Werk

Titel: Zeitschrift für Mathematik und Physik

Verlag: Teubner

Jahr: 1876

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 MATH I, 755:21

Werk Id: PPN599415665_0021

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN599415665_0021|LOG_0032

Kleinere Mittheilungen.

XVI. Ueber die geometrische Darstellung der Zustandsveränderung eines Körpers durch die Wärme nach der mechanischen Wärmetheorie.

(Hierzu Taf. V, Fig. 10—12.)

§ 1. In verschiedenen Aufsätzen, welche der königl. Akademie der Wissenschaften in Stockholm vorgelegt sind, habe ich von einigen Untersuchungen, betreffend die geometrische Darstellung der Zustandsveränderung eines Körpers durch die Wärme nach der mechanischen Wärmetheorie, Bericht erstattet. Ich erlaube mir, einige der gefundenen Resultate mitzutheilen, welche zeigen, dass bemerkenswerthe geometrische Beziehungen stattfinden zwischen den vornehmsten der in der mechanischen Wärmetheorie vorkommenden Quantitäten.

Wir denken uns hierbei, die Gewichtseinheit eines Körpers werde einer unendlich kleinen umkehrbaren Wärmeveränderung unterworfen. Der äussere Druck sei stets normal gegen die Oberfläche; dp, dv und dT mögen die Aenderungen von Druck, Volumen und absoluter Temperatur bezeichnen. Dann kann man bekanntlich setzen

1a) $$dq = \lambda\, dv + \varkappa\, dp,$$

1b) $$dq = l\, dv + c\, dT,$$

1c) $$dq = C\, dT + h\, dp.$$

Hier bezeichnen λ, $\varkappa$, l, c, C und h Functionen der unabhängigen Variabeln v und p. C ist die specifische Wärme bei constantem Drucke, c dieselbe bei constantem Volumen, l die latente Ausdehnungswärme; h kann füglich latente Druckveränderungswärme genannt werden. Wir geben hier die verschiedene Wärmemenge durch die äquivalente Arbeitsmenge an; dq ist dann die elementare Arbeit. Die Zustandsänderung wird nach Clapeyron's bekannter Methode bestimmt.

§ 2. Wir wollen die Gleichung 1a) transformiren, damit sie für die Untersuchung eine bequemere Form erhalte. Das Bogenelement ds von der die Zustandsveränderung darstellenden Curve ist

2) $$ds = \sqrt{dv^2 + dp^2}.$$

Wir setzen

3) $$\frac{dp}{ds} = \sin\varphi, \quad \frac{dv}{ds} = \cos\varphi$$

und weiter

4) $$z = \sqrt{\lambda^2 + \varkappa^2}$$

und

5) $$\frac{\lambda}{z} = \sin\psi, \quad \frac{\varkappa}{z} = \cos\psi.$$

Dann ist

6) $$dq = z(\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi)\,ds = z\sin(\varphi+\psi)\,ds = z\sin\chi\,ds,$$

wenn man annimmt

7) $$\varphi + \psi = \chi.$$

Man findet ohne Schwierigkeit, dass φ der Winkel ist zwischen der Tangente an der Zustandscurve im Punkte vp und der v-Axe, und ψ das Supplement des Winkels zwischen der Tangente im selben Punkte an der adiabatischen Curve und der v-Axe; χ ist der Winkel zwischen beiden Tangenten.

§ 3. Einen analogen Ausdruck kann man für die Veränderung du der innern Arbeit herleiten. Man hat zufolge der bekannten Gleichung

8) $$dq = du + p\,dv,$$

9) $$du\,dq - p\,dv = (\lambda - p)\,dv + \varkappa\,dp.$$

Setzt man hier

10) $$z' = \sqrt{(\lambda - p)^2 + \varkappa^2},$$

11) $$\frac{\lambda - p}{z'} = \sin\psi', \quad \frac{\varkappa}{z} = \cos\psi',$$

so erhält man

12) $$du = z'(\sin\psi'\cos\varphi + \cos\psi'\sin\varphi)\,ds = z'\sin(\varphi+\psi')\,ds = z'\sin\chi'\,ds.$$

Hier ist ψ' das Supplement zum Winkel zwischen der Tangente an der isodynamischen Curve und der v-Axe, χ' der Winkel zwischen dieser Tangente und derjenigen an der die Zustandsveränderung ergebenden Curve.

§ 4. Die Gleichungen 6) und 12) können eine geometrische Auslegung erhalten, welche eine in hohem Grade anschauliche Vorstellung der erwähnten Veränderung giebt.

Man ziehe zu diesem Zwecke zwei gegen einander winkelrechte Linien ab und cd (Fig. 10) durch den Punkt o, welcher den Zustand angiebt, worin der Körper bei Anfang der Veränderung sich befindet; die eine ab dieser Linien wird so gezogen, dass sie die adiabatische Curve im Punkte o tangirt. Mit einem willkürlichen Halbmesser werden zwei gleiche Kreise construirt, welche durch o gehen und deren Mittelpunkte auf der Linie cd liegen. Man ziehe noch zwei andere gegen einander winkelrechte Linien $a'b'$ und $c'd'$, welche auch durch o gehen, und lasse $a'b'$ die isodynamische Curve im erwähnten Punkte berühren. Mit einem Halbmesser, welcher sich zu dem Halbmesser der ersten Kreise verhält wie $z':z$, zeichnet man zwei Kreise durch o und mit den Mittelpunkten auf der Linie $c'd'$. Die also construirte Figur giebt die Geschwindigkeit der Wärmevariation in verschiedenen Richtungen. Man hat kämlich

$$\frac{dq}{ds} = z \sin\chi, \quad \frac{du}{ds} = z' \sin\chi'.$$

Die von o gezogenen Sehnen bestimmen folglich bei einem constanten Werthe ds die Veränderungen, welche die totale und innere Wärmemenge erleidet. So z. B. giebt die Figur, dass bei Veränderung nach*

$o\,1$ die totale Wärmemenge constant ist; innere Wärme wird zur Arbeit verwandelt.

$o\,2$. Wärme wird aufgenommen von aussen und eine ebenso grosse Veränderung in der innern Wärmemenge findet statt.

$o\,3$. Wärme wird aufgenommen und gänzlich zur Arbeit verwandelt; keine Veränderung in der innern Wärme.

$o\,4$. Die grösste Veränderung in der totalen Wärmemenge; die innere Wärme wird vermehrt.

$o\,5$. Die grösste Veränderung in der innern Wärme.

$o\,6$. Aus der aufgenommenen Wärme wird innere Wärme.

§ 5. Man kann eine andere Auslegung der Gleichungen geben, welche als Ausdruck für die Veränderungen, die ein Körper durch die Wärme erleidet, hergeleitet wird.

Sei o (Fig. 11) ein Punkt, welcher den Zustand des Körpers bezeichnet, und od die Tangente zur adiabatischen Curve durch o, ob eine dagegen winkelrechte Linie, deren Länge z ist. Wir betrachten z als eine Kraft, welche auf einen materiellen Punkt in o wirkt, der sich nach der die Zustandsveränderung ergebenden Curve bewegt, während die Kraft z beständig normal gegen die adiabatische Curve durch den Punkt o, wo der bewegliche materielle Punkt sich gelegentlich befindet, gerichtet ist. Man findet aus 6), dass die Arbeit, welche die Kraft z verrichtet, während ihr Angriffspunkt das Bogenelement ds durchläuft, $= dq$ ist. In der That ist der Winkel zwischen der Richtungslinie der Kraft und der Richtung des Wegelements $\frac{\pi}{2} - \chi$, also die erwähnte Arbeit

$$z \cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) ds = z \sin\chi\, ds = dq.$$

Wird $z = ob$ in zwei Componenten oa und oc zerlegt parallel mit den v- und p-Axen, so ist, wenn der Winkel $oba = \psi$ gesetzt wird,

* Die Darstellung ist analog mit Zeuner's bekanntem Diagramm für die Schieberbewegung.

13) $$oa = z \sin\psi = \lambda, \quad oc = z \cos\psi = \varkappa.$$

Man findet hieraus, dass die beiden Componenten zu z gerade λ oder $\varkappa$ sind. Dieses zeigt auch die Gleichung 1a), indem, während das Wegelement ds beschrieben wird, dv und dp die Projectionen dieses Elementes nach den Richtungen oa und oc sind.

Sei oe die Tangente zu der isodynamischen Curve durch den Punkt o und sei of dagegen winkelrecht gezogen. Der Winkel ofg ist dann ψ'. Aus der Gleichung 11) erhält man

14) $$z' = \frac{\varkappa}{\cos\psi'} = \frac{oc}{\cos ofg} = of.$$

Die Linie of stellt also eine Kraft z' vor, welche bei der Bewegung des Punktes o längs der Zustandscurve die innere Arbeit verrichtet. Die mit den p- und v-Axen parallelen Componenten zu z' sind $oc = \varkappa$ und $og = \lambda - p$.

Wenn man sich die Kraft z in zwei Componenten $of = z'$ und $oh = p$ zerlegt denkt, so verrichtet bei der Bewegung des Punktes o die Kraft z' eine Arbeit gleich der innern Arbeit und die Kraft p eine Arbeit gleich der äussern Arbeit während der Zustandsveränderung.

§ 6. Bezeichnet man die Tangente und die Normale der adiabatischen Curve mit T_a und N_a, so ist

15) $$T_a = -p\frac{ds}{dp}, \quad N_a = \frac{p\,ds}{dv}.$$

Hieraus folgt

$$N_a : T_a = -\,dp : dv.$$

Aber für die erwähnte Curve hat man zufolge der Gleichung 1a)

$$\lambda\,dv + \varkappa\,dp = 0$$

oder

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{\lambda}{\varkappa},$$

also ist für die adiabatische Curve

16) $$N_a : T_a = \lambda : \varkappa.$$

Die beiden Functionen λ und $\varkappa$ sind daher proportional den Normalen und den Tangenten an der adiabatischen Curve durch den Punkt, welcher den Zustand des Körpers angiebt.

Denkt man sich λ als Normale, $\varkappa$ als Tangente, so findet man noch, dass die Summe der Subnormale und der Subtangente die Function z darstellt.

§ 7. Wenn man in den Gleichungen 1a) und 1c) p constant annimmt, so erhält man

$$dq = \lambda\,dv = C\,dT,$$

woraus folgt

$$17)\qquad \frac{C}{\lambda}=\left(\frac{dv}{dT}\right)_p.$$

Ebenso folgt aus den Gleichungen 1a) und 1b), wenn man v constant setzt,

$$dq=\varkappa\, dp=c\, dT$$

oder

$$18)\qquad \frac{\varkappa}{c}=\left(\frac{dT}{dp}\right)_v.$$

Endlich erhält man aus den Gleichungen 1b) und 1c), wenn in ihnen T constant angenommen wird,

$$dq=l\, dv=h\, dp$$

oder

$$19)\qquad \frac{l}{h}=\left(\frac{dp}{dv}\right)_T.$$

Aber nun ist*

$$20)\qquad \left(\frac{dp}{dv}\right)_T\left(\frac{dv}{dT}\right)_p\left(\frac{dT}{dp}\right)_v=-1.$$

Dadurch, dass man die Gleichungen 17), 18), 19) und 20) mit einander vergleicht, findet man

$$21)\qquad \frac{C}{c}\cdot\frac{l}{h}\cdot\frac{\varkappa}{\lambda}=-1.$$

Aus den Gleichungen 5) folgt

$$22)\qquad \frac{\lambda}{\varkappa}=tang\,\psi.$$

Weiter hat man, wenn Θ das Supplement des Winkels bedeutet, welchen die Tangente an der isothermischen Curve mit der v-Axe bildet,

$$23)\qquad tang\,\Theta=-\left(\frac{dp}{dv}\right)_T=-\frac{l}{h}.$$

Durch Vergleichung zwischen den Gleichungen 21), 22) und 23) bekommt man

$$24)\qquad \frac{C}{c}=\frac{tang\,\psi}{tang\,\Theta}.$$

Diese Gleichung hat eine geometrische Bedeutung. Wenn man nämlich od und oi (Fig. 12) die Tangenten zu den adiabatischen und isothermischen Curven in einem Punkte o vorstellen lässt, entsprechend dem Volumen On und dem Drucke on, so ist

$$tang\,\psi=\frac{on}{nd},\qquad tang\,\Theta=\frac{on}{ni}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{C}{c}=\frac{ni}{nd}.$$

* Clausius, Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie, II, S. 15.

Die specifische Wärme bei constantem Druck verhält sich also zu der specifischen Wärme bei constantem Volumen wie die Subtangenten für die isothermische und die adiabatische Curve.

§ 8. Man hat ferner nach Clausius* mit Anwendung der hier angenommenen Bezeichnungen

$$C - c = T\left(\frac{dv}{dT}\right)_p \left(\frac{dp}{dT}\right)_v, \tag{25}$$

wie auch

$$l = T\left(\frac{dp}{dT}\right)_v, \quad h = -T\left(\frac{dv}{dT}\right)_p. \tag{26}$$

Durch Multiplication der beiden Gleichungen 26) erhält man

$$hl = -T^2\left(\frac{dv}{dT}\right)_p \left(\frac{dp}{dT}\right)_v$$

und mit Benutzung der Gleichung 25)

$$hl = -T(C-c). \tag{27}$$

§ 9. Zieht man (Fig. 12) eine Linie bs durch den Punkt b winkelrecht gegen die Tangente oi der isothermischen Curve, so giebt die Linie ou die latente Ausdehnungswärme l an und die Linie os die latente Druckveränderungswärme h. Man hat nämlich $\angle oba = \psi$ und $\angle uba = \Theta$, also $\angle obu = \psi - \Theta$, wie auch

$$ob : ou = \sin bua : \sin obu = \cos\Theta : \sin(\psi - \Theta),$$

woraus folgt

$$ou = \frac{z \sin(\psi - \Theta)}{\cos\Theta}.$$

Setzt man in den Gleichungen 1b) und 6) T constant, so ist

$$\chi = \psi - \Theta$$

und

$$dq = l\,dv = z\sin(\psi - \Theta)\,ds$$

oder

$$l = \frac{z\sin(\psi - \Theta)}{\left(\frac{dv}{ds}\right)_T}.$$

Aber nun ist

$$\left(\frac{dv}{ds}\right)_T = \cos\Theta$$

und folglich

$$l = \frac{z\sin(\psi - \Theta)}{\cos\Theta} = ou.$$

In dem rechtwinkligen Dreieck ous ist

$$os = ou \,.\, \cot osu = l\cot\Theta.$$

Mit Benutzung der Gleichung 23) findet man hieraus

---

* Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie, II, S. 17.

$$os = -h.$$

Aus den zwei ähnlichen Dreiecken *ous* und *aub* erhält man

$$bu : us = ua : uo,$$

also

$$bu + us : us = ua + uo : uo$$

oder

$$bs : us = ao : uo = \lambda : l.$$

Aber ausserdem ist

$$us : bu = os : ab = -h : \varkappa.$$

Hieraus folgt

$$bs : bu = -\lambda h : \varkappa l$$

oder mit Benutzung der Gleichung 21)

$$\frac{bs}{bu} = \frac{C}{c}.$$

Die beiden gegen die Tangente der isothermischen Curve winkelrechten Geraden bs und bu geben also die relative Grösse von C und c an; werden sie mit C_1 und c_1 bezeichnet, so hat man folglich

28) $$\frac{C_1}{c_1} = \frac{C}{c}.$$

Die Linie ot, welche einen Theil der Tangente an der isothermischen Curve ausmacht, steht in einer bemerkenswerthen Beziehung zu der absoluten Temperatur, dem durch den Punkt o angegebenen Zustande des Körpers entsprechend. Man hat nämlich aus den ähnlichen Dreiecken ous, ots, uab und bcs

$$ot : ou = ab : ub, \quad ot : os = bc : bs.$$

Wird ot mit T_1 bezeichnet, so findet man hieraus

29) $$T_1 = \frac{l\varkappa}{c_1} = -\frac{h\lambda}{C_1}.$$

Aber durch Vergleichung zwischen den Gleichungen 18), 26), 17) und 26) erhält man

30) $$T = \frac{l\varkappa}{c} = -\frac{h\lambda}{C},$$

also ist

31) $$Tc = T_1 c_1, \quad TC = T_1 C_1.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass die doppelten Flächen der Dreiecke obu und abs die Producte Tc und TC darstellen.

§ 10. Die angegebene geometrische Darstellung macht es leicht, mehrere Relationen zwischen verschiedenen Arten der Wärmecapacität herzuleiten.

Weil in der Fig. 12 die Flächen

$$obs = obu + osu$$

und

$$obs = \frac{os \,.\, bc}{2} = -\frac{h\lambda}{2},$$

$$obu = \frac{ou \,.\, ab}{2} = \frac{l\varkappa}{2},$$

$$osu = \frac{ou \,.\, os}{2} = -\frac{lh}{2},$$

so folgt hieraus

$$-\frac{h\lambda}{2} = \frac{l\varkappa}{2} - \frac{lh}{2},$$

eine Gleichung, welche auch in die Form gebracht werden kann

32a) $$l\varkappa + h\lambda = lh$$

oder

32b) $$\frac{\varkappa}{h} + \frac{\lambda}{l} = 1.$$

Die Fläche des Dreiecks osu kann auch durch

$$\frac{ot \,.\, su}{2} = \frac{T_1(C_1 - c_1)}{2}$$

ausgedrückt werden. Man erhält daher mit Benutzung der Gleichung 31)

$$T(C-c) = -hl,$$

eine Gleichung, welche wir in § 8 als Gleichung 27) auf anderem Wege hergeleitet haben.

Aus den ähnlichen Dreiecken osu und csb findet man

$$bs : su = sc : so$$

oder

$$bs - su : su = sc - so : so,$$

also

$$c_1 : C_1 - c_1 = \varkappa : -h$$

oder

33) $$\frac{h}{\varkappa} = -\frac{C_1 - c_1}{c_1} = \frac{C - c}{c}.$$

In derselben Weise findet man

34) $$\frac{\lambda}{l} = \frac{C - c}{C}.$$

G. R. Dahlander.

XVII. Ueber Bertrand's Beweis des Parallelenaxioms.

In dem 6. Hefte vorigen Jahrgangs (S. 454) dieser Zeitschrift hat Herr Becker zum Beweise der Parallelentheorie die Bertrand'sche Methode benützt, in welcher der Winkel definirt ist als der von den beiden Schenkeln begrenzte Ausschnitt der Ebene, und die Anhänger der nichteuklidischen Geometrie, die jenen Beweis nicht als richtig erkennen, aufgefordert, anzugeben, wo der Fehler liege. Als Anhänger der angegriffenen Theorie erlaube ich mir, den Punkt zu bezeichnen, der nach meiner Meinung fehlerhaft ist, besonders auch deshalb, weil er in Bezug auf das formale Rechnen interessant ist.

Nennt man Streifen den Theil der Ebene, der eingeschlossen ist von einer Geraden AA_1 und den beiden auf ihr nach derselben Seite errichteten Senkrechten AB, A_1B_1, so beruht der Bertrand'sche Beweis auf der Unmöglichkeit, dass ein Winkel BAC_1 ganz in dem Streifen BAA_1B_1 liegen könne. Nach Bertrand wird sie folgendermassen erkannt. Gesetzt, der Winkel BAC_1 sei grösser als der n^{te} Theil eines rechten, so lege man die $n-1$ dem Winkel BAC_1 gleichen Winkel C_1AC_2, C_2AC_3, ... $C_{n-1}AC_n$ neben einander, so erhält man einen Winkel BAC_n, der grösser ist als ein rechter, und folglich die Linie AA_1 ganz enthält. Legt man aber neben den Streifen BAA_1B_1 die $n-1$ ihm congruenten $B_1A_1A_2B_2$, $B_2A_2A_3B_3$, ... $B_{n-1}A_{n=1}A_nB_n$, so entsteht ein Streifen BAA_nB_n, der ganz in dem Winkel BAC_n enthalten und folglich kleiner ist als dieser. Somit ist der $n$fache Winkel $BAC_1 = a$ grösser als der $n$fache Streifen $BAA_1B_1 = b$ oder $na > nb$. Daher ist auch, schliesst Bertrand, $a > b$, was mit der Annahme, der Winkel liege ganz im Streifen, im Widerspruch steht. Der Schluss: weil $na > nb$, ist auch $a > b$, ist aber nicht richtig, oder doch wenigstens muss bewiesen werden, dass man so schliessen darf. Wären a und b Zahlen, so wäre der Schluss richtig; aber auch in diesem Falle versteht er sich nicht ohne Beweis von selbst, sondern er wird aus den Definitionen der Addition und des „grösser" hergeleitet. Wieviel mehr ist es nöthig, hier, wo a und b geometrische Grössen sind, bei welchen die durch na, resp. nb ausgedrückte Operation eine rein geometrische ist, zu beweisen, dass man so schliessen darf, wie Bertrand thut. Denn dass jene Folgerung nicht gezogen werden darf, wenn a und b Objecte beliebiger Art, mit beliebig definirten Verknüpfungsgesetzen sind, ist leicht zu zeigen. Operiren wir z. B. statt mit Zahlen, mit Zahlengruppen von je zwei reellen Zahlen. Unter (α, β) und (γ, δ) zwei solche Gruppen (aus den reellen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gebildet) verstanden, sei festgesetzt: es ist $(\alpha, \beta) > (\gamma, \delta)$, wenn $\alpha + \beta > \gamma + \delta$, und es ist $2(\alpha, \beta) = (\alpha^2, \beta^2)$. Ist dann a gleich der Gruppe $(4, -3)$, und b gleich der $(2, 1)$, so ist

$$2a = (16, 9), \quad 2b = (4, 1),$$

also $2a > 2b$, weil $16 + 9 > 4 + 1$. Dagegen ist $a < b$, weil $4 + (-3) < 2 + 1$. Also bestehen hier die Ungleichungen $2a > 2b$ und $a < b$ zusammen.

Ein directer Beweis der Richtigkeit jenes Schlusses fällt nun ersichtlich mit dem Beweise des Parallelenaxioms zusammen; man könnte einen andern zu liefern suchen, indem man constatirte, dass im vorliegenden Falle alle jene Prämissen erfüllt sind, aus welchen rein formell, ohne Rücksicht auf die verknüpften Objecte und die Verknüpfungsgesetze, folgt, dass $na > nb$ auch $a > b$ nach sich zieht. Meines Wissens sind jene Prämissen noch nicht aufgestellt; man kann aber behaupten, dass die Eigenschaften der Geraden und des Winkels, mit welchen man das Parallelenaxiom beweisen will, jene Prämissen nicht erfüllen können. Denn diese Eigenschaften gelten wörtlich auch für die geodätischen Linien und deren Winkel auf der pseudosphärischen Fläche von constantem negativem Krümmungsmasse, und wenn also für die Ebene die Prämissen erfüllt wären, müssten sie es auch für die Pseudosphäre sein. Dass aber für diese der oben bestrittene Satz nicht gilt, ist leicht zu zeigen. Nach Beltrami (*Saggio di interpretatione della geometria non Euclidea, Giorn. Mat. Nap.* 1868) kann man die Punkte einer solchen Fläche so auf die Punkte im Innern eines Kreises beziehen, dass sie sich gegenseitig eindeutig entsprechen und jede geodätische Linie der Fläche durch eine gerade Linie in der Ebene des Kreises dargestellt wird. In dem Kreise seien nun zwei aufeinander senkrechte Durchmesser gezogen MP, MQ und ein dritter MR, der den rechten Winkel PMQ halbirt. Wie Beltrami gezeigt, entsprechen diesen drei geodätische Linien, welche sich in dem durch M dargestellten Punkte schneiden und zwei Winkel $= 45^0$ bilden. Sie begrenzen zwei Flächenausschnitte, die durch die Kreissectoren PMR und RMQ abgebildet werden, und miteinander zur Deckung gebracht werden können, weil sie bei M gleiche Winkel haben. Nennen wir einen von ihnen a, so ist der Ausschnitt der Pseudosphäre, der aus beiden gebildet ist, durch $2a$ zu bezeichnen. Dieser wird durch den rechten Winkel PMQ abgebildet. Nun sei $RS \perp MQ$, so ist RS das Bild einer geodätischen Linie, die auf der durch MQ vorgestellten senkrecht steht, und folglich ist $PMSR$ das Bild eines Streifens C der Pseudosphäre, der den Winkel a ganz enthält und daher grösser ist als dieser. Bestimmt man nun auf MQ die Länge $MT = u$ so, dass der ihr entsprechende geodätische Bogen doppelt so gross ist als der durch MS dargestellte, so muss nach den von Beltrami gegebenen Formeln u der Gleichung genügen

$$\frac{R}{2}\, l\, \frac{a+u}{a-u} = 2 \cdot \frac{R}{2}\, l\, \frac{a + \frac{a}{\sqrt{2}}}{a - \frac{a}{\sqrt{2}}},$$

wo a der Kreisradius ist. Hieraus folgt $u = 0{,}95 \, . \, a$. Also fällt der Punkt T noch in den Kreis. Errichtet man in T die Senkrechte TV, so entspricht der Figur $RSTV$ auf der Fläche ein Streifen, der mit dem durch $PMSR$ abgebildeten zur Deckung gebracht werden kann, weil die Strecken MS, ST gleichen Bogen angehören. Der durch $PMTV$ dargestellte Flächenstreifen ist also $2b$, und es ist ersichtlich, dass er nicht ganz mit dem Winkel $2a$ zusammenfällt, sondern um das durch VTQ abgebildete Stück kleiner ist. Folglich ist $2a > 2b$, obgleich $a < b$ ist. Also ist in diesem

Falle für die Pseudosphäre jener Bertrand'sche Schluss nicht zulässig, und damit ist, wie ich glaube, gezeigt, dass er auch für die Ebene nicht zum Beweise des Parallelenaxioms dienen kann.

Carlsruhe, Januar 1876. J. Lüroth.

XVIII. Die Malfatti'sche Aufgabe für das geradlinige Dreieck.

In ein gegebenes Dreieck sollen drei Kreise so beschrieben werden, dass jeder derselben die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt.

Bezeichnen a, b, c, A, B, C die Seiten und Ecken des gegebenen Dreiecks, x, y, z bezüglich die Abstände der Ecken A, B, C von den Berührungspunkten der die Seiten b und c, c und a, a und b berührenden Kreise und setzt man zur Abkürzung — alle Wurzeln positiv gedacht —

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c)=s,$$

$$\sqrt{\frac{s-a}{s}}=\alpha,\quad \sqrt{\frac{s-b}{s}}=\beta,\quad \sqrt{\frac{s-c}{s}}=\gamma,$$

$$\sqrt{\frac{a}{s}}=\alpha',\quad \sqrt{\frac{b}{s}}=\beta',\quad \sqrt{\frac{c}{s}}=\gamma',$$

so sind die nothwendigen und hinreichenden Gleichungen der Aufgabe

$$1)\qquad y+z+2\alpha\sqrt{y}\sqrt{z}=a,$$

$$2)\qquad z+x+2\beta\sqrt{z}\sqrt{x}=b,$$

$$3)\qquad x+y+2\gamma\sqrt{x}\sqrt{y}=c,$$

wo $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ mit demselben Zeichen zu nehmen sind.

Die erste dieser Gleichungen ergiebt sich, wenn man ausdrückt, dass die Seite a aus den Strecken y, z und dem zwischen den Berührungspunkten der diese Seite berührenden Kreise enthaltenen Stücke besteht. Das letztere wird, wenn die Halbmesser dieser Kreise mit r_2 und r_3 bezeichnet werden,

$$=\sqrt{(r_2+r_3)^2-(r_2-r_3)^2}=2\sqrt{r_2 r_3}$$

oder, den Gleichungen

$$r_2=y\,tg\,\frac{B}{2}=y\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},\quad r_3=z\,tg\,\frac{C}{2}=z\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

zufolge,

$$=2\sqrt{\frac{(s-a)yz}{s}}=2\alpha\sqrt{y}\sqrt{z}.$$

Aehnlich ergeben sich 2) und 3).

Betrachtet man die Gleichung 1) einmal in Bezug auf die Unbekannte $\sqrt{y}$, das andere Mal in Bezug auf die Unbekannte $\sqrt{z}$ als quadratische Gleichung, so ergiebt sich durch Auflösung derselben

$$4)\qquad \sqrt{y}+\alpha\sqrt{z}=\alpha'\sqrt{s-z},$$
$$5)\qquad \sqrt{z}+\alpha\sqrt{y}=\alpha'\sqrt{s-y},$$

und wenn von dem Producte dieser beiden Gleichungen die mit α multiplicirte Gleichung 1) abgezogen wird,

$$(1-\alpha^2)\sqrt{y}\sqrt{z}=\alpha'^2\sqrt{s-y}\sqrt{s-z}-a\alpha$$

oder

$$6)\qquad \sqrt{y}\sqrt{z}-\sqrt{s-y}\sqrt{s-z}=-s\alpha.$$

Multiplicirt man andererseits die aus 4) und 5) folgenden Gleichungen

$$\sqrt{y}=-\alpha\sqrt{z}+\alpha'\sqrt{s-z},$$
$$\sqrt{z}=-\alpha\sqrt{y}+\alpha'\sqrt{s-y}$$

miteinander, so wird

$$\sqrt{y}\sqrt{z}=\alpha^2\sqrt{y}\sqrt{z}-\alpha\alpha'(\sqrt{y}\sqrt{s-z}+\sqrt{z}\sqrt{s-y})+\alpha'^2\sqrt{s-y}\sqrt{s-z}$$

und mit Hilfe von 6)

$$7)\qquad \sqrt{y}\sqrt{s-z}+\sqrt{z}\sqrt{s-y}=s\alpha'.$$

Die Gleichungen 6) und 7) sind am leichtesten in der Verbindung

$$8)\qquad (\sqrt{y}+i\sqrt{s-y})(\sqrt{z}+i\sqrt{s-z})=s(-\alpha+i\alpha')$$

zu behandeln.

Ebenso leitet man aus 2) und 3)

$$9)\qquad (\sqrt{z}+i\sqrt{s-z})(\sqrt{x}+i\sqrt{s-x})=s(-\beta+i\beta'),$$
$$10)\qquad (\sqrt{x}+i\sqrt{s-x})(\sqrt{y}+i\sqrt{s-y})=s(-\gamma+i\gamma')$$

ab.

Die Isolirung der Unbekannten geschieht nun ohne Schwierigkeit. Das Product von 9) und 10) durch 8) dividirt, giebt

$$(\sqrt{x}+i\sqrt{s-x})^2=s\,\frac{(-\beta+i\beta')(-\gamma+i\gamma')}{(-\alpha+i\alpha')}$$

oder, wegen

$$(-\alpha+i\alpha')(-\alpha-i\alpha')=1:$$
$$(\sqrt{x}+i\sqrt{s-x})^2=s(-\alpha-i\alpha')(-\beta+i\beta')(-\gamma+i\gamma'),$$
$$\sqrt{x}+i\sqrt{s-x}=$$
$$\pm\sqrt{s}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}-i\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\beta}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}\right).$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$\pm\sqrt{s}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}-i\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\beta}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$
$$=u+iu',$$
$$\pm\sqrt{s}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}-i\sqrt{\frac{1+\beta}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$
$$=v+iv',$$

$$\pm\sqrt{s}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\beta}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}-i\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$
$$= w + iw',$$

alle Wurzeln positiv gedacht und unter u, v, w die reellen Theile dieser Ausdrücke verstanden, so findet man

11) $$\sqrt{x}=u, \quad \sqrt{y}=v, \quad \sqrt{z}=w.$$

Da überdies

$$(u+iu')(u-iu')=u^2+u'^2=s$$

und demgemäss

$$(u+iu')^2=u^2-u'^2+2iuu'=2u^2-s+2iuu'$$

ist, so wird

$$2u^2-s+2iuu'=s(-\alpha-i\alpha')(-\beta+i\beta')(-\gamma+i\gamma'),$$
$$u^2=\tfrac{1}{2}(s-s\alpha\beta\gamma+s\alpha\beta'\gamma'-s\alpha\beta\gamma'),$$

12) $$x=u^2=\tfrac{1}{2}(s-r+f-g-h)$$

und ebenso

13) $$y=v^2=\tfrac{1}{2}(s-r-f+g-h),$$

14) $$z=w^2=\tfrac{1}{2}(s-r-f-g+h),$$

wo r den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises und f, g, h die Abstände des Mittelpunktes desselben von den Ecken A, B, C vorstellen.

Es ist nun umgekehrt noch zu zeigen, dass die Werthe u, v, w für $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ gesetzt den Gleichungen 1), 2), 3) genügen und dasselbe Zeichen besitzen.

Zunächst folgt aus der Gleichung

$$(v+iv')(w+iw')=s(-\alpha+i\alpha'):$$
$$0=vw-v'w'+s\alpha,$$

und wenn mit $vw+v'w'+s\alpha$ multiplicirt wird,

$$0=(vw+s\alpha)^2-v'^2w'^2=(vw+s\alpha)^2-(s-v^2)(s-w^2)$$
$$=s(v^2+w^2)+2s\alpha vw-s^2(1-\alpha^2),$$

d. h.

$$v^2+w^2+2\alpha vw=a.$$

Ebenso bestätigt man die Gleichungen

$$w^2+u^2+2\beta wu=b, \quad u^2+v^2+2\gamma uv=c.$$

Da nun hiernach und nach 13), 14)

$$2\alpha vw=a-v^2-w^2=r+f-(s-a),$$
$$2\beta wu=b-w^2-u^2=r+g-(s-b),$$
$$2\gamma uv=c-u^2-v^2=r+h-(s-c)$$

und aus geometrischen Gründen

$$r+f>s-a, \quad r+g>s-b, \quad r+h>s-c$$

ist, so müssen vw, wu, uv positiv sein.

Man kann zur Auflösung der Gleichungen 1), 2), 3) auch in folgender Weise gelangen.

Löst man 2) und 3) bezüglich nach $\sqrt{z}$ und $\sqrt{y}$ auf, so wird

$$\sqrt{z} = -\beta\sqrt{x} + \beta'\sqrt{s-x}, \quad \sqrt{y} = -\gamma\sqrt{x} + \gamma'\sqrt{s-x}$$

und hieraus

$$(\beta\gamma' - \gamma\beta')\sqrt{x} = \beta'\sqrt{y} - \gamma'\sqrt{z}, \quad (\beta\gamma' - \gamma\beta')\sqrt{s-x} = \beta\sqrt{y} - \gamma\sqrt{z}.$$

Aus diesen Gleichungen beseitige man x, was einfach durch Quadrirung und Addition erreicht wird. Wird hierauf das Resultat

$$y + z - 2(\beta\gamma + \beta'\gamma')\sqrt{y}\sqrt{z} = s(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2$$

mit der Gleichung 1) zur Bestimmung von $y+z$ verbunden, so ergiebt sich

$$(\alpha + \beta\gamma + \beta'\gamma')(y+z) = s\left(\alpha(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 + \frac{a}{s}(\beta\gamma + \beta'\gamma')\right).$$

Da nun

$$\frac{a}{s} = \alpha'^2 = 1 - \alpha^2$$

und identisch

$$(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 + (\beta\gamma + \beta'\gamma')^2 = (\beta^2 + \beta'^2)(\gamma^2 + \gamma'^2) = 1$$

ist, so wird

$$\begin{aligned} \alpha(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 + \frac{a}{s}(\beta\gamma + \beta'\gamma') &= \alpha - \alpha(\beta\gamma + \beta\gamma')^2 \\ &\quad + \beta\gamma + \beta'\gamma' - \alpha^2(\beta\gamma + \beta'\gamma') \\ &= (\alpha + \beta\gamma + \beta'\gamma')(1 - \alpha\beta\gamma - \alpha\beta'\gamma') \end{aligned}$$

und demzufolge

15) $$y + z = s - s\alpha\beta\gamma - s\alpha\beta'\gamma' = s - r - f.$$

Ebenso findet man

16) $$z + x = s - r - g,$$

17) $$x + y = s - r - h$$

und aus 15), 16), 17)

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(s - r + f - g - h), \\ y &= \tfrac{1}{2}(s - r - f + g - h), \\ z &= \tfrac{1}{2}(s - r - f - g + h). \end{aligned}$$

Krakau. Dr. F. Mertens.

Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

1876 Januar — Juni.

Mathematik, technische und Natur-Wissenschaften.

Frischauf, Dr. **J.**, Professor an der Universität zu Graz, Elemente der absoluten Geometrie. [XI u. 142 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 3. 40.

Günther, Dr. **Siegmund**, vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten und 4 lithographirten Tafeln. gr. 8. [VIII u. 352 S.] Geh. n. ℳ 9. —

Hesse, Otto, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung. Revidirt und mit Zusätzen versehen von Dr. **O. Gundelfinger**, a. o. Professor an der Universität zu Tübingen. Dritte Auflage. [XVI u. 546 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 13. —

Jeep, W., Ingenieur und Director der städtischen Baugewerke- und Maschinenbau-Schule der Stadt Sulza, die Verwendung des Eisens beim Hochbau. Mit über 800 Holzschnitten und 14 lithographirten Tafeln. 1.—4. Lieferung. gr. 8. Jede Lieferung n. ℳ 2. 80. Erscheint in 6 Lieferungen à ℳ 2. 80.

Kirchhoff, Dr. **Gustav**, Professor in Berlin, Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. Dritte Lieferung (Schluss der Mechanik). gr. 8. [X u. S. 309—466.] Geh. n. ℳ 4. —

Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik. „Originalberichte der Verfasser", gesammelt und herausgegeben von Dr. **Leo Koenigsberger** und Dr. **Gustav Zeuner.** I. Band 1. Heft [S. 1—128.] gr. 8. geh. n. ℳ 2. 40.

Riemann's, Bernhard, gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Herausgegeben unter Mitwirkung von **R. Dedekind** und **H. Weber**. [VIII u. 526 S.] Lex.-8. geh. n. ℳ 16. —

Röthig, Dr. **Oskar**, Oberlehrer an der Friedrichs-Werder'schen Gewerbeschule in Berlin, die Probleme der Brechung und Reflexion. [VIII u. 112 S.] gr. 8. geh. n. M. 2. 80.

Scherling, Ch., Professor am Catharineum in Lübeck, Grundzüge der axonometrischen und schiefen Parallel-Projection. Ein Ergänzungsheft zu jedem Lehrbuch der gewöhnlichen orthogonalen Projection für Realschulen. Mit 5 lithograph. Figurentafeln. [24 S.] 4. geh. n. ℳ 1. —

Steiner's, Jacob, Vorlesungen über synthetische Geometrie. Zweiter Theil. Auch unter dem Titel: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften. Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiner's bearbeitet von Dr. **Heinrich Schröter**, Professor der Mathematik an der Universität zu Breslau. Zweite Auflage. Mit 106 Holzschnitten im Text. [XVI u. 535 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 14. —