Werk

Titel: Zeitschrift für Mathematik und Physik

Verlag: Teubner

Jahr: 1876

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 MATH I, 755:21

Werk Id: PPN599415665_0021

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN599415665_0021|LOG_0031

XIII.

Ueber ein besonderes Liniencoordinatensystem.

Von

Dr. K. Schwering

in Münster.

---

§ 1.

Man kann mit Recht die Eigenschaften der Curven in metrische und projectivische unterscheiden. Den ersteren, als den in der neueren Geometrie minder bedeutenden, ist bei Salmon, „*Higher plane curves*", das 4. Capitel gewidmet. Zu Anfang desselben hebt der Verfasser hervor, dass die Cartesischen Coordinaten sich den Dreieckscoordinaten gegenüber bei Erforschung der metrischen Eigenschaften der Curven im Allgemeinen im Vortheil befinden. Es erscheint daher wünschenswerth, für die Liniencoordinaten ein System zu besitzen, welches annähernd dieselben Vortheile, wie bei den Punktcoordinaten das Cartesische System, darbietet. Als solches kann ich dasjenige, welches als Coordinaten einer Geraden die reciproken Werthe der auf den Axen abgeschnittenen Strecken nimmt, nicht gelten lassen, weil dasselbe viel zu sehr in den Charakter des Punktcoordinatensystems eingeht und es andererseits durchaus wünschenswerth ist, als Coordinaten nicht reciproke Werthe, sondern direct messbare Strecken zu definiren. Noch weniger dürfte sich der Vorschlag Plücker's empfehlen, als Liniencoordinaten einen der von der fraglichen Geraden auf den Axen bestimmten Abschnitte und die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels derselben zu wählen. Dass das von mir im Folgenden anzugebende System wirklich das angestrebte Ziel erreicht, wage ich nicht zu behaupten; einen Vortheil anderer Art glaube ich aber durch Zugrundelegung desselben bei meinen Vorlesungen mit Sicherheit gewonnen zu haben. Das neue Coordinatensystem ist nämlich von den dem Anfänger bekannten Punktcoordinaten so wesentlich verschieden, dass eine aus Verwechselung der Begriffe resultirende Verwirrung unmöglich wird unddler Lernende das Verschiedene und Gleichartige der beiden Systemarten leichter und klarer einsieht.

Das Coordinatensystem besteht aus zwei parallelen Geraden, die durch ein auf ihnen errichtetes Loth in den Punkten O und Q geschnitten werden. Die Strecke OQ, die Entfernung der beiden Parallelen, nennen wir e, und definiren nun als Coordinaten der Geraden L, welche die Parallelen in den Punkten A und B schneidet, die in derselben Richtung gemessenen Strecken OA und QB. Wir bezeichnen dieselben durch

$$u = OA \text{ und } v = QB$$

und nennen die beiden Parallelen OA und QB mit Rücksicht darauf die U- und V-Axen.

Aus dieser Definition folgt, dass jede im Endlichen liegende Gerade zwei endliche bestimmte Coordinaten besitzt, mit Ausnahme derjenigen, welche den Axen parallel gehen. Diese letzteren haben zwei unendlich grosse Coordinaten, die zu einander in einem bestimmten Verhältnisse stehen, nämlich in demjenigen der Entfernungen der fraglichen Geraden von den Coordinatenaxen. Sie spielen also dieselbe Rolle, wie im Cartesischen Coordinatensystem die Punkte der unendlich fernen Geraden.

Betrachten wir nun die lineare Gleichung

$$1)\qquad \alpha u + \beta v + \gamma = 0.$$

Möge die Gerade u_0, v_0 derselben Genüge thun, so ist durch Subtraction

$$2)\qquad \alpha(u - u_0) + \beta(v - v_0) = 0.$$

Die geometrische Bedeutung von $\alpha:\beta$ ist also das mit umgekehrtem Vorzeichen genommene Verhältniss der Entfernung des Schnittpunktes der beiden Geraden u_1, v_1; u_0, v_0, welche der Gleichung 1) genügen, von den beiden Axen. Soll daher zu einer weiteren Coordinate u die zugehörige v gefunden werden, so haben wir den auf der U-Axe gegebenen Punkt mit dem Schnittpunkte der Geraden u_1, v_1; u_0, v_0 zu verbinden. Alle Geraden, deren Coordinaten u, v die Gleichung 1) befriedigen, laufen also durch jenen Schnittpunkt. Mithin ist 1) die Gleichung eines Punktes.

Wenn die Coefficienten α, β in Gleichung 1) gleiche Vorzeichen haben, so beweist 2), dass $u - u_0$ und $v - v_0$ entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, und daraus leitet man ab, dass der fragliche Punkt innerhalb der beiden Axen liegt. Ist das Vorzeichen von α und β verschieden, so liegt aus dem analogen Grunde der Punkt ausserhalb der beiden Parallelen. Insbesondere bedeutet jede Gleichung

$$3)\qquad u - v = \gamma$$

einen unendlich fernen Punkt.

Um diese Betrachtungen noch genauer zu verfolgen, ziehen wir durch den Punkt 1) eine Parallele zur Geraden (u_0, v_0). Möge dieselbe die Coordinaten $u_0 + A$, $v_0 + A$ haben. Dann findet man

$$\alpha(u_0+A)+\beta(v_0+A)+\gamma=0.$$

Daraus folgt

4) $$A=-\frac{\alpha u_0+\beta v_0+\gamma}{\alpha+\beta}.$$

Damit ist die geometrische Bedeutung der linken Seite von 1) in analoger Weise erschlossen, wie es bei den Punktcoordinaten mit der Gleichung der geraden Linie zu geschehen pflegt. Auch hier kann von einer Normalform der Gleichung 1) die Rede sein. Multiplicirt man 1) mit einem Factor, so dass $\alpha+\beta=1$ wird, so bedeutet die linke Seite von 1):

„Die Entfernung des Punktes 1) von der Geraden u, v, gemessen in der Richtung der Axen."

Die senkrechte Entfernung des Punktes 1) in der allgemeinen Form von der Geraden (u, v) wird, wie man sich leicht überzeugt, gegeben durch

$$\frac{e}{\sqrt{e^2+(u-v)^2}}\cdot\frac{\alpha u+\beta v+\gamma}{\alpha+\beta}.$$

Hieraus ergiebt sich alsbald die allgemeine Gleichung des Kreises, dessen Mittelpunkt der Punkt 1) und dessen Radius R ist. Sie ist:

5) $$(\alpha u+\beta v+\gamma)^2 e^2=[e^2+(u-v)^2](\alpha+\beta)^2 R^2.$$

Stellen wir mit derselben die Gleichung eines Punktes zusammen, so erhält man zwei Werthepaare u, v, die den beiden Tangenten angehören, welche man vom Punkte aus an den Kreis ziehen kann. Diese Werthepaare fallen zusammen, wenn der fragliche Punkt der Kreisperipherie angehört. Dies ist nun der Fall bei den beiden imaginären Punkten

$$u-v=ei,\quad u-v=-ei;$$

deren Gleichungen sind von R und den Coefficienten von 1) unabhängig, sie gehören also allen Kreisen der Ebene an. Sie liegen, wie wir soeben sahen, unendlich fern und spielen unter dem Namen unendlich ferne Kreispunkte in der neueren Geometrie eine hervorragende Rolle.

Suchen wir endlich den Inhalt des Dreiecks zu bestimmen, welches von den Punkten $A=0$, $B=0$, $C=0$ gebildet wird. Sei

$$A\equiv a_1u+b_1v+c_1=0,$$
$$B\equiv a_2u+b_2v+c_2=0,$$
$$C=a_3u+b_3v+c_3=0.$$

Nehmen wir an, die Gleichungen seien auf die Normalform gebracht, so dass

$$1=a_1+b_1=a_2+b_2=a_3+b_3,$$

ziehen wir durch A und C Parallele, durch B eine Senkrechte zu den Axen; möge die durch A gegebene Parallele der Dreiecksseite BC im Punkte D begegnen, und der Schnittpunkt der Parallelen durch C mit der Senkrechten durch B möge E heissen. Dann ist der Inhalt des Dreiecks

$$J = \tfrac{1}{2} BE . AD.$$

Möge die Seite BC die Coordinaten u', v' haben, so ist

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2) u' + b_3 c_2 - c_3 b_2 = 0,$$
$$(a_2 b_3 - a_3 b_2) v' + a_2 c_3 - a_3 c_2 = 0.$$

Werden die Werthe u', v' in A für u und v eingesetzt, so ergiebt sich Die Länge AD. Ferner hat man

$$BE : CE = e : v' - u', \quad CE = c_2 - c_3.$$

Setzt man diese Werthe von BE und AD ein, so findet sich

6)
$$J = \tfrac{1}{2} e \Sigma \pm a_1 b_2 c_3.$$

§ 2.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades.

Wir schreiben dieselbe in der Form

7)
$$a_{11} u^2 + 2 a_{12} uv + a_{22} v^2 + 2 a_{13} u + 2 a_{23} v + a_{33} = 0.$$

Dann beweist man zunächst auf mannigfache Art, dass dieselbe in das System zweier Punkte zerfällt, wenn

8)
$$H \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Hiervon überzeugt man sich vielleicht am einfachsten, indem man versucht, die Bedingung anzugeben, unter welcher die Curve zweiter Classe 7) eine Doppeltangente besitzt.

Bei den ferneren hierher gehörigen Discussionen spielt die Betrachtung der parallelen Tangenten die Hauptrolle. Im Allgemeinen besitzt der Kegelschnitt 7) zu jeder gegebenen eine parallele Tangente. Denn ist u, v die gegebene Tangente, so wird $u + \alpha$, $v + \alpha$ die parallele sein, wenn α durch die Gleichung bestimmt wird

9)
$$(a_{11} + 2 a_{12} + a_{22}) \alpha + 2 [a_{11} u + a_{12}(u + v) + a_{22} v + a_{13} + a_{23}) = 0.$$

Diese lineare Gleichung ist nur dann unerfüllbar, wenn

10)
$$a_{11} + 2 a_{12} + a_{22} = 0.$$

In diesem Falle haben wir also einen Kegelschnitt, der im Endlichen keine parallelen Tangentenpaare besitzt, also eine Parabel vor uns. Die Frage, ob eine Curve zweiter Classe Ellipse oder Hyperbel ist, wird nun durch die Betrachtung der Asymptoten entschieden. Dieselben sind für die erstere Curve reell, für die letztere imaginär.

Damit die Tangente (u, v) Asymptote der Curve werde, muss die ihr unendlich benachbarte Tangente derselben parallel gehen, oder umgekehrt, die parallele Tangente muss mit (u, v) zusammenfallen. Dies tritt, wie 9) beweist, ein, wenn

11)
$$a_{11} u + a_{12}(u + v) + a_{22} v + a_{13} + a_{23} = 0$$

wird, denn dann resultirt für α der Werth 0. Die Gleichung 11) hat für sich die Bedeutung der Gleichung eines Punktes, und zwar, da sie in Verbindung mit 7) die Asymptoten liefert, ist sie die Gleichung des Schnittpunktes der Asymptoten, d. h. des Mittelpunktes der Curve. Für die Parabel kann man ihr die Form ertheilen

$$(a_{11}+a_{12})(u-v)+a_{13}+a_{23}=0$$

und diese Form lehrt, dass der Mittelpunkt unendlich fern liegt Setzen wir $u=v$, so wird für die Parabel

$$2a_{13}u+2a_{23}u+a_{33}=0.$$

Sie besitzt demnach nur eine Tangente, welche zu den Coordinatenaxen senkrecht steht, im Endlichen. Dividirt man durch u^2, so lässt sich das Resultat auch dahin aussprechen, dass die unendlich ferne Gerade, deren Coordinaten ja gleich und unendlich gross sind, alle Parabeln der Ebene berührt.

Führen wir die Elimination zwischen 11) und 7) aus, so erkennen wir, dass reelle Wurzeln u, v, also reelle Asymptoten, also die Hyperbel gefunden wird, wenn der Ausdruck

$$(a_{11}+2a_{12}+a_{22})H$$

negativ ist; dass dagegen, wenn derselbe positiv ist, unsere Curve eine Ellipse sein wird.

Die Rechnung kann auch in der Weise geführt werden, dass man die Entscheidung, ob die Curve Ellipse oder Hyperbel ist, durch die Realität ihrer unendlich fernen Punkte führt. Sei die Gleichung des unendlich fernen Punktes

$$u-v=\gamma,$$

so muss das Eliminationsresultat zwei gleiche Wurzeln besitzen. Dies führt für γ zu der quadratischen Gleichung

$$\gamma^2(a^2_{12}-a_{11}a_{22})+2\gamma\{a_{23}(a_{11}+a_{12})-a_{13}(a_{12}+a_{22})\}$$
$$+(a_{13}+a_{23})^2-a_{33}(a_{11}+2a_{12}+a_{22})=0,$$

deren Discriminante die vorhin angegebene ist. Die Rechnung ist nicht so schwierig, als sie beim ersten Anblick scheinen könnte, wenn man nur die durch $a_{11}+2a_{12}+a_{22}$ theilbaren Glieder gleich anfangs bei Seite stellt.

Die Transformation für das Coordinatensystem spielt in der Theorie der Curven zweiter Classe natürlich eine bedeutende Rolle. Wenden wir zunächst einmal die Umformung an

$$u'=\alpha u+\beta v,\quad v'=\gamma u+\delta v,$$

so bedeutet u' die Entfernung des Punktes $\alpha u+\beta v=0$, von der Geraden u, v gemessen nach der Richtung der Coordinatenaxen. Nun liegt aber dieser Punkt in der Linie OQ und somit wird durch die angegebene Transformation eine Verschiebung der Coordinatenaxen parallel mit sich selbst bewirkt, ohne dass dabei das e' mit dem ursprünglichen e übereinzustimmen braucht. Ersetzen wir u' durch $u''+\alpha$, v' durch $v''+\beta$, so wird eine Aenderung des Systems dahin vorgenommen, dass die Punkte O, Q im Allgemeinen aus ihrer zu den Axen festgesetzten bevorzugten Lage treten.

Soll eine Drehung der Axe erfolgen, so erhält man Ausdrücke für u, v, die linear in u', v' sind und ohne Schwierigkeit abgeleitet werden können. Nennen wir die Mittelpunkte O', Q' des neuen Coordinatensystems und haben dieselben die Gleichungen

$$O' \equiv au+bv+c=0, \quad Q' \equiv a_1 u + b_1 v + c_1 = 0,$$

dann wird die senkrechte Entfernung derselben

$$e' = \sqrt{(c-c_1)^2 + e^2(ab_1 - ba_1)^2}$$

und man findet zwischen den alten Coordinaten u, v und den neuen u', v' einer beliebigen Geraden, wenn wir voraussetzen

$$a+b=1, \quad a_1+b_1=1:$$

$$v' = ee' \frac{c+v-a_1(v-u)}{(c-c_1)(v-u)+(a_1-a)e^2}.$$

Analog wird der Ausdruck für u'. Der Nenner ist derselbe.

Nehmen wir die parallelen Scheiteltangenten zu Axen unseres Coordinatensystems, so können wir die Gleichung der Ellipse und Hyperbel in die Form setzen

$$u.v = G.$$

Ist G positiv, so haben wir eine Ellipse, ist es negativ, eine Hyperbel vor uns. Für den Kreis mit dem Radius $r=\frac{1}{2}e$ wird

$$u.v = r^2$$

und daraus erhalten wir eine sehr elegante Construction der Ellipse und Hyperbel mit Hilfe eines Kreises. Bestimmen wir nämlich am Kreise durch eine Reihe von Tangenten Paare u, v und tragen diese Paare dann auf die Axen OU und QV, die eine andere Entfernung von einander haben, ab in gleichem oder entgegengesetztem Sinne, so erhalten wir ersteren Falle eine Ellipse, im zweiten eine Hyperbel. Bemerkenswerth ist dabei die gleichseitige Hyperbel.

Da es mir durchaus fern liegt, eine Theorie der Kegelschnitte, gegründet auf unser Coordinatensystem, zu schreiben, so breche ich die Untersuchungen hier ab, um die Anwendbarkeit des Systems noch bei Erörterungen darzulegen, die einige Curven höherer Ordnung betreffen.

§ 3.

Weitere Anwendungen des Systems.

Nehmen wir die Asymptote der Cissoide zur Axe der v, die durch den Doppelpunkt derselben parallel gehende Gerade zur Axe der u, ferner den Doppelpunkt selbst als den Mittelpunkt O, so wird die Gleichung der Curve in unseren Liniencoordinaten

12) $$v^3 + 27 r^2 u = 0.$$

Dies Resultat finden wir folgendermassen. In Punktcoordinaten kann man die Gleichung der Cissoide schreiben

13) $$x^3 = y^2 (2r - x).$$

Dieselbe ist eine Curve vom Geschlechte (Range, Defecte, Riemann'sche Zahl p) Null, weshalb die Coordinaten als Functionen eines Parameters λ darstellbar sind, nämlich

$$x = \frac{2r\lambda^2}{1+\lambda^2}, \quad y = \frac{2r\lambda^3}{1+\lambda^2}.$$

Demnach wird die Gleichung der Tangente im Punkte, dem der Parameter λ zugehört:

14) $$\lambda(\lambda^2 + 3)x - 2y - 2r\lambda^3 = 0.$$

Andererseits ist die Gleichung der Geraden u, v in unserem Punktcoordinatensystem

15) $$(v-u)x = 2r(y-u).$$

Indem man 14) mit 15) identificirt, folgt zunächst

$$v = 3r\lambda, \quad u = -r\lambda^3$$

und daraus die gesuchte Gleichung 12). Wir wollen dieselbe zur Auffindung der Brennpunkte unserer Curve verwenden.

Man erhält die Brennpunkte einer Curve n^{ter} Classe dadurch, dass man von den beiden unendlich fernen Kreispunkten I und J (Salmon) aus die $2n$ Tangenten an die Curve zieht. Dieselben schneiden sich im Allgemeinen in n^2 Punkten, von denen n reell sind, und diese Punkte heissen Brennpunkte der Curve

Um dieselben für unser Coordinatensystem zu ermitteln, setzen wir

$$u = z + \tfrac{1}{2}ei, \quad v = z - \tfrac{1}{2}ei.$$

Dann resultirt eine Gleichung n^{ten} Grades für z, deren Coefficienten im Allgemeinen complex sein werden. Möge die Auflösung derselben ein Werthepaar u_0, v_0 liefern, welches im Allgemeinen complexe Grössen sind. Nehmen wir dazu die conjugirten Werthe u_1, v_1, so ist die Gleichung

16) $$u(v_0 - v_1) - v(u_0 - u_1) = v_0 u_1 - u_0 v_1$$

die eines reellen Brennpunktes, nämlich des Schnittpunktes einer I-Tangente mit der entsprechenden J-Tangente. (Vergl. hierzu übrigens Siebeck, Crelle's Journal Bd. 64.)

Für die Cissoide erhalten wir als Gleichung, welche z bestimmt,

$$(z + ri)^3 + 27r^2 (z + ri) = 54 r^2 i.$$

Diese Gleichung besitzt die Doppelwurzel $z + ri = 3ri$ und die einfache $z + ri = -6ri$. Daraus folgt, dass die Curve einen reellen Doppelbrennpunkt und einen reellen einfachen Brennpunkt besitzt.

Dieselben haben die Gleichungen

$$3u = v \text{ und } 3u = 4v.$$

Sie liegen daher auf der Linie OQ oder der X-Axe unseres Punktcoordinatensystems, und zwar in den Entfernungen $x = -r$ und $x = 8r$. Nennen wir die Entfernungen eines Curvenpunktes von den beiden Brennpunkten α und β, so findet man

17) $$\beta^2(\alpha^2 + 3r^2) = (\alpha^2 + 15r^2)^2.$$

Wenden wir uns zur Kardioide, so ist deren Gleichung in Punktcoordinaten bekanntlich

$$(x^2+y^2)^2 - 4rx(x^2+y^2) - 4r^2y^2 = 0.$$

Da dieselbe ebenfalls $p = 0$ hat, so findet man x und y als rationale Functionen eines Parameters λ, nämlich

$$x = \varphi(\lambda) : \psi(\lambda), \quad y = \vartheta(\lambda) : \psi(\lambda),$$

wo

$$\varphi(\lambda) = 4r^3(r^2 - \lambda^2),$$
$$\vartheta(\lambda) = 8r^4\lambda,$$
$$\psi(\lambda) = (r^2+\lambda^2)^2.$$

Die Gleichung der Tangente wird

$$r(3\lambda^2 - r^2)x - \lambda(3r^2 - \lambda^2)y + 4r^4 = 0,$$

indem ein Factor $r^2 + \lambda^2$ abgeschieden werden kann. Dieser Umstand beweist, dass der Parameter $\lambda = ri$, welcher wegen $\varphi(ri) : \vartheta(ri) = i$ dem unendlich fernen Kreispunkte angehört, einem Rückkehrpunkte unserer Curve entspricht. Nun folgt aus den Plücker'schen Formeln, indem unsere Curve vierter Ordnung drei Rückkehrpunkte besitzt, dass sie von der dritten Classe sein muss. Da die unendlich fernen Kreispunkte Rückkehrpunkte sind, so werden alle neun Brennpunkte zusammenfallen.

Nehmen wir die Doppeltangente der Kardioide — es ist die Linie $0 = 2x + r$ — als Axe der u, die dazu parallele $x = 4r$ als Axe der v, so erhalten wir als Gleichung der Curve in unserem System, dessen OQ die reelle Rückkehrtangente ist,

18) $$v = \frac{24r^2u}{4u^2 - 3r^2}.$$

Da zu jedem u zwei unendlich grosse Werthe von v gehören, so ist die u-Axe in der That Doppeltangente. Die Berührungspunkte haben die Gleichungen $u = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.r$. Schreibt man 18) in der Form

$$4u^2v - 3r^2(v + 8u) = 0,$$

so sehen wir, dass die Gerade OQ die Rolle spielt, welche bei den in Punktcoordinaten gegebenen Curven dem Mittelpunkte zufällt.

Zur Tangente u, v findet man die parallelen Tangenten $u + \alpha$, $v + \alpha$ aus der Gleichung

$$\alpha^2 + (v + 2u)\alpha + u^2 + 2uv - \tfrac{1}{4}.27r^2 = 0.$$

Setzt man das von α unabhängige Glied dieser Gleichung gleich Null, so erhält man die Bedingung, unter welcher zwei parallele Tangenten zusammenfallen. Durch Combination mit der Curvengleichung ergeben sich dann die (nicht reellen) Asymptoten.

Da in unserem Falle $e = \frac{9}{2} r$ ist, so hat man zur Ermittelung des Brennpunktes die Supposition

$$u = z + \tfrac{9}{4} r i, \quad v = z - \tfrac{9}{4} r i.$$

Dann folgt für z die Gleichung $(z + \frac{3}{4} r i)^3 = 0$, also ergiebt sich, wie wir voraussahen, ein einziger Brennpunkt. Derselbe hat die Gleichung

$$2u + v = 0.$$

Er liegt auf der X-Axe in dem Abstande $x = r$; er fällt also mit dem Centrum des festen Kreises, welcher bei Erzeugung der Cardioide als Rollcurve benutzt wird, zusammen.