

Werk

Titel: Zeitschrift für Mathematik und Physik

Verlag: Teubner

Jahr: 1876

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 MATH I, 755:21

Werk Id: PPN599415665_0021

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN599415665_0021 | LOG_0034

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

12/9

Zeitschrift
für
Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



21. Jahrgang. 5. Heft.

Mit 2 lithographirten Tafeln.

Ausgegeben am 1. September 1876.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1876.

Soeben erschien:

Repertorium
der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete
der
reinen und angewandten Mathematik

„Originalberichte der Verfasser“
gesammelt und herausgegeben

von

Dr. Leo Königsberger und **Dr. Gustav Zeuner.**

I. Band. 2. Heft. Preis M. 1.20.

Leipzig, 1. August 1876.

B. G. Teubner.

Im Verlage von **J. Engelhorn** in Stuttgart ist soeben erschienen und in allen Buchhandlungen vorrätig:

Dr. Wm. Eisenlohr's

Lehrbuch der Physik.

Zum Gebrauche bei Vorträgen und zum Selbstunterrichte.

Elfte Auflage

bearbeitet von

Dr. P. Zech,

Professor der Physik am Polytechnikum Stuttgart.

Preis 9 Mark.

Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

1876 Januar—Juni.

Mathematik, technische und Natur-Wissenschaften.

Barbey, Dr. C., methodisch-geordnete Aufgabensammlung, mehr als 8000 Aufgaben enthaltend, über alle Theile der Elementar-Arithmetik für Gymnasien, Realschulen und polytechnische Lehranstalten. Fünfte unveränderte (Doppel-) Auflage. gr. 8. [XII und 322 S.] Geh. M. 2. 70.

Bruhns, Dr. C., Professor der Astronomie und Director der Sternwarte in Leipzig, monatliche Berichte über die Resultate aus den meteorologischen Beobachtungen angestellt an den Königlich Sächsischen Stationen im Jahre 1875. Mitgetheilt nach den Zusammenstellungen im Statistischen Bureau des Königl. Ministeriums des Innern. [XXX S.] gr. 4. geh. n. M. 1. 50.

XIV.

Das System der polaren Liniencoordinaten in der Ebene.

Von

Dr. JOHANN PHILIPP WEINMEISTER,

Oberlehrer an der Realschule I. Ordnung in Leipzig.

§ 1.

In der analytischen Geometrie der Ebene ist bekanntlich die Gleichung

$$x\xi + y\eta + 1 = 0$$

einer doppelten Deutung fähig. Betrachtet man x, y als veränderliche rechtwinklige Punktcoordinaten, so repräsentirt sie eine gerade Linie, welche von den Coordinatenaxen die Strecken $-\frac{1}{\xi}, -\frac{1}{\eta}$ abschneidet; betrachtet man dagegen ξ, η als veränderliche Linien-Coordinaten, denen die eben erwähnte Bedeutung beizulegen ist, so repräsentirt sie einen Punkt, welcher von den Coordinatenaxen die bezüglichen Entfernungen x, y besitzt. Jene Gleichung ist deswegen das unentbehrliche Mittelglied zwischen Punkt- und Liniencoordinaten. Ausser den Punktcoordinaten x, y macht die analytische Geometrie der Ebene einen ausgedehnten Gebrauch von polaren Punktcoordinaten r, θ , dagegen scheint eine analoge Einführung polarer Linien-Coordinaten im Gegensatze zu den gewöhnlichen Liniencoordinaten noch wenig Beachtung gefunden zu haben. Wir haben in Absicht, im Folgenden eine systematische Entwicklung der auf ein solches Coordinatensystem bezüglichen Lehren zu geben und schreiten zunächst zur Definition desselben. Statt der oben angegebenen Gleichung führen wir eine andere als Normalform ein, nämlich die folgende:

1)
$$q - x \cos \theta - y \sin \theta = 0.$$

Die wohl auch unter dem Namen Normalform bekannte Gleichung mit den Punktcoordinaten x, y :

$$x \cos \theta + y \sin \theta - q = 0$$

stellt eine Gerade dar, welche vom Anfang den Abstand q besitzt, während θ der Winkel ist, welchen dieser Abstand mit der x -Axe bildet. Jene Gleichung ist deswegen wichtig, weil ihre linke Seite bei der Substitution der Coordinaten eines fremden Punktes dessen negativen Abstand von der Geraden ausdrückt, falls jener Punkt mit dem Coordi-

naten-Anfang auf derselben Seite der Geraden gelegen ist. Die linke Seite der in 1) aufgestellten Gleichung wird daher diesen Abstand selbst angeben.

Indem wir uns an das Obige anschliessen, setzen wir nun fest:

2) Dem System der polaren Liniencoordinaten liegen eine unbegrenzte Gerade — die Coordinatenaxe — und ein Punkt auf derselben — der Coordinatenanfang — zu Grunde. Die polaren Liniencoordinaten bestehen aus einer Längencoordinate ρ , welche die Grösse der Senkrechten angiebt, die man vom Anfang auf die Gerade fällen kann, und aus einer Winkelcoordinate θ , welche den Winkel ausdrückt, den jene Senkrechte mit der Coordinatenaxe bildet.

Wir wollen der Grösse ρ kein Vorzeichen geben und die verschiedenen Lagen der Geraden dadurch kennzeichnen, dass wir θ die Werthe von -180° bis $+180^\circ$ zukommen lassen. Aus 2) geht hervor, dass die polaren Liniencoordinaten identisch sind mit den polaren Punkteordinaten des Fusspunktes des vom Anfang auf die Gerade gefällten Perpendikels.

Stellen wir die Polarcoordinaten ρ, θ mit den rechtwinkligen ξ, η zusammen, so haben wir

$$\xi = -\frac{\cos\theta}{\rho}, \quad \eta = -\frac{\sin\theta}{\rho}.$$

Die Coordinatenaxe hat die Coordinaten $\rho = 0, \theta = 90^\circ$; eine die Coordinatenaxe im Anfang unter dem Winkel τ schneidende Gerade: $\rho = 0, \theta = \tau + 90^\circ$; eine der Coordinatenaxe unter dem Abstände a parallele Gerade: $\rho = a, \theta = 90^\circ$. Bei auf der Coordinatenaxe senkrechten Geraden ist $\theta = 0$. Die Geraden $\rho_1\theta_1$ und $\rho_2\theta_2$ schneiden sich unter dem Winkel $(\theta_1 - \theta_2)$. Sie sind parallel, wenn $\theta_1 = \theta_2$. Ihr Abstand ist dann $(\rho_1 \pm \rho_2)$.

Findet zwischen den Polarcoordinaten ρ, θ einer bestimmten Geraden und den rechtwinkligen Coordinaten x, y eines bestimmten Punktes die Gleichung 1) identisch statt, so ist das ein Zeichen dafür, dass der Punkt x, y auf der Geraden ρ, θ liegt, oder, was dasselbe sagt, dass die Gerade ρ, θ durch den Punkt x, y hindurchgeht. Lassen wir nun ρ und θ variiren, aber so, dass sie der Gleichung 1) stets Genüge leisten, so erhalten wir unzählig viele Gerade, welche sämmtlich durch den Punkt x, y hindurchgehen. Wir können sagen: die Gleichung 1) ist die Bedingung für die Coordinaten ρ, θ , unter welcher die durch ρ, θ repräsentirte Gerade durch den Punkt x, y geht. Setzen wir zur Abkürzung

3)
$$P \equiv \rho - x \cos\theta - y \sin\theta,$$

so gilt

4) $P=0$

mit den Veränderlichen ρ, θ und den Constanten x, y ist die Gleichung des Punktes x, y , und zwar in der Normalform.

So ist z. B. die Gleichung des Coordinatenanfanges

$$\rho = 0.$$

Ist der Punkt durch seine Polarcoordinaten r, t ausgedrückt, so wird seine Gleichung in Liniencoordinaten

$$\rho - r \cdot \cos(\theta - t) = 0.$$

Wir haben daher als charakteristisches Kennzeichen der Punktgleichung drei Glieder, eins mit ρ , eins mit $\cos\theta$ und eins mit $\sin\theta$. Fehlt eins der beiden letzteren Glieder, so liegt der Punkt auf einer der Coordinatenachsen; fehlt das erstere, so liegt er im Unendlichen. Ein absolutes Glied besitzt die Punktgleichung nicht. In der allgemeinen Form kann die Punktgleichung verschieden auftreten. So sind

$$A\rho + B \cos\theta + C \sin\theta = 0,$$

$$A\rho + B \cos(\theta + \omega) = 0,$$

$$A\rho + B \sin(\theta + \omega) + C \cos(\theta + \omega) = 0$$

lauter Punktgleichungen. Wir erhalten aus der allgemeinen Form die Normalform, sobald wir erstere durch den Coefficienten von ρ dividiren.

Die drei Geraden $\rho_1\theta_1, \rho_2\theta_2, \rho_3\theta_3$ gehen durch denselben Punkt x, y , wenn folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\rho_1 - x \cos\theta_1 - y \sin\theta_1 = 0,$$

$$\rho_2 - x \cos\theta_2 - y \sin\theta_2 = 0,$$

$$\rho_3 - x \cos\theta_3 - y \sin\theta_3 = 0,$$

d. h. wenn

$$\begin{vmatrix} \rho_1 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \rho_2 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ \rho_3 & \cos\theta_3 & \sin\theta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Nach erfolgter Multiplication mit (-1) kann die Gleichung auch geschrieben werden

$$\rho_1 \sin(\theta_2 - \theta_3) + \rho_2 \sin(\theta_3 - \theta_1) + \rho_3 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0.$$

Nehmen wir eins dieser drei Coordinatenpaare als variabel an, so können wir sagen:

5) Die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \rho & \cos\theta & \sin\theta \\ \rho_1 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \rho_2 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\rho \sin(\theta_1 - \theta_2) + \rho_1 \sin(\theta_2 - \theta) + \rho_2 \sin(\theta - \theta_1) = 0.$$

ist die Gleichung des Schnittpunktes der Geraden $\rho_1\theta_1$ und $\rho_2\theta_2$.

Bereits oben haben wir erwähnt, dass, wenn ϱ , θ die Coordinaten einer beliebigen Geraden und x , y die eines beliebigen Punktes sind, die Function $\varrho - x \cos \theta - y \sin \theta$ den Abstand jenes Punktes von der Geraden ausdrückt. Wir können das jetzt verwerthen, indem wir sagen:

6) Setzt man in die linke Seite einer Punktgleichung in der Normalform $P=0$ die Coordinaten einer beliebigen Geraden ein, so erhält man den Abstand des Punktes von der Geraden, und zwar mit negativem Vorzeichen, wenn der Punkt und der Coordinatenanfang auf derselben Seite der Geraden liegen.

Sind zwei Punkte gegeben mit ihren Gleichungen in der Normalform

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv \varrho - x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta = 0, \\ P_2 &\equiv \varrho - x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta = 0, \end{aligned}$$

so ist die Gleichung

$$X = P_1 + \lambda P_2 = 0, \quad \lambda > 0$$

ihrem Bau nach wieder die eines Punktes. Da die Coordinaten der Verbindungslinie der Punkte $P_1=0$, $P_2=0$ die Gleichung $X=0$ identisch befriedigen, so geht daraus hervor, dass der Punkt $X=0$ auf derselben gelegen ist. Schreibt man letztere Gleichung in der Form

$$\frac{P_1}{P_2} = -\lambda,$$

so sieht man, dass jede andere durch den Punkt $X=0$ gezogene Gerade die Punkte $P_1=0$ und $P_2=0$ auf verschiedenen Seiten liegen hat, und zwar so, dass das Verhältniss der Abstände dem absoluten Werthe nach durch λ angegeben wird.

7) Die Gleichung

$$P_1 + \lambda P_2 = 0$$

repräsentirt einen Punkt, welcher die Verbindungslinie von $P_1=0$ und $P_2=0$ innerlich im Verhältniss $\lambda:1$ theilt.

Ist $\lambda < 0$, so wird die Gleichung

$$\frac{P_1}{P_2} = +\lambda.$$

Jede durch $X=0$ gehende Gerade hat dann $P_1=0$ und $P_2=0$ auf derselben Seite liegen und wird äusserlich im Verhältniss $\lambda:1$ getheilt.

Im speciellen Falle $\lambda = -1$ wird

$$P_1 - P_2 = 0$$

die Gleichung des unendlich entfernten Punktes der Geraden $P_1 P_2$. Dies geht daraus hervor, dass diese Gleichung frei von der Coordinate ϱ ist. Der dann resultirende Winkel

$$\operatorname{arctg} \theta = -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$$

ist das Complement des Winkels, welchen die Verbindungslinie mit der Coordinatenaxe bildet.

Ebenso ergibt sich die Gleichung für die Mitte der Verbindungslinie als

$$P_1 + P_2 = 0$$

oder in der Normalform

$$\frac{P_1 + P_2}{2} = 0.$$

Verbinden wir diesen Punkt mit einem dritten, dessen Gleichung ist $P_3 = 0$, und theilen die letztgezogene Gerade im Verhältniss 1:2, so ist wegen $\lambda = \frac{1}{2}$ die Gleichung des Theilungspunktes

$$\frac{P_1 + P_2}{2} + \frac{1}{2}P_3 = 0$$

oder auch

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0.$$

Dieses ist mithin die Gleichung des Schwerpunktes der drei gegebenen Punkte. Die Symmetrie lässt erkennen, dass derselbe auch noch auf zwei andere Arten hätte gefunden werden können. In der Normalform heisst seine Gleichung

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3}{3} = 0.$$

Wählen wir einen vierten Punkt $P_4 = 0$, verbinden den eben gefundenen Schwerpunkt mit demselben und theilen die Verbindungslinie im Verhältniss 1:3, so hat der neue Schwerpunkt die Gleichung

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3}{3} + \frac{1}{3}P_4 = 0$$

oder auch

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0.$$

Wir können also im Allgemeinen sagen:

8) Sind

$$P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0, \dots P_n = 0$$

Gleichungen in der Normalform von n Punkten, so ist die Gleichung ihres Schwerpunktes

$$\Sigma P_n = 0$$

oder in der Normalform

$$\frac{1}{n} \Sigma P_n = 0.$$

Fallen mehrere Punkte mehrfach je in einen zusammen, oder — was dasselbe sagt — sind die n Punkte materiell und mit den bezüglichen Gewichten $g_1, g_2, g_3, \dots g_n$ versehen, so wird die Schwerpunktgleichung in der Normalform

$$\frac{1}{n} \Sigma g_n P_n = 0.$$

Ihre Symmetrie beweist, dass ein System materieller Punkte in einer Ebene immer nur einen einzigen Schwerpunkt besitzt.

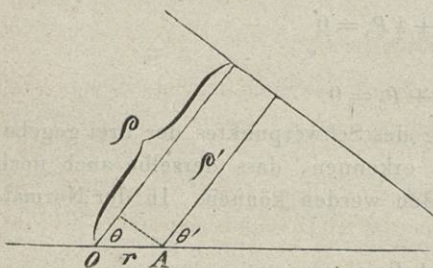
Wir wenden uns nun zur Transformation der gewählten Coordinaten. Es seien ϱ, θ die ursprünglichen, ϱ', θ' die neuen Coordinaten. Bleibt der Coordinatenanfang derselbe, wird aber die Axe um den Winkel ω positiv gedreht — wir denken entgegengesetzt dem Lauf der Zeiger der Uhr —, so ist

$$\varrho' = \varrho, \quad \theta' = \theta - \omega.$$

Es wird also

$$F(\varrho, \theta) = 0 \text{ zu } F(\varrho', \theta' + \omega) = 0.$$

Fig. 1.



Bleibt alsdann die Coordinaten-Axe ruhen, wird aber der Anfang auf derselben um r von O nach A verschoben (s. Fig. 1), so ist

$$\varrho' = \varrho - r \cdot \cos \theta, \quad \theta' = \theta.$$

Nehmen wir ferner an, dass der neue Coordinatenanfang A eine beliebige Lage habe, dass z. B. seine Polarkoordinaten ϱ, ω seien, so können wir zunächst die Coordinatenaxe um O so lange drehen, bis sie durch A hindurchgeht. Bezeichnen wir die Coordinaten dieses Hilfs-Coordinatensystems mit ϱ_h, θ_h , so ist

$$\varrho_h = \varrho, \quad \theta_h = \theta - \omega.$$

Verlegen wir jetzt das Coordinatensystem nach dem neuen Anfange, lassen aber dabei der Coordinatenaxe ihre eben erhaltene Lage, so ist, wenn wir die jetzigen Coordinaten mit ϱ'_h, θ'_h bezeichnen, nach dem eben erhaltenen Resultat

$$\varrho'_h = \varrho_h - r \cos \theta_h = \varrho - r \cos(\theta - \omega), \quad \theta'_h = \theta_h = \theta - \omega.$$

Geben wir nun der Coordinatenaxe wieder ihre alte Richtung, drehen sie also um ω negativ, so ist

$$\varrho' = \varrho'_h = \varrho - r \cos(\theta - \omega), \quad \theta' = \theta'_h + \omega = \theta.$$

Da nun aber $\varrho \equiv \varrho' + r \cdot \cos(\theta - \omega) = 0$ nichts Anderes ist, als die Gleichung des ursprünglichen Coordinatenanfanges in der Normalform im neuen System, so können wir sagen:

9) Hat bei der Coordinatentransformation der ursprüngliche Anfang im neuen System die Gleichung in der Normalform

$$U = 0$$

und bleibt die Richtung der Coordinatenaxe dieselbe, so geht die Curvengleichung

$$F(\varrho, \theta) = 0$$

über in die Gleichung

$$F(U, \theta) = 0.$$

Bleibt dagegen der Coordinatenanfang derselbe, und wird die Axe in positiver Richtung um den Winkel ω gedreht, so heisst die neue Gleichung

$$F(\rho, \theta - \omega) = 0.$$

Hat also der neue Coordinatenanfang die rechtwinkligen Coordinaten x, y , und wird gleichzeitig die Axe um ω positiv gedreht, so heisst die neue Gleichung

$$F[\rho - x \cos(\theta + \omega) - y \sin(\theta + \omega), \theta - \omega] = 0.$$

§ 2.

Kreis und Kegelschnitt.

Da die Kreistangente die Eigenschaft besitzt, dass sie immer vom Mittelpunkte um die Länge des Radius entfernt ist, so schliessen wir unmittelbar:

10) Ist $M=0$ die Gleichung des Kreismittelpunktes in der Normalform und r der Kreisradius, so ist die Kreisgleichung

$$M = \pm r.$$

Das doppelte Vorzeichen ist nothwendig, da Plus oder Minus eintritt, je nachdem der Kreismittelpunkt und der Coordinatenanfang auf derselben oder auf verschiedener Seite der sich bewegenden Kreistangente gelegen sind. Wollen wir es vermeiden, so schreiben wir die Gleichung in der Form

$$M^2 = r^2.$$

Wir sehen daraus, dass, wenn zu den drei Gliedern der Punktgleichung mit $\rho, \cos \theta, \sin \theta$ noch ein Absolutglied hinzutritt, dieselbe eine Kreislinie vertritt, welche jenen Punkt zum Mittelpunkte und nach geschehener Reduction auf die Normalform das Absolutglied zum Radius hat. Umgekehrt ist der Punkt ein Kreis mit dem Radius Null.

Suchen wir die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise

$$\frac{M_1}{r_1} = \pm 1, \quad \frac{M_2}{r_2} = \pm 1,$$

so sehen wir, dass dieselben nothwendig die Gleichung befriedigen

$$\frac{M_1}{r_1} = + \frac{M_2}{r_2}, \text{ d. h. } M_1 - \frac{r_1}{r_2} M_2 = 0,$$

oder auch die Gleichung

$$\frac{M_1}{r_1} = - \frac{M_2}{r_2}, \text{ d. h. } M_1 + \frac{r_1}{r_2} M_2 = 0.$$

Wir haben in diesen Gleichungen die Aehnlichkeitspunkte beider Kreise. Sie liegen hiernach auf der Centrale und theilen sie im Verhältniss $r_1:r_2$.

Die obere Gleichung giebt den äussern, die untere den innern Aehnlichkeitspunkt an.

Bewegt sich ein Punkt so, dass die Summe oder Differenz seiner Entfernungen von zwei festen Punkten eine constante ist, so beschreibt er eine Ellipse, resp. Hyperbel. Ist das Product der Entfernungen constant, so entsteht eine Curve vierten Grades, im speciellen Falle eine Lemniscate, bei constantem Quotienten beschreibt er einen Kreis. Wir sind jetzt in der Lage, dieselben vier Fälle zu untersuchen bei Bewegung einer Geraden, und werden wir da bedeutend einfachere Resultate erhalten. Bewegt sich zunächst eine Gerade so, dass die Summe ihrer Entfernungen von zwei festen Punkten $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$ immer gleich c ist, so hüllt sie eine Curve ein mit der Gleichung

$$P_1 + P_2 = c.$$

Sie umhüllt mithin einen Kreis, dessen Mittelpunkt, wegen $M \equiv \frac{P_1 + P_2}{2}$, die Mitte der Verbindungslinie beider Punkte, und dessen Radius $r = \frac{c}{2}$, der Hälfte der gegebenen Constanten, gleich ist.

Wir können diesen Satz auf n Punkte erweitern, dann ist

$$M \equiv \frac{1}{n} \sum P_n \text{ [s. 8)] und } r = \frac{c}{n}.$$

11) Bewegt sich eine Gerade um ein System von n festen Punkten, ohne dieses zu durchdringen, so, dass die Summe ihrer Entfernungen von sämtlichen Punkten eine constante ist, so hüllt sie einen Kreis ein, welcher den Schwerpunkt jenes Systems zum Mittelpunkt und den n^{ten} Theil der Constanten als Radius hat.

Wir haben auch dann noch einen Kreis, wiewohl mit anderem Mittelpunkt, wenn jene Summe eine algebraische ist und wenn zu einer jeden Entfernung ein beliebiger, sich immer gleich bleibender Factor hinzutritt. Ausnahmefälle liegen vor, wenn die gegebene Constante Null ist. Alsdann dreht sich die Gerade um einen festen Punkt herum. Ferner ist noch zu beachten, dass bei der Summation das Glied mit q herausfallen kann. Die Gerade bleibt dann sich stets parallel. Im speciellen Falle tritt dies ein bei

$$P_1 - P_2 = c,$$

d. h. wenn sich die Gerade so bewegt, dass die Differenz ihrer Entfernungen von zwei festen Punkten immer dieselbe ist.

Ist der Quotient der Entfernungen $= \lambda$ gegeben, so ist die Gleichung

$$P_1 - \lambda P_2 = 0.$$

Wie wir schon oben sahen, dreht sich die Gerade dann um einen festen Punkt.

Es fehlt uns hiernach noch der Fall, dass das Product der Entfernungen ein gegebenes ist. Hier rufen wir nun einen bekannten Satz

der Kegelschnittslehre zu Hilfe, nämlich: Fällt man von den Brennpunkten eines Kegelschnittes Perpendikel auf beliebige Tangenten, so ist das Product derselben constant, nämlich $= b^2$, dem Quadrat der kleinen Halbaxe. Hieraus schliessen wir unmittelbar:

12) Sind $F_1 = 0, F_2 = 0$ die Gleichungen der Brennpunkte eines Kegelschnittes in der Normalform, und ist dessen kleine Halbaxe b , so ist seine Gleichung

$$F_1 F_2 = \pm b^2,$$

wo Plus oder Minus zu wählen ist, je nachdem der Kegelschnitt eine Ellipse oder eine Hyperbel ist.

Das doppelte Vorzeichen erklärt sich daraus, dass bei der Ellipse die Brennpunkte immer auf derselben Seite der Tangente, bei der Hyperbel immer auf der entgegengesetzten liegen. Fallen die Brennpunkte zusammen, so entsteht ein Kreis mit reellem oder imaginärem Radius, je nachdem die Curve eine Ellipse oder eine Hyperbel war. Durch Variiren von b erhält man ein System confocaler Kegelschnitte.

Wir gehen nun zur Ableitung der Centralgleichung des Kegelschnittes über. Ist die Mittelpunkt-Gleichung in der Normalform

$$13) \quad M \equiv \rho - x_m \cos \theta - y_m \sin \theta = 0$$

und sind die Brennpunkt-Gleichungen

$$14) \quad F_1 \equiv \rho - x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta = 0,$$

$$F_2 \equiv \rho - x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta = 0,$$

so ist

$$F_1 - F_2 = (x_2 - x_1) \cos \theta + (y_2 - y_1) \sin \theta.$$

Ist $2c$ die Entfernung beider Brennpunkte und ω der Winkel, welchen die Curvenaxe $2a$ mit der Coordinatenaxe bildet, so ist

$$x_2 - x_1 = 2c \cdot \cos \omega, \quad y_2 - y_1 = 2c \cdot \sin \omega,$$

also

$$F_1 - F_2 = 2c \cdot \cos(\theta - \omega).$$

Schreiben wir hierzu die gemäss 7) zu bildende Gleichung

$$F_1 + F_2 = 2M,$$

so finden wir durch Quadriren und Subtrahiren mit Berücksichtigung von 12)

$$M^2 - c^2 \cdot \cos^2(\theta - \omega) = \pm b^2.$$

Wegen $c^2 = a^2 \mp b^2$ ist auch

$$M^2 = (a^2 \mp b^2) \cos^2(\theta - \omega) \pm b^2$$

und wir können schliessen:

15) Sind a und b die Halbaxen eines Centralkegelschnittes, ist ω der Winkel, welchen seine Axe mit der Coordinatenaxe bildet, und ist $M = 0$ die Gleichung seines Mittelpunktes in der Normalform, so ist seine Gleichung

$$M^2 = a^2 \cdot \cos^2(\theta - \omega) \pm b^2 \cdot \sin^2(\theta - \omega).$$

Die Gleichung

$$\lambda M^2 = a^2 \cdot \cos^2(\theta - \omega) \pm b^2 \cdot \sin^2(\theta - \omega)$$

giebt uns durch Variiren von λ eine Schaar concentrischer, ähnlicher und ähnlich gelegener Kegelschnitte an.

Wählt man den Mittelpunkt zum Koordinatenanfang und lässt die Axe mit der Coordinatenaxe zusammenfallen, so wird die Kegelschnittsgleichung

$$q^2 = a^2 \cos^2 \theta \pm b^2 \sin^2 \theta$$

oder in rechtwinkligen Liniencoordinaten

$$a^2 \xi^2 \pm b^2 \eta^2 = 1.$$

Wählen wir statt des Mittelpunktes den einen Brennpunkt zum Coordinatenanfang, so wird die Gleichung

$$q \cdot F = \pm b^2.$$

Ist hierbei

$$F \equiv q - m \cos \theta - n \sin \theta,$$

so können wir auch schreiben

$$q^2 - m q \cos \theta - n q \sin \theta = \pm b^2.$$

Wir wollen uns nun daran erinnern, dass die polaren Liniencoordinaten der Tangente identisch sind mit den polaren Punktcoordinaten des Fusspunktes des vom Anfang auf sie gefällten Perpendikels. Fassen wir also in der eben entwickelten Gleichung q , θ als Punktcoordinaten auf, so lesen wir sofort den Satz ab: Die Fusspunkte der Senkrechten, welche vom einen Brennpunkte auf die Tangente gefällt werden können, liegen sämmtlich auf der Peripherie eines Kreises. Aehnlich können wir auch mit der Punktgleichung verfahren. Multipliciren wir eine solche mit q , so erhalten wir

$$q^2 - m q \cos \theta - n q \sin \theta = 0,$$

d. h.: Fällt man von einem Punkte Senkrechte auf alle Geraden, welche sich durch einen zweiten Punkt hindurchlegen lassen, so liegen die Fusspunkte auf der Peripherie eines Kreises.

Allgemein lässt sich sagen:

16) Liegt eine Gleichung mit einer variablen Längencoordinate und mit einer variablen Winkelcoordinate vor, so können diese beiden Grössen sowohl als Punkt-, als auch als Liniencoordinaten aufgefasst werden. Von den beiden so entstandenen Curven bildet die zweite die Fusspunkt-Curve der ersteren in Beziehung auf den Coordinatenanfang als Ausgangspunkt.

Dieses Verfahren wollen wir nun umgekehrt zur Anwendung bringen, um die Gleichung der Parabel zu finden. Bekanntlich ist die Fusspunkt-Curve einer Parabel mit deren Brennpunkt als Ausgangspunkt die Scheiteltangente. Wählen wir den Brennpunkt zum Coordinatenanfang und

die Parabelaxe zur Coordinatenaxe, so ist, wenn q die Focaldistanz des Scheitels bezeichnet, die Gleichung der Scheiteltangente in polaren Punktcoordinaten

$$q \cos \theta = q.$$

Folglich heisst die Gleichung der Parabel in polaren Liniencoordinaten ebenso. Auf Grund der Coordinatentransformation 9) schliessen wir:

17) Ist $F = 0$ die Gleichung des Brennpunktes der Parabel in der Normalform, ω der Winkel, welchen ihre Axe mit der Coordinatenaxe bildet, und q die Focaldistanz des Scheitels, so ist ihre Gleichung

$$F \cdot \cos(\theta - \omega) = q.$$

Wählen wir den Scheitel als Coordinatenanfang und nehmen $\omega = 180^\circ$, also die gewöhnliche Lage der Parabel, so ist

$$F \equiv q - q \cos \theta$$

und die Parabelgleichung wird

$$q \cos \theta - q \cos^2 \theta + q = 0$$

oder

$$q \cot \theta + q \sin \theta = 0.$$

Von Interesse ist noch der Uebergang der Gleichung des Centralkegelschnittes in die der Parabel. Nehmen wir in der ersteren den einen Brennpunkt zum Coordinatenanfang an und $\omega = 180^\circ$, so wird

$$F_1 \equiv q, \quad F_2 \equiv q + 2c \cdot \cos \theta.$$

Alsdann kann die Gleichung des Centralkegelschnittes geschrieben werden

$$q \left(\frac{q}{2c} + \cos \theta \right) = \frac{b^2}{2c}.$$

Beim Uebergang zur Parabel wird $c = \infty$, und die Gleichung lautet

$$q \cdot \cos \theta = \lim \frac{b^2}{2c},$$

also ist

$$\lim \frac{b^2}{2c} = q.$$

Wir können auch leicht durch Liniencoordinaten eine Punktgleichung der Ellipse herstellen.

Der Ellipsengleichung in Punktcoordinaten

$$\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1$$

wird auch genügt durch

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi.$$

Setzen wir diese Werthe in die Punktgleichung ein, so erhalten wir

$$q = a \cdot \cos \varphi \cos \theta + b \cdot \sin \varphi \sin \theta.$$

Durch Verallgemeinerung des Coordinatensystems ergibt sich folgender Satz:

Variirt in der Punktgleichung

$$M = a \cdot \cos \varphi \cos (\theta - \omega) + b \sin \varphi \sin (\theta - \omega)$$

oder auch

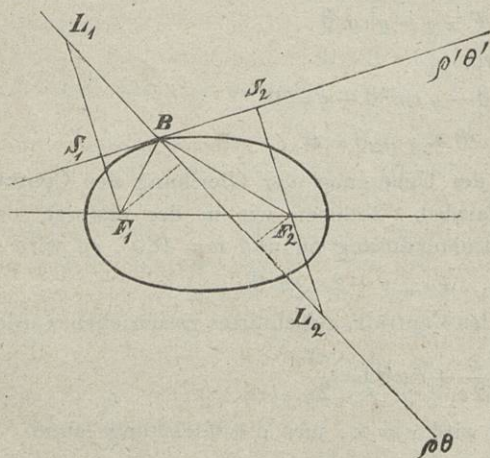
$$M = \frac{a+b}{2} \cos (\varphi - \theta + \omega) + \frac{a-b}{2} \cos (\varphi + \theta - \omega)$$

der Winkel φ , so beschreibt der Punkt eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Gleichung $M=0$ befriedigt, deren Halbachsen a und b sind und deren Hauptaxe mit der Coordinatenaxe den Winkel ω bildet.

Aehnliches lässt sich von der Hyperbel nachweisen.

Wir gehen nun dazu über, die Gleichung des Berührungspunktes bei dem Centralkegelschnitt zu entwickeln. Wir stützen uns dabei

Fig. 2.



auf den Satz, dass die Radien vectoren des Berührungspunktes mit der Tangente gleiche Winkel bilden. In Fig. 2 sind von den Brennpunkten F_1 und F_2 auf die Tangente mit den Coordinaten φ' , θ' und dem Berührungspunkte B die Senkrechten F_1S_1 und F_2S_2 gefällt worden. Ferner ist durch B eine beliebige Gerade mit den Coordinaten φ , θ gelegt worden, und sind die Senkrechten bis zu ihren Schnittpunkten L_1 , L_2 mit dieser ver-

längert worden. Dann ist nach jenem Satze

$$L F_1 B S_1 = L F_2 B S_2, \text{ also } \triangle F_1 B S_1 \sim \triangle F_2 B S_2,$$

und verhält sich sonach

$$F_1 S_1 : F_2 S_2 = B S_1 : B S_2 = L_1 S_1 : L_2 S_2.$$

Hieraus geht hervor

$$\frac{L_1 S_1}{F_1 S_1} = \frac{L_2 S_2}{F_2 S_2}, \quad \frac{L_1 F_1}{F_1 S_1} - 1 = \frac{L_2 F_2}{F_2 S_2} + 1, \quad \frac{L_1 F_1}{F_1 S_1} - \frac{L_2 F_2}{F_2 S_2} = 2.$$

Ist nun die Gleichung des einen Brennpunktes in der Normalform $F_1=0$, so ist nach 6) F_1 die Länge desjenigen Perpendikels, welches von diesem Brennpunkte auf die Gerade $\rho\theta$ gefällt werden kann. Die beiden von F_1 ausgehenden Perpendikel bilden nun denselben Winkel, als die sich in B kreuzenden Geraden, nämlich $L(\theta - \theta')$, also ist

$$F_1 = F_1 L_1 \cos(\theta - \theta').$$

Ferner erhalten wir die Länge des Perpendikels $F_1 S_1$ dadurch, dass wir in die Gleichung $F_1 = 0$ die Coordinaten ϱ' , θ' einsetzen. Wir wollen den so erhaltenen Werth mit F'_1 bezeichnen; dann ist

$$\frac{L_1 F_1}{F_1 S_1} = \frac{F_1}{F'_1 \cos(\theta - \theta')}$$

Analog ist

$$\frac{L_2 F_2}{F_2 S_2} = - \frac{F_2}{F'_2 \cos(\theta - \theta')}$$

Somit wird die Gleichung des Berührungspunktes

$$18) \quad \frac{F_1}{F'_1} + \frac{F_2}{F'_2} = 2 \cos(\theta - \theta').$$

Multipliciren wir die Gleichung mit $F'_1 F'_2$ und berücksichtigen, dass weil $\varrho' \theta'$ Tangente ist, die Gleichung existiren muss

$$F'_1 F'_2 = \pm b^2,$$

so erhalten wir für die Gleichung des Berührungspunktes

$$19) \quad F_1 F'_2 + F_2 F'_1 = \pm 2b^2 \cos(\theta - \theta').$$

In dieser Form wird uns die Gleichung ihrer Symmetrie wegen noch Dienste leisten. Ausserdem sei noch bemerkt, dass die Entwicklung bei der Hyperbel im Wesentlichen dieselbe ist und dass das Resultat vollständig mit dem angegebenen übereinstimmt.

Im speciellen Falle $F_1 = F_2$ erhalten wir die Gleichung des Berührungspunktes beim Kreise, dessen Mittelpunkt $M = 0$ und dessen Radius r ist, in den beiden Formen

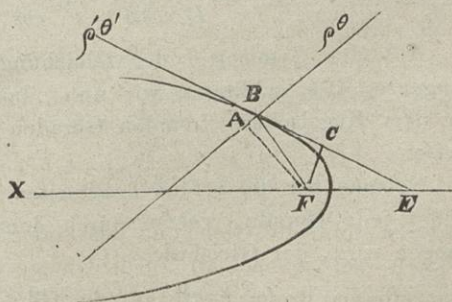
$$20) \quad \frac{M}{M'} = \cos(\theta - \theta'), \quad M = \pm r \cos(\theta - \theta').$$

Die Gleichung des Berührungspunktes bei der Parabel stützen wir auf den Satz, dass die Tangente mit der Axe denselben Winkel bildet, als mit dem Radius vector ihres

Berührungspunktes. Es sei B der Berührungspunkt (Fig. 3).

Durch ihn gehe eine Tangente mit den Coordinaten ϱ' , θ' , welche die Parabelaxe FX in E schneidet; ausserdem gehe durch ihn eine andere Gerade ϱ , θ . Vom Brennpunkte F sei auf letztere das Perpendikel FA und auf die Tangente das FC gefällt. Lassen wir die obige Bezeichnung auch hier gelten, so ist $FA \equiv F$, $FC \equiv F'$. Denken wir uns ausserdem die Parabelaxe der Curvenaxe parallel, so ist

Fig. 3.



$$LAF = \theta \text{ und } LCFX = \theta'.$$

Ferner ist nach dem obengenannten Satze

$$LBF = 2 \cdot LBEF = 2[LCF - 90^\circ] = 2\theta' - 180,$$

also $LBF A = 2\theta' - \theta - 180^\circ$ und

$$\frac{F}{\cos(\theta - 2\theta')} = -BF = \frac{F'}{\cos\theta'},$$

da $LBF C = LEFC$. Also ist die Gleichung des Berührungspunktes

$$21) \quad F \cos\theta' = F' \cos(\theta - 2\theta').$$

Wir können diese Gleichung auch aus der entsprechenden bei dem Centralkegelschnitt herleiten. Lläuft wieder die Curvenaxe der Coordinatenaxe parallel und fällt der Anfang mit dem einen Brennpunkt $F_1 = 0$ zusammen, so ist für den andern

$$F_2 \equiv q - 2c \cos\theta, \quad F'_2 \equiv q' - 2c \cos\theta',$$

mithin

$$\frac{F_2}{F'_2} = \frac{\frac{q}{2c} - \cos\theta}{\frac{q'}{2c} - \cos\theta'}.$$

Geht nun der Kegelschnitt in eine Parabel über, so ist $2c = \infty$, und jener Bruch wird

$$\frac{F_2}{F'_2} = \frac{\cos\theta}{\cos\theta'},$$

also die Gleichung des Berührungspunktes [s. 18])

$$\frac{F}{F'} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta'} = 2 \cos(\theta - \theta').$$

Wegen $2 \cos\alpha \cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ ist dann

$$\frac{F \cdot \cos\theta'}{F'} + \cos\theta = \cos\theta + \cos(\theta - 2\theta')$$

oder endlich

$$F \cdot \cos\theta' = F' \cdot \cos(\theta - 2\theta').$$

Aus der Symmetrie der Gleichung des Berührungspunktes einer Tangente, 19), schliessen wir nun, dass die Gleichung des Poles der dem Kegelschnitt fremden Geraden $q'\theta'$ dieselbe sei, in folgender Weise.

Nehmen wir die beiden bestimmten Tangenten $q'\theta'$ und $q''\theta''$ an, so genügt jede Gerade, welche durch den Berührungspunkt der ersteren gezogen wird, der Gleichung

$$F_1 F'_2 + F_2 F'_1 = \pm 2b^2 \cdot \cos(\theta - \theta'),$$

und eine jede Gerade, welche durch den Berührungspunkt der zweiten gezogen wird, der Gleichung

$$F_1 F''_2 + F_2 F''_1 = \pm 2b^2 \cdot \cos(\theta - \theta'').$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten derjenigen Geraden, welche beide Berührungspunkte miteinander verbindet, mit ϱ^0, θ^0 , so muss das System der beiden Gleichungen identisch giltig sein:

$$F_1^0 F'_2 + F_2^0 F'_1 = \pm 2b^2 \cdot \cos(\theta^0 - \theta'),$$

$$F_2^0 F''_2 + F_2^0 F'_1 = \pm 2b^2 \cdot \cos(\theta^0 - \theta'').$$

Stellen wir nun die Gleichung auf

$$F_1^0 F_2 + F_2^0 F_1 = \pm 2b^2 \cos(\theta^0 - \theta),$$

so ist dieselbe ihrem Bau nach die eines Punktes, und zwar wegen der soeben angegebenen Identitäten die Gleichung desjenigen Punktes, durch welchen die beiden Geraden $\varrho'\theta'$ und $\varrho''\theta''$ hindurchgehen, d. h. des Schnittpunktes beider Tangenten. Bekanntlich wird aber dieser Punkt als Pol der Geraden $\varrho^0\theta^0$ bezeichnet. Wenden wir endlich statt der Coordinaten $\varrho^0\theta^0$ die anderen $\varrho'\theta'$ wieder an, so gilt Folgendes:

Die Gleichung des Poles der Geraden $\varrho'\theta'$ ist

$$22) \quad F_1 F'_2 + F_2 F'_1 = \pm 2b^2 \cdot \cos(\theta - \theta').$$

Schneidet die Gerade $\varrho'\theta'$ den Kegelschnitt gar nicht, so kann doch ihr Pol nach 22) construirt werden, und halten wir die Bezeichnung „Pol der Geraden“ fest, wiewohl die bisherige Erklärung nicht mehr anwendbar ist.

Wir können auch in der Gleichung 22) beide Coordinatenpaare $\varrho\theta$ und $\varrho'\theta'$ als veränderlich annehmen und sagen dann, jene Gleichung ist die Bedingung dafür, dass die beiden Geraden $\varrho\theta$ und $\varrho'\theta'$ harmonische Polaren sind.

Bei Aufstellung der Centralgleichung des Kegelschnitts 15) benutzen wir die Gleichungen

$$F_1 + F_2 = 2M \text{ und } F_1 - F_2 = 2c \cdot \cos(\theta - \omega).$$

Dem entsprechend ist

$$F'_1 + F'_2 = 2M' \text{ und } F'_1 - F'_2 = 2c \cdot \cos(\theta' - \omega),$$

Durch Multiplication je zweier untereinander stehenden Gleichungen ergibt sich

$$F_1 F'_1 + F_1 F'_2 + F_2 F'_1 + F_2 F'_2 = 4MM',$$

$$F_1 F'_1 - F_1 F'_2 - F_2 F'_1 + F_2 F'_2 = 4c^2 \cdot \cos(\theta - \omega) \cos(\theta' - \omega),$$

also durch Subtraction

$$F_1 F'_2 + F_2 F'_1 = 2MM' - 2c^2 \cdot \cos(\theta - \omega) \cos(\theta' - \omega);$$

nach 22)

$$MM' - c^2 \cdot \cos(\theta - \omega) \cos(\theta' - \omega) = \pm b^2 \cdot \cos(\theta - \theta').$$

Da $c^2 = a^2 \mp b^2$ und $\theta - \theta' = (\theta - \omega) - (\theta' - \omega)$, so ist die Gleichung des Poles mit Hilfe der Centralgleichung

$$23) \quad MM' = a^2 \cos(\theta - \omega) \cdot \cos(\theta' - \omega) \pm b^2 \cdot \sin(\theta - \omega) \sin(\theta' - \omega).$$

Nehmen wir den Curvenmittelpunkt zum Coordinatenanfang und setzen $\omega = 0$, so wird diese Gleichung

$$\rho \rho' = a^2 \cos \theta' \cos \theta + b^2 \sin \theta' \sin \theta.$$

Sind also x, y die Polarcoordinaten, so ist

$$x = a^2 \frac{\cos \theta'}{\rho'}, \quad y = \pm b^2 \frac{\sin \theta'}{\rho'}.$$

Lassen wir noch die Accente fort und denken an den Zusammenhang zwischen rechtwinkligen und polaren Liniencoordinaten, so können wir sagen:

24) Sind x, y Punktcoordinaten und ξ, η oder ρ, θ die Liniencoordinaten seiner Polare in Beziehung auf den Kegelschnitt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so ist

$$-\xi = \frac{\cos \theta}{\rho} = \frac{x}{a^2} \quad \text{und} \quad -\eta = \frac{\sin \theta}{\rho} = \frac{y}{\pm b^2}.$$

Sind r, t die Polarcoordinaten des Poles, so ist

$$r^2 = \xi^2 a^4 + \eta^2 b^4, \quad \frac{t \theta}{t g t} = \frac{a^2}{\pm b^2}.$$

Für $x = y = 0$ wird, da wegen $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ nicht $\cos \theta = \sin \theta = 0$ sein kann, $\rho = \infty$, d. h. die Polare des Mittelpunktes liegt im Unendlichen. Einer linearen oder quadratischen Verbindung der rechten Seiten entspricht eine ebensolche der linken. D. h.: „Bewegt sich der Punkt auf einer geraden Linie oder beschreibt er einen Kegelschnitt, so dreht sich seine Polare um einen festen Punkt, resp. beschreibt auch einen Kegelschnitt, und umgekehrt.“

§ 3.

Discussion der Kegelschnitts-Gleichung in der allgemeinen Form.

Die Kegelschnittsgleichung in rechtwinkligen Liniencoordinaten lautet in der allgemeinen Form

$$25) \quad \alpha_{11} \xi^2 + 2\alpha_{12} \xi \eta + \alpha_{22} \eta^2 + 2\alpha_{13} \xi + 2\alpha_{23} \eta + \alpha_{33} = 0.$$

Durch Substitution von

$$\xi = -\frac{\cos \theta}{\rho}, \quad \eta = -\frac{\sin \theta}{\rho}$$

geht dieselbe in folgende Gleichung mit Polarcoordinaten über:

$$26) \quad \alpha_{33} \rho^2 - 2\rho(\alpha_{13} \cos \theta + \alpha_{23} \sin \theta) + \alpha_{11} \cos^2 \theta + \alpha_{22} \sin^2 \theta + \alpha_{12} \sin 2\theta = 0.$$

Wir fragen zunächst: Unter welcher Bedingung zerfällt der Kegelschnitt in die beiden Punkte mit den rechtwinkligen Coordinaten x_f, y_f und x_g, y_g ? Alsdann muss sein

$$\begin{aligned} & \alpha_{33}(\rho - x_f \cos \theta - y_f \sin \theta)(\rho - x_g \cos \theta - y_g \sin \theta) \\ \equiv & \alpha_{33} \rho^2 - 2\rho(\alpha_{13} \cos \theta + \alpha_{23} \sin \theta) + \alpha_{11} \cos^2 \theta + \alpha_{22} \sin^2 \theta + \alpha_{12} \sin 2\theta \end{aligned}$$

Setzen wir nacheinander $\varrho = 0$, $\theta = 0$, $\theta = 90^\circ$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \alpha_{33}(x_f + x_g) &= 2\alpha_{13}, & \alpha_{33}(y_f + y_g) &= 2\alpha_{23}, \\ \alpha_{33}x_f x_g &= \alpha_{11}, & \alpha_{33}y_f y_g &= \alpha_{22}, \\ \alpha_{33}(x_f y_g + y_f x_g) &= 2\alpha_{12}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

26*) $\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{33}}, \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{33}}$ sind die rechtwinkligen Coordinaten der Mitte der Verbindungslinie beider Punkte.

x_f und x_g sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\alpha_{33}x^2 - 2\alpha_{13}x + \alpha_{11} = 0,$$

ebenso y_f und y_g die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\alpha_{33}y^2 - 2\alpha_{23}y + \alpha_{22} = 0.$$

Es ist mithin

$$\begin{aligned} \alpha_{33}x_f &= \alpha_{13} \pm \sqrt{\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}}, \\ \alpha_{33}x_g &= \alpha_{13} \mp \sqrt{\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}}, \\ \alpha_{33}y_f &= \alpha_{23} \pm \sqrt{\alpha_{23}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33}}, \\ \alpha_{33}y_g &= \alpha_{23} \mp \sqrt{\alpha_{23}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33}}. \end{aligned}$$

Die Bedingung, unter welcher die Zerlegung möglich ist, lautet dann

$$\alpha_{13}\alpha_{23} - \sqrt{\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}} \cdot \sqrt{\alpha_{23}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33}} = \alpha_{12}\alpha_{33}.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \frac{1}{\alpha_{33}} [(\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33})(\alpha_{23}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33}) - (\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}\alpha_{33})^2] \\ 27) &= 2\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}^2\alpha_{33} - \alpha_{23}^2\alpha_{11} - \alpha_{13}^2\alpha_{22} + \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Alsdann lautet das gefundene Resultat:

28) Unter der Bedingung $\Delta = 0$

zerfällt der Kegelschnitt in zwei Punkte.

Nehmen wir ferner an, dass die Gleichung 26) einen wirklichen Kegelschnitt vertritt, so können wir rücksichtlich der Grösse α_{33} die beiden Fälle unterscheiden:

I. $\alpha_{33} = 1$; II. $\alpha_{33} = 0$.

Jeder andere Fall lässt sich leicht auf den ersten zurückführen. Wir wollen zunächst diesen ersten Fall festhalten.

Die kleine Halbaxe des Kegelschnitts sei b . Ihr Quadrat b^2 denken wir uns stets, um gleichzeitig beide Curvengattungen zu betrachten, als mit doppeltem Vorzeichen versehen, lassen es aber der Einfachheit halber fort. Dann lässt sich die Gleichung 26) auch so schreiben:

$$29) \quad \varrho^2 - 2\varrho(\alpha_{13} \cos \theta + \alpha_{23} \sin \theta) + (\alpha_{11} + b^2) \cos^2 \theta + (\alpha_{22} + b^2) \sin^2 \theta + \alpha_{12} \sin 2\theta = b^2.$$

Diese Gleichung muss ferner auf die Form 12)

$$F_1 F_2 = b^2$$

gebracht werden können, d. h. die linke Seite muss sich in zwei Factoren zerlegen lassen, oder b^2 ist eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$30) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} + b^2 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} + b^2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 0$$

oder auch der Gleichung

$$31) \quad b^4 - b^2(\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 - \alpha_{11} - \alpha_{22}) + \Delta = 0.$$

Sind x_m, y_m die rechtwinkligen Coordinaten des Mittelpunktes, ^{so} erhalten wir aus 26*) sofort ihre Werthe, da der Mittelpunkt die Verbindungsline der Brennpunkte halbirt. Es ist also

$$x_m = \alpha_{13}, \quad y_m = \alpha_{23}$$

die Mittelpunktsgleichung

$$32) \quad M \equiv \varrho - \alpha_{13} \cos \theta - \alpha_{23} \sin \theta = 0.$$

Hiernach lässt sich die Kegelschnittsgleichung auch so schreiben:

$$2M\varrho - \varrho^2 + \alpha_{11} \cos^2 \theta + \alpha_{22} \sin^2 \theta + \alpha_{12} \sin 2\theta = 0$$

oder auch

$$33) \quad M^2 = (\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}) \cos^2 \theta + (\alpha_{23}^2 - \alpha_{22}) \sin^2 \theta + (\alpha_{13} \alpha_{23} - \alpha_{12}) \sin 2\theta = 0.$$

Vergleichen wir sie in dieser Gestalt mit der Gleichung 15)

$$M^2 = a^2 \cos^2(\theta - \omega) + b^2 \sin^2(\theta - \omega),$$

so ergibt sich

$$34) \quad \begin{aligned} \alpha_{13}^2 - \alpha_{11} &= a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega, \\ \alpha_{23}^2 - \alpha_{22} &= a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega, \\ \alpha_{13} \alpha_{23} - \alpha_{12} &= (a^2 - b^2) \cdot \frac{\sin 2\omega}{2}. \end{aligned}$$

Durch Addition der beiden ersten Gleichungen erhalten wir

$$35) \quad \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 - \alpha_{11} - \alpha_{22} = a^2 + b^2.$$

Setzen wir diesen Werth in 31) ein, so wird dieselbe

$$b^4 - b^2(a^2 + b^2) + \Delta = 0,$$

d. h.

$$36) \quad \Delta = a^2 \cdot b^2.$$

Aus 35) und 36) erkennen wir, dass a^2 die andere Wurzel der quadratischen Gleichung 30) ist.

a^2 und b^2 sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$37) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} + z & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} + z & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$z^2 - z(\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 - \alpha_{11} - \alpha_{22}) + \Delta = 0.$$

Dividiren wir die dritte Gleichung von 34) durch die Differenz der beiden ersten, so haben wir

$$38) \quad \operatorname{tg} 2\omega = \frac{2(\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12})}{\alpha_{13}^2 - \alpha_{23}^2 - \alpha_{11} + \alpha_{22}}.$$

Aus der Gleichung 37) scheint hervorzugehen, dass, wenn wir die Kegelschnittsgleichung in der Form schreiben:

$$\rho^2 - 2\rho(\alpha_{13}\cos\theta + \alpha_{23}\sin\theta) + (\alpha_{11} + a^2)\cos^2\theta + (\alpha_{22} + a^2)\sin^2\theta + \alpha_{12}\sin 2\theta = a^2,$$

sich die linke Seite derselben ebenfalls in zwei Factoren zerlegen lassen müsse. Man erhält dann in der That auch zwei Brennpunkte, aber zwei imaginäre; sie liegen auf der reellen kleinen Axe des Kegelschnittes, um $\pm i\sqrt{a^2 - b^2}$ vom Mittelpunkte entfernt. Wir haben so die fünf wichtigsten Momente des Kegelschnittes, nämlich seinen Mittelpunkt, seine Halbaxen und die Richtung seiner Axe auf einfache Weise aus der allgemeinen Gleichung bestimmt. Bei der Berechnung der quadratischen Gleichung 37) kann man nie im Zweifel sein, welche Wurzel a^2 und welche b^2 angiebt. Erhält man nämlich zwei positive Werthe, so ist die Curve eine Ellipse, also der grössere Werth a^2 und der kleinere b^2 . Erhält man eine positive und eine negative Wurzel, so ist die Curve eine Hyperbel, und die positive $= a^2$, die negative $= b^2$. Sind die Wurzeln beide negativ, so wird allerdings die Curve imaginär. Dies tritt ein, wenn $\Delta > 0$ und $\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 < \alpha_{11} + \alpha_{22}$. Mit Benutzung von 27) können die Bedingungen auch geschrieben werden

$$(\alpha_{13}^2 - \alpha_{11})(\alpha_{23}^2 - \alpha_{22}) > (\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12})^2, \quad (\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}) + (\alpha_{23}^2 - \alpha_{22}) < 0.$$

Ist nun aber die Summe zweier Grössen negativ, aber ihr Product positiv, so muss jede einzelne negativ sein. Also können wir auch sagen

$$\alpha_{11} > \alpha_{13}^2, \quad \alpha_{22} > \alpha_{23}^2, \quad \Delta > 0.$$

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung würden complex sein, wenn

$$\begin{aligned} 0 &> [(\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}) + (\alpha_{23}^2 - \alpha_{22})]^2 - 4\Delta \text{ nach 27),} \\ 0 &> [(\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}) + (\alpha_{23}^2 - \alpha_{22})]^2 - 4(\alpha_{13}^2 - \alpha_{11})(\alpha_{23}^2 - \alpha_{22}) + 4(\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12})^2, \\ 0 &> [(\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}) - (\alpha_{23}^2 - \alpha_{22})]^2 + 4(\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12})^2, \end{aligned}$$

was niemals möglich ist.

Also ist der einzige Fall, in welchem bei reellen Grössen α der Kegelschnitt imaginär wird, der, dass die quadratische Gleichung zwei negative Wurzeln besitzt. Denn in jedem andern Falle lässt sich a^2 , b^2 , x_m , y_m und ω in brauchbarer Weise bestimmen. Man stösst nirgends auf Schwierigkeiten.

Soll die Curve einen Kreis mit dem Radius r darstellen, so muss nach den Gleichungen 34) sein

$$\alpha_{13}\alpha_{23} = \alpha_{12} \text{ und } r^2 = \alpha_{13}^2 - \alpha_{11} = \alpha_{23}^2 - \alpha_{22}.$$

Dann wird auch, wie das sein muss, Gleichung 38)

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{0}{0}.$$

Für $a^2 + b^2 = 0$ haben wir eine gleichseitige Hyperbel, d. h. wenn $\Delta < 0$, $\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 = \alpha_{11} + \alpha_{22}$. Dann ist nämlich $a = \sqrt{-\Delta}$. Wir fassen nun das gefundene Resultat zusammen.

39) Die Gleichung

$$\alpha_{11}\xi^2 + 2\alpha_{12}\xi\eta + \alpha_{22}\eta^2 + 2\alpha_{13}\xi + 2\alpha_{22}\eta + 1 = 0$$

stellt eine Ellipse, ein Punktpaar oder eine Hyperbel dar, je nachdem

$$\Delta \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0.$$

Die Ellipse wird imaginär, wenn

$$\alpha_{11} > \alpha_{13}^2, \quad \alpha_{22} > \alpha_{23}^2.$$

Sie wird ein Kreis mit dem Radius r , wenn

$$\alpha_{13}\alpha_{23} = \alpha_{12}, \quad \alpha_{13}^2 - \alpha_{11} = \alpha_{23}^2 - \alpha_{22} = r^2.$$

Zur Bestimmung der Brennpunkte x_f, y_f und x_g, y_g bedienen wir uns der bei Gleichung 26) gefundenen Werthe. Wir müssen dabei berücksichtigen, dass die Grössen α_{11} und α_{22} eine Vermehrung um b^2 erlitten haben, und erhalten dann

$$40) \quad \begin{cases} x_f + x_g = 2\alpha_{13}, & x_f \cdot x_g = \alpha_{11} + b^2 \\ y_f + y_g = 2\alpha_{23}, & y_f \cdot y_g = \alpha_{22} + b^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_f \cdot x_g - y_f \cdot y_g = \alpha_{11} - \alpha_{22}, \\ x_f \cdot y_g + x_g \cdot y_f = 2\alpha_{12}. \end{cases}$$

Wir haben nun zur Bestimmung der Brennpunkte vier zum Theil quadratische Gleichungen mit vier Unbekannten. Setzen wir $x_g = 2\alpha_{13} - x_f = 2\alpha_{13} - x$ und $y_g = 2\alpha_{23} - y_f = 2\alpha_{23} - y$ in den anderen Gleichungen ein, so erhalten wir als Bestimmungsgleichungen der Brennpunkt-Coordinationen

$$41) \quad \begin{cases} xy - \alpha_{23}x - \alpha_{13}y + \alpha_{12} = 0, \\ x^2 - y^2 - 2\alpha_{13}x + 2\alpha_{23}y + \alpha_{11} - \alpha_{22} = 0 \end{cases}$$

oder auch

$$\begin{cases} (x - \alpha_{13})(y - \alpha_{23}) = \alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}, \\ (x - \alpha_{13})^2 - (y - \alpha_{23})^2 = \alpha_{13}^2 - \alpha_{23}^2 - \alpha_{11} + \alpha_{22}. \end{cases}$$

Beide Gleichungen sind miteinander verwandt. Betrachten wir nämlich x, y nicht als Unbekannte, sondern als Veränderliche, so drücken beide Gleichungen gleichzeitige, dem Kegelschnitt concentrische Hyperbeln aus, und zwar sind die Asymptoten der einen Hyperbel die Axen der anderen, und umgekehrt. Schreiben wir die Kegelschnittsgleichung in der Form

$$\rho^2 - 2\rho(\alpha_{13}\cos\theta + \alpha_{23}\sin\theta) + \beta_{11}\cos^2\theta + \beta_{12}\sin 2\theta + \beta = 0,$$

wo $\beta_{11} = \alpha_{11} - \alpha_{22}$, $\beta_{12} = \alpha_{12}$ und $\beta = \alpha_{22}$, so sehen wir, was schon Gleichung 12) folgern liess, dass durch Variiren von β eine confocale Kegel-

schnittsschaar entsteht. Lassen wir weiter auch noch β_{12} variiren, so beschreiben die Brennpunkte die zweite der in 41) angegebenen Hyperbeln; variirt dagegen β_{11} , so beschreiben sie die erste.

Sind r_f, θ_f und r_g, θ_g die Polarcoordinaten der Brennpunkte, so werden die letzten Gleichungen von 40)

$$\begin{aligned} r_f r_g \cdot \sin(\theta_f + \theta_g) &= 2 \alpha_{12}, \\ r_f r_g \cdot \cos(\theta_f + \theta_g) &= \alpha_{11} - \alpha_{22}, \end{aligned}$$

durch Division

$$42) \quad \operatorname{tg}(\theta_f + \theta_g) = \frac{2 \alpha_{12}}{\alpha_{11} - \alpha_{22}}.$$

Verbindet man die Brennpunkte mit dem Coordinatenanfang und halbirt den Winkel der Verbindungslinien, so schliesst diese Halbirlungslinie mit der Coordinatenaxe den Winkel $\frac{\theta_f + \theta_g}{2}$ ein. Wir sehen daher, dass wir diesem Winkel durch Drehung der Coordinatenaxe jeden beliebigen Werth geben können. Hat er den Werth Null, so ist auch $\alpha_{12} = 0$ und die Brennpunkte liegen auf der ersteren der in 41) angegebenen Hyperbeln, welche durch den Coordinatenanfang hindurchgeht und deren Asymptoten den Coordinatenaxen parallel laufen. Ist $\frac{\theta_f + \theta_g}{2} = 45^\circ$, also $\operatorname{tg}(\theta_f + \theta_g) = \infty$, und $\alpha_{11} - \alpha_{22} = 0$, so erhalten wir als Ort der Brennpunkte die zweite Hyperbel, welche durch den Anfang geht, die neuen Coordinatenaxen aber zu Curvenaxen hat. Da eine Drehung von 45° stattgefunden hat, so finden wir das Obige bestätigt.

Die Gleichungen 41) sind dann von Wichtigkeit, wenn die Grössen α von einer Veränderlichen abhängig gemacht sind, wodurch die allgemeine Gleichung zweiten Grades eine Schaar Kegelschnitte vertritt. Eliminirt man dann aus beiden Gleichungen diese Veränderliche, so erhält man den Ort der Brennpunkte der genannten Kegelschnittsschaar.

Die Halbaxen des Kegelschnittes ergeben sich dann besonders leicht, wenn

$$\alpha_{13} \alpha_{23} = \alpha_{12}, \quad \alpha_{13}^2 - \alpha_{11} \geq \alpha_{23}^2 - \alpha_{22}.$$

Dann ist nach 38) $\operatorname{tg} 2\omega = 0$, also entweder $\omega = 0$ oder $\omega = 90^\circ$, und zwar

$$\text{für } \omega = 0 \text{ nach 34): } a^2 = \alpha_{13}^2 - \alpha_{11}, \quad b^2 = \alpha_{23}^2 - \alpha_{22},$$

und

$$\text{für } \omega = 90^\circ: \quad a^2 = \alpha_{23}^2 - \alpha_{22}, \quad b^2 = \alpha_{13}^2 - \alpha_{11}.$$

Hiermit stimmt überein, dass für $\alpha_{13} \alpha_{23} - \alpha_{12} = 0$ nach 41) sein muss

$$(x_f - x_m)(y_f - y_m) = 0,$$

d. h. entweder $x_f = x_m$, dann ist $\omega = 90^\circ$, oder $y_f = y_m$, dann ist $\omega = 0$.

Für $\alpha_{13}^2 - \alpha_{11} = \alpha_{23}^2 - \alpha_{22}$, $\alpha_{13} \alpha_{23} \geq \alpha_{12}$ wird $\operatorname{tg} 2\omega = \infty$, also $\omega = 45^\circ$ oder $\omega = 135^\circ$. Dann ist [Gleichung 34)]

$$a^2 + b^2 = 2(\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}),$$

$$a^2 - b^2 = 2(\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}).$$

Diese Fälle kann man bei jedem Kegelschnitte durch Axendrehung herbeiführen.

Ist der Anfang auch Curvenmittelpunkt, so ist wegen $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes

$$\rho^2 + \alpha_{11} \cos^2 \theta + \alpha_{22} \sin^2 \theta + \alpha_{12} \sin 2\theta = 0.$$

Steht eine der beiden Curvenaxen auf der Coordinatenaxe senkrecht, so ist $\alpha_{12} = 0$ und die Gleichung selbst

$$\rho^2 + \alpha_{11} \cos^2 \theta + \alpha_{22} \sin^2 \theta = 0.$$

Ist die grosse Axe Coordinatenaxe, so ist $\alpha_{11} = -a^2$, $\alpha_{22} = -b^2$; ist die kleine Axe Coordinatenaxe, so ist $\alpha_{11} = -b^2$, $\alpha_{22} = -a^2$. Bei einer Neigung von 45° ist $\alpha_{11} = \alpha_{22}$, also die Curvengleichung

$$\rho^2 + \alpha_{11} + \alpha_{12} \sin 2\theta = 0,$$

und zwar ist $\alpha_{11} = -\frac{a^2 + b^2}{2}$, $\alpha_{12} = -\frac{a^2 - b^2}{2}$. Man vergleiche bei diesen

Werthen die Centralgleichung 15).

Wir wollen noch Einiges durchnehmen über die geometrische Bedeutung der Coefficienten der allgemeinen Gleichung in der Form

$$\rho^2 - 2\rho(\alpha_{13} \cos \theta + \alpha_{23} \sin \theta) + \alpha_{11} \cos^2 \theta + \alpha_{22} \sin^2 \theta + \alpha_{12} \sin 2\theta = 0.$$

Die nothwendige Homogenität der Gleichung zeigt uns, dass α_{13} und α_{23} Strecken, α_{11} , α_{22} und α_{12} Flächen sind. Ersteres haben wir schon constatirt. Es sind nämlich α_{13} und α_{23} die Entfernungen des Mittelpunktes von den beiden Coordinatenaxen. Um α_{11} und α_{22} zu interpretiren, übertragen wir den Begriff der Potenz des Punktes beim Kreise auf die Potenz einer Geraden beim Kegelschnitt. Wir wollen unter derselben die Differenz verstehen, welche wir erhalten, wenn wir vom Rechteck aus den Abständen der Brennpunkte von der Geraden das Quadrat der kleinen Halbxaxe subtrahiren. Es ist klar, dass eine Gerade mit dem Kegelschnitt zwei, einen oder gar keinen Punkt gemeinsam hat, je nachdem ihre Potenz negativ, Null oder positiv ist. Wir sehen aus der Kegelschnittsgleichung $F_1 F_2 - b^2 = 0$, dass wir die Potenz einer beliebigen Geraden erhalten, wenn wir ihre Coordinaten in die linke Seite der Kegelschnittsgleichung einsetzen. Da die Coordinatenaxe (x -Axe) die Coordinaten $\rho = 0$, $\theta = 90^\circ$ besitzt, so ist ihre Potenz $= \alpha_{22}$, und da die y -Axe die Coordinaten $\rho = 0$, $\theta = 0$ hat, so ist ihre Potenz $= \alpha_{11}$. Da ferner nach 42) $\alpha_{12} = \frac{1}{2} r_f \cdot r_g \cdot \sin(\theta_f + \theta_g)$, so können wir sagen: α_{12} ist die Fläche desjenigen Dreiecks, welches den Coordinatenanfang, den einen Brennpunkt und den Spiegelpunkt des andern in Beziehung auf die Coordinatenaxe zu Ecken hat.

Nach dieser Ausführung scheint die Discussion der allgemeinen Kegelschnittsgleichung und die Bestimmung der für den Kegelschnitt

wichtigsten Grössen $a, b, \alpha_m, y_m, \omega$ in Liniencoordinaten einfacher zu sein als in Punktkoordinaten.

Es bleibt uns nur noch übrig, den Fall

II. $\alpha_{33} = 0$

näher zu untersuchen. Die Kegelschnittsgleichung lautet dann

$$43) \quad 2q(\alpha_{13} \cos \theta + \alpha_{23} \sin \theta) = \alpha_{11} \cos^2 \theta + \alpha_{22} \sin^2 \theta + \alpha_{12} \sin 2\theta.$$

Ist ausserdem noch $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$, so geht aus

$$44) \quad \alpha_{11} \cos^2 \theta + \alpha_{22} \sin^2 \theta + \alpha_{12} \sin 2\theta = 0$$

hervor

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-\alpha_{12} \pm \sqrt{\alpha_{12}^2 - \alpha_{11} \alpha_{22}}}{\alpha_{22}}$$

Ist auf diese Weise θ als Constante bestimmt, so repräsentirt die Gleichung 44) den Schnittpunkt sämmtlicher unter $(90^\circ - \theta)$ gegen die Coordinatenaxe geneigten, also einander parallelen Geraden. Da die Gleichung quadratisch ist, so können wir sagen, sie stellt zwei im Unendlichen gelegene Punkte dar, die allerdings imaginär werden oder auch in einen einzigen zusammenfallen können.

Ist dagegen nicht $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$, so kann die Gleichung 43) durch Division mit der Wurzelgrösse $2\sqrt{\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2}$ auf die Form gebracht werden

$$q(\cos \theta \cos \omega + \sin \theta \sin \omega) = \beta_{11} \cos^2 \theta + \beta_{22} \sin^2 \theta + \beta_{12} \sin 2\theta,$$

wo

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{13}}, \quad \beta_{11} = \frac{\alpha_{11}}{2\sqrt{\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2}}, \quad \beta_{22} = \frac{\alpha_{22}}{2\sqrt{\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2}}, \quad \beta_{12} = \frac{\alpha_{12}}{2\sqrt{\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2}}.$$

Diese Gleichung repräsentirt aber nach 17) eine Parabel, deren Axe unter Winkel ω gegen die Coordinatenaxe geneigt ist. Hat ihr Brennpunkt die Coordinaten x_f, y_f , und ist q die Focaldistanz des Scheitels, so lässt sie sich auch schreiben

$$(q - x_f \cos \theta - y_f \sin \theta)(\cos \theta \cos \omega + \sin \theta \sin \omega) = q(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta),$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= x_f \cos \omega + q, \\ \beta_{22} &= y_f \sin \omega + q, \\ 2\beta_{12} &= x_f \sin \omega + y_f \cos \omega, \end{aligned}$$

also

$$\beta_{11} - \beta_{22} = x_f \cos \omega - y_f \sin \omega,$$

d. h.

$$46) \quad \begin{aligned} x_f &= 2\beta_{12} \sin \omega + (\beta_{11} - \beta_{22}) \cos \omega, \\ y_f &= 2\beta_{12} \cos \omega - (\beta_{11} - \beta_{22}) \sin \omega, \\ q &= \beta_{11} \sin^2 \omega + \beta_{22} \cos^2 \omega - \beta_{12} \sin 2\omega. \end{aligned}$$

Wir haben immer eine Parabel, so lange nicht $q = 0$. Dann geht die Parabel in ihren Brennpunkt über; also wenn

$$\beta_{11} \operatorname{tg}^2 \omega - 2\beta_{12} \operatorname{tg} \omega + \beta_{22} = 0$$

oder

$$\alpha_{11} \alpha_{23}^2 = 2\alpha_{12} \alpha_{13} \alpha_{23} + \alpha_{22} \alpha_{13}^2 = 0.$$

Der Gleichung 39) ist noch nachzutragen:

47) Für $\alpha_{33} = 0$ stellt die Gleichung

$$\alpha_{11} \xi^2 + 2\alpha_{12} \xi \eta + \alpha_{22} \eta^2 + 2\alpha_{13} \xi + 2\alpha_{23} \eta + \alpha_{33} = 0$$

eine Parabel dar, so lange nicht

$$\alpha_{11} \alpha_{23}^2 - 2\alpha_{12} \alpha_{13} \alpha_{23} + \alpha_{22} \alpha_{13}^2 = 0.$$

Ist aber diese Bedingung erfüllt und nicht gleichzeitig

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0,$$

so repräsentirt die Gleichung einen im Endlichen gelegenen Punkt, im andern Falle ein im Unendlichen gelegenes Punktepaar.

XV.

Lemniscatische Geometrie, Verwandtschaft und Kinematik, abgeleitet mit Hilfe der Function complexen Arguments

$$Z = \sqrt{z}.$$

Von

Dr. GUSTAF HOLZMÜLLER,

Director der Provinzial-Gewerbeschule zu Hagen.

(Hierzu Taf. VI, Fig. 1—5.)

§ 1. Vorbemerkungen.

In Folgendem soll die durch die Function complexen Arguments $Z = \sqrt{z}$ vermittelte Abbildung in Bezug auf ihre geometrischen Consequenzen einer speciellern Untersuchung unterworfen werden.

Es wird sich zeigen, dass bei dieser conformen Uebertragung jedem beliebigen Kreise in der Ebene des Arguments eine lemniscatische Curve $p \cdot p_1 = c$ in der Ebene der Function entspricht, die stets den Nullpunkt zum Centrum hat, die jedoch nach Gestalt, Axenlage und Brennweite ohne Einschränkung variiren kann. Ist im speciellen Falle der Kreis eine Gerade, so geht die Lemniscate in eine gleichseitige Hyperbel über, deren lemniscatische Brennpunkte im Unendlichen zu denken sind.

In einem bestimmten Bereiche der Geometrie wird demnach jedem Satze über Kreis und Gerade, über Kreisbüschel und Kreisschaar, über Strahlenbüschel durch einen Punkt und Punktreihen auf einer Geraden ein solcher über Lemniscaten und gleichseitige Hyperbeln desselben Centrums, über Lemniscatenbüschel und Lemniscatenschaar, über Büschel gleichseitiger Hyperbeln durch zwei Punkte und Punktreihenpaare auf gleichseitiger Hyperbel entsprechen, und ebenso wird jede dahin gehörige Constructionsmethode ihr Analogon finden.

Besonderes Augenmerk soll auf eine aus der Transformation durch reciproke Radii vectores entspringende Operation gerichtet werden, die man als „isothermische Spiegelung gegen die Lemniscate“ bezeichnen könnte. Dieselbe ist mit elementaren Hilfsmitteln durchführbar und hat eine Reihe interessanter Consequenzen aufzuweisen. Ueber den Specialfall der Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel habe ich bereits in den „Beiträgen zur Theorie der isogonalen Verwandtschaften“ in dieser Zeitschrift XVIII, S. 227 figg., einige Mittheilungen gegeben

und auf den Reichthum geometrischer Beziehungen hingewiesen, die aus dieser Transformation hervorgehen.

Bekanntlich liefert die Abbildung durch reciproke Radii vectores Gebilde, die in Kreisverwandtschaft stehen, und umgekehrt lässt sich jeder Fall der Kreisverwandtschaft, die allgemein der Transformation durch die Function complexen Arguments $Z = \frac{az + b}{cz + d}$ entspricht, im Wesentlichen auf eine Abbildung durch reciproke Radii vectores zurückführen. So wird auch die isothermische Spiegelung gegen die Lemniscate auf eine Verwandtschaft führen, bei welcher jedes Individuum unter den Lemniscaten desselben Centrums in der einen Ebene einem solchen unter den Curven desselben Charakters in der andern entspricht, eine Beziehung, die man zweckmässig als „lemniscatische Verwandtschaft“ bezeichnen kann. Dieselbe wird wiederum durch eine bestimmte Function complexen Arguments repräsentirt sein.

Die Kreisverwandtschaft hat eine ausgedehnte, aber wohlbegrenzte Gruppe von sonst schwierigen Problemen aus dem Gebiete der Geometrie, der Wärmetheorie und der conformen Abbildungen zur Lösung geführt. Dasselbe ist hier zu erwarten. Zwar scheint in dem Umstande, dass nur von Lemniscaten desselben Centrums gesprochen wird, im Vergleich zur Kreisverwandtschaft, wo die Lage des Kreiscentrums ganz beliebig ist, eine gewisse Beschränkung zu liegen; es stellt sich jedoch heraus, dass der beliebigen Lage des Kreiscentrums die unbeschränkt willkürliche Lage des einen lemniscatischen Brennpunktes entspricht, und dass im Gegensatz zur Aehnlichkeit sämmtlicher Kreise die unendliche Mannichfaltigkeit der lemniscatischen Gestaltung zur Geltung kommt. Schon der Umstand ist bemerkenswerth, dass die Transformation durch reciproke Radii vectores als der Specialfall der lemniscatischen Spiegelung zu betrachten ist, bei dem die beiden Brennpunkte der spiegelnden Curve in einen zusammenfallen.

Von besonderem Interesse ist wohl die Bemerkung, dass der von Möbius* bewiesene Satz über die Doppelverhältnisse und Doppelwinkel, die für entsprechende Punktquaternionen in kreisverwandten Systemen übereinstimmen, auch hier, wenn auch in neuer Form, erhalten bleibt, so dass die Theorie der lemniscatischen Verwandtschaft zu vollständiger Allgemeinheit geführt werden kann. Damit ist auch der Weg gezeigt, die bei anderen isogonalen Verwandtschaften den Doppelverhältnissen entsprechenden Beziehungen zu ermitteln und so ihre Theorie zum Abschluss zu bringen, was bis jetzt nur bei der Aehnlichkeits- und Kreisverwandtschaft** erreicht war.

* Möbius: „Die Theorie der Kreisverwandtschaft“, Abhdl. der königl. sächs. Ges. d. Wiss. IV, S. 544 flgg.

** Vergl. die Bemerkung bei Dürège: „Elemente der Theorie der Functionen etc.“, S. 33.

Die Theorie der krummlinigen Coordinaten wird insofern einen Beitrag erhalten, als die von Lamé behandelten lemniscatischen Coordinaten* eine wesentliche Verallgemeinerung erfahren, analog der Ausdehnung der Kreiscoordinaten durch Einführung des Kreishüschels $\vartheta - \vartheta_1 = \gamma$ und der

orthogonalen Kreisschaar $\frac{p}{p_1} = c$.

Bei der Wichtigkeit, die Jacobi** solchen Substitutionen für die Integration der Differentialgleichungen und die Lösung mechanischer Probleme beilegt, mag dies nicht unerwähnt bleiben.

Ueber Lösung von Problemen conformer Abbildung durch Einführung der verallgemeinerten lemniscatischen Coordinaten in die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

auf dem von Jacobi (Crelle's Journal Bd. 36) gegebenen Wege sollen einige Andeutungen folgen.

Am Schlusse finden sich noch Bemerkungen über die jetzt angebahnte Kinematik conform veränderlicher Systeme,*** speciell der lemniscatisch verwandten, so dass sich die Fruchtbarkeit der Methode, jedoch auch die Grenzen ihrer Tragweite, hinreichend klarlegen werden.

§ 2. Allgemeiner Charakter der Abbildung $Z = \sqrt{z}$.

Zum Zweck der Präcisirung des Folgenden sei es gestattet, über den Charakter der vorliegenden Abbildung einiges Bekannte vorauszuschicken.

Zwischen beiden Ebenen besteht die Beziehung

$$1) \quad \begin{cases} X + Yi = \sqrt{x + yi}, \\ R [\cos \Phi + i \sin \Phi] = \sqrt{r (\cos \varphi + i \sin \varphi)}, \end{cases}$$

so dass $R = +\sqrt{r}$ und Φ entweder gleich $\frac{\varphi}{2}$ oder gleich $180^\circ + \frac{\varphi}{2}$ ist.

Jedem Punkte A der z -Ebene entsprechen also zwei Punkte A_1 und A_2 der Z -Ebene, deren Verbindungslinie durch den Nullpunkt halbirt wird. Zwei so zusammengehörige Punkte sollen stets als Punktpaar bezeichnet werden. Die Construction des einem gegebenen Punkte entsprechenden Punktpaares geschieht durch Halbierung der Abweichung φ und Construction der mittleren Proportionale zwischen r und der Einheit. Die Uebertragung geschieht also mit elementaren Hilfsmitteln.

* Lamé: „Leçons sur les coordonnées curvilignes“, S. 217.

** Jacobi: „Vorlesungen über Dynamik“, S. 199.

*** Burmester: „Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung gesetzmässig veränderlicher Systeme“, diese Zeitschr. XX, S. 381 fgg.

Jeder vom Nullpunkte unter der Neigung φ gegen die positive reelle Axe ausgehenden Geraden entspricht eine unter $\frac{\varphi}{2}$ geneigte Gerade der Z -Ebene und ihre Rückwärtsverlängerung über den Nullpunkt hinaus. Der vollständigen Geraden durch den Nullpunkt der z -Ebene entsprechen zwei orthogonale Gerade mit den Neigungen $\frac{\varphi}{2}$ und $\frac{\varphi}{2} + 90^\circ$.

Jedem Kreise mit Radius r um den Nullpunkt der z -Ebene entspricht ein Kreis mit Radius \sqrt{r} um den Nullpunkt der Z -Ebene, dem doppelten Umfange auf dem ersteren der einfache Umfang auf dem letzteren. Um dies zu veranschaulichen und gleichzeitig die obige Zweideutigkeit aufzuheben, muss man nach Riemann die z -Ebene als zweiblättrig betrachten, und zwar so, dass beide Blätter längs einer beliebigen, sich selbst nicht schneidenden Linie vom Nullpunkte nach dem unendlich fernen Punkte sich gegenseitig durchkreuzen. Man denke sich diesen „Schnitt“ längs der positiven reellen Axe gelegt und setze fest, dass dem oberen Blatte der z -Ebene der erste und zweite Quadrant der Z -Ebene, dem unteren Blatte der dritte und vierte Quadrant entspricht. Vermeidet man es alsdann, den Schnitt zu überschreiten und so aus dem oberen Blatte in das untere zu gelangen, so kann man die Geometrie jedes Blattes eindeutig auf eine Halbebene übertragen.

Im Nullpunkte aber ist es zweifelhaft, in welchem Blatte man sich befindet. In ihm hängen beide Blätter zusammen, was dem Zusammenfallen der beiden Wurzelwerthe für $z = 0$ entspricht. Während man also, wenn ein Punkt der z -Ebene von irgend einer Stelle eines bestimmten der beiden Blätter aus sich beliebig bewegt, im Allgemeinen stets weiss, in welcher Schicht man sich befindet, so dass also der entsprechende Punkt der Z -Ebene eindeutig bestimmt ist, hört diese Eindeutigkeit auf, sobald der Punkt den Nullpunkt passirt. Man kann dort willkürlich in beiden Blättern weitergehen, der Weg verzweigt sich in zwei sich deckende Arme, in der Z -Ebene entsprechend in zwei sich rechtwinklig schneidende Züge. Der Nullpunkt der z -Ebene ist also ein Verzweigungspunkt. Ein einfacher Umgang um denselben führt ohne Unstetigkeit in das andere Blatt, der doppelte Umgang führt ins erste zurück. Man nennt deshalb den Punkt einen Windungspunkt erster Ordnung, dessen Bedeutung sich mit Hilfe des in Fig. 1 dargestellten Modells veranschaulichen liesse.*

Nimmt man an, dass nur ein unendlicher Punkt existire, so müssen dort die Blätter ebenfalls zusammenhängend gedacht werden, und er ist ebenso

* Vergl. Figurentafel bei Neumann: „Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale“.

als Windungspunkt erster Ordnung aufzufassen, wodurch die unbestimmte Vorstellung des unendlich fernen Bereiches zu einer präcisen wird.

Die Transformation $Z = \sqrt{z}$ giebt, wie jede durch eine Function complexen Arguments vermittelte, in der Z -Ebene Gebilde, die den entsprechenden der z -Ebene conform, d. h. in den kleinsten Theilen ähnlich sind. Zwei Curven der einen Ebene schneiden sich also unter demselben Winkel, wie die entsprechenden der andern. Im Nullpunkte aber hört diese Aehnlichkeit auf, denn jeder Winkel, der in ihm seinen Scheitel hat, wird, wie oben gezeigt, auf die Hälfte reducirt. Aehnlich ist das Verhalten des unendlichen Punktes zu denken.

Ferner: Das Dimensionsverhältniss kleiner entsprechender Bereiche beider Ebenen hängt ab vom absoluten Betrage des Differentialquotienten*

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dz} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \left[\cos\left(\frac{-\varphi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{-\varphi}{2}\right) \right], \text{ resp.} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \left[\cos\left(180^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) + i \sin\left(180^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Folglich: In der Entfernung r vom Nullpunkte ist das Vergrösserungsverhältniss $1 : \frac{1}{2\sqrt{r}}$. Auf dem Kreise mit Radius $r = \frac{1}{4}$

ist es gleich der Einheit, ausserhalb desselben kleiner, innerhalb grösser, und zwar wird die Umgebung des Nullpunktes unendlichfach vergrössert, die des unendlichen Punktes unendlichfach verkleinert dargestellt. Beide Punkte sind also in mehrfacher Hinsicht singulären Charakters.

Die Abweichung des Differentialquotienten $\frac{-\varphi}{2}$, resp. $180^\circ - \frac{\varphi}{2}$ zeigt an, dass die Tangente einer Curve in einem Punkte der z -Ebene um diese Winkel gedreht werden muss, wenn sie mit den Tangenten in den correspondirenden Punkten der entsprechenden Curven der Z -Ebene parallel und gleichgerichtet werden soll.

Erhebt man Gleichung 1) zum Quadrat, so ergiebt sich aus der Gleichsetzung der reellen und der imaginären Theile

$$\begin{aligned} 2) \quad & X^2 - Y^2 = x, \\ 3) \quad & 2XY = y. \end{aligned}$$

Folglich:

Die Curve $f(x, y) = 0$ der z -Ebene verwandelt sich durch die Transformation $Z = \sqrt{z}$ in die Curve $f[(X^2 - Y^2), (2XY)] = 0$ der Z -Ebene.

Curven n^{ten} Grades gehen also in solche vom $2n^{\text{ten}}$ Grade über, deren Gleichung sich nicht ändert, wenn man gleichzeitig die Vorzeichen

* Siebeck: „Ueber graphische Darstellung imaginärer Functionen“, Crelle's Journal Bd. 55.

von X und Y ändert. Klappt man eine solche Curve erst um die X -Axe, dann um die Y -Axe, so deckt sie sich in letzterer Lage mit ihrer ersten Lage.

Umgekehrt lässt sich mit Hilfe der Transformation $Z = z^2$ die Behandlung einer ausgedehnten Curvengruppe $2n^{\text{ten}}$ Grades auf die von Curven n^{ten} Grades reduciren.

§ 3. Uebertragung der Geraden und des Kreises durch die Abbildung $Z = \sqrt{z}$ und die daraus entspringenden verallgemeinerten lemniscatischen Coordinaten.

Nach Gleichung 2) verwandelt sich die verticale Gerade $x = a$ in die gleichseitige Hyperbel

$$4) \quad X^2 - Y^2 = a,$$

deren Centrum der Nullpunkt ist und deren Schëitel $\pm \sqrt{a}$ und Brennpunkte $\pm \sqrt{2a}$ auf der reellen oder imaginären Axe liegen, je nachdem a positiv oder negativ ist. Dass der Punkt $2a$, das Spiegelbild des Nullpunktes gegen die Gerade, in den Brennpunkt der Hyperbel transformirt wird, giebt später Veranlassung zu einem interessanten Satze. Allgemein:

Die verticale Parallelschaar der z -Ebene geht über in eine Schaar gleichseitiger Hyperbeln desselben Centrums, die sich im Endlichen nicht schneiden und deren Brennpunkte auf der reellen und imaginären Axe liegen.

Bilden die Schnittpunkte der Verticalenschaar mit der reellen Axe die Reihe

$$\dots -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, \dots,$$

so liegen die Schnittpunkte der Hyperbeln mit beiden Axen in den Entfernungen

$$0, \sqrt{a}, \sqrt{2a}, \sqrt{3a}, \dots$$

vom Nullpunkte (vergl. Fig. 2).

Nach Gleichung 3) entspricht der horizontalen Geraden $y = b$ die Curve

$$5) \quad 2XY = b.$$

Dies ist gleichfalls eine gleichseitige Hyperbel, deren Axe die Linie $+45^\circ$ oder -45° ist, je nach dem Vorzeichen von b . Der Beweis liegt als specieller Fall in folgender Betrachtung. Die Curven, welche die verticale Axe unter dem Winkel α schneiden, werden gefunden, wenn man untersucht, was der Verticalenschaar bei der Abbildung

$$Z = \sqrt{(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot z} = \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{z}$$

entspricht. Diese leistet aber dasselbe, wie $Z = \sqrt{z}$, nur muss die Z-Ebene um den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ gedreht werden. Folglich:

Der Parallelenschaar mit Neigung α gegen die reelle Axe entspricht eine Schaar gleichseitiger Hyperbeln desselben Centrums, deren Axe die Linie $\frac{\alpha}{2} + 45^\circ$ oder $\frac{\alpha}{2} - 45^\circ$ ist.

Gleichzeitig ergibt sich folgende Consequenz:

Jede isogonale Trajectorienschaar der gleichseitigen Hyperbelschaar ist wieder eine gleichseitige Hyperbelschaar. Ist α der constante Schnittwinkel, so sind die Axen beider Systeme um $\frac{\alpha}{2}$ gegen einander gedreht.

So ist z. B. die durch Gleichung 5) dargestellte Schaar die Orthogonalschaar der durch Gleichung 4) repräsentirten. Dies bestätigt den Satz vom constanten Inhalt des Rechtecks $X.F$ für die gleichseitige Hyperbel, der sich durch Orthogonalprojection in den Satz vom Parallelogramm constanten Inhalts der allgemeinen Hyperbel verwandelt.

Der isogonale Charakter der Verwandtschaft $Z = \sqrt{z}$ kann an dieser Stelle selbstständig nachgewiesen werden.

Die oben besprochenen Vergrößerungsverhältnisse werden besonders veranschaulicht durch die Abbildung orthogonaler Parallelenschaaren, welche die Ebene in ein System von Quadraten eintheilen. In Fig. 2 ist dies durchgeführt. Die beiden orthogonalen Hyperbelschaaren theilen die Z-Ebene in ein System von rechtwinkligen Flächenräumen ein, die mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit, und zwar der quadratischen Gestalt, zustreben.

Es handelt sich also um zwei Isothermenschaaren, deren Schnittpunkte mit den Axen und den Linien $\pm 45^\circ$ vom Centrum die Entfernungen $0, \sqrt{a}, \sqrt{2a}, \sqrt{3a}, \dots$ haben. Der singuläre Charakter des Nullpunktes ist sofort zu erkennen, denn an Stelle des rechten Winkels tritt dort ein Winkel von 45° .

Nun ist bekannt, dass für Radii vectores, die von den Durchschnitten einer gleichseitigen Hyperbel mit einer durch das Centrum gehenden Geraden nach ihren einzelnen Punkten gezogen sind, die Winkelsumme $\varphi + \varphi_1 = \text{const. resp.} = 180^\circ + \text{const.}$ ist, und zwar ist die Constante das Doppelte des Winkels, unter dem die Asymptote, an welche sich der eine Hyperbelarm anlehnt, gegen die Schnittlinie geneigt ist. Folglich:

Die Gerade durch den Punkt $(a + bi)$, welche gegen den „Radius“ desselben um den Winkel β , resp. $180^\circ + \beta$ geneigt ist, geht durch die Transformation $Z = \sqrt{z}$ über in die gleichseitige Hyperbel durch das Punktpaar $\sqrt{a + bi}$, deren Radii

vectores, von den Punkten $\sqrt{a+bi}$ ausgehend, gegen die Verbindungslinie derselben das Gesetz $\vartheta + \vartheta_1 = \beta$, resp. $\vartheta + \vartheta_1 = 180^\circ + \beta$ befolgen.

Nimmt man jedoch, wie es bei Polarcoordinaten gebräuchlich ist, den Radius nur positiv, so kann man sagen:

Die Abbildung $Z = \sqrt{z}$ verwandelt die Relation $\varphi = \beta$ in Bezug auf den „Radius“ eines Punktes $a+bi$ in die Relation $\vartheta + \vartheta_1 = \beta$ in Bezug auf das Punktpaar $\sqrt{a+bi}$ und dessen Verbindungslinie, d. h. z. B. die Gerade $\varphi = \beta$ geht über in die gleichseitige Hyperbel $\text{arc.tan} \frac{y}{x+\sqrt{e}} + \text{arc.tan} \frac{y}{x-\sqrt{e}} = \beta$, wenn die Entfernung des Schnittpunktes der Geraden und der reellen Axe vom Nullpunkte mit e bezeichnet wird.

Einem Strahlenbüschel durch jenen Punkt, dessen Abweichungen die arithmetische Reihe $0, \gamma, 2\gamma, 3\gamma, \dots$ bilden, entspricht ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln, deren benachbarte Individua sich unter γ schneiden und deren Winkelsummen $(\vartheta + \vartheta_1)$ dieselbe arithmetische Reihe bilden. Die Asymptoten des Büschels folgen einander nach der Reihe $0, \frac{\gamma}{2}, \frac{2\gamma}{2}, \frac{3\gamma}{2}, \dots$ (vergl. Fig. 3).

Um die entsprechenden Betrachtungen für den Kreis durchzuführen, beschränke man sich auf den Fall, dass das Kreiscentrum auf der reellen Axe in der Entfernung e vom Nullpunkte liegt. Die allgemeine Lage erledigt sich dann durch die Function $Z = \sqrt{(\cos \alpha + i \sin \alpha) z}$ ebenso, wie oben.

Die Gleichung des Kreises

$$(x-e)^2 + y^2 = c^2$$

geht durch unsere Transformation nach Gleichung 2) und 3) und einigen Umformungen über in

$$6) \quad \begin{cases} (X^2 + Y^2)^2 - 2e(X^2 - Y^2) = c^2 - e^2, \\ [(X + \sqrt{e})^2 + Y^2] \cdot [(X - \sqrt{e})^2 + Y^2] = c^2. \end{cases}$$

Dies ist aber die Gleichung einer lemniscatischen Curve mit den Brennpunkten $\pm \sqrt{e}$ und dem constanten Product der Radii vectores $p \cdot p_1 = c$.

Das allgemeine Resultat ist also:

Der Kreis um den Punkt $a+bi$ mit dem Radius $r=c$ geht über in die Lemniscate $p \cdot p_1 = c$ mit dem Brennpunktpaare $\sqrt{a+bi}$.

Dass das Kreiscentrum in die Brennpunkte der Lemniscate transformirt wird, ist besonders bemerkenswerth.

Nur der doppelt zu denkende Kreis geht in die vollständige Lemniscate über. Schliesst er den Nullpunkt aus, so entspricht ihm die aus

zwei Ovalen bestehende Lemniscate; schliesst er ihn ein, so entsteht die einfache Lemniscate; geht er durch den Nullpunkt, so verwandelt er sich in die gewöhnliche Schleifenlemniscate.

Die gleichseitige Hyperbel ist als Lemniscate zu betrachten, deren lemniscatische Brennpunkte im Unendlichen liegen.

Der Extract des Obigen liegt nun in folgendem sehr verwerthbaren Resultate:

Ist die Gleichung einer Curve in Bezug auf den Punkt $(a+bi)$ und den Radius desselben in Polarcoordinaten $f(r\varphi) = 0$, so geht sie durch die Transformation $Z = \sqrt{z}$ über in die Curve $f[(p.p_1), (\vartheta + \vartheta_1)] = 0$, deren Radii vectores auf das Punktpaar $\sqrt{a+bi}$ und dessen Verbindungslinie zu beziehen sind.*

Das System concentrischer Kreise und der orthogonalen Radien kann zur Eintheilung der Ebene in ähnliche rechtwinklige Flächenstücke benutzt werden, die zur Construction und Untersuchung der logarithmischen Spiralen verwendbar sind. Die Abweichungen der Radien bilden dabei eine arithmetische, ihre Längen eine geometrische Reihe. Folglich:

Die confocale Lemniscatenschaar wird von dem durch ihre Brennpunkte gehenden Büschel gleichseitiger Hyperbeln desselben Centrums orthogonal durchschnitten. Man erreicht die Eintheilung der Ebene in rechtwinklige Flächenstücke, die der Aehnlichkeit zustreben, wenn man die Parameter $(\vartheta + \vartheta_1)$ in arithmetischer, die Parameter $p.p_1$ in geometrischer Reihe aufeinander folgen lässt.

In Fig. 3 ist die Eintheilung in kleine „Quadrate“ durchgeführt, die man z. B. erreicht, wenn die Winkelsumme $(\vartheta + \vartheta_1)$ die Reihe $0, a, 2a, 3a, \dots$, die Producte $p.p_1$ die Reihe $e^0, e^a, e^{2a}, e^{3a}, \dots$ bilden. Letzteres geht aus der logarithmischen Abbildung** hervor.

Man vergleiche hier die Bemerkungen über diese Curven und ihre isothermischen Parameter in dem bereits citirten Werke von Lamé.

Dort wird unter Anderem bemerkt, wie aus der Differentialgleichung der Gleichung 6)

$$(X^2 + Y^2 - e) \cdot (X dX + Y dY) + 2eY dY = 0$$

folgt, dass die confocalen Lemniscaten ihre Maxima zum Theil auf der imaginären Axe, zum Theil auf dem Kreise mit Radius \sqrt{e} um den Null-

* Vergl. an dieser Stelle die entsprechenden Bemerkungen in den „Beiträgen zur Theorie der isogonalen Verwandtschaften“ im 18. und 20. Bande dieser Zeitschrift.

** „Ueber die logarithmische Abbildung etc.“, 16. Bd. dieser Zeitschrift.

punkt haben, ferner, dass derselbe Kreis in bestimmter Weise die Gruppe der eingebuchteten Lemniscaten von der der nicht eingebuchteten trennt.

Es sei hier Folgendes hinzugefügt:

Die Brennpunkte des gleichseitigen Hyperbelbüschels liegen sämtlich auf der orthogonalen Schleifenlemniscate, welche die Büschelpunkte zu Brennpunkten hat; die Scheitelpunkte liegen auf der im Verhältniss $1:\sqrt{\frac{1}{2}}$ verkleinerten Lemniscate.

Der Beweis ergibt sich aus der Bemerkung, dass die Spiegelpunkte des Nullpunktes gegen ein Strahlenbüschel auf einem Orthogonalkreise des letzteren liegen, der durch den Nullpunkt geht.

Diese lemniscatischen Coordinaten sind jedoch einer durchgreifenden Verallgemeinerung fähig, die sich aus der Abbildung des Kreisbüschels durch zwei Punkte und der orthogonalen Kreisschaar ergibt. Die Mittelpunkte jeder dieser Schaaren liegen auf der gemeinschaftlichen Potenzlinie der andern, die selbst ein Individuum der ersteren Schaar ist. Folglich:

Sämmtliche Lemniscaten desselben Centrums, die durch zwei feste Punktpaare gehen, haben ihre Brennpunkte auf einer gleichseitigen Hyperbel, die orthogonal zu der zum Büschel gehörigen Hyperbel ist. Die Orthogonalschaar ist wiederum ein System von Lemniscaten desselben Centrums, deren Brennpunkte auf der zweiten der erwähnten Hyperbeln liegen. (Fig. 5 stellt ein solches Lemniscatenbüschel und die orthogonale Lemniscatenschaar dar.)

Die Scheitel beider Lemniscatenbüschel liegen auf gleichseitigen Hyperbeln, die im Verhältniss $\sqrt{2}:1$ grösser sind, als die beiden genannten.

Beiläufig sei bemerkt, dass, wenn sich zwei Lemniscaten desselben Centrums schneiden, sämtliche Schnittwinkel gleich sind.

Die Frage nach den Parametern der verallgemeinerten lemniscatischen Coordinaten erledigt sich folgendermassen:

Sind $a+bi$ und a_1+b_1i die Schnittpunkte eines Kreisbüschels, so hat jedes Individuum die Gleichung $\xi - \xi_1 = \beta$, resp. $180^\circ - \beta$, wenn diese Winkel gegen die Verbindungslinie der beiden Punkte gemessen werden. Misst man jedoch die Winkel gegen die „Radien“ der beiden Punkte, so wird zwar die Constante β eine andere, z. B. α , die Gleichung selbst aber wird sonst nicht geändert. Nach Obigem geht aber bei vorliegender Abbildung die Coordinate ξ in eine Winkelsumme $(\vartheta + \vartheta_1)$, ξ_1 in eine Winkelsumme $(\chi + \chi_1)$ über, also:

Das Lemniscatenbüschel durch die Punktpaare $\sqrt{a+bi}$ und $\sqrt{a_1+b_1i}$, welches dem obigen Kreisbüschel entspricht, befolgt das Gesetz:

7) $(\vartheta + \vartheta_1) - (\chi + \chi_1) = \alpha$, resp. $(180^\circ - \alpha)$, *

wobei die Winkelsumme $\vartheta + \vartheta_1$ gegen die Verbindungslinie des einen, $\chi + \chi_1$ gegen die des andern Punktpaares zu messen ist.

Die Orthogonalschaar des Kreisbüschels hat, wenn p und p_1 die von $a + bi$ und $a_1 + b_1 i$ ausgehenden Radii vectores sind, die Gleichung $\frac{p}{p_1} = c$. Bezeichnet man also die von dem Punktpaare $\sqrt{a + bi}$ ausgehenden Radii vectores mit p, p_1 , die von $\sqrt{a_1 + b_1 i}$ ausgehenden mit q, q_1 , so folgt:

Die Radii vectores der Orthogonalschaar des Lemniscatenbüschels befolgen das Gesetz

8)
$$\frac{p \cdot p_1}{q \cdot q_1} = c.$$

Beide Resultate, zusammengefasst, geben den Satz:

Der geometrische Ort für die constante Differenz der Winkelsummen $(\vartheta + \vartheta_1)$ und $(\chi + \chi_1)$ der von zwei Punktpaaren ausgehenden Radii vectores ist eine durch beide Punktpaare gehende Lemniscate. Der geometrische Ort für das constante Verhältniss der Producte $p \cdot p_1$ und $q \cdot q_1$ der Radii vectores ist eine zur vorigen orthogonale Lemniscate.

Aus den entsprechenden Sätzen über Kreisschaaren folgt, dass die

Fälle

9)
$$\left\{ \begin{array}{l} (\vartheta + \vartheta_1) - (\chi + \chi_1) = 0, \text{ resp. } 180^\circ, \\ \frac{p \cdot p_1}{q \cdot q_1} = 1 \end{array} \right.$$

auf die beiden genannten gleichseitigen Hyperbeln führen, die man nach Analogie der Potenzlinien als „Potenzhyperbeln“ des Büschels, resp. der Schaar bezeichnen kann. Wird eine von diesen Hyperbeln zu zwei durch den Nullpunkt gehenden orthogonalen Geraden, so findet gegen dieselben Symmetrie statt. Werden beide zu je zwei Geraden, was dem Falle entspricht, dass die Potenzlinien der beiden Kreisschaaren durch den Nullpunkt gehen, so findet gegen alle vier Gerade Symmetrie statt. In diesem Falle gehört zum Büschel ein Kreis, gegen welchen Reciprocität stattfindet.

Geht das Kreisbüschel durch den Nullpunkt, so fällt eins der entsprechenden Punktpaare mit diesem zusammen, und es entsteht ein Büschel von Schleifenlemniscaten durch den Nullpunkt und ein Punktpaar mit der Gleichung

10) $(\vartheta + \vartheta_1) - 2\chi = \alpha$

und die Orthogonalschaar

* Das Gesetz entspricht auch dem Satze vom constanten Peripheriewinkel bei dem Kreise.

$$11) \quad p \cdot p_1 = c \cdot q^2.$$

Dass beides Curven sind, die man durch Transformation der confocalen Lemniscatenschaar und des orthogonalen Hyperbelbüschels mittelst reciproker Radii vectores vom Nullpunkte aus erhalten kann, ist leicht zu zeigen. Dieser Satz wird sich jedoch als Specialfall eines allgemeineren erledigen.

Fig. 4 stellt dieses Curvensystem dar, und zwar ist die Eintheilung der Ebene in „Quadrate“ durchgeführt. Die gewöhnliche, symmetrisch gegen die reelle Axe liegende Schleifenlemniscate hat hier die Gleichung

$$(\vartheta + \vartheta_1) - 2\chi = 90^\circ,$$

die entsprechende Hyperbel hat die Gleichung

$$p \cdot p_1 = q^2, *$$

so dass stets das Rechteck aus dem einen Paare der Radii vectores gleich dem Quadrate des dritten ist (es handelt sich eben um drei Radii vectores und drei „Brennpunkte“).

Bilden die Parameter des allgemeinen Lemniscatenbüschels, d. h. die constanten Differenzen $(\vartheta + \vartheta_1) - (\chi + \chi_1)$, eine arithmetische, die Parameter der Orthogonalschaar, d. h. die constanten Verhältnisse $\frac{p \cdot p_1}{q \cdot q_1}$, eine geometrische Reihe, so lässt sich die Eintheilung der Ebene in ein System von „Rechtecken“ erzielen, die der Aehnlichkeit zustreben.

Die Eintheilung in „Quadrate“ wird erreicht durch Anwendung der Reihen

$$\begin{aligned} \dots & -3\alpha, -2\alpha, -\alpha, 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, \\ \dots & e^{-3\alpha}, e^{-2\alpha}, e^{-\alpha}, e^0, e^\alpha, e^{2\alpha}, e^{3\alpha}, \dots \end{aligned}$$

Durch Verbindung der aufeinander folgenden Diagonalepunkte des „Rechteck“-Netzes erhält man mit beliebiger Genauigkeit die isogonalen Trajectorien des Lemniscatenbüschels. Dieselben entsprechen den „logarithmischen Doppelspiralen“, die ich in der citirten Abhandlung (Ueber logarithmische Abbildung) ausführlicher behandelt habe und deren einfachste Gleichung ich in dieser Zeitschrift XX, S. 6, als

$$\frac{p}{p_1} = c \cdot x^{\vartheta - \vartheta_1}$$

* Auf die Analogie der beiden Gleichungen, die sich auch in der Form

$$\sin [(\vartheta + \vartheta_1) - 2\chi] = 1 \text{ und } \frac{p \cdot p_1}{q^2} = 1$$

schreiben lassen, wird besonders aufmerksam gemacht. (Vergl. das Entsprechende in der Kreisverwandtschaft von Möbius.)

aufstellte, wo $x = e^{\frac{a}{b}}$ und $\frac{a}{b}$ Tangente des constanten Schnittwinkels gegen das Kreisbüschel ist. Die Gleichung der allgemeinsten „lemniscatischen Spiralen“ (wenn man wegen der Form der Gleichung diesen Namen beibehalten will) ist also

$$12) \quad \frac{p \cdot p_1}{q \cdot q_1} = c \cdot x^{(\varphi + \varphi_1) - (x + x_1)}.$$

Diese transcendenten Curven befolgen also das Gesetz:

Das Verhältniss der Producte je zweier zusammengehöriger Radii vectores nimmt geometrisch zu oder ab, wenn die Differenz der entsprechenden Winkelsummen arithmetisch wächst.

Die Eigenschaften derselben lassen sich aus denen der logarithmischen Doppelspiralen einfach ableiten, was später an einigen Beispielen gezeigt werden soll. Für jetzt sei bemerkt, dass ihre Parallelschaaren als Isothermensysteme zu betrachten sind, als deren isogonale Trajectorien sich Curven desselben Charakters ergeben.

Für den Fall der confocalen Lemniscaten vereinfacht sich die Gleichung zu folgender:

$$13) \quad p \cdot p_1 = c \cdot x^{\varphi + \varphi_1},$$

wie schon in der citirten Abhandlung aus der Gleichung der logarithmischen Spirale $r = c \cdot x^{\varphi}$ geschlossen wurde.

Auch die anderen Specialfälle, bei denen Symmetrie auftritt, sind leicht zu erledigen.

Die Allgemeinheit des durch die Gleichungen 7) und 8) dargestellten Coordinatensystems ist eine sehr bemerkenswerthe. Bei ausserordentlicher Mannichfaltigkeit der Gestaltung umfasst es neben einer Reihe von symmetrischen Fällen die von Lamé eingeführten confocalen Lemniscaten, ferner das System der beiden orthogonalen Hyperbelschaaren, das der beiden orthogonalen Kreisschaaren und endlich die Polarcoordinaten und die gewöhnlichen geradlinigen als specielle Fälle. Als noch allgemeinere Coordinaten liessen sich die durch Gleichung 12) dargestellten lemniscatischen Spiralen betrachten; die praktische Verwerthbarkeit derselben mag jedoch für jetzt dahingestellt bleiben.

§ 4. Die Geometrie des Kreises, der Geraden und der projectivischen Gebilde, transformirt durch die Function $Z = \sqrt{z}$.

Es handelt sich jetzt darum, die Grundlagen der aus vorliegender Transformation entspringenden Geometrie, die als lemniscatische Geometrie bezeichnet werden soll, kurz zu skizziren. Dass dabei, wie

vorher, stets nur von Hyperbeln und Lemniscaten desselben Centrums die Rede ist, soll nicht mehr besonders hervorgehoben werden.

Der Grundsatz, dass zwischen zwei Punkten nur eine Gerade möglich ist, geht in folgenden über:

Durch zwei Punktpaare ist nur **eine** gleichseitige Hyperbel möglich.

Die beiden Postulate der Geometrie verwandeln sich in folgende:

1. Die durch zwei Punktpaare bestimmte gleichseitige Hyperbel zu zeichnen;
2. um ein gegebenes Brennpunktpaar eine Lemniscate mit gegebenem Parameter $p.p_1 = c$ zu legen.

Beide sind mit elementaren Hilfsmitteln ausführbar.

An Stelle gleicher Strecken treten Hyperbelbogen, die „correspondirende“ genannt werden sollen. Sie stehen untereinander in einer Beziehung, die als specieller Fall der unten behandelten lemniscatischen Verwandtschaft zu betrachten ist. Beispiele werden dies am besten klarlegen.

Kreise der z -Ebene mit demselben Radius c können zur Deckung gebracht werden, indem man den Mittelpunkt des einen direct nach dem des andern wandern lässt. Dem entspricht in der Z -Ebene Folgendes: Bewegt man den einen Brennpunkt einer Lemniscate $p.p_1 = c$ in der Z -Ebene auf beliebigem Wege, z. B. auf gleichseitiger Hyperbel, nach dem einen Brennpunkte einer Lemniscate desselben Parameters, die jedoch eine andere Brennweite und Axenlage hat, so unterliegt die Curve während der Wanderung einer stetigen Veränderung ihrer Gestalt, schmiegt sich in jedem Momente neuen Bedingungen an und deckt sich schliesslich mit der zweiten Curve. Der andere Brennpunkt fügt sich natürlich der Bewegung so, wie es der Begriff des Punktpaares vorschreibt.

In diesem Sinne also lassen sich Lemniscaten desselben Parameters $p.p_1 = c$ zur Deckung bringen. Wir sagen: sie sind „lemniscatisch congruent“ oder „correspondirend“.

Ferner: Correspondirende Hyperbelbogen, die Geraden von der Länge l entsprechen, haben die Eigenschaft, dass die Differenz der lemniscatischen Radii vectores, die von den Durchschnitten der Hyperbel mit irgend einer Axe durch den Nullpunkt ausgehen, für ihre Endpunkte $p.p_1 - q.q_1 = l$ ist. Sie lassen sich unter stetiger Gestaltveränderung auf dem Wege zur Deckung bringen, welcher der parallelen Verschiebung und schliesslichen Drehung einer Geraden entspricht, die mit einer andern zur Deckung gebracht werden soll.

In dem Momente, wo der Hyperbelbogen den Nullpunkt passirt, degenerirt er in eine oder zwei orthogonale Gerade, während die Lemniscate in dem Momente, wo ihr Brennpunkt den Nullpunkt durchwandert, zum Kreise, wo er hingegen den unendlichen Punkt passirt, zur gleichseitigen Hyperbel wird.

Das Resultat solcher Bewegungen unter dauernder Gestaltveränderung im „lemniscatisch veränderlichen System“ ist stets identisch mit einer Abbildung durch eine einfach zu bestimmende Function, die ein specieller Fall der die lemniscatische Verwandtschaft repräsentirenden Function ist. So fremdartig auch diese Bewegungen auf den ersten Blick erscheinen mögen, so kommen sie doch in der Wärmetheorie zur Geltung, sobald es sich nicht um einen stationären Wärmezustand handelt, sondern um eine Bewegung der Isothermen durch fortschreitende und sich ausbreitende Erwärmung. In der Optik tritt eine hierher gehörige Bewegung sogar in die reale Erscheinung. Es handelt sich um das System der Interferenzlemniscaten und des gleichseitigen Hyperbelbüschels, welches durch Polarisation entsteht. Die bei Drehung des Krystals oder des Nicol'schen Prismas entstehenden Bewegungen sollen noch einmal zur Sprache kommen.*

Das Gegebene reicht hin, die Fundamentalsätze und Constructionen eines gewissen Bereiches der Elementargeometrie richtig, und zwar mit elementaren Hilfsmitteln, zu übertragen. Stets wird man zum Ziele kommen, wenn man die einfachere Construction mit den durch $z=Z^2$ in die z -Ebene transformirten Daten in letzterer durchführt und das Resultat in die Z -Ebene zurücktransformirt. In den meisten Fällen sind jedoch erhebliche Abkürzungen möglich. Einige Beispiele von Aufgaben, deren Lösung auf der Hand liegt, werden genügen:

a) Theilung eines gegebenen Hyperbelbogens in zwei oder mehr correspondirende Theile und Verlängerung desselben um correspondirende Theile;

b) Errichtung der Orthogonalhyperbel im gegebenen Punkte einer gleichseitigen Hyperbel und Fällen derselben von einem ausserhalb liegenden Punkte auf dieselbe;

c) Halbierung des von zwei sich schneidenden gleichseitigen Hyperbeln gebildeten Winkels durch eine dritte u. s. w.

Correspondirende Hyperbeldreiecke sind solche, die congruente Dreiecken der z -Ebene entsprechen und sich auf dem besprochenen Wege zur Deckung bringen lassen. Liegen sie nicht gleichstimmig, so ist das eine Dreieck vorher um die reelle oder imaginäre Axe zu klapp-

* Durch ein einfaches Experiment kann man sich einen vorläufigen Begriff von solchen Bewegungen im gesetzmässig-veränderlichen System machen. Man stelle einen geraden Kreiskegel mit spiegelndem Mantel auf eine mit zwei orthogonalen Parallelschaaren bedeckte Papierfläche und bringe das Auge senkrecht über die Spitze des Kegels. Bewegt man dann die Zeichnung in beliebigem Sinne unter dem Kegel fort, so bewegen sich die Spiegelbilder der Parallelschaar, zwei sich schneidende Curvensysteme, unter stetiger Gestaltveränderung. Die Bewegung eines gefärbten Kreises in einem der Parallelstreifen würde im Spiegelbilde die oben besprochene Bewegung der Lemniscate einigermassen veranschaulichen können.

pen. Dass die Winkel solcher Dreiecke gleich sind, folgt aus dem isogonalen Charakter der Verwandtschaft $Z = \sqrt{z}$. An Stelle der Seiten- gleichheit tritt Folgendes: Bezeichnet man die Durchschnitte der ein Dreieck ABC bildenden gleichseitigen Hyperbeln a, b, c mit einer beliebigen Geraden durch den Nullpunkt bezüglich mit P, Q, R, P_1, Q_1, R_1 , so sind die „lemniscatischen Entfernungen“ der Punkte A, B und C von einander charakterisirt durch die Differenzen folgender lemniscatischen Coordinaten:

$$14) \quad PC \cdot P_1 C - PB \cdot P_1 B, \quad QA \cdot Q_1 A - QC \cdot Q_1 C, \quad RB \cdot R_1 B - RA \cdot R_1 A.$$

Sind diese Relationen für zwei Hyperbeldreiecke identisch, so sind die Dreiecke correspondirende. Die Uebertragung der anderen Congruenzsätze ist ohne Schwierigkeit. — Sind übrigens $\lambda, \mu, \nu, \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ die Winkel der lemniscatischen Radii vectores gegen die zu Grunde gelegte Gerade, so stimmen in correspondirenden Dreiecken auch die homologen Differenzen der Winkelsummen

$$15) \quad (\nu + \nu_1) - (\lambda + \lambda_1), \quad (\lambda + \lambda_1) - (\mu + \mu_1), \quad (\mu + \mu_1) - (\nu + \nu_1)$$

überein.

Sind die Ausdrücke 14) für zwei Hyperbeldreiecke proportional, so stimmen die Dreiecke gleichfalls in den Differenzen 15) überein. Sie sind „lemniscatisch ähnlich“. In leicht zu ermittelnden Specialfällen der Lage kann die lemniscatische Aehnlichkeit in die gewöhnliche Aehnlichkeit übergehen.

In ähnlicher Weise findet die gesammte Geometrie der Lage ihre Uebertragung, während die Geometrie des Masses nur in speciellen Fällen der Uebersetzung fähig ist.

Aus den wesentlichsten Eigenschaften der Potenzlinien z. B. schliesst man auf die analogen der Potenzhyperbeln. Die Sätze von den Aehnlichkeitspunkten, von Pol und Polare, der Pascal'sche und Brianchon'sche Satz (zunächst für den Kreis) sind leicht zu übersetzen. Offenbar ist auch das Tactionsproblem, eine Lemniscate zu construiren, die drei gegebene Lemniscaten desselben Centrum berührt, mit elementaren Hilfsmitteln durchführbar.

Sind ferner P, Q und R, S zugeordnete harmonische Punkte in der z -Ebene, und p, q, r, s ihre Entfernungen vom Durchschnitt der Geraden mit einer durch den Nullpunkt gelegten Axe, so ist das Doppelverhältniss

$$\frac{r-p}{r-q} \cdot \frac{s-q}{s-p} = -1.$$

Durch Transformation $Z = \sqrt{z}$ gehen die vier Punkte in vier auf einer gleichseitigen Hyperbel liegende Punktpaare über, die man „lemniscatisch-harmonische“ nennen kann. Die lemniscatischen Radii vectores jeder der beiden Punktgruppen, bezogen auf die Durchschnitte der Hyper-

bel mit der durch den Nullpunkt gelegten Axe, genügen demnach der Relation

$$16) \quad \frac{r \cdot r_1 - p \cdot p_1}{r \cdot r_1 - q \cdot q_1} \cdot \frac{s \cdot s_1 - q \cdot q_1}{s \cdot s_1 - p \cdot p_1} = -1.$$

Die Relation für die Winkel harmonischer Strahlen a, b, c, d ,

$$17) \quad \frac{\sin(ac) \sin(bd)}{\sin(bc) \sin(ad)} = -1,$$

bleibt für die von den entsprechenden Hyperbeln gebildeten Winkel unverändert bestehen. Für die lemniscatischen Radii vectores, bezogen auf die Verbindungslinie des Punktpaares, von dem die Hyperbeln ausstrahlen, verwandelt sie sich bei entsprechender Bezeichnung in folgende:

$$18) \quad \frac{\sin[(\gamma + \gamma_1) - (\alpha + \alpha_1)] \cdot \sin[(\delta + \delta_1) - (\beta + \beta_1)]}{\sin[(\gamma + \gamma_1) - (\beta + \beta_1)] \cdot \sin[(\delta + \delta_1) - (\alpha + \alpha_1)]} = -1.$$

Die Sätze über harmonische Punkte und Strahlen sind nun ohne Weiteres auf die lemniscatisch-harmonischen Punktpaare auf gleichseitiger Hyperbel und auf lemniscatisch-harmonische Hyperbeln durch ein Punktpaar zu übertragen.

Jetzt ist es leicht, die Fundamenteigenschaften projectivischer Gebilde in die lemniscatische Geometrie einzuführen. Wir werden der Kürze halber dabei im Allgemeinen nur von Punktquaternionen in einer Halbebene sprechen. Für die paarweise zugeordneten Punkte gilt dann dasselbe.

Schneidet man vier von einem Punktpaare ausstrahlende gleichseitige Hyperbeln durch beliebige gleichseitige Hyperbeln desselben Centrums, so ist für die lemniscatischen Coordinaten der Schnittpunkte, bezogen auf die Durchschnitte der schneidenden Hyperbeln mit einer beliebigen Geraden durch den Nullpunkt, das lemniscatische Doppelverhältniss stets constant, also:

$$19) \quad \frac{r \cdot r_1 - p \cdot p_1}{r \cdot r_1 - q \cdot q_1} \cdot \frac{s \cdot s_1 - q \cdot q_1}{s \cdot s_1 - p \cdot p_1} = \frac{\sin(ac) \sin(bd)}{\sin(bc) \sin(ad)} \\ = \frac{\sin[(\gamma + \gamma_1) - (\alpha + \alpha_1)] \sin[(\delta + \delta_1) - (\beta + \beta_1)]}{\sin[(\gamma + \gamma_1) - (\beta + \beta_1)] \sin[(\delta + \delta_1) - (\alpha + \alpha_1)]} = const.$$

Ferner:

Zieht man durch vier auf gleichseitiger Hyperbel liegende Punktpaare beliebige Büschel gleichseitiger Hyperbeln desselben Centrums, so ist stets das lemniscatische Doppelverhältniss constant, also

$$20) \quad \frac{\sin(ac) \sin(bd)}{\sin(bc) \sin(ad)} = \frac{\sin[(\gamma + \gamma_1) - (\alpha + \alpha_1)] \sin[(\delta + \delta_1) - (\beta + \beta_1)]}{\sin[(\gamma + \gamma_1) - (\beta + \beta_1)] \sin[(\delta + \delta_1) - (\alpha + \alpha_1)]} \\ = \frac{r \cdot r_1 - p \cdot p_1}{r \cdot r_1 - q \cdot q_1} \cdot \frac{s \cdot s_1 - q \cdot q_1}{s \cdot s_1 - p \cdot p_1} = const.$$

Das Princip der Dualität bleibt in voller Allgemeinheit bestehen. So entsprechen sich z. B. folgende Sätze:

a) Die Durchschnitte entsprechender Elemente zweier lemniscatisch-projectivischen Büschel gleichseitiger Hyperbeln desselben Centrums liegen auf einer Curve vierten Grades mit zwei Brennpunktpaaren, deren Gleichung in lemniscatischen Coordinaten sich auf eine der folgenden Formen reduciren lässt:

$$21) \left\{ \begin{array}{l} p \cdot p_1 + q \cdot q_1 = c, \text{ der Ellipse entsprechend;} \\ p \cdot p_1 - q \cdot q_1 = c, \text{ der Hyperbel entsprechend;} \\ p \cdot p_1 \cos^2 \frac{\vartheta + \vartheta_1}{2} = \frac{P}{4}, \text{ der Parabel entsprechend (Polargleichung} \\ \hspace{15em} \text{für Brennpunkt).} \end{array} \right.$$

b) Die Verbindungshyperbeln entsprechender Elemente zweier lemniscatisch-projectivischer Punktreihen auf gleichseitigen Hyperbeln desselben Centrums haben eine der *sub* 21) genannten Curven vierten Grades zur Enveloppe.

In Betreff der Parabel sei bemerkt, dass, wenn der Brennpunkt im Nullpunkte liegt, die Gleichung der transformirten Curve wird

$$r \cos \vartheta = \sqrt{\frac{P}{4}},$$

woraus folgt, dass sämtliche Parabeln, die den Nullpunkt zum Centrum haben, durch die Abbildung $Z = \sqrt{z}$ in Gerade übergehen, so dass man aus Sätzen über Parabel und Gerade entsprechende über Gerade und gleichseitige Hyperbel ableiten kann.

Dass von den Curven 21) der Pascal'sche und Brianchon'sche Satz etc. Geltung haben, nur dass man statt „Gerade“ zu setzen hat „gleichseitige Hyperbel“, ist selbstverständlich.

Als besonders interessant seien erwähnt die Uebertragungen der Siebeck'schen Curvenschaaren,* die mit den elliptischen Functionen zusammenhängen.

Die Analoga der Methode der reciproken Radii vectores und der Kreisverwandtschaft, bei welcher die Doppelverhältnisse in noch allgemeinerer Gestalt auftreten, sollen im folgenden Paragraphen besonders behandelt werden.

§ 5. Lemniscatische Reciprocität und lemniscatische Verwandtschaft.

Angenommen, zwei Ebenen stehen in der Beziehung, dass jedem Punktpaare der einen ein und nur ein Punktpaar der andern entspricht,

* Siebeck: „Ueber eine Gattung von Curven vierten Grades etc.“, Crelle's Journal Bd. 57 und 59.

und dass je vier Punktpaaren der ersteren, die auf einer der Lemniscaten desselben Centrums liegen, jedesmal vier Punktpaare der andern entsprechen, die gleichfalls auf einer solchen Lemniscate liegen, kurz, dass unter allen Lemniscaten eines gemeinschaftlichen Centrums der einen Ebene jedes Individuum einem solchen unter den Lemniscaten desselben Centrums in der andern Ebene entspricht, dann steht jedes Gebilde der einen Ebene zu dem entsprechenden der andern in einer bestimmten geometrischen Beziehung, die man als lemniscatische Verwandtschaft bezeichnen kann.

Die Realität ihrer Existenz und ihr isogonaler Charakter gehen schon daraus hervor, dass kreisverwandte Gebilde der z -Ebene durch die Abbildung $Z = \sqrt{z}$ in lemniscatisch verwandte übergehen. Der Bereich dieser Verwandtschaft ist ferner ein scharf begrenzter, da die Abbildung $z = Z^2$ lemniscatisch verwandte Systeme in kreisverwandte überführt, sobald der Nullpunkt der Transformation mit dem gemeinschaftlichen Centrum jedes Systems zusammenfällt. Jedoch dürfte auch der rein geometrische Nachweis, der dem von Möbius für die Kreisverwandtschaft gegebenen entsprechen würde, ohne Schwierigkeit durchführbar sein. Hier soll dieser Weg nicht eingeschlagen werden, da schon das Studium der Möbius'schen Abhandlung dem Anfänger einige Schwierigkeiten bereitet, die hier in erhöhtem Masse eintreten würden. Directer führt Folgendes zum Ziele:

Die Eigenschaften der Kreisverwandtschaft werden besonders übersichtlich durch den Umstand, dass sich dieselbe im Wesentlichen auf die Transformation durch reciproke Radii vectores zurückführen lässt. Man hat nur vom Massstabe der Zeichnung, von der speciellen Lage des abbildenden Centrums (des Nullpunktes) und von einer Drehung des Systems (Richtung der reellen Axe) abzusehen. Alle diese Nebenumstände beeinflussen den geometrischen Charakter der Gebilde nicht und erledigen sich durch Congruenz oder Aehnlichkeit. Analytisch gesprochen: Die Abbildung $Z = \frac{az + b}{cz + d}$ lässt sich durch lineare Substitutionen auf $Z = \frac{1}{z}$ reduciren.

Ganz analog lässt sich die lemniscatische Verwandtschaft zurückführen auf eine Operation, die bei der Abbildung $Z = \sqrt{z}$ der Transformation durch reciproke Radii vectores entsprechen würde, die man demnach als lemniscatische Reciprocität oder als isothermische Spiegelung gegen die Lemniscate bezeichnen dürfte. Letzterer Name empfiehlt sich deshalb, weil jede isothermische Spiegelung durch Transformation vermittelt einer bestimmten Function complexen Arguments in die wirkliche Spiegelung gegen eine Gerade verwandelt wer-

den kann, woraus gleichzeitig folgt, dass alle diese Spiegelungen involutorisch sind.

Wiederum müsste bei der Reduction der lemniscatischen Verwandtschaft auf die lemniscatische Reciprocität von den genannten Neben Umständen zu abstrahiren sein.

Da die Lemniscate im speciellen Falle zum Kreise, resp. zur gleichseitigen Hyperbel wird, so ist die Methode der reciproken Radii vectores und ebenso die isothermische Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel, die ich in der bereits citirten Abhandlung als „Uebertragung von Hyperbel auf Complementaryhyperbel“ bezeichnete, als specieller Fall in der jetzt zu behandelnden Spiegelungsmethode enthalten. Dort geschah die Uebertragung durch confocale Ellipsen. Man wird jetzt sehen, dass sie auch durch orthogonale Hyperbeln und Lemniscaten vermittelt werden kann, ebenso, wie jedes Spiegelbild gegen die Gerade nicht nur durch Lothe, sondern überhaupt durch orthogonale Curvenschaaren erzeugt werden kann, die symmetrisch gegen die Gerade sind.

Die Spiegelung gegen die Lemniscate ist also eine Operation von bemerkenswerther Allgemeinheit.

Um ihren Charakter zu skizziren, sind in Folgendem die entsprechenden Eigenschaften der Kreis- und der lemniscatischen Reciprocität tabellarisch zusammengestellt. Der Radius des spiegelnden Kreises sei $r=1$, die Entfernung seines Centrums vom Nullpunkte der Transformation $Z=\sqrt{z}$ sei e . Entsprechend sei der Parameter der spiegelnden Lemniscate $p.p_1=1$, die Entfernung der Brennpunkte vom Nullpunkte der Z -Ebene sei \sqrt{e} . Da e ganz beliebig sein kann, so ist durch diese Bestimmungen die Allgemeinheit nicht beschränkt, die ganze Mannichfaltigkeit der Lemniscaten kommt zur vollen Geltung.

Reciproke Radii vectores.

1. Jeder concentrische Kreis mit Radius $r=c$ geht über in einen concentrischen mit Radius $r=\frac{1}{c}$.

2. Jeder Radius der concentrischen Kreisschaar erzeugt sich selbst wieder.

3. Der äussere und innere Raum des Kreises werden eindeutig aufeinander abgebildet. Der Nullpunkt und der unendliche Punkt entsprechen einander. — Die Abbildung

Lemniscatische Reciprocität.

1. Jede confocale Lemniscate $p.p_1=c$ geht über in eine confocale $p.p_1=\frac{1}{c}$.

2. Jede gleichseitige Orthogonalhyperbel der Confocalschaar erzeugt sich selbst wieder.

3. Streng genommen ist die Abbildung eine zweideutige. So entspricht der unendliche Punkt den beiden Brennpunkten, die imaginäre Axe und die Verbindungslinie der

wird mit elementaren Hilfsmitteln bewerkstelligt.

4. Ein Kreis mit Radius $r = c$, in Bezug auf den die Potenz des abbildenden Centrums t^2 ist, geht über in einen Kreis mit Radius $r = \frac{c}{t^2}$, in Bezug auf den die Potenz des abbildenden Centrums $\frac{1}{t^2}$ ist.

Die Mittelpunkte beider Kreise entsprechen einander im Allgemeinen nicht. Ist der eine vom abbildenden Centrum um a entfernt, so hat der andere die Entfernung $\frac{a}{t^2}$. Beide liegen auf einer durch das Abbildungscentrum gehenden Geraden.

* Der Begriff der lemniscatischen Potenz ist leicht, nur etwas umständlich auszudrücken:

Liegt ein Punktpaar ausserhalb der Lemniscate, so lege man durch das Punktpaar eine tangirende Hyperbel. Ist der Parameter des Berührungspunktes in Bezug auf das Punktpaar $p \cdot p_1 = t$, so ist t^2 die lemniscatische Potenz des Punktpaares in Bezug auf die Lemniscate. Liegt hingegen das Punktpaar innerhalb, so lege man eine gleichseitige Hyperbel durch das Punktpaar und die Brennpunkte und errichte auf dieser im Punktpaare die Orthogonalhyperbel. Jetzt ist das Quadrat vom Parameter des Schnittpunktes (gegen das Punktpaar) als Potenz zu betrachten.

Brennpunkte führen gleichfalls auf Zweideutigkeit, die Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel ist durchaus zweideutig. Beschränkt man jedoch die Betrachtung auf die Halbebene rechts von der imaginären Axe, so kann man die Zweideutigkeit vermeiden. Nur muss die Strecke von 0 bis \sqrt{c} aufgeschnitten gedacht werden. — Die Abbildung wird elementar bewerkstelligt.

4. Eine Lemniscate mit beliebigem Brennpunktpaare und dem Parameter $q \cdot q_1 = c$, in Bezug auf welche die lemniscatische Potenz* der abbildenden Brennpunkte $p^2 \cdot p_1^2 = t^2$ ist, geht über in eine Lemniscate mit dem Parameter $q \cdot q_1 = \frac{c}{t^2}$, in Bezug auf welche die lemniscatische Potenz der abbildenden Brennpunkte $p^2 \cdot p_1^2 = \frac{1}{t^2}$ ist.

Die Brennpunkte beider Lemniscaten entsprechen einander im Allgemeinen nicht. Ist für das eine Paar die lemniscatische Entfernung vom abbildenden Brennpunktpaare $p \cdot p_1 = a$, so ist für das andere Paar $p \cdot p_1 = \frac{a}{t^2}$. Beide Paare liegen auf der durch das abbildende Brennpunktpaar gehenden gleichseitigen Hyperbel.

5. Schliesst der abzubildende Kreis das Abbildungscentrum aus, so ist letzteres äusserer Aehnlichkeitspunkt der beiden sich entsprechenden Kreise; schliesst er es ein, so ist es innerer Aehnlichkeitspunkt. Alle drei Kreise haben gemeinschaftliche Potenzlinie.

6. Einfacher ist Alles auszudrücken, wenn der abzubildende Kreis den abbildenden unter einem Winkel α schneidet. Der reciproke schneidet dann in denselben Punkten unter dem Winkel $-\alpha$. Orthogonalkreise des abbildenden gehen also in sich selbst über. Zwei beliebige Punkte und ihre Abbildungen liegen stets auf einem Orthogonalkreise des abbildenden Kreises.

7. Jede Gerade in Entfernung c vom Transformationscentrum geht über in einen durch letzteres gehenden Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Normale der Geraden in Entfernung $\frac{1}{2c}$ vom Centrum liegt.

Umgekehrt verwandeln sich Kreise durch das Centrum in entsprechende Gerade.

5. Schliesst die Lemniscate das abbildende Brennpunktpaar aus, so schneiden sich in letzterem die gemeinschaftlichen äusseren Berührungshyperbeln der sich entsprechenden Lemniscaten. Schliesst sie es ein, so ist das Brennpunktpaar Durchschnitt einer leicht zu definierenden Hyperbel mit der durch beide Brennpunktpaare gehenden gleichseitigen Hyperbel. Alle drei Lemniscaten haben eine gemeinschaftliche Potenzhyperbel.

6. Einfacher wird der Ausdruck, wenn die abzubildende Lemniscate die abbildende unter dem Winkel α schneidet. Die reciproke schneidet dann in denselben Punkten unter dem Winkel $-\alpha$. Orthogonallemniscaten der abbildenden gehen also in sich selbst über. Zwei beliebige Punktpaare und ihre Abbildungen liegen stets auf einer Orthogonallemniscate der abbildenden Lemniscate.

7. Jede gleichseitige Hyperbel in der lemniscatischen Entfernung $p.p_1 = c$ vom abbildenden Centrum (welche also die confocale Lemniscate $p.p_1 = c$ berührt) geht über in eine durch das abbildende Brennpunktpaar gehende Lemniscate, deren Brennpunkte von letzterem die lemniscatische Entfernung $p.p_1 = \frac{1}{2c}$ haben und auf der Orthogonalhyperbel liegen, die vom abbildenden Centrum auf die erstgenannte Hyperbel zu fallen ist.

Umgekehrt verwandeln sich Lemniscaten durch das Centrum in entsprechende gleichseitige Hyperbeln.

8. Das Kreisbüschel durch die Punkte r, φ und r_1, φ_1 verwandelt sich in das Kreisbüschel durch $\frac{1}{r}, \varphi$ und $\frac{1}{r_1}, \varphi_1$. Die Orthogonalschaar des ersteren geht in die des letztern über. Jede isogonale Trajectorienschaar des erstern (logarithmische Doppelspiralen) wird in die entsprechende des letztern verwandelt.

9. Die Reciprocität gegen den Kreis mit Radius $r=1$ um den Punkt $a+bi$ ist, abgesehen vom Umklappen um die reelle Axe, identisch mit der Abbildung

$$Z = a + bi + \frac{1}{z - (a + bi)}$$

Die Spiegelung gegen den Kreis mit Radius $r=c$ um $a+bi$ ist im Wesentlichen identisch mit der Abbildung

$$Z = a + bi + \frac{c^2}{z - (a + bi)}$$

10. Die Spiegelung gegen die verticale Gerade $x=a$ ist im Wesentlichen identisch mit der Transformation

$$Z = 2a - z.$$

8. Das Lemniscatenbüschel durch die Punktpaare

$$[p \cdot p_1 = r, \vartheta + \vartheta_1 = \varphi]$$

und

$$[p \cdot p_1 = r_1, \vartheta + \vartheta_1 = \varphi_1]$$

verwandelt sich in das Lemniscatenbüschel durch

$$\left[p \cdot p_1 = \frac{1}{r}, \vartheta + \vartheta_1 = \varphi \right]$$

und

$$\left[p \cdot p_1 = \frac{1}{r_1}, \vartheta + \vartheta_1 = \varphi_1 \right];$$

die orthogonale Lemniscatenschaar des erstern in die des letztern. Jede isogonale Trajectorienschaar des erstern (allgemeine lemniscatische Spiralschaar) geht in die entsprechende des letztern über.

9. Die isothermische Spiegelung gegen die Lemniscate $p \cdot p_1 = 1$ um das Punktpaar $\sqrt{a+bi}$ ist im Wesentlichen identisch mit der Abbildung

$$Z = \sqrt{a + bi + \frac{1}{z^2 - (a + bi)}}$$

(für die Schleifenlemniscate um ± 1 also $Z = \sqrt{1 + \frac{1}{z^2 - 1}}$).

Die Spiegelung gegen die Lemniscate $p \cdot p_1 = c$ um $\sqrt{a+bi}$ reducirt sich auf die Abbildung

$$Z = \sqrt{a + bi + \frac{c^2}{z^2 - (a + bi)}}$$

10. Die Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel durch das Punktpaar \sqrt{a} mit den Brennpunkten $\sqrt{2a}$ wird repräsentirt durch die Function

$$Z = \sqrt{2a - z^2}.$$

Sind z. B. die Brennpunkte ± 1 , so ist die abbildende Function

Bei dieser Spiegelung bleibt der Radius des gespiegelten Kreises ungeändert. Geometrisch kann die Operation durchgeführt werden durch Lothe, die um sich selbst verlängert werden. — Gerade gehen in Gerade über.

11. Ist der abbildende Kreis mit Radius $r=c$ um den Nullpunkt geschlagen, so ist die abbildende Function

$$Z = \frac{c^2}{z}.$$

12. Transformirt man ein Kreisbüschel durch reciproke Radii vectores mittelst beliebigen Kreises, der einen der Büschelpunkte zum Centrum hat, so geht das Kreisbüschel in eine Radienschaar, die Kreischaar in ein System concentrischer Kreise über. Die logarithmischen Doppelspiralen, welche die isogonalen Trajectorien des Büschels sind, gehen in logarithmische Spiralen über.

13. Die Aufgabe, den Raum zwischen zwei sich nicht schneidenden Kreisen in einen concentrischen

$$Z = \sqrt{1-z^2}.$$

Bei dieser Spiegelung bleibt der Parameter $p.p_1$ ungeändert. Der Brennpunkt λ geht in $\sqrt{1-\lambda^2}$ über. Die Spiegelung kann vollführt werden durch Orthogonalhyperbeln, die um correspondirende Bogen verlängert werden.* Gleichseitige Hyperbeln gehen wieder in solche über.

11. Ist die Lemniscate im speciellen Falle ein Kreis um den Nullpunkt, so bleiben die allgemeinen Gesetze bestehen. Transformation durch reciproke Radii vectores vom Nullpunkte aus verwandelt also Lemniscatenschaaren wiederum in solche, so dass z. B. Fig. 3 durch diese Operation in Fig. 4 übergeht.

12. Wird ein durch zwei Punkt-paare gehendes Lemniscatenbüschel durch eine Lemniscate, deren Brennpunkte mit einem Büschelpunktpaare zusammenfallen, isothermisch gespiegelt, so entsteht ein Hyperbelbüschel. Die Orthogonalschaar geht in eine Schaar confocaler Lemniscaten über. Die entsprechende Curvenschaar 12) verwandelt sich in eine von der Form 13).

13. Die Aufgabe, den Raum zwischen zwei beliebigen, sich nicht schneidenden Lemniscaten in einen

* Da die Spiegelung auch durch confocale Ellipsen vermittelt werden kann, so ergibt sich mancher interessante Zusammenhang. Schlägt man z. B. mit der Halbaxe einer einfachen Lemniscate einen Kreis um den Scheitel der confocalen Schleifenlemniscate, so trifft man die imaginäre Axe im Schnittpunkte derselben mit der ersten Lemniscate. Das Verhalten ist also ähnlich dem der Ellipsenhalbaxen. So ergeben sich manche Constructionserleichterungen, z. B. zur Herstellung des Netzes in Fig. 3, resp. 4, wo stets je acht Punkte auf einer der confocalen Ellipsen liegen. Auch für die Construction des Netzes der $\sin am$ -, $\cos am$ -, $\angle am$ -Curven (*mod* x positiv, reell und < 1) ist dies zu verwerthen.

Kreisring zu verwandeln, hat also folgende geometrische Lösung: Man construire die Potenzlinie beider Kreise, schlage um einen beliebigen Punkt derselben einen Orthogonalkreis und nehme einen der Durchschnitte desselben mit der Centrale der gegebenen Kreise zum Centrum der Transformation durch reciproke Radii vectores. Der Radius des spiegelnden Kreises ist beliebig. Von der Wahl des Büschelpunktes hängt es ab, welcher Kreis der innere wird.

14. Diese Transformation und überhaupt jede Kreisverwandtschaft lässt sich reduciren auf die Abbildung durch eine Function von der Form

$$Z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

confocalen Lemniscatenring zu verwandeln, hat also folgende Lösung: Man construire die Potenzhyperbel beider Lemniscaten, lege um ein beliebiges Punktpaar derselben eine orthogonale Lemniscate und mache ein Durchschnitte-Punktpaar derselben mit der Centralhyperbel zu Brennpunkten der spiegelnden Lemniscate, deren Parameter beliebig ist. Von der Wahl des Durchschnitte-Punktpaares hängt es ab, welche Lemniscate die innere wird.

14. Diese Transformation und überhaupt jede lemniscatische Verwandtschaft lässt sich reduciren auf die Abbildung durch eine Function von der Form

$$Z = \sqrt{\frac{az^2 + b}{cz^2 + d}},$$

der noch eine additive Constante hinzugefügt werden kann.

Für das Spätere sei noch bemerkt, dass die Drehung einer Geraden um einen beliebigen Punkt ein Resultat giebt, welches der Transformation $Z = a + (\cos \alpha + i \sin \alpha)(z - a)$ entspricht. Folglich wird die in der Optik auftretende Drehung der Polarisationshyperbeln um das Brennpunktpaar \sqrt{e} in ihrem Resultate dargestellt durch die Abbildung

$$Z = \sqrt{e + (\cos \alpha + i \sin \alpha)(z^2 - e)}.$$

Das Resultat entspricht also stets der Spiegelung gegen eine der gleichseitigen Hyperbeln durch einen Punkt.

Ferner ist noch von Interesse die Frage, auf welchen Curven bei der isothermischen Spiegelung gegen die Lemniscate das Vergrößerungsverhältniss constant ist, d. h. für welche Punkte der absolute Betrag des Differentialquotienten constant ist. Zwei Specialfälle geben ein einfaches Resultat.

15. Die Function $Z = \sqrt{1 - z^2}$ vermittelt die Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel mit den Brennpunkten ± 1 . Da der Differentialquotient

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{-z}{\sqrt{1-z^2}}$$

für reelle Werthe des Arguments, die kleiner als die Einheit sind, reell ist, so folgt aus

$$X + Yi = -\frac{x + yi}{\sqrt{1 - (x + yi)^2}}$$

die Gleichung

$$X - Yi = -\frac{x - yi}{\sqrt{1 - (x - yi)^2}},$$

also entsteht durch Multiplication und Radicirung der absolute Betrag

$$R = \frac{r}{\sqrt{(1+x+yi)(1+x-yi)(1-x+yi)(1-x-yi)}} = \frac{r}{\sqrt{p \cdot p_1}},$$

wenn p und p_1 die von ± 1 ausgehenden Radii vectores sind.*

Setzt man diesen absoluten Betrag, also auch das Vergrößerungsverhältniss $R=c$, so ergibt sich Folgendes:

Bei der isothermischen Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel mit den Brennpunkten ± 1 ist das Vergrößerungsverhältniss constant gleich c für die Punkte der Curve

$$22) \quad \frac{r^2}{p \cdot p_1} = c^2,$$

d. h. für die Individua der Orthogonalschaar des durch 0 und ± 1 gehenden Büschels von Schleifenlemniscaten.

[Vergl. Fig. 4 und Gleichung 11].

Nun verwandelt sich aber bei der Abbildung $Z = \sqrt{1-z^2}$ der Parameter p, p_1 , von ± 1 aus gerechnet, in das Quadrat des vom Nullpunkte ausgehenden Radius r , und umgekehrt r^2 in $p \cdot p_1$. (Vergl. Beiträge zur Theorie etc. S. 235.) Folglich: Die durch Gleichung 22) dargestellte Curve geht über in die Lemniscate

$$23) \quad \frac{r^2}{p \cdot p_1} = \frac{1}{c^2}.$$

Die Curve 22) und ihr Spiegelbild 23) gegen die gleichseitige Hyperbel haben also folgende Beziehungen:

1. Ihre Parameter (in Bezug auf Radii vectores von 0 und ± 1 aus) sind reciprok.
2. Ist der Brennpunkt der einen $\pm \lambda$, so ist der der andern $\pm \sqrt{1-\lambda^2}$; liegt also das eine Paar auf der imaginären Axe, so liegt das andere auf der reellen, und zwar ausserhalb ± 1 .

* Multiplication von $(1+x+yi)$ und $(1+x-yi)$ giebt das Quadrat des absoluten Betrages jeder dieser conjugirten Zahlen, d. h. den Radius vector p im Quadrat. Der Richtungssinn des Radius vector wird durch diese Multiplication gewissermassen eliminirt.

3. Ist die Brennpunktsgleichung der einen Lemniscate $p \cdot p_1 = \kappa$, so lautet die der andern genau ebenso; nur sind die neuen Brennpunkte zu Grunde zu legen.
4. Hat die eine den Umfang u , so ist der Umfang der andern $c \cdot u$.
5. Ist die eine in gleiche Bogen getheilt, so wird, wenn man durch die Theilpunkte Orthogonalhyperbeln zur spiegelnden Hyperbel oder Lemniscaten durch 0 und ± 1 legt, auch die andere in gleiche Bogen getheilt.

Hier ist also die Analogie mit der Transformation durch reciproke Radii vectores eine sehr weitgehende. Der Umstand, dass man von der Theilung einer einfachen Lemniscate zu der einer aus zwei Ovalen bestehenden übergehen kann, dürfte für das Gebiet der Curventheilung von Interesse sein.

Aehnliches geschieht bei der Spiegelung gegen die Schleifenlemniscate. Sind ihre Brennpunkte ± 1 , also auch der Parameter gleich 1, so wird diese Transformation vermittelt durch

$$z = \sqrt{1 + \frac{1}{z^2 - 1}}$$

Hier ist

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{-z}{(z^2 - 1)^2 \sqrt{1 + \frac{1}{z^2 - 1}}} = \frac{-1}{(z^2 - 1)^{3/2}}$$

Multiplieirt man hier die Gleichungen conjugirten Arguments, so ergibt sich als absoluter Betrag

$$R = \frac{1}{[(x + yi + 1)(x - yi + 1)(x + yi - 1)(x - yi - 1)]^{3/4}} = \left(\frac{1}{p \cdot p_1}\right)^{3/2},$$

wobei die Radii vectores wiederum von ± 1 ausgehen. Setzt man $R = c$, so folgt:

Bei der Spiegelung gegen die Schleifenlemniscate sind die confocalen Lemniscaten die Curven constanten Vergrößerungsverhältnisses, und zwar ist dasselbe constant gleich c für die Lemniscate

$$24) \quad p \cdot p_1 = c^{-2/3}.$$

Diese geht aber durch die Transformation über in die confocale Lemniscate

$$25) \quad p \cdot p_1 = c^{2/3}.$$

Setzt man $c^{-2/3} = \kappa$, also $c^{2/3} = \frac{1}{\kappa}$ und $c = \kappa^{-3/2}$, so ergibt sich der Satz:

Haben zwei confocale Lemniscaten mit Brennpunkten ± 1 die reciproken Parameter κ und $\frac{1}{\kappa}$, so ist der Umfang des zweiten das $\kappa^{-3/2}$ -fache vom Umfang des erstern.

Sind z. B. die Parameter 2 und $\frac{1}{2}$, so verhalten sich die Umfänge wie $1 : \frac{1}{\sqrt{8}}$. Ist die eine Curve in gleiche Theile getheilt, so wird die zweite durch die Orthogonalhyperbeln, die durch die Theilpunkte gelegt werden, ebenfalls in gleiche Theile getheilt.

Bei der Spiegelung gegen die Lemniscate allgemeiner Gestalt scheint diese Analogie mit der Kreisreciprocität aufzuhören. Sind z. B. die Brennpunkte \sqrt{e} und der Parameter die Einheit, so ergibt sich auf demselben Wege, dass die Curven constanten Vergrößerungsverhältnisses c die Gleichung

$$26) \quad \frac{r^2}{p^3 \cdot p_1^3 \cdot q \cdot q_1} = e \cdot c^2$$

haben, wo die Radii vectores p, p_1 von $\pm 1, q, q_1$ von $\pm \sqrt{1 + \frac{1}{e}}$, und r von 0 ausgehen.

Jetzt ist es leicht, die allgemeinen Eigenschaften der lemniscatischen Verwandtschaft nach Analogie der Möbius'schen Abhandlung über die Kreisverwandtschaft auszusprechen. Wir beschränken uns darauf, die wichtigsten Sätze über Doppelverhältnisse und Doppelwinkel, die Möbius für Punktquaternionen in kreisverwandten Ebenen aufgestellt hat, zu übertragen. Um Zweideutigkeiten auszuweichen, nehmen wir stets an, dass die Punktquaternionen sich in einer Halbebene befinden; dann gilt jeder Satz gleichzeitig für die vier zugeordneten Punkte.

Sind A, B, C, D und a, b, c, d entsprechende Punkte kreisverwandter Ebenen, so ist

$$\frac{AB \cdot CD}{BC \cdot DA} = \frac{ab \cdot cd}{bc \cdot da},$$

also, wenn man die Durchschnitte der Geraden AB, BC, CD und DA mit einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden P, Q, R, S nennt und in der andern Ebene die entsprechenden Buchstaben wählt:

$$\frac{(PB - PA)(RD - RC)}{(QC - QB)(SA - SD)} = \frac{(pb - pa)(rd - rc)}{(qc - qb)(sa - sd)}.$$

Durch die Transformation $Z = \sqrt{z}$ geht der Satz in folgenden über:

Sind A, B, C, D und a, b, c, d entsprechende Punkte lemniscatisch verwandter Halbebenen, und bezeichnet man die Durchschnitte der durch A und B, B und C, C und D, D und A gehenden gleichseitigen Hyperbeln mit einer durch den Nullpunkt gelegten Geraden mit $P, P_1, Q, Q_1, R, R_1, S, S_1$, während man in der andern Ebene die entsprechenden kleinen Buchstaben wählt, so gilt der Satz:

$$27) \frac{(PB.P_1B - PA.P_1A).(RD.R_1D - RC.R_1C)}{(QC.Q_1C - QB.Q_1B).(SA.S_1A - SD.S_1D)} = \frac{(pb.p_1b - pa.p_1a).(rd.r_1d - rc.r_1c)}{(qc.q_1c - qb.q_1b).(sa.s_1a - sd.s_1d)}$$

d. h. die „lemniscatischen Doppelverhältnisse“ sind gleich. Liegen im speciellen Falle die vier Punktpaare der einen Ebene auf einer Lemniscate (mit Nullpunkt als Centrum), so liegen auch die entsprechenden der andern auf einer Lemniscate, und für beide Quaternionenpaare besteht die der Ptolemäischen entsprechende Relation

$$28) \left\{ \begin{aligned} & \frac{(PB.P_1B - PA.P_1A)(RD.R_1D - RC.R_1C) + (QC.Q_1C - QB.Q_1B)(SA.S_1A - SD.S_1D)}{(VC.V_1C - VA.V_1A)(WD.W_1D - WB.W_1B)} \\ & = \frac{(pb.p_1b - pa.p_1a)(rd.r_1d - rc.r_1c) + (qc.q_1c - qb.q_1b)(sa.s_1a - sd.s_1d)}{(vc.v_1c - va.v_1a)(wd.w_1d - wb.w_1b)} \\ & = 1, \end{aligned} \right.$$

wo V, V_1, W, W_1 etc. die Durchschnitte der Diagonalhyperbeln mit der Axe bedeuten.

Sind A, B und C feste Punkte und X ein variabler Punkt, der jedoch so wandert, dass stets die Bedingung

$$\frac{AB.XC}{BC.AX} = 1$$

erfüllt bleibt, so ist der geometrische Ort für X ein Kreis durch B , dessen durch A und C gehender Durchmesser harmonisch getheilt wird. Folglich:

Sind A, B und C fest und genügt X stets der Bedingung, dass

$$29) \frac{(PB.P_1B - PA.P_1A).(YC.Y_1C - YX.Y_1X)}{(QC.Q_1C - QB.Q_1B).(ZX.Z_1X - ZA.Z_1A)} = 1$$

ist (wo P, Q, Y, Z die Durchschnitte der entsprechenden Hyperbeln mit der durch den Nullpunkt gelegten Axe sind), so ist der geometrische Ort von X eine Lemniscate.

Man erkennt Folgendes:

Soll zu einem System von Punktpaaren einer Ebene ein lemniscatisch verwandtes System in einer andern Ebene construirt werden, so kann man in der zweiten Ebene die drei Punktpaaren entsprechenden Paare willkürlich wählen und den Drehungssinn für die Winkel willkürlich bestimmen. Dann aber ist die Verwandtschaft vollständig bestimmt und die weiteren Uebertragungen sind mit elementaren Hilfsmitteln durchführbar.

Die entsprechenden Sätze für die „Doppelwinkel“ sind ebenso zu übersetzen. $ABCD$ und $abcd$ seien entsprechende Punktquaternionen kreisverwandter Ebenen. Dann ist nach Möbius

$$30) LABC + CDA = abc + cda \text{ und } LBCD + DAB = bcd + dab.$$

Bei der Transformation $Z = \sqrt{z}$ bleibt wegen des isogonalen Charakters derselben diese Relation für Winkel, unter denen sich die das Viereck bildenden gleichseitigen Hyperbeln schneiden, unverändert bestehen; folglich gilt er auch von den lemniscatischen Winkelsummen, die den entsprechenden Radii vectores zugehören. Also:

Die lemniscatischen Doppelwinkel entsprechender Paare von Punktquaternionen in lemniscatisch verwandten Ebenen sind einander gleich.

Ist für ein Punktquaternionenpaar der lemniscatischen Ebene die Winkelsumme des Hyperbelvierecks

$$31) \quad \angle ABC + CDA = BCD + DAB = 180^\circ,$$

so gilt von dem Viereckspare die der Ptolemäischen entsprechende Relation 28); ist umgekehrt letztere erfüllt, so gilt auch die Relation 31), d. h. das Viereckspare hat seine Eckpunkte auf einer Lemniscate.

Demnach lässt sich die lemniscatische Verwandtschaft auch dadurch definiren, dass das lemniscatische Doppelverhältniss jedes Punktquaternionenpaares der einen Ebene gleich ist dem lemniscatischen Doppelverhältnisse des entsprechenden Punktquaternionenpaares der andern Ebene, oder dadurch, dass die lemniscatischen Doppelwinkel von Punktquaternionenpaaren der einen Ebene gleich den Doppelwinkeln der entsprechenden in der andern Ebene sind.

Schliesslich sei bemerkt, dass auch der von Möbius und Bretschneider für jedes Viereck bewiesene Satz

$$\frac{\sin(ABC + CDA)}{\sin(BCA + ADB)} = \frac{AC \cdot BD}{BA \cdot CD} *$$

in einen leicht auszusprechenden über die lemniscatischen Doppelverhältnisse und Doppelwinkel eines Viereckspaares übergeht.

Um den Algorithmus zu vereinfachen, dürften als abgekürzte Bezeichnungen für das lemniscatische Doppelverhältniss, resp. die lemniscatischen Doppelwinkel, die Symbole

$$[ABCD] \text{ und } L[ABCD]$$

ausreichen, die den Möbius'schen Zeichen ganz analog sind.

Das Gegebene reicht hin, die von Möbius über die Kreisverwandtschaft ausgesprochenen allgemeinen Sätze ausnahmslos in solche über die lemniscatische Verwandtschaft zu übertragen.

§ 6. Einige Sätze und Probleme, die der lemniscatischen Verwandtschaft und ihrer Combination mit anderen Verwandtschaften entspringen.

Auch hier ist nur von Lemniscaten und gleichseitigen Hyperbeln desselben Centrums, resp. von den isogonalen Trajectorien der entspre-

* Möbius: „Theorie der Kreisverwandtschaft“, S. 552.

chenden Schaaren und Büschel die Rede. Die Entwicklung der Sätze und Probleme, die jetzt ohne Beweis angegeben werden sollen, ergibt sich leicht aus der Kenntniss der Kreisverwandtschaft, der logarithmischen Abbildung und der behandelten Transformation $Z = \sqrt{z}$. Auf anderen Wegen würden sich dem Beweise, resp. der Ausführung der Probleme grössere Schwierigkeiten entgegenstellen.

1. Lemniscaten, die einem Streifen zwischen gleichseitigen Hyperbeln derselben Parallelschaar (Fig. 2) eingeschrieben sind, haben ihre Brennpunkte auf derjenigen Hyperbel derselben Schaar, welche den Streifen in zwei correspondirende Theile zerlegt. Berühren sich die Individua der eingeschriebenen Reihe gegenseitig, so liegen die Berührungspunkte auf derselben Hyperbel.

Dasselbe gilt von Lemniscatenreihen in dem Raume zwischen zwei sich schneidenden gleichseitigen Hyperbeln.

2. Die einem Ringe zwischen zwei confocalen Lemniscaten eingeschriebenen Lemniscaten haben ihre Brennpunkte auf einer confocalen Lemniscate. Berühren sie sich gegenseitig, so liegt die Reihe der Berührungspunkte auf einer andern confocalen Lemniscate, die den Ring in zwei correspondirende Theile zerlegt. Schliesst die Reihe nach einem, resp. mehreren Umgängen, was vom Verhältniss der Parameter beider Lemniscaten abhängt, so schliesst sie stets, welchen Anfangspunkt man auch wählen möge. (Die verschiedenen Zeichnungen, die auf diese Weise entstehen, sind lemniscatisch verwandt!)
3. Der Satz von den Berührungspunkten der eingeschriebenen Lemniscatenreihe gilt auch von dem Raume zwischen nicht confocalen Lemniscaten, die sich schneiden, berühren, umschliessen oder auseinander liegen. Dann liegen aber die Brennpunkte auf einer der Curven vierten Grades, die durch die Gleichungen 21) dargestellt sind. Schneiden sich die umhüllenden Lemniscaten nicht, so ist eine Schliessung der Reihe möglich, die Art derselben aber abhängig von den Parametern beider Curven und der lemniscatischen Entfernung ihrer Brennpunkte.
4. In ähnlicher Weise übertragen sich die Schliessungsprobleme, die von Jacobi mit dem Additionstheorem der elliptischen Functionen in Verbindung gebracht sind.* Die Geraden gehen dabei natürlich in tangirende gleichseitige Hyperbeln über.

* Jacobi: „Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein Problem der Elementargeometrie“, Crelle's Journ. Bd. 3; und Durège: „Theorie der elliptischen Functionen“, Abschn. 10.

In der Abhandlung über „die logarithmische Abbildung etc.“ entwickelte ich die Eigenschaften der logarithmischen Spirale und der isogonalen Trajectorien der Kreisschaar (d. h. der logarithmischen Doppelspiralen) aus denen der Geraden mit Hilfe der Abbildungen complexen Arguments

$$Z = \lg z, \text{ resp. } Z = e^z$$

und

$$Z = \lg \frac{az + b}{cz + d}, \text{ resp. } Z = \frac{a_1 e^z + b_1}{c_1 e^z + d_1}$$

In entsprechender Weise verwandelt die Abbildung

$$32) \quad Z = \sqrt{\frac{ae^z + b}{ce^z + d}}$$

Gerade in allgemeine lemniscatische Spiralen, deren Gleichung ist

$$12) \quad \frac{p \cdot p_1}{q \cdot q_1} = c \cdot \kappa^{(\varphi + \varphi_1) - (x + x_1)},$$

während die einfachere Transformation

$$33) \quad Z = \sqrt{e^z}$$

auf die den logarithmischen Spiralen entsprechenden isogonalen Trajectorien der confocalen Lemniscatenschaar, also auf die durch Gleichung 13)

$$p \cdot p_1 = c \kappa^{\varphi + \varphi_1}$$

repräsentirten Curven führt.

Von den Eigenschaften dieser transcendenten Curven seien nur einige genannt:

5. Die Parallschaaren der lemniscatischen Spiralen bilden isothermische Curvenschaaren, deren Individua sich, abgesehen von den Büschelpunkten, gegenseitig nicht schneiden. Um diese Punkte finden unendlich viele Windungen statt. Im Allgemeinen haben zwei bestimmte Individua je zwei Asymptoten.
6. Ihre isogonalen Trajectorien sind Curven desselben Charakters. Mit Hilfe der Orthogonalschaar kann man die Eintheilung der Ebenen in „ähnliche Rechtecke“ erzielen.
7. Die isothermische Spiegelung gegen eine solche Curve, die im speciellen Falle Lemniscate, Kreis, Hyperbel sein kann, verwandelt lemniscatische Spiralen mit denselben Büschelpunkten wiederum in solche. Die abbildende Function für diesen Fall ist nach Analogie eines früheren leicht aufzustellen.
8. Die Berührungspunkte von Lemniscatenreihen, die dem Raume zwischen zwei lemniscatischen Parallelschrauben eingeschrieben sind, liegen auf einer den Streifen correspondirend theilenden Parallelschraube. Haben die Curven die Form 13), so liegen auch die Brennpunkte auf einer Parallelschraube, die jedoch mit der vorigen nicht zusammenfällt.

9. Die gleichseitigen Hyperbeln desselben Centrums, welche eine lemniscatische Spirale in aufeinanderfolgenden Punkten unter constantem Winkel schneiden, haben eine Curve der Parallelschaar zur Enveloppe. In speciellen Fällen ist die erste Curve mit der Enveloppe identisch. (Man denke z. B. an das Analogon der Selbstevolute.

Dasselbe gilt von Lemniscaten, die durch das Brennpunktpaar der Curve 13), resp. durch ein Büschelpunktpaar der Curve 12) gehen und dieselbe in aufeinanderfolgenden Punkten unter constantem Winkel schneiden. Der erste Theil des Satzes ist also der specielle Fall des zweiten, wo der Büschelpunkt im Unendlichen liegt.

Die Sätze über Krümmungskreise der Doppelspiralen, resp. der logarithmischen Spiralen, die in jener Abhandlung ausgesprochen sind, gehen über in solche über Lemniscaten, deren Krümmung mit der der lemniscatischen Spiralen identisch ist. Man könnte dieselben als Krümmungslemniscaten bezeichnen, wobei zu bemerken ist, dass die Krümmungslemniscate einer beliebigen Curve für einen bestimmten Punkt mit der Wahl des Lemniscatencentrums variirt.

Noch einige Bemerkungen über Abbildungsaufgaben, die mit der lemniscatischen Verwandtschaft zusammenhängen, seien gestattet.

Die Aufgabe: den von zwei Lemniscaten eines Büschels und zwei orthogonalen Lemniscaten begrenzten rechtwinkligen Raum auf den Einheitskreis abzubilden, ist synthetisch auf folgendem Wege lösbar: Die Abbildung $Z = z^2$ verwandelt jenen Raum in einen von zwei sich schneidenden Kreisen und zwei Orthogonalkreisen begrenzten (wobei zu bemerken ist, dass der abzubildende Raum und der nach dem Begriffe der Punktpaare ihm coordinirte sich jetzt decken). Durch eine Abbildung von der Form $Z = \frac{az + b}{cz + d}$ geht dieser neue Raum in ein von Radien begrenztes Stück eines concentrischen Kreisringes über, der durch die Transformation $Z = lgz$ in ein Rechteck verwandelt wird, dessen Centrum (durch Hinzufügung einer additiven Constante) in den Nullpunkt zu verlegen ist. Ist nun das Verhältniss der Rechtecksseiten $2K : K'$, so wird die Abbildung des Rechtecks auf die Halbebene vermittelt durch die Function

$$Z = \sin am z \pmod{\kappa}, *$$

* Die hier zur Sprache kommende Aufgabe, das Rechteck conform auf den Einheitskreis abzubilden, ist von Herrn Prof. Dr. H. A. Schwarz bereits im Jahre 1864 gelöst worden und muss wohl als das erste mit den Hilfsmitteln der Analysis vollständig durchgeführte Beispiel zu dem in Riemann's Dissertation § 21 behandelten allgemeinen Abbildungsproblem betrachtet werden. Ausser der Lösung einer grössern Reihe von Aufgaben von principieller Wichtigkeit ist es

wo jedoch der Modul κ dem Periodenverhältnisse entsprechend zu bestimmen ist.

Bis jetzt ist die fragliche Abbildung vermittelt durch eine Function von der Form

$$Z = \sin am \left[g + lg \frac{az^2 + b}{cz^2 + d} \right] (\text{mod } \kappa).$$

Durch die Abbildung

$$Z = \frac{1 + i\sqrt{\kappa} \cdot \sin am u}{1 + \sqrt{\kappa} \cdot \sin am u} (\text{mod } \kappa), \text{ wo } u = g + lg \frac{az^2 + b}{cz^2 + d},$$

wird schliesslich die Halbebene conform auf die Fläche des nicht eingeschnittenen Einheitskreises übertragen.*

Nach Voraussagung dieses Resultates dürfte auch die analytische Lösung der Aufgabe zu ermöglichen sein. Sind

$$f(xy) = \alpha = \left(\frac{p \cdot p_1}{q \cdot q_1} \right),$$

$$f_1(xy) = \beta = [(\vartheta + \vartheta_1) - (\chi + \chi_1)]$$

die Gleichungen der Lemniscatenschaar und des Lemniscatenbüschels, der hier geeigneten Coordinatensysteme, so müssten mit Hilfe dieser Gleichungen x und y durch die beiden Parameter dargestellt und letztere als neue Coordinaten auf dem Jacobi'schen Wege (Crelle's Journal Bd. 36) in die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

eingeführt werden. Die Schwierigkeiten der Integration derselben für den vorgeschriebenen Bereich dürften sich in den Specialfällen der Symmetrie noch vermindern. Die Lösung der Aufgabe würde auf die Verwerthbarkeit der allgemeinen lemniscatischen Coordinaten für die Analysis ein helles Licht werfen.

Herrn Schwarz gelungen, das von Riemann zu Grunde gelegte Dirichlet'sche Princip, gegen welches erhebliche Bedenken geltend gemacht werden, durch ein anderes Beweisverfahren zu ersetzen. — Man vergleiche die Arbeiten des Herrn Schwarz im 70. und 77. Bande des Crelle'schen Journals, im Programm 1873 der polytechnischen Schule zu Zürich, im Monatsberichte der königl. Akademie der Wissenschaften vom October 1870, im 15. Jahrgange der naturforschenden Gesellschaft in Zürich etc.

Einige Schüler des Herrn Schwarz haben auf Anregung desselben eine Reihe von Abbildungsaufgaben analytisch gelöst. Vergl.:

Hentschel: „Ueber einige conforme Abbildungen“, 17. Jahrg. dieser Zeitschrift.
Derselbe: „Conforme Abbildung einiger einfach zusammenhängender Flächen etc.“, Programm 1874 des Gymnasiums zu Salzwedel.

Amstein: „Conforme Abbildung des regulären Octaeders etc.“, Zürich 1872.

* Vergl. Jochmann: „Zur Abbildung des Rechtecks auf die Kreisfläche“, diese Zeitschr. Jahrg. 14.

Auch die Function, welche die Abbildung eines von je zwei „parallelen“ lemniscatischen Spiralen begrenzten rechtwinkligen Raumes auf den Einheitskreis vermittelt, lässt sich mit Hilfe der Umkehrung von Function 32) synthetisch leicht voraussagen, ebenso das Resultat für eine ganze Gruppe hierher gehöriger Aufgaben.

Wir begnügen uns mit diesen Andeutungen.

In den „Beiträgen zur Theorie der isogonalen Verwandtschaften“ wies ich ferner darauf hin, dass zu den $\sin am$ - und Δam -Curven ($\text{mod } \kappa +$, reell und < 1) stets ein Kreis und eine Lemniscate, zu den $\cos am$ -Curven unter denselben Bedingungen für den Modul stets zwei Lemniscaten gehören, Sätze, für die ich in den weiteren Beiträgen einfache Beweise gab und die sich für gewisse Specialfälle auf die Trajectorien zu 45° ausdehnen lassen. Es findet in jenen Curvensystemen gegen die fraglichen Individua Reciprocität statt, was die Construction unterstützt und ein geometrisches Bild von den Erleichterungen giebt, die bei Berechnung von Werthtabellen für elliptische Functionen möglich sind: der unbegrenzte Bereich der Z -Ebene wird nämlich in 16 Theile zerlegt, für welche Construction, resp. Rechnung erledigt sind, sobald man die Resultate für einen der Theile kennt.*

Schliesslich sei bemerkt, dass die Abbildungen $Z = \sqrt[4]{z}$, $Z = \sqrt[8]{z}$ etc. nichts wesentlich Neues ergeben, nur treten z. B. bei der ersteren Transformation an Stelle der Coordinaten $p \cdot p_1$ und $(\vartheta + \vartheta_1)$ jetzt $p \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ und $(\vartheta + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3)$, die von den vier Punkten ausstrahlen, die durch $\sqrt[4]{a+bi}$ dargestellt sind.

Dabei tritt an Stelle der Schleifenlemniscate eine analoge, aus vier Theilen bestehende Curve, deren einzelne Züge sich im Nullpunkte unter von 45° schneiden. Man könnte hier von Lemniscaten zweiter, vierter, achter etc. Ordnung sprechen.

Es ist vor auszusehen, dass ähnliche Verhältnisse bei der Abbildung $Z = \sqrt[n]{z}$ auftreten, wo n eine ganze, positive, reelle Zahl ist. Die Entwicklungen würden den obigen ganz analog sein.

§ 7. Bemerkungen über die Kinematik des lemniscatisch-veränderlichen Systems.

Nach § 4 verwandelt sich durch die Transformation $Z = \sqrt{z}$ jedes starre, in der z -Ebene frei bewegliche System in ein „lemniscatisch

* Vergl. auch die Bemerkung des Herrn Schwarz in der ersten der citirten Abhandlungen über den von Abel bewiesenen Satz, dass der Werth von

$\sin am \frac{(p+qi)K}{2^{2n}+1}$ sich durch Auflösung quadratischer Gleichungen ergibt.

veränderliches“ in der Z -Ebene frei bewegliches Gebilde, dessen strenge Definition keine Schwierigkeiten bietet. Die Bewegung geschieht im Allgemeinen stets unter gesetzmässiger Gestaltveränderung. An Stelle des Zwanges, der im Begriffe der Starrheit liegt, tritt jetzt der Zwang, dass die gleichseitigen Verbindungshyperbeln je dreier Punktpaare des Systems bei Bewegung des letzteren stets correspondirende Hyperbelbogen bleiben, wobei die Hyperbeln stets dasselbe gemeinschaftliche Centrum beibehalten und ihre Schnittwinkel offenbar ungeändert bleiben, so dass es sich um ein „conform veränderliches System“ handelt.

Einige Fälle solcher Bewegung sollen jetzt besprochen werden.

1. Der parallelen Verschiebung eines starren Gebildes der z -Ebene längs einer festen Geraden mit constanter Geschwindigkeit c entspricht eine Bewegung des entsprechenden lemniscatisch-veränderlichen Gebildes (strenger noch Gebildepaares) der Z -Ebene derart, dass jeder Punkt desselben sich auf einer gleichseitigen Hyperbel bewegt, die zur Parallelschaar der Hyperbel gehört, welche jener Richtungsgeraden entspricht. Dabei ist die Richtung und Geschwindigkeit jedes Punktes variabel, und zwar letztere abhängig von der momentanen Entfernung vom Nullpunkte, nämlich

$$v = \frac{c}{2\sqrt{r}},$$

d. h. gleich dem Producte aus c und dem absoluten Betrage des Differentialquotienten $\frac{dZ}{dz}$.* Man könnte jedoch sagen, dass, da das Product $v \cdot p_1 = c$ sich gleichmässig ändert, die „lemniscatische Geschwindigkeit“ constant sei. Die Winkelsumme $\vartheta + \vartheta_1$ bleibt selbstverständlich ungeändert.

In dem Momente, wo ein Punkt den Nullpunkt passirt, fällt er mit seinem zugeordneten zusammen, und die Geschwindigkeit beider ist unendlich gross.** Gleichzeitig tritt eine Degeneration jeder den Nullpunkt passirenden Curve ein, so dass z. B. jede gleichseitige Hyperbel in zwei orthogonale Gerade degenerirt. Beispielshalber unterwerfe man das System der Fig. 2 einer solchen Bewegung. Es wird sich unter Anderem zeigen, dass die kleinen „Quadrate“ sich unter steter Vergrößerung beschleunigt bewegen, sobald sie sich dem Nullpunkte nähern, während bei zunehmender Entfernung das Umgekehrte stattfindet. In

* Vergl. die citirte Siebeck'sche Abhandlung, Crelle's Journal Bd. 55.

** Es ist eine vielfach verbreitete Ansicht, dass unendlich grosse Geschwindigkeiten in der Natur nicht vorkämen. Jedenfalls sind jedoch optische Probleme von dieser Ansicht auszuschliessen. Bei den jetzt zu behandelnden optischen Erscheinungen treten in der That momentane, unendlich grosse Geschwindigkeiten bestimmter Punkte ein, die volle Analogie mit dem mathematischen Falle vorausgesetzt.

der Nähe des Nullpunktes beginnt das „Quadrat“ auffallend zu degeneriren, erhält sogar gegebenenfalls einen Winkel von 45° .

2. Ein starres System von Radien und concentrischen Kreisen rotire um einen festen Punkt $a + bi$ der z -Ebene, und zwar mit constanter Winkelgeschwindigkeit, so dass die Neigungswinkel der Radien gleichmässig wachsen, während jeder Kreis sich in sich selbst bewegt.

Dem entspricht in der Z -Ebene eine Drehung des gleichseitigen Hyperbelbüschels um zwei feste Punkte, bei welcher jede Lemniscate der Orthogonalschaar sich in sich selbst bewegt, während jede Hyperbel unter beständiger Gestaltveränderung sich so dreht, dass die Winkelsumme ($\vartheta + \vartheta_1$) der entsprechenden Radii vectores für die Punkte jeder Hyperbel arithmetisch wächst. Dabei bewegen sich nach Obigem die Brennpunkte jeder Hyperbel auf der orthogonalen Schleifenlemniscate; die Scheitelpunkte bewegen sich auf der Hyperbel selbst und ausserdem mit der Hyperbel, und zwar geschieht ihre absolute Bewegung auf der im Verhältniss $1 : \sqrt{\frac{1}{2}}$ verkleinerten Schleifenlemniscate. In dem Momente, wo der Scheitel der Hyperbel den Nullpunkt passirt, ist seine Geschwindigkeit unendlich gross.

Diese interessante, jetzt leicht zu discutirende Bewegung kommt zur Erscheinung bei den Polarisationshyperbeln und Interferenzlemniscaten optisch zweiaxiger Krystalle (Salpeter), sobald man das analysirende Nicol'sche Prisma oder das Krystallblättchen in seiner Ebene dreht. Jeder Punkt des Hyperbelbüschels bewegt sich auf einer der Interferenzlemniscaten. Das Büschel degenerirt in dem Moment zum orthogonalen Axenkreuze, wo die Ebene der optischen Axen mit der Schwingungsebene des einen Nicol'schen Prismas zusammenfällt.

3. Bewegt sich ein starres Kreisbüschel mit seiner Orthogonalschaar gleichzeitig drehend und verschiebend in der z -Ebene, so entstehen in der Z -Ebene die verschiedensten Gestalten des in Fig. 5 veranschaulichten Coordinatensystems.

4. Die Bewegung eines starren Systems der z -Ebene lässt sich betrachten als eine continuirliche Reihe aufeinanderfolgender Rotationen um aufeinanderfolgende Punkte, welche das sogenannte Polvieck und für die Grenze die Polbahn bilden. Die relative Bewegung des Drehungspoles gegen das bewegte System giebt eine zweite, mit Annäherung leicht zu construierende Curve, die sogenannte Polcurve. Bekanntlich geschieht die Bewegung des Systems so, als ob die starr mit ihm verbundene Polcurve auf der festen Polbahn ohne Gleitung sich abrollte.*

Dieser Fundamentalsatz der Kinematik findet folgende Uebertragung. Die allgemeine Bewegung des lemniscatisch-veränderlichen Systems in

* Vergl. Reuleaux: „Theoretische Kinematik“, § 6, wo sich eine anschauliche Darstellung des Satzes findet.

seiner Ebene ist aufzufassen als eine Reihe der oben besprochenen lemniscatischen Drehungen um aufeinanderfolgende Punktpaare, welche die lemniscatische Polbahn bilden. Die Polcurve, d. h. die relative Bewegung des Poles gegen das bewegte System ist durch die elementare Uebertragung der Construction, welche die gewöhnliche Polcurve giebt, mittelst der Function $Z = \sqrt{z}$ mit Annäherung darzustellen. Die Bewegung des Systems geschieht so, als ob die mit ihm „lemniscatisch verbundene“ Polcurve unter entsprechender Gestaltveränderung auf der festen Polbahn, ohne zu gleiten, sich abrollte.

Die Sätze über die Bewegung der Krümmungsmittelpunkte gehen über in solche von den Brennpunkten der oben definirten Krümmunglemniscaten. Jeder Punkt des Systems beschreibt seine Roulette, jede gleichseitige Hyperbel erzeugt ihre Enveloppe.

So ist z. B. das Cycloidenproblem einer einfachen Uebertragung fähig.

Noch einige Fälle der Uebertragung von Bewegungen veränderlicher Systeme:

5. Man denke sich in der z -Ebene ein System concentrischer Kreise, die aus einem Punkte hervorquellen und dauernd anschwellen, wie sie sich auf einer ruhigen Wasserfläche nach dem Aufschlagen eines Steines entwickeln. Die Uebertragung $Z = \sqrt{z}$ giebt eine Bewegung confocaler Lemniscaten, deren Ovale aus den Brennpunkten hervorquellen, sich im Nullpunkte treffen und, vereinigt anschwellend, sich allmählig der Kreisgestalt nähern. Jeder Punkt bewegt sich dabei auf einer orthogonalen gleichseitigen Hyperbel. Ueber die Wanderung der Maximalpunkte auf Kreis und Gerade ist § 3 zu vergleichen.

Die Erscheinung würde in der Physik bei dem allerdings nur hypothetischen Experimente auftreten, dass die Salpeterplatte ihre Dicke gesetzmässig änderte.

6. Denkt man sich die concentrischen Kreise in der z -Ebene anschwellend und gleichzeitig die Radien rotirend, so entspricht dieser Bewegung das Anschwellen der confocalen Lemniscaten und das gleichzeitige Drehen der Hyperbeln. Diese Bewegung tritt in die Erscheinung beim Drehen der Salpeterplatte im Polarisationsapparate um eine horizontale Axe.

Denkt man sich dabei die Abweichungen der Radien arithmetisch wachsend und gleichzeitig die Länge der Kreisradien geometrisch zu- oder abnehmend, so bewegt sich jeder Eckpunkt des Netzes auf einer logarithmischen Spirale. In der Z -Ebene würden sich die Eckpunkte des lemniscatischen Netzes auf einer lemniscatischen Spirale der Form 13) bewegen.

Das eben besprochene optische Experiment würde diese Bewegung wenigstens einigermaßen veranschaulichen.

Durch diese Betrachtungen ist der Forschung ein neues Gebiet der Kinematik gesetzmässig veränderlicher Systeme eröffnet. Die von Herrn Burmester in der citirten Abhandlung gegebenen allgemeinen Sätze über die Bewegung im kreisverwandt-veränderlichen System sind sofort der entsprechenden Uebertragung fähig.

Diese Andeutungen mögen hinreichen, um von der Verwerthbarkeit der lemniscatischen Verwandtschaft und der allgemeinen lemniscatischen Coordinaten ein Bild zu geben. Wir schliessen mit dem Vorbehalte eingehenderer Untersuchungen auf diesem noch nicht bebauten Gebiete.

Kleinere Mittheilungen.

XIX. Bemerkung zu der Auflösung der biquadratischen Gleichungen.

In einem Programme der Realschule zu Trier habe ich 1855 eine Abhandlung über die Zerlegung der quadratischen, kubischen und biquadratischen Functionen und die Auflösung der entsprechenden Gleichungen veröffentlicht. Da diese Arbeit jedoch nicht ganz bekannt geworden ist, so glaube ich die Methode, die ich wählte, hier kurz andeuten zu sollen, und beschränke mich der Kürze wegen auf die Functionen vierten Grades.

Wenn man in die Function

$$f(xy) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$$

die neuen Veränderlichen ξ , η mittels der Gleichungen

$$x = \alpha\xi + \beta\eta, \quad y = \gamma\xi + \delta\eta$$

setzt, so kann man die Function in eine quadratische mit den Veränderlichen ξ^2 , η^2 verwandeln, und es müssen für diesen Zweck die eingesetzten Coefficienten α , β , γ , δ der Doppelgleichung

$$\begin{aligned} \frac{a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta}{-\gamma\delta} &= \frac{b\alpha\beta + c(\alpha\delta + \beta\gamma) + d\gamma\delta}{\frac{1}{2}(\alpha\delta + \beta\gamma)} \\ &= \frac{c\alpha\beta + d(\alpha\delta + \beta\gamma) + e\gamma\delta}{-\alpha\beta} \end{aligned}$$

Genüge leisten.

Wird der gemeinsame Werth dieser drei Quotienten mit m bezeichnet, so erhält man ein System von drei Gleichungen, nämlich

$$\begin{aligned} a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + (c+m)\gamma\delta &= 0, \\ b\alpha\beta + (c - \frac{1}{2}m)(\alpha\delta + \beta\gamma) + d\gamma\delta &= 0, \\ (c+m)\alpha\beta + d(\alpha\delta + \beta\gamma) + e\gamma\delta &= 0. \end{aligned}$$

Damit diese Gleichungen neben einander bestehen können, muss die Determinante* des Systems Null sein, also die Grösse m aus der Gleichung

* Diese Determinante ist 1856, also ein Jahr nach dem Erscheinen meiner Arbeit, von Herrn Dr. Aronhold in Crelle's Journal, Bd. 52, mitgetheilt worden.

$$\begin{vmatrix} a & b & c+m \\ b & c-\frac{1}{2}m & d \\ c+m & d & e \end{vmatrix} = 0,$$

d. i. aus

$$m^3 - (ae - 4bd + 3c^2)m + 2(ace - ad^2 - b^2e + 2bcd - c^3) = 0$$

bestimmt werden.

Nachdem diese Gleichung aufgelöst ist, wird die Umformung der Function erreicht, wenn man für $\frac{\alpha}{\gamma}$ die eine, für $\frac{\beta}{\delta}$ die andere Wurzel

von einer der folgenden drei Gleichungen wählt:

$$[ac - b^2 - \frac{1}{2}am]z^2 + [ad - bc - bm]z + bd - c^2 - \frac{1}{2}m(c - m) = 0,$$

$$[ad - bc - bm]z^2 + [ae - (c+m)^2]z + be - cd - dm = 0,$$

$$[bd - c^2 - \frac{1}{2}m(c - m)]z^2 + [be - cd - dm]z + ce - d^2 - \frac{1}{2}em = 0.$$

Dadurch entsteht

$$f(xy) = f(\alpha\gamma) \cdot \xi^4 + 3m(\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot \xi^2\eta^2 + f(\beta\delta) \cdot \eta^4,$$

und demnach können die linearen Factoren der Function $f(xy)$ und ebenso die Wurzeln der entsprechenden Gleichung durch die Coefficienten a, b, c, d, e dargestellt werden.

Essen.

Dr. HEILERMANN.

XX. Theilbarkeit einer gegebenen Zahl durch eine andere.

Da die Theilbarkeit durch 2 und 5 auf den ersten Blick zu erkennen ist, so haben wir nur die Theilbarkeit durch diejenigen Zahlen zu betrachten, welche in der Einerstelle eine der Ziffern 1, 3, 7, 9 haben. Alle diese Zahlen haben die gemeinsame Eigenschaft, dass sie sich durch Multiplication (mit resp. 1, 7, 3, 9) auf die Form $10\lambda + 1$ bringen lassen.

Sei nun a_0 eine gegebene Zahl und u_0 ihre letzte Ziffer, so bilden wir

$$a_1 = \frac{a_0 - u_0}{10} - \lambda u_0 = \frac{a_0 - u_0(10\lambda + 1)}{10}.$$

Ist nun a_0 durch $(10\lambda + 1)$ theilbar, so ist dasselbe mit a_1 der Fall. Bildet man a_2 aus a_1 ebenso, wie a_1 aus a_0 , so erhält man immer kleinere Zahlen, da jedesmal eine Stelle wegfällt. Die Formeln lauten successive:

$$a_1 = \frac{a_0 - u_0(10\lambda + 1)}{10},$$

$$a_2 = \frac{a_1 - u_1(10\lambda + 1)}{10} = \frac{a_0 - u_0(10\lambda + 1)}{10^2} - \frac{u_1(10\lambda + 1)}{10},$$

$$\dots$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} - u_{n-1}(10\lambda + 1)}{10} = \frac{a_0 - u_0(10\lambda + 1)}{10^n} - \frac{u_1(10\lambda + 1)}{10^{n-1}} - \dots$$

$$\dots - \frac{u_{n-1}(10\lambda + 1)}{10},$$

worin a_n die erste Zahl ist, die sich nicht mehr verkleinern lässt. Ist $a_n = 0$, so folgt aus der letzten Formel:

$$a_0 = (10\lambda + 1)(u_0 + 10u_1 + 10^2u_2 + \dots + 10^{n-1}u_{n-1});$$

d. h.: die Endziffern der Zahlen a_0, a_1, \dots sind, von rechts nach links geschrieben, die Ziffern des zweiten Factors der durch $(10\lambda + 1)$ theilbaren Zahl. — Beispiele:

$$158627 : 31; \lambda = 3.$$

$$\begin{array}{r} 158627 \\ \underline{21} \\ 15841 \\ \underline{3} \\ 1581 \\ \underline{3} \\ 155 \\ \underline{15} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{Also: } 158627 = 31 \cdot 5117.$$

Waren in Mecklenburg.

$$410643 : 67, \text{ mit } 3 \text{ erweitert:}$$

$$= 1231929 : 201; \lambda = 20.$$

$$\begin{array}{r} 1231929 \\ \underline{180} \\ 123012 \\ \underline{40} \\ 12261 \\ \underline{20} \\ 1206 \\ \underline{120} \\ 0 \end{array}$$

$$410643 = 67 \cdot 6129.$$

V. SCHLEGEL.

XXI. Ueber die Theilbarkeit der Zahlen.

Nr. 6, Jahrg. 20, dieser Zeitschrift enthielt in einer Recension des Herrn Prof. Dr. Cantor über das bei Georg Weiss in Heidelberg erschienene „Lehrbuch für den Rechenunterricht“ von Henrici die Notiz, dass in dem genannten Werke das folgende bemerkenswerthe Kennzeichen für die Theilbarkeit einer Zahl durch 7 gegeben werde:

„Eine Zahl ist durch 7 theilbar, wenn die doppelte letzte Ziffer, von den vorhergehenden Ziffern als Zahl abgezählt, einen Rest ergibt, der durch 7 theilbar ist.“

Der Beweis ist leicht. Wir übergehen denselben, weil er nur einen ganz speciellen Fall der Aufgabe betrifft: für eine beliebige Primzahl p einen Factor n zu finden derart, dass, wenn man mit demselben die letzten s Stellen der vorgelegten Zahl Z multiplicirt und das Product von der durch die übrigen Ziffern dargestellten Zahl abzieht, die Theilbarkeit des Restes die der ursprünglichen Zahl bedinge.

Sei Z_r die Zahl, welche nach Abstrich der s letzten Ziffern übrig bleibt, z_s die durch diese s Ziffern gegebene Zahl, so wird also vorausgesetzt

$$1) \quad Z_r - n z_s \equiv 0 \pmod{p}$$

und behauptet

$$2) \quad 10^s \cdot Z_r + z_s \equiv 0 \pmod{p}.$$

Zieht man 1) nach Multiplication mit 10^s von 2) ab, so bleibt

$$z_s + 10^s n \cdot z_s \equiv 0 \pmod{p}$$

oder

$$3) \quad z_s(1 + 10^s n) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wäre z_s nicht relativ prim zu p , etwa $= \delta \cdot p$, so ginge p in der Zahl z_s auf; man kann alsdann die s letzten Stellen ganz unberücksichtigt lassen. Nehmen wir also z_s relativ prim zu p und dividiren 3) durch z_s : die Congruenz wird jetzt

$$4) \quad 1 + 10^s n \equiv 0 \pmod{p}.$$

Dieselbe hat offenbar für $p=2$ oder $=5$ keine Lösung, diese Werthe sollen daher für die Folge ausgeschlossen werden. Vergleicht man 4) mit

$$1 + 10^{s-1} m \equiv 0 \pmod{p},$$

so ergibt sich durch Subtraction die neue Congruenz

$$n \cdot 10^s - m \cdot 10^{s-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Hierin darf man infolge der für p geltenden Beschränkung mit 10^{s-1} dividiren und erhält

$$5) \quad n \cdot 10 - m \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ist nun m berechnet, so genügen der zugehörigen Congruenz die Werthe von der Form $pk + m$. Die Primzahl p kann am Ende nur eine der Ziffern 1, 3, 7 oder 9 haben. Diese werden durch Multiplication mit den Zahlen 0 bis 10 in Zahlen übergeführt, welche an letzter Stelle wieder 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9 haben. Mag daher m heissen, wie es wolle: man ist jederzeit in der Lage, einen Factor k zu finden, welcher $p \cdot k + m$ zu einem Vielfachen von 10 macht: $= 10q$. Somit hat nach Einsetzung von $10q$ für m 5) das Aussehen

$$n \cdot 10 - 10q \equiv 0 \pmod{p},$$

d. i.

$$n - q \equiv 0 \pmod{p},$$

und n gehört zu den Zahlen $p \cdot k_1 + q$.

Man ist durch dieses Verhalten des Factors für z_s zu demjenigen von z_{s-1} in den Stand gesetzt, aus dem Multiplicator für die letzte Stelle einer vorgelegten Zahl alle übrigen zu ermitteln. Folglich wird man sich auf die Behandlung der Congruenz

$$6) \quad 10n + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

beschränken dürfen. Bezeichnet aber nach Gauss $[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots]$ den Ausdruck für die Factoren, welche auftreten, wenn man die Vielfachen von p in 10, von 10 in p , vom Rest in 10 u. s. w. bestimmt, bis man zum Rest 1 gelangt, so ist die Wurzel von 6)

$$n \equiv [\beta, \gamma, \delta, \dots] \pmod{p}.$$

Stellen wir z. B. die Berechnung für $p=47$ an, so ist

$$\begin{aligned}
 10 &= 0.47 + 10, & \alpha &= 0, \\
 47 &= 4.10 + 7, & \beta &= 4, \\
 10 &= 1.7 + 3, & \gamma &= 1, \\
 7 &= 2.3 + 1, & \delta &= 2, \\
 [4, 1, 2] &= 4 [1, 2] + [2] \\
 &= 4.(1.2 + 1) + 2 \\
 &= 12 + 2 \\
 &= 14.
 \end{aligned}$$

Die Werthe von n sind also enthalten in der Form $47k + 34$. Prüfen wir hiernach die Zahl 10392687 bezüglich ihrer Theilbarkeit durch 47:

$$\begin{array}{r}
 1039268,7 \\
 \underline{98} \\
 10391,7,0 \\
 \underline{98} \\
 1029,3 \\
 \underline{42} \\
 98,7 \\
 \underline{98} \\
 0
 \end{array}$$

10392687 ist sonach theilbar durch 47, was die Division bestätigt.

Um den Factor für die beiden letzten Stellen zu finden, wählt man $k = 8 : 47.8 + 14 = 390$; 39 ist der gesuchte Werth, und die allgemeine Form des Multipliers $47k_1 + 39$. Es können auch negative Werthe auftreten, wenn die k negativ genommen werden. Man hat natürlich die Producte der so gefundenen Factoren an entsprechender Stelle zu addiren.

Primzahlen.	Factoren für die letzte Ziffer.	Factoren für die beiden letzten Ziffern.	Factoren für die drei letzten Ziffern.	Factoren für die vier letzten Ziffern.
3.	+2, +5, +11 -1, -4, -10	+2 ... -2 ...	ebenso wie vorher	ebenso wie vorher
7.	+2, +9 -5, -12	+3 -4, -11	+1, +8 -6	+5, +12 -2, -9
11.	+1, +12	-1, -12	wie in der ersten Reihe	wie in der zweiten Reihe
13.	+9 -4	-3	+1 -12	+4 -9
17.	+5 -12	+9 -8	+6 -11	+4 -13
19.	-2	-4	+11 -8	+3

Primzahlen.	Factoren für die letzte Ziffer.	Factoren für die beiden letzten Ziffern.	Factoren für die drei letzten Ziffern.	Factoren für die vier letzten Ziffern.
23.	- 7	- 3	+ 2	- 9
29.	- 3	- 9	+ 2	+ 6
31.	+ 3	- 9	- 4	+ 12
37.	+ 11		- 1	+ 11
41.	+ 4	+ 25		- 10
43.	- 13	+ 3	- 4	- 9
47.	+ 14	- 8	+ 18	- 17
53.	- 16	+ 9	- 15	+ 25
59.	- 6			+ 2
61.	+ 6	+ 25		- 15
67.		+ 2		- 4
71.	+ 7	+ 22	- 12	
73.	- 22			+ 1
79.	- 8	+ 15		+ 12
83.	- 25		- 21	
89.	- 9	+ 8	- 17	+ 25
97.	+ 29			

Obige Tabelle enthält die Hauptfactoren für die Primzahlen bis 100. Der Werth -1 bei der 3 führt ersichtlich auf das bekannte Kennzeichen zurück. Auch für die 11 lässt sich der Zusammenhang mit der Schulregel erkennen. Wichtig sind besonders die Stellen, welche ± 1 zum Factor haben. So kann man bei 7 und 13 die drei, bei 73 die vier

letzten Ziffern ohne Weiteres von der nach ihrer Abstreichung restirenden Zahl abziehen, bei 37 ähnlich die drei letzten Ziffern addiren u. s. w.

Dresden.

P. OTTE,
Realschuloberlehrer.

Preisaufgaben

der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft in Leipzig.
(Mathematisch-naturwissenschaftliche Section.)

I. Für das Jahr 1876.

Trotz der meisterhaften Arbeiten Leverrier's über die Bewegung des Merkur kann die Theorie dieses Planeten noch nicht als endgiltig abgeschlossen betrachtet werden. Die Gesellschaft wünscht eine ausführliche

Untersuchung der die Bewegung des Merkur bestimmenden Kräfte,

mit Rücksicht auf die von Laplace (in der *Mécanique céleste*), von Leverrier (in den *Annales de l'Observatoire* und den *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*), von Hansen (in den Berichten der königl. sächs. Gesellsch. d. W. vom 15. April 1863) und von Wilhelm Weber (vergl. Zöllner über die Natur der Cometen, S. 333) angedeuteten Einwirkungen. Ausser der vollständigen Berechnung der Störungen ist eine Vergleichung mit den Beobachtungen unerlässlich, um zu zeigen, bis zu welchem Grade der Genauigkeit sich die eingehenden Constanten bestimmen lassen. Die Construction von Tafeln zur Ortsberechnung behält sich die Gesellschaft vor zum Gegenstand einer spätern Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

2. Für das Jahr 1877.

Der nach Encke benannte und von diesem Astronomen während des Zeitraumes von 1819—1848 sorgfältig untersuchte Comet I, 1819, hat in seiner Bewegung Anomalieen gezeigt, welche zu ihrer Erklärung auf die Hypothese eines widerstehenden Mittels geführt haben. Da indessen eine genauere Untersuchung der Bahn nur über einen beschränkten Theil des Zeitraumes vorliegt, über welchen die Beobachtungen (seit 1786) sich erstrecken, so ist eine vollständige Neubearbeitung der Bahn des Encke'schen Cometen um so mehr wünschenswerth, als die bisher untersuchten Bewegungen anderer periodischen Cometen keinen analogen widerstehenden Einfluss verrathen haben. Die Gesellschaft wünscht eine solche vollständige Neubearbeitung herbeizuführen und stellt deshalb die Aufgabe:

die Bewegung des Encke'schen Cometen mit Berücksichtigung aller störenden Kräfte, welche von Einfluss sein können, vorläufig wenigstens innerhalb des seit dem Jahre 1848 verflossenen Zeitraums zu untersuchen.

Die ergänzende Bearbeitung für die frühere Zeit behält sich die Gesellschaft vor, eventuell zum Gegenstand einer spätern Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

3. Für das Jahr 1878.

Die Entwicklung des reciproken Werthes der Entfernung r zweier Punkte spielt in astronomischen und physikalischen Problemen eine hervorragende Rolle. In der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen wird die zuerst von Cauchy entdeckte Gleichung bewiesen

$$\frac{a}{r} \left\{ 1 + 2e^{-\pi \left(\frac{a}{r}\right)^2} + 2e^{-\pi \left(\frac{2a}{r}\right)^2} + e^{-\pi \left(\frac{3a}{r}\right)^2} + e^{-\pi \left(\frac{4a}{r}\right)^2} + \dots \right\}$$

$$= 1 + 2e^{-\pi \left(\frac{r}{a}\right)^2} + 2e^{-\pi \left(\frac{2r}{a}\right)^2} + 2e^{-\pi \left(\frac{3r}{a}\right)^2} + 2e^{-\pi \left(\frac{4r}{a}\right)^2} + \dots,$$

in welcher mit Rücksicht auf die zu erzielende Genauigkeit die positive willkürliche Constante a so gross gewählt werden kann, dass die Exponentialgrösse $e^{-\pi \left(\frac{a}{r}\right)^2}$ vernachlässigt werden darf. Alsdann hat man

$$\frac{a}{r} = 1 + 2e^{-\pi \left(\frac{r}{a}\right)^2} + 2e^{-4\pi \left(\frac{r}{a}\right)^2} + 2e^{-9\pi \left(\frac{r}{a}\right)^2} + \dots,$$

eine Reihenentwicklung von ungemein rascher Convergenz. Es stellt zu erwarten, dass eine auf die vorstehende Formel gegründete Entwicklung der Störungfunction in dem Problem der drei Körper sich für die numerische Rechnung als vortheilhaft erweisen werde.

Die Gesellschaft wünscht eine unter dem angedeuteten Gesichtspunkte ausgeführte Bearbeitung des Störungsproblems zu erhalten.

Indem sie dem Bearbeiter die Wahl des besondern Falles überlässt, in welchem die numerische Anwendbarkeit des Verfahrens gezeigt werden soll, setzt sie voraus, dass das gewählte Beispiel hinlänglichen Umfang und Wichtigkeit besitze, um die Tragweite der vorgeschlagenen Methode und ihr Verhältniss zu den bisher angewandten hervortreten zu lassen. Preis 700 Mark.

4. Für das Jahr 1879.

Durch die in den Abhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften von W. Hankel veröffentlichten Untersuchungen ist nachgewiesen worden, dass die Thermoelektricität nicht nur auf den

hemimorphen Krystallen auftritt, sondern eine an allen Krystallen wahrzunehmende Eigenschaft ist, soweit deren krystallinische Structur und materielle Beschaffenheit überhaupt ein Entstehen und Anhäufen der Elektricität bis zu einer durch unsere Instrumente nachweisbaren Stärke gestatten. Die erwähnten Abhandlungen umfassen ausser den hemimorphen Krystallen des Boracites und Quarzes die symmetrisch gebildeten Krystalle des Idokrases, Apophyllits, Kalkspathes, Berylls, Topases, Schwerspathes, Aragonites, Gypses, Diopsids, Orthoklases, Albits und Periklins, und lehren nicht nur die Vertheilung der Elektricität auf der in den verschiedenen Formen vollkommen ausgebildeten, sondern auch auf den durch Anwachsen und sonstige Hindernisse in ihrer Entwicklung gehemmten Individuen, sowie auf den durch Bruch oder Anschlagen der Durchgänge künstlich erzeugten Begrenzungsflächen kennen. Es scheinen nun unter allen zwischen der Wärme und der Elektricität beobachteten Beziehungen die thermoelektrischen Erscheinungen am geeignetsten, eine nähere Kenntniss des Zusammenhanges zwischen den genannten beiden Agentien zu ermöglichen, und es wird daher von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft für das Jahr 1879 als Preisaufgabe gestellt:

Auf streng physikalische Versuche gestützter Nachweis der Entstehung der auf Krystallen bei steigender und sinkender Temperatur hervortretenden Elektricität (Thermoelektricität, Pyroelektricität, Krystallelektricität) und der durch Bildungshemmnisse oder äussere Verletzungen derselben in der normalen Vertheilung entstehenden Aenderungen.

Preis 700 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer andern Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1876 Geh. Hofrath Prof. Dr. Hankel) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

- v. **Dambrowsky, Emanuel**, Vermessungs-Revisor und Ingenieur, Theorie und Anleitung zur praktischen Ausführung und rationalen Inhalts-Berechnung bei den Erdbauten, besonders der Eisenbahnen. Mit 11 lithograph. Tafeln. gr. 8. [113 S.] Geh. n. *M* 4. —
- Frischauf, Dr. J.**, Professor an der Universität zu Graz, Elemente der absoluten Geometrie. [XI u. 142 S.] gr. 8. geh. n. *M* 3. 40.
- Günther, Dr. Siegmund**, vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten und 4 lithographirten Tafeln. gr. 8. [VIII u. 352 S.] Geh. n. *M* 9. —
- Hesse, Otto**, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung. Revidirt und mit Zusätzen versehen von Dr. **O. Gundelfinger**, a. o. Professor an der Universität zu Tübingen. Dritte Auflage. [XVI u. 546 S.] gr. 8. geh. n. *M* 13. —
- Jeep, W.**, Ingenieur und Director der städtischen Baugewerke- und Maschinenbau-Schule der Stadt Sulza, die Verwendung des Eisens beim Hochbau. Mit über 800 Holzschnitten und 14 lithographirten Tafeln. 1.—4. Lieferung. gr. 8. Jede Lieferung n. *M* 2. 80. Erscheint in 6 Lieferungen à *M* 2. 80.
- Kirchhoff, Dr. Gustav**, Professor in Berlin, Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. Dritte Lieferung (Schluss der Mechanik). gr. 8. [X u. S. 309—466.] Geh. n. *M* 4. —
- Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik. „Originalberichte der Verfasser“, gesammelt und herausgegeben von Dr. **Leo Koenigsberger** und Dr. **Gustav Zeuner**. I. Band 1. Heft [S. 1—128.] gr. 8. geh. n. *M* 2. 40.
- Riemann's, Bernhard**, gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Herausgegeben unter Mitwirkung von **R. Dedekind** und **H. Weber**. [VIII u. 526 S.] Lex.-8. geh. n. *M* 16. —
- Röthig, Dr. Oskar**, Oberlehrer an der Friedrichs-Werder'schen Gewerbeschule in Berlin, die Probleme der Brechung und Reflexion. [VIII u. 112 S.] gr. 8. geh. n. *M* 2. 80.
- Scherling, Ch.**, Professor am Catharineum in Lübeck, Grundzüge der axonometrischen und schiefen Parallel-Projection. Ein Ergänzungsheft zu jedem Lehrbuch der gewöhnlichen orthogonalen Projection für Realschulen. Mit 5 lithograph. Figurentafeln. [24 S.] 4. geh. n. *M* 1. —
- Steiner's, Jacob**, Vorlesungen über synthetische Geometrie. Zweiter Theil. Auch unter dem Titel: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften. Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiner's bearbeitet von Dr. **Heinrich Schröter**, Professor der Mathematik an der Universität zu Breslau. Zweite Auflage. Mit 106 Holzschnitten im Text. [XVI u. 535 S.] gr. 8. geh. n. *M* 14. —

I N H A L T.

	Seite
XIV. Das System der polaren Liniencoordinaten in der Ebene. Von Dr. JOHANN PHILIPP WEINMEISTER, Oberlehrer an der Realschule I. Ordnung in Leipzig	301
XV. Lemniscatische Geometrie, Verwandtschaft und Kinematik, abgeleitet mit Hilfe der Function complexen Arguments $Z = \sqrt{z}$. Von Dr. GUSTAV HOLZMÜLLER, Dir. der Provinzial-Gewerbeschule zu Hagen. (Hierzu Taf. VI, Fig. 1—5).	325

Kleinere Mittheilungen.

XIX. Bemerkung zu der Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Von Dr. HEILERMANN in Essen	364
XX. Theilbarkeit einer gegebenen Zahl durch eine andere. Von V. SCHLEGEL in Waren in Mecklenburg	365
XXI. Ueber die Theilbarkeit der Zahlen. Von P. OTTE, Realschuloberlehrer in Dresden	366
Preisaufgaben der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft in Leipzig. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Section.)	370

Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt).

Die Chorographie des Joachim Rheticus. Von Prof. Dr. F. HIPLER in Braunschweig. (Hierzu Taf. VII, Fig. 1—3.)	125
Recensionen:	
LIEBMANN, O., Zur Analysis der Wirklichkeit. Von SCHLÖMILCH	150
Letztes Wort über die Bibliotheca Historico-naturalis. Von MAXIMILIAN CURTZE in Thorn	151

Bibliographie vom 1. Juni bis 31. Juli 1876:

Periodische Schriften	154
Reine Mathematik	155
Angewandte Mathematik	156
Physik und Meteorologie	156

Berichtigung.

In mehreren Exemplaren der dritten, von mir besorgten Ausgabe der Hesse'schen Raumgeometrie konnte leider ein sinnentstellendes Versehen nicht mehr berichtigt werden. Man lese nämlich daselbst

Seite 448 Zeile 10 v. u.: während anstatt „und dass“;

„ 13 v. u.: dass unter anderen anstatt „dass“.

Tübingen, Ende Juli 1876.

S. GUNDELFINGER.