3 mit y, so ist

$$M_3P_3 = Q_3P_3 \sin h$$

mithin

$$y = Q_3P_3 \sin h \tan h$$

oder

$$Q_3P_3 = \frac{y}{\sin h \tan h}$$

und

$$Q_3M_3 = \frac{y}{\tan^2 h}.$$

Dann ergiebt sich aus $\triangle R_3M_3Q_3$

$$x^2 + \frac{y^2}{\tan^4 h} = a^2 + \frac{y^2}{\sin^2 h \tan^2 h}$$

oder

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a \tan h}\right)^2 = 1.$$

Hieraus folgt der Satz: Jedem als Punktkreis aufgefassten Punkte im Contoursystem entspricht eine Hyperbel im Meridiansystem. Der Asymptotenwinkel der vorliegenden Hyperbel beträgt $2h$; P_1O_3 ist die eine Asymptote; die Hauptaxe der Hyperbel steht senkrecht auf $A_3 A'_3$. — Das gewonnene Resultat wird auch durch die Anschauung bestätigt. Bringt man nämlich ein einfaches Rotationshyperboloid in eine solche Lage, dass eine Mantellinie senkrecht auf der Grundrissebene steht, so degenerirt seine Grundrisscontour in zwei Punkte P_1 und P'_1, denn die Projection jeder Mantellinienschaar umhüllt einen Punkt. — Da die vorliegende Fläche ein Rotationshyperboloid ist, so ergiebt sich aus einem später noch zu beweisenden Satze, dass die dem Punkte P_1 entsprechende Aufrisscontourcurve bei $v > h$ oder $\alpha > \beta$ eine Ellipse mit den Halbaxen

$$a \text{ und } a\frac{\sqrt{\sin(v+h)\sin(v-h)}}{\cos h},$$

bei $v = h$ ein Punkt und bei $v < h$ eine Hyperbel sein muss.

Die Gerade $O_3 P_1$ ist zugleich die seitliche Projection der Grundrisscontourlinie, d. h. der beiden verticalen Mantellinien.

2. Hat man im Meridiansystem eine beliebige Curve σ, so entspricht derselben in einem der Contoursysteme eine Curve Σ, und dann stehen σ und Σ in einer interessanten Beziehung, welche jedoch nicht zu den bisher eingehender behandelten geometrischen Beziehungen gehört. Dieselbe ist ein specieller Fall der von Herrn Lie aufgestellten räumlichen Reciprocität. (Siehe die Abhandlung dieses Autors „Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen", im V. Bande der Math. Ann.) Es wird daher nöthig sein, vorerst einige Hauptsätze aus dieser geometrischen Beziehung anzuführen. Herr Lie geht von den Gleichungen aus

$$F_1(xyz\,XYZ) = 0$$

und

$$F_2(xyz\,XYZ) = 0,$$

wobei xyz und XYZ die Punktcoordinaten zweier Räume r und R bedeuten. Durch diese beiden Gleichungen werden die Räume r und R so aufeinander bezogen, dass den Punkten des einen Raumes die Curven eines Complexes im zweiten Raume entsprechen. Complexcurven, die durch einen gegebenen Punkt gehen, entsprechen den Punkten derjenigen Curve, die dem gegebenen Punkte zugeordnet ist. Zwei von Complexcurven umhüllte Curven C und c in R und r stehen in solcher gegenseitiger Beziehung, dass den Punkten der einen diejenigen Complexcurven entsprechen, welche die zweite umhüllen.

Einen speciellen Fall dieser Reciprocität gründet Plücker auf die Interpretation der Gleichung

$$F(xy\,XY) = 0$$

(Analytisch-geometrische Entwickelungen Bd. II, S. 251).

Hierbei bilden die einem Punkte xy in dem einen von zwei ebenen Systemen conjugirte Punkte XY im andern System eine Curve C, die durch die Gleichung

$$F(xy\,XY) = 0$$

dargestellt wird, wenn xy als Parameter, XY hingegen als laufende Coordinaten aufgefasst werden. Zu dieser von Plücker behandelten Reciprocität gehört nun auch die Beziehung, welche zwischen Meridian- und Contourcurve orthogonal dargestellter Rotationsflächen stattfindet, und zwar gelten analog den von Herrn Lie aufgestellten folgende Sätze: Den Punkten des Meridiansystems entspricht ein Complex homothetischer Ellipsen im Contoursystem, und den Punkten des Contoursystems ein Hyperbelcomplex im Meridiansystem.

Complexellipsen, die durch einen gegebenen Punkt gehen, entsprechen den Punkten derjenigen Complexhyperbel, welche dem gegebenen Punkte zugeordnet ist, und umgekehrt. Hat man im Meridian- und Contoursystem zwei einander zugeordnete Curven σ und Σ, so entspricht den Punkten von σ ein Ellipsencomplex, welcher Σ einhüllt, und den Punkten von Σ ein Hyperbelcomplex, von dem σ umhüllt wird.

Aus früheren Betrachtungen ergiebt sich ferner: Dem Berührungspunkte mehrerer Meridiancurven ist der Berührungspunkt der entsprechenden Contourcurven zugeordnet; dagegen entsprechen dem Schnittpunkte mehrerer Meridiancurven auf den betreffenden Contourcurven verschiedene Punkte der dem Schnittpunkte zugeordneten Complexellipse, und umgekehrt.

Eine analoge Beziehung besteht zwischen dem Grundriss- und Aufrisscontoursystem.

Ist die Meridiancurve bekannt, so lässt sich in folgender Weise die Contourcurve analytisch bestimmen. Die Gleichung der Meridiancurve sei in Bezug auf einen auf $A_3 A'_3$ liegenden Punkt M_3 als Coordinatenanfang und $A_3 A'_3$ als Abscissenaxe (Fig. 5)

I) $$y = f(x).$$

Zu einem beliebigen Punkte p_3 dieser Curve mit den Coordinaten x und y werde der entsprechende Punkt φ_1 im Grundrisscontoursystem bestimmt. Die Coordinaten von φ_1 seien für M_1 als Anfangspunkt und $A_1 A'_1$ als Abscissenaxe ξ und η. Dann ist wegen der Gleichheit der Normalen $p_3 n_3$ und $\varphi_1 n_1$

1) $$y\sqrt{1+y'^2} = \eta\sqrt{1+\eta'^2}.$$

Ferner ist

$$n_3 m_3 = n_1 \mu_1 \cos h$$

oder

2) $$y y' = \eta \eta' \cos h.$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) folgt durch Elimination von η'

II) $$y^2 (\cos^2 h - y'^2 \sin^2 h) = \eta^2 \cos^2 h.$$

Da

$$\xi = r m_3 + m_3 s$$

($r m_3 s$ parallel $A_1 A'_1$) ist, so ergiebt sich, weil $\angle n_3 p_3 m_3$ als negativ in Rechnung gebracht werden muss,

III) $$x \cos^2 h - y y' \sin^2 h = \xi \cos h.$$

Man erhält nun die Gleichung der Contourcurve, indem man x und y zwischen den Gleichungen I), II) und III) eliminirt. Ein ähnliches Verfahren ist anzuwenden, wenn die Gleichung der Meridiancurve in der unentwickelten Form

$$f(x, y) = 0$$

gegeben ist.

Bezeichnet man $\varphi_3 m_3$ mit $\mathfrak{y}$ und $M_3 m_3$ mit $\mathfrak{x}$, so ist

IV) $$\mathfrak{y} = y y' \tan h$$

und

V) $$\mathfrak{x} = x.$$

Aus I), IV) und V) kann die Gleichung der seitlichen Projection der Grundrisscontourlinie gefunden werden.

3. Eine Gerade im Meridiansystem kann als Mantellinie einer Rotationskegelfläche aufgefasst werden, und hieraus folgt, dass einer Geraden im Meridiansystem eine Gerade im Contoursystem entspricht. Aus naheliegenden Gründen gilt hierbei die Beschränkung, dass alle Meridiangeraden, die mit $A_3 A'_3$ einen Winkel einschliessen, der grösser ist als $(90^0 - h)$, keine entsprechende Contourgerade im Grundrisse besitzen. Schneidet eine Meridiangerade $A_3 A'_3$ unter dem Winkel $(90^0 - h)$, so degenerirt die entsprechende Contourgerade im Grundrisse in einen auf $A_1 A'_1$ liegenden Punkt. — Bezeichnet man den Winkel, den die Meridiangerade mit $A_3 A'_3$ bildet, mit μ, und den, welchen die Grundrisscontourgerade mit $A_1 A'_1$ einschliesst, mit ν, so ist

$$\sin \nu = \frac{\sin \mu}{\cos h}.$$

Parallelen Meridiangeraden entsprechen also parallele Contourgerade. — Gehen mehrere Meridiangerade durch denselben Punkt von $A_3 A'_3$, so treffen die entsprechenden Contourgeraden in einem Punkte von $A_1 A'_1$, resp. $A_2 A'_2$ zusammen.

Mit Rücksicht auf den letzten der unter 2 angeführten Sätze ergiebt sich ferner: Einem Strahlenbüschel im Meridiansystem entspricht im Contoursystem eine Schaar von Tangenten, welche die dem Büschelmittelpunkte zugeordnete Ellipse umhüllen. Als Umkehrung dieses Satzes erhält man: Einem Strahlenbüschel in dem einen Contoursystem entspricht eine Schaar von Hyperbeltangenten im Meridiansystem und eine Schaar von Ellipsen- oder Hyperbeltangenten, oder wieder ein Strahlenbüschel im andern Contoursystem. Die beiden zuletzt angegebenen Sätze lassen sich in folgenden vereinigen: Einem Strahlenbüschel erster Ordnung in dem einen System entsprechen im Allgemeinen Strahlenbüschel zweiter Ordnung in den beiden anderen Systemen.

4. Wählt man als Meridian eine Parabel, deren Axe mit $A_3 A'_3$ zusammenfällt (Fig. 4), so wird ein Rotationsparaboloid erzeugt, und die Contouren dieser Fläche sind bekanntlich im Allgemeinen wieder Parabeln. Der Scheitel T_1 der Grundrisscontourparabel wird gefunden, indem man an den Meridian eine zu $A_1 A'_1$ senkrechte Tangente $T_3 T_1$ legt. — Bezeichnet man den Halbparameter des Paraboloids, also auch des Meridians, mit p, so ergiebt sich aus der Construction, dass die Subnormale, also auch der Halbparameter der Contourparabeln, in Grundriss und Aufriss $p\, sec\, h$, resp. $p\, sec\, v$ sein muss. Diese Beziehung liefert ein Mittel, um ein Rotationsparaboloid ohne Benutzung seitlicher Projection orthogonal darzustellen, wenn gegeben sind die Axe AA', der Scheitel B und der Halbparameter p. Man würde nämlich T_1 finden können, wenn $B_1 T_1$ bekannt wäre. Zieht man nun $B_3 C_3$ parallel und gleich $B_1 T_1$, so ist

$$B_3 C_3 = B_1 T_1 = \frac{p}{2} \tan h \sin h.$$

Hiernach ist $B_1 T_1$ zu construiren. Bequemer ist es jedoch, zunächst den Brennpunkt f_1 der Grundrisscontourparabel zu ermitteln. Dann erhält man

$$B_1 f_1 = T_1 f_1 - B_1 T_1 = \frac{p}{2} \sec h - \frac{p}{2} \sec h \sin^2 h = \frac{p}{2} \cos h.$$

Es ergiebt sich also folgende Construction: Man mache $\angle A_1 B_1 D = h$, $B_1 D = \frac{p}{2}$, $Df_1 \perp A_1 A'_1$, $DE \perp B_1 D$ und $f_1 T_1 = E B_1$. Im Aufriss hat man analog zu verfahren.

Es kann nun noch erwünscht sein, die dargestellte Fläche durch einen Parallelkreis zu begrenzen, und zwar wiederum ohne Benutzung seitlicher Projection. Soll die als Horizontalprojection des Parallelkreises auftretende Ellipse die Grundrissparabel in dem Punkte P_1 berühren, so ziehe man in P_1 die Normale $P_1 Q$ und fälle auf $A_1 A'_1$ das Loth $P_1 R$. Macht man dann $\angle SQR = h$, $SR \perp SQ$ und $SO_1 \perp A_1 A'_1$, so ist, wenn wir auf Fig. 1 zurückblicken, O_1 Ellipsenmittelpunkt und SO_1 Richtung der grossen Axe. Legt man hierauf in P_1 an die Contourcurve eine Tangente, welche SO_1 in U trifft, und fällt von P_1 auf SO_1 ein Loth

$P_1 V$, so ist UV Subtangente des Punktes P_1 in Bezug auf die Ellipse, deren grosse Halbaxe mit a bezeichnet werde. Dann ist

$$UV = \frac{a^2}{VO_1},$$

also

$$a = \sqrt{UV \, . \, VO_1}.$$

Hiernach kann a construirt werden. Die kleine Halbaxe ist $a \sin h$. — Die angegebene Construction lässt sich für jede beliebige Curve anwenden. Für den speciellen Fall der Parabel kann man sie natürlich noch vereinfachen.

5. Ist als Meridianfigur eine Ellipse mit der grossen Halbaxe a und der kleinen b gegeben, wobei a mit $A_3 A'_3$ zusammenfällt, so sind die Contourcurven bekanntlich wieder Ellipsen. Für diesen Fall gehen die unter 2 angeführten Gleichungen I), II) und III) über in

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$y^2 \left(\cos^2 h - \frac{b^2 (b^2 - y^2)}{a^2 y^2} \sin^2 h \right) = \eta^2 \cos^2 h,$$

$$x \cos^2 h + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, . \, \frac{b}{a} \, . \, \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sin^2 h = \xi \cos h,$$

und hieraus folgt als Gleichung der Grundrisscontourellipse

$$\frac{\xi^2}{a^2 \cos^2 h + b^2 \sin^2 h} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Diese Gleichung liefert wiederum ein Mittel, um die Contouren des Rotationsellipsoids ohne Benutzung seitlicher Projection zu construiren, wenn der Mittelpunkt M, a und b gegeben sind. (Fig. 5.) Man mache nämlich $\angle DM_1E = h$, $DM_1 = a$, $F_1M_1 = b$, $DE \perp EM_1$, $F_1G \perp EM_1$, $EH = GM_1$, $HM_1 = B_1M_1$. B_1 ist dann der eine Endpunkt der grossen Axe der darzustellenden Ellipse. — Eine analoge Construction ist im Aufrisse anzuwenden, wobei natürlich h mit v vertauscht werden muss.

6. Hat man im Meridiansystem eine Hyperbel, deren Hauptaxe $2a$ mit $A_3 A'_3$ zusammenfällt und deren Nebenaxe $2b$ ist, so lautet die Gleichung der Grundrisscontourcurve

$$\frac{\xi^2}{a^2 \cos^2 h - b^2 \sin^2 h} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Hieraus ergiebt sich wieder eine Construction der Contouren ohne Benutzung seitlicher Projection. Die Contour des getheilten Rotationshyperboloids kann, wie die Gleichung lehrt, unter Umständen imaginär werden.

Für den Fall eines einfachen Rotationshyperboloids erhält man durch Vertauschung von a und b für die Grundrisscontour die Gleichung

$$\frac{\eta^2}{a} + \frac{\xi^2}{a^2 \sin^2 h - b^2 \cos^2 h} = 1.$$

Die Contouren dieser Fläche können also sowohl Ellipsen, als auch Hyperbeln sein.

Aus den unter 2 angegebenen Gleichungen I), IV), V) ergiebt sich, dass die seitliche Projection der Grundrisscontourlinie jeder Rotationsfläche zweiter Ordnung ein Durchmesser der Meridiancurve ist. Derselbe geht durch die Berührungspunkte derjenigen Tangenten des Meridians, die auf $A_1 A'_1$ senkrecht stehen. Da sich die Grundrisscontourlinie auf der verticalen Hilfsebene als Gerade projicirt, so folgt hieraus, dass die Ebene der Grundrisscontourlinie jeder Rotationsfläche zweiter Ordnung auf jener Hilfsebene senkrecht steht. Ein analoger Satz gilt für den Aufriss.

Betrachtet man einen Kegelschnitt, dessen Abscissenaxe mit der Rotationsaxe zusammenfällt, als gegebene Contourcurve und construirt hierzu die Meridiancurve und die zweite Contourcurve, so erhält man in vielen Fällen nur einzelne Theile dieser Curven und nicht den vollständigen, durch Rechnung sich ergebenden Kegelschnitt.

7. Ist im Meridiansystem ein Kreis mit dem Radius r gegeben, dessen Mittelpunkt O_3 von $A_3 A'_3$ um a entfernt ist, so entsteht ein cyklisches Annuloid, und die Contouren dieser Rotationsfläche sind, wie aus der darstellenden Geometrie bekannt ist, bei schiefer Stellung Ellipsenäquidistanten. Einem gegen $A_3 A'_3$ allgemein liegenden Kreise entsprechen also als Contourcurven die Aequidistanten derjenigen Ellipsen, welche dem Mittelpunkte des Kreises zugeordnet sind.

Dem Kreisbogen ed (Fig. 6) entspricht der äussere, dem Bogen bc der innere Theil der Grundrisscontourcurve; die Bögen bd und ce besitzen im Grundrisse keine entsprechenden Curventheile.

Die Rückkehrpunkte P_1, P'_1, Q_1, Q'_1 werden dadurch genauer bestimmt, dass man an die seitliche Projection der Grundrisscontourlinie Tangenten senkrecht zu $A_1 A'_1$ legt.

Die seitliche Projection der Grundrisscontourlinie ist eine Curve vierter Ordnung. Wählt man $A_3 A'_3$ als X- und eine von O_3 auf $A_3 A'_3$ gefällte Senkrechte als Y-Axe, so gehen die Gleichungen I), IV), V) unter 2 über in

$$y = a + \sqrt{r^2 - x^2},$$

$$\mathfrak{y} = y y' \tan h = -(a + \sqrt{r^2 - x^2}) \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \tan h$$

und

$$x = \mathfrak{x},$$

und hieraus folgt als Gleichung der seitlichen Projection der Grundrisscontourlinie

$$(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}\, coth)^2 (r^2 - \mathfrak{x}^2) = a^2 \mathfrak{x}^2.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lassen sich die Rückkehrpunkte durch Rechnung bestimmen.

Es sei ferner im Grundrisscontoursystem ein Kreis mit dem Radius r gegeben, dessen Mittelpunkt O_1 von $A_1 A'_1$ um $O_1 U_1 = a$ entfernt ist (Fig. 7), und es soll ermittelt werden, welche Rotationsfläche die Eigenschaft hat, sich im Grundriss als ein, resp. zwei Kreise zu projiciren. Zieht man einen beliebigen Durchmesser $P_1 O_1 Q_1$ und bestimmt im Meridiansystem zu P_1, O_1, Q_1 die entsprechenden Punkte p, o, q, so ist

$$po = oq = r.$$

Nun ist c bekanntlich ein Punkt der O_1 entsprechenden Hyperbel und pq eine Normale derselben, folglich liegen p und q auf der Aequidistante dieser Hyperbel. Einem Kreise im Contoursystem entspricht also im Meridiansystem die Aequidistante der dem Kreismittelpunkte zugeordneten Hyperbel.

Zieht man in dem Kreise einen Durchmesser $\Omega_1 \Omega'_1$ parallel $A_1 A'_1$, so gehören zu Ω_1 und Ω'_1 unendlich ferne Punkte der Meridiancurve. Den Kreistangenten $J_1 \Omega_1$ und $J'_1 \Omega'_1$ entsprechen also im Meridiansystem vier Gerade $L_3 J_3$, $L'_3 J'_3$, $K_3 J_3$, $K'_3 J'_3$, welche die Hyperbeläquidistante in unendlicher Ferne berühren und mit den Asymptoten der Hyperbel parallel laufen.

Die Contourcurve im Aufrisse ist, wie man durch eine ähnliche Ueberlegung erfährt, die Aequidistante derjenigen Curve, die dem Kreismittelpunkte im Aufrisse entspricht, d. h. Aequidistante einer Ellipse oder Hyperbel, oder ein dem gegebenen congruenter Kreis.

Die Grundrisscontourlinie projicirt sich auf der seitlichen Verticalebene als eine Curve vierter Ordnung, welche mit $J_1 J_3$ und $J'_1 J'_3$ den unendlich fernen Punkt gemein hat. Setzt man $\omega_3 O_3 = \mathfrak{x}$ und $O_3 Q_3 = \mathfrak{y}$, so ist

$$\mathfrak{x} = O_3 R_3 \tan h = R_1 U_1 \tan h = \frac{a \mathfrak{y} \tan h}{\sqrt{r^2 - \mathfrak{y}^2}};$$

mithin lautet die Gleichung der seitlichen Projection der Grundrisscontourlinie

$$r^2 \mathfrak{x}^2 = \mathfrak{x}^2 \mathfrak{y}^2 + a^2 \mathfrak{y}^2 \tan^2 h$$

oder

$$\frac{r^2}{\mathfrak{y}^2} - \frac{a^2 \tan^2 h}{\mathfrak{x}^2} = 1.$$

8. Wählt man statt des Kreises einen beliebigen andern Kegelschnitt als Meridianfigur, so ergeben sich je nach der Lage und Gestalt dieses Kegelschnittes ausserordentlich mannichfaltige Contourfiguren. Einer Parabel entspricht z. B. im Contoursystem eine geschlossene Curve, oder eine Curve, welche aus zwei getrennten, in der Unendlichkeit sich tref-

fenden Theilen besteht, je nachdem die Parabelaxe mit $A_3 A'_3$ einen Winkel einschliesst, der grösser ist als $(90^0 - h)$, oder nicht.

Einer Ellipse entspricht eine Contourcurve, die aus zwei geschlossenen Theilen besteht, von denen der eine innerhalb des andern liegt.

Fig. 8 stellt die einer Hyperbel entsprechende Contourcurve dar. Der Meridian ist so gelegt, dass den schwächer gezeichneten Curventheilen und der Asymptote pq kein Theil der Contourfigur entspricht. Der Asymptote mn sind die Geraden $M_1 N_1$ und $M'_1 N'_1$ zugeordnet. Die Contourcurve besteht aus zwei getrennten Aesten, die von $M_1 N_1$ und $M'_1 N'_1$ in der Unendlichkeit berührt werden. B_1, B'_1, E_1, E'_1 sind Culminationspunkte der Contourcurve, P_1 und P'_1 Rückkehrpunkte derselben.

In Fig. 9 ist umgekehrt zu einer Ellipse im Contoursystem die zugehörige Meridianfigur aufgesucht. Dieselbe besteht aus vier getrennten Theilen, von denen je zwei in Bezug auf $A_3 A'_3$ symmetrisch sind. Den auf $A_1 A'_1$ senkrechten Ellipsentangenten $J_1 \Omega_1$ und $J'_1 \Omega'_1$ entsprechen vier Gerade, welche die Meridiancurve asymptotisch berühren. Die Tangenten in den Ellipsenpunkten D_1 und E_1 laufen parallel $A_1 A'_1$, folglich sind d, d', e, e' Culminationspunkte der Meridiancurve. Die seitliche Projection der Grundrisscontourlinie strebt dem unendlich fernen Punhte von $J_1 \Omega_1$ und $J'_1 \Omega'_1$ zu.

Eine Parabel als Contourfigur besitzt immer einen, aber auch nur einen Punkt Ω_1, dessen Tangente $J_1 \Omega_1$ auf $A_1 A'_1$ senkrecht steht. Die entsprechende Meridianfigur setzt sich also aus vier Theilen zusammen, von denen je zwei in Bezug auf $A_3 A_3$ symmetrisch sind. Sie besitzt zwei symmetrisch liegende Asymptoten. Je zwei nicht symmetrische Theile der Meridiancurve haben denjenigen Punkt gemein, welcher dem unendlich fernen Punkte der Parabel entspricht.

Ist im Contoursystem eine Hyperbel gegeben, welche nicht zwei auf $A_1 A'_1$ senkrechte Tangenten hat, so entspricht keinem endlichen Hyperbelpunkte ein unendlich ferner Punkt der Meridiancurve. Dieselbe besitzt also in diesem Falle keine Asymptoten, welche von Hyperbeltangenten senkrecht auf $A_1 A'_1$ herrühren könnten, wohl aber vier Asymptoten, welche den beiden Hyperbelasymptoten entsprechen. Die Meridiancurve besteht mithin aus vier getrennten Theilen, von denen je zwei symmetrisch sind und symmetrische Asymptoten besitzen. Je zwei nicht symmetrische Theile liegen dagegen zwischen denselben, aber auch nicht symmetrischen Asymptoten. — Wählt man die Contourhyperbel so, dass zwei ihrer Tangenten auf $A_1 A'_1$ senkrecht stehen, so erhält man eine aus acht Theilen zusammengesetzte Meridiancurve mit acht Asymptoten.

9. Eine interessante Beziehung zwischen Contour- und Meridiancurve besteht ferner beim Logarithmoid. Ist

$$y = b e^{\frac{x}{a}}$$

die Gleichung der Meridiancurve, so erhält man aus den Gleichungen IV) und V) unter 2

$$\mathfrak{y} = b\, e^{\frac{x}{a}} \cdot \frac{b}{a}\, e^{\frac{x}{a}}\, tan\, h$$

oder

$$\mathfrak{y} = \frac{b^2}{a}\, e^{\frac{2x}{a}}\, tan\, h.$$

Hieraus folgt der Satz: Die seitliche Projection der Grundrisscontourlinie des Logarithmoids ist wieder eine logarithmische Linie. Die Contourcurven selbst sind, wie man aus den Gleichungen I), II), III) unter 2 erfährt, nur logarithmische Linien, wenn h, resp. v zu Null wird; andernfalls aber nicht.