Werk

Titel: Zeitschrift für Mathematik und Physik

Verlag: Teubner

Jahr: 1876

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 MATH I, 755:21

Werk Id: PPN599415665_0021

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN599415665_0021|LOG_0036

XIV.

Das System der polaren Liniencoordinaten in der Ebene.

Von

Dr. Johann Philipp Weinmeister,

Oberlehrer an der Realschule I. Ordnung in Leipzig.

---

§ 1.

In der analytischen Geometrie der Ebene ist bekanntlich die Gleichung

$$x\xi + y\eta + 1 = 0$$

einer doppelten Deutung fähig. Betrachtet man x, y als veränderliche rechtwinklige Punktcoordinaten, so repräsentirt sie eine gerade Linie, welche von den Coordinatenaxen die Strecken $-\frac{1}{\xi}$, $-\frac{1}{\eta}$ abschneidet; betrachtet man dagegen ξ, η als veränderliche Linien-Coordinaten, denen die eben erwähnte Bedeutung beizulegen ist, so repräsentirt sie einen Punkt, welcher von den Coordinatenaxen die bezüglichen Entfernungen x, y besitzt. Jene Gleichung ist deswegen das unentbehrliche Mittelglied zwischen Punkt- und Liniencoordinaten. Ausser den Punktcoordinaten x, y macht die analytische Geometrie der Ebene einen ausgedehnten Gebrauch von polaren Punktcoordinaten r, θ, dagegen scheint eine analoge Einführung polarer Linien-Coordinaten im Gegensatze zu den gewöhnlichen Liniencoordinaten noch wenig Beachtung gefunden zu haben. Wir haben in Absicht, im Folgenden eine systematische Entwickelung der auf ein solches Coordinatensystem bezüglichen Lehren zu geben und schreiten zunächst zur Definition desselben. Statt der oben angegebenen Gleichung führen wir eine andere als Normalform ein, nämlich die folgende:

$$1)\qquad \varrho - x\cos\theta - y\sin\theta = 0.$$

Die wohl auch unter dem Namen Normalform bekannte Gleichung mit den Punktcoordinaten x, y:

$$x\cos\theta + y\sin\theta - \varrho = 0$$

stellt eine Gerade dar, welche vom Anfang den Abstand ϱ besitzt, während θ der Winkel ist, welchen dieser Abstand mit der x-Axe bildet. Jene Gleichung ist deswegen wichtig, weil ihre linke Seite bei der Substitution der Coordinaten eines fremden Punktes dessen negativen Abstand von der Geraden ausdrückt, falls jener Punkt mit dem Coordinaten-Anfang auf derselben Seite der Geraden gelegen ist. Die linke Seite der in 1) aufgestellten Gleichung wird daher diesen Abstand selbst angeben.

Indem wir uns an das Obige anschliessen, setzen wir nun fest:

2) Dem System der polaren Liniencoordinaten liegen eine unbegrenzte Gerade — die Coordinatenaxe — und ein Punkt auf derselben — der Coordinatenanfang — zu Grunde. Die polaren Liniencoordinaten bestehen aus einer Längencoordinate ϱ, welche die Grösse der Senkrechten angiebt, die man vom Anfang auf die Gerade fällen kann, und aus einer Winkelcoordinate θ, welche den Winkel ausdrückt, den jene Senkrechte mit der Coordinatenaxe bildet.

Wir wollen der Grösse ϱ kein Vorzeichen geben und die verschiedenen Lagen der Geraden dadurch kennzeichnen, dass wir θ die Werthe von -180^0 bis $+180^0$ zukommen lassen. Aus 2) geht hervor, dass die polaren Liniencoordinaten identisch sind mit den polaren Punktcoordinaten des Fusspunktes des vom Anfang auf die Gerade gefällten Perpendikels.

Stellen wir die Polarcoordinaten ϱ, θ mit den rechtwinkligen ξ, η zusammen, so haben wir

$$\xi = -\frac{\cos\theta}{\varrho}, \quad \eta = -\frac{\sin\theta}{\varrho}.$$

Die Coordinatenaxe hat die Coordinaten $\varrho = 0$, $\theta = 90^0$; eine die Coordinatenaxe im Anfang unter dem Winkel τ schneidende Gerade: $\varrho = 0$, $\theta = \tau + 90^0$; eine der Coordinatenaxe unter dem Abstande a parallele Gerade: $\varrho = a$, $\theta = 90^0$. Bei auf der Coordinatenaxe senkrechten Geraden ist $\theta = 0$. Die Geraden $\varrho_1 \theta_1$ und $\varrho_2 \theta_2$ schneiden sich unter dem Winkel $(\theta_1 - \theta_2)$. Sie sind parallel, wenn $\theta_1 = \theta_2$. Ihr Abstand ist dann $(\varrho_1 \pm \varrho_2)$.

Findet zwischen den Polarcoordinaten ϱ, θ einer bestimmten Geraden und den rechtwinkligen Coordinaten x, y eines bestimmten Punktes die Gleichung 1) identisch statt, so ist das ein Zeichen dafür, dass der Punkt x, y auf der Geraden ϱ, θ liegt, oder, was dasselbe sagt, dass die Gerade ϱ, θ durch den Punkt x, y hindurchgeht. Lassen wir nun ϱ und θ variiren, aber so, dass sie der Gleichung 1) stets Genüge leisten, so erhalten wir unzählig viele Gerade, welche sämmtlich durch den Punkt x, y hindurchgehen. Wir können sagen: die Gleichung 1) ist die Bedingung für die Coordinaten ϱ, θ, unter welcher die durch ϱ, θ repräsentirte Gerade durch den Punkt x, y geht. Setzen wir zur Abkürzung

3) $$P \equiv \varrho - x\cos\theta - y\sin\theta,$$

so gilt

4) $$P=0$$
mit den Veränderlichen ϱ, θ und den Constanten x, y ist die Gleichung des Punktes x, y, und zwar in der Normalform.

So ist z. B. die Gleichung des Coordinatenanfanges
$$\varrho=0.$$

Ist der Punkt durch seine Polarcoordinaten r, t ausgedrückt, so wird seine Gleichung in Liniencoordinaten
$$\varrho-r.\cos(\theta-t)=0.$$

Wir haben daher als charakteristisches Kennzeichen der Punktgleichung drei Glieder, eins mit ϱ, eins mit $\cos\theta$ und eins mit $\sin\theta$. Fehlt eins der beiden letzteren Glieder, so liegt der Punkt auf einer der Coordinatenaxen; fehlt das erstere, so liegt er im Unendlichen. Ein absolutes Glied besitzt die Punktgleichung nicht. In der allgemeinen Form kann die Punktgleichung verschieden auftreten. So sind
$$A\varrho+B\cos\theta+C\sin\theta=0,$$
$$A\varrho+\quad B\cos(\theta+\omega)\quad=0,$$
$$A\varrho+B\sin(\theta+\omega)+C\cos(\theta+\omega)=0$$
lauter Punktgleichungen. Wir erhalten aus der allgemeinen Form die Normalform, sobald wir erstere durch den Coefficienten von ϱ dividiren.

Die drei Geraden $\varrho_1\theta_1$, $\varrho_2\theta_2$, $\varrho_3\theta_3$ gehen durch denselben Punkt x, y, wenn folgende Gleichungen erfüllt sind:
$$\varrho_1-x\cos\theta_1-y\sin\theta_1=0,$$
$$\varrho_2-x\cos\theta_2-y\sin\theta_2=0,$$
$$\varrho_3-x\cos\theta_3-y\sin\theta_3=0,$$
d. h. wenn
$$\begin{vmatrix} \varrho_1 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \varrho_2 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ \varrho_3 & \cos\theta_3 & \sin\theta_3 \end{vmatrix}=0.$$

Nach erfolgter Multiplication mit (-1) kann die Gleichung auch geschrieben werden
$$\varrho_1\sin(\theta_2-\theta_3)+\varrho_2\sin(\theta_3-\theta_1)+\varrho_3\sin(\theta_1-\theta_2)=0.$$

Nehmen wir eins dieser drei Coordinatenpaare als variabel an, so können wir sagen:

5) Die Gleichung
$$\begin{vmatrix} \varrho & \cos\theta & \sin\theta \\ \varrho_1 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \varrho_2 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \end{vmatrix}=0$$
oder
$$\varrho\sin(\theta_1-\theta_2)+\varrho_1\sin(\theta_2-\theta)+\varrho_2\sin(\theta-\theta_1)=0.$$
ist die Gleichung des Schnittpunktes der Geraden $\varrho_1\theta_1$ und $\varrho_2\theta_2$.

Bereits oben haben wir erwähnt, dass, wenn ϱ, θ die Coordinaten einer beliebigen Geraden und x, y die eines beliebigen Punktes sind, die Function $\varrho - x\cos\theta - y\sin\theta$ den Abstand jenes Punktes von der Geraden ausdrückt. Wir können das jetzt verwerthen, indem wir sagen:

6) Setzt man in die linke Seite einer Punktgleichung in der Normalform $P=0$ die Coordinaten einer beliebigen Geraden ein, so erhält man den Abstand des Punktes von der Geraden, und zwar mit negativem Vorzeichen, wenn der Punkt und der Coordinatenanfang auf derselben Seite der Geraden liegen.

Sind zwei Punkte gegeben mit ihren Gleichungen in der Normalform

$$P_1 \equiv \varrho - x_1\cos\theta - y_1\sin\theta = 0,$$
$$P_2 \equiv \varrho - x_2\cos\theta - y_2\sin\theta = 0,$$

so ist die Gleichung

$$X = P_1 + \lambda P_2 = 0, \quad \lambda > 0$$

ihrem Bau nach wieder die eines Punktes. Da die Coordinaten der Verbindungslinie der Punkte $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ die Gleichung $X = 0$ identisch befriedigen, so geht daraus hervor, dass der Punkt $X = 0$ auf derselben gelegen ist. Schreibt man letztere Gleichung in der Form

$$\frac{P_1}{P_2} = -\lambda,$$

so sieht man, dass jede andere durch den Punkt $X = 0$ gezogene Gerade die Punkte $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$ auf verschiedenen Seiten liegen hat, und zwar so, dass das Verhältniss der Abstände dem absoluten Werthe nach durch λ angegeben wird.

7) Die Gleichung

$$P_1 + \lambda P_2 = 0$$

repräsentirt einen Punkt, welcher die Verbindungslinie von $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$ innerlich im Verhältniss $\lambda : 1$ theilt.

Ist $\lambda < 0$, so wird die Gleichung

$$\frac{P_1}{P_2} = +\lambda.$$

Jede durch $X = 0$ gehende Gerade hat dann $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$ auf derselben Seite liegen und wird äusserlich im Verhältniss $\lambda : 1$ getheilt.

Im speciellen Falle $\lambda = -1$ wird

$$P_1 - P_2 = 0$$

die Gleichung des unendlich entfernten Punktes der Geraden $P_1 P_2$. Dies geht daraus hervor, dass diese Gleichung frei von der Coordinate ϱ ist. Der dann resultirende Winkel

$$arctg\,\theta = -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$$

ist das Complement des Winkels, welchen die Verbindungslinie mit der Coordinatenaxe bildet.

Ebenso ergiebt sich die Gleichung für die Mitte der Verbindungslinie als

$$P_1 + P_2 = 0$$

oder in der Normalform

$$\frac{P_1 + P_2}{2} = 0.$$

Verbinden wir diesen Punkt mit einem dritten, dessen Gleichung ist $P_3 = 0$, und theilen die letztgezogene Gerade im Verhältniss 1 : 2, so ist wegen $\lambda = \frac{1}{2}$ die Gleichung des Theilungspunktes

$$\frac{P_1 + P_2}{2} + \tfrac{1}{2} P_3 = 0$$

oder auch

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0.$$

Dieses ist mithin die Gleichung des Schwerpunktes der drei gegebenen Punkte. Die Symmetrie lässt erkennen, dass derselbe auch noch auf zwei andere Arten hätte gefunden werden können. In der Normalform heisst seine Gleichung

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3}{3} = 0.$$

Wählen wir einen vierten Punkt $P_4 = 0$, verbinden den eben gefun denen Schwerpunkt mit demselben und theilen die Verbindungslinie im Verhältniss 1:3, so hat der neue Schwerpunkt die Gleichung

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3}{3} + \tfrac{1}{3} P_4 = 0$$

oder auch

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0.$$

Wir können also im Allgemeinen sagen:

8) Sind

$$P_1 = 0,\ P_2 = 0,\ P_3 = 0,\ \ldots\ P_n = 0$$

Gleichungen in der Normalform von n Punkten, so ist die Gleichung ihres Schwerpunktes

$$\Sigma P_n = 0$$

oder in der Normalform

$$\frac{1}{n} \Sigma P_n = 0.$$

Fallen mehrere Punkte mehrfach je in einen zusammen, oder — was dasselbe sagt — sind die n Punkte materiell und mit den bezüglichen Gewichten $g_1, g_2, g_3, \ldots g_n$ versehen, so wird die Schwerpunktgleichung in der Normalform

$$\frac{1}{n} \Sigma g_n P_n = 0.$$

Ihre Symmetrie beweist, dass ein System materieller Punkte in einer Ebene immer nur einen einzigen Schwerpunkt besitzt.

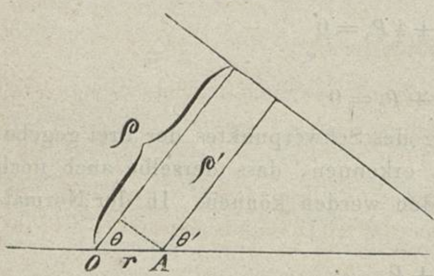
Wir wenden uns nun zur Transformation der gewählten Coordinaten. Es seien ϱ, θ die ursprünglichen, ϱ', θ' die neuen Coordinaten. Bleibt der Coordinatenanfang derselbe, wird aber die Axe um den Winkel ω positiv gedreht — wir denken entgegengesetzt dem Lauf der Zeiger der Uhr —, so ist

$$\varrho' = \varrho, \quad \theta' = \theta - \omega.$$

Es wird also

$$F(\varrho, \theta) = 0 \text{ zu } F(\varrho', \theta' + \omega) = 0.$$

Fig. 1.



Bleibt alsdann die Coordinaten-Axe ruhen, wird aber der Anfang auf derselben um r von O nach A verschoben (s. Fig. 1), so ist

$$\varrho' = \varrho - r . \cos\theta, \quad \theta' = \theta.$$

Nehmen wir ferner an, dass der neue Coordinatenanfang A eine beliebige Lage habe, dass z. B. seine Polarcoordinaten ϱ, ω seien, so können wir zunächst die Coordinatenaxe um O so lange drehen, bis sie durch A hindurchgeht. Bezeichnen wir die Coordinaten dieses Hilfs-Coordinatensystems mit ϱ_h, θ_h, so ist

$$\varrho_h = \varrho, \quad \theta_h = \theta - \omega.$$

Verlegen wir jetzt das Cordinatensystem nach dem neuen Anfange, lassen aber dabei der Coordinatenaxe ihre eben erhaltene Lage, so ist, wenn wir die jetzigen Coordinaten mit ϱ'_h, θ'_h bezeichnen, nach dem eben erhaltenen Resultat

$$\varrho'_h = \varrho_h - r \cos\theta_h = \varrho - r \cos(\theta - \omega), \quad \theta'_h = \theta_h = \theta - \omega.$$

Geben wir nun der Coordinatenaxe wieder ihre alte Richtung, drehen sie also um ω negativ, so ist

$$\varrho' = \varrho'_h = \varrho - r \cos(\theta - \omega), \quad \theta' = \theta'_h + \omega = \theta.$$

Da nun aber $\varrho \equiv \varrho' + r . \cos(\theta - \omega) = 0$ nichts Anderes ist, als die Gleichung des ursprünglichen Coordinatenanfanges in der Normalform im neuen System, so können wir sagen:

9) Hat bei der Coordinatentransformation der ursprüngliche Anfang im neuen System die Gleichung in der Normalform

$$U = 0$$

und bleibt die Richtung der Coordinatenaxe dieselbe, so geht die Curvengleichung

$$F(\varrho, \theta) = 0$$

über in die Gleichung

$$F(U, \theta) = 0.$$

Bleibt dagegen der Coordinatenanfang derselbe, und wird die Axe in positiver Richtung um den Winkel ω gedreht, so heisst die neue Gleichung

$$F(\varrho, \theta - \omega) = 0.$$

Hat also der neue Coordinatenanfang die rechtwinkligen Coordinaten x, y, und wird gleichzeitig die Axe um ω positiv gedreht, so heisst die neue Gleichung

$$F[\varrho - x \cos(\theta + \omega) - y \sin(\theta + \omega), \theta - \omega] = 0.$$

§ 2.

Kreis und Kegelschnitt.

Da die Kreistangente die Eigenschaft besitzt, dass sie immer vom Mittelpunkte um die Länge des Radius entfernt ist, so schliessen wir unmittelbar:

10) Ist $M = 0$ die Gleichung des Kreismittelpunktes in der Normalform und r der Kreisradius, so ist die Kreisgleichung

$$M = \pm r.$$

Das doppelte Vorzeichen ist nothwendig, da Plus oder Minus eintritt, je nachdem der Kreismittelpunkt und der Coordinatenanfang auf derselben oder auf verschiedener Seite der sich bewegenden Kreistangente gelegen sind. Wollen wir es vermeiden, so schreiben wir die Gleichung in der Form

$$M^2 = r^2.$$

Wir sehen daraus, dass, wenn zu den drei Gliedern der Punktgleichung mit ϱ, $\cos\theta$, $\sin\theta$ noch ein Absolutglied hinzutritt, dieselbe eine Kreislinie vertritt, welche jenen Punkt zum Mittelpunkte und nach geschehener Reduction auf die Normalform das Absolutglied zum Radius hat. Umgekehrt ist der Punkt ein Kreis mit dem Radius Null.

Suchen wir die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise

$$\frac{M_1}{r_1} = \pm 1, \quad \frac{M_2}{r_2} = \pm 1,$$

so sehen wir, dass dieselben nothwendig die Gleichung befriedigen

$$\frac{M_1}{r_1} = + \frac{M_2}{r_2}, \text{ d. h. } M_1 - \frac{r_1}{r_2} M_2 = 0,$$

oder auch die Gleichung

$$\frac{M_1}{r_1} = - \frac{M_2}{r_2}, \text{ d. h. } M_1 + \frac{r_1}{r_2} M_2 = 0.$$

Wir haben in diesen Gleichungen die Aehnlichkeitspunkte beider Kreise. Sie liegen hiernach auf der Centrale und theilen sie im Verhältniss $r_1 : r_2$.

Die obere Gleichung giebt den äussern, die untere den innern Aehnlichkeitspunkt an.

Bewegt sich ein Punkt so, dass die Summe oder Differenz seiner Entfernungen von zwei festen Punkten eine constante ist, so beschreibt er eine Ellipse, resp. Hyperbel. Ist das Product der Entfernungen constant, so entsteht eine Curve vierten Grades, im speciellen Falle eine Lemniscate, bei constantem Quotienten beschreibt er einen Kreis. Wir sind jetzt in der Lage, dieselben vier Fälle zu untersuchen bei Bewegung einer Geraden, und werden wir da bedeutend einfachere Resultate erhalten. Bewegt sich zunächst eine Gerade so, dass die Summe ihrer Entfernungen von zwei festen Punkten $P_1=0$ und $P_2=0$ immer gleich c ist, so hüllt sie eine Curve ein mit der Gleichung

$$P_1+P_2=c.$$

Sie umhüllt mithin einen Kreis, dessen Mittelpunkt, wegen $M\equiv\frac{P_1+P_2}{2}$, die Mitte der Verbindungslinie beider Punkte, und dessen Radius $r=\frac{c}{2}$, der Hälfte der gegebenen Constanten, gleich ist.

Wir können diesen Satz auf n Punkte erweitern, dann ist

$$M\equiv\frac{1}{n}\,\Sigma P_n \text{ [s. 8)] und } r=\frac{c}{n}.$$

11) B e w e g t s i c h e i n e G e r a d e u m e i n S y s t e m v o n n f e s t e n P u n k t e n, o h n e d i e s e s z u d u r c h d r i n g e n, s o, d a s s d i e S u m m e i h r e r E n t f e r n u n g e n v o n s ä m m t l i c h e n P u n k t e n e i n e c o n s t a n t e i s t, s o h ü l l t s i e e i n e n K r e i s e i n, w e l c h e r d e n S c h w e r p u n k t j e n e s S y s t e m s z u m M i t t e l p u n k t u n d d e n n^{ten} T h e i l d e r C o n s t a n t e n a l s R a d i u s h a t.

Wir haben auch dann noch einen Kreis, wiewohl mit anderem Mittelpunkte, wenn jene Summe eine algebraische ist und wenn zu einer jeden Entfernung ein beliebiger, sich immer gleich bleibender Factor hinzutritt. Ausnahmefälle liegen vor, wenn die gegebene Constante Null ist. Alsdann dreht sich die Gerade um einen festen Punkt herum. Ferner ist noch zu beachten, dass bei der Summation das Glied mit ϱ herausfallen kann. Die Gerade bleibt dann sich stets parallel. Im speciellen Falle tritt dies ein bei

$$P_1-P_2=c,$$

d. h. wenn sich die Gerade so bewegt, dass die Differenz ihrer Entfernungen von zwei festen Punkten immer dieselbe ist.

Ist der Quotient der Entfernungen $=\lambda$ gegeben, so ist die Gleichung

$$P_1-\lambda P_2=0.$$

Wie wir schon oben sahen, dreht sich die Gerade dann um einen festen Punkt.

Es fehlt uns hiernach noch der Fall, dass das Product der Entfernungen ein gegebenes ist. Hier rufen wir nun einen bekannten Satz der Kegelschnittslehre zu Hilfe, nämlich: Fällt man von den Brennpunkten eines Kegelschnittes Perpendikel auf beliebige Tangenten, so ist das Product derselben constant, nämlich $=b^2$, dem Quadrat der kleinen Halbaxe. Hieraus schliessen wir unmittelbar:

12) Sind $F_1=0$, $F_2=0$ die Gleichungen der Brennpunkte eines Kegelschnittes in der Normalform, und ist dessen kleine Halbaxe b, so ist seine Gleichung

$$F_1 F_2 = \pm b^2,$$

wo Plus oder Minus zu wählen ist, je nachdem der Kegelschnitt eine Ellipse oder eine Hyperbel ist.

Das doppelte Vorzeichen erklärt sich daraus, dass bei der Ellipse die Brennpunkte immer auf derselben Seite der Tangente, bei der Hyperbel immer auf der entgegengesetzten liegen. Fallen die Brennpunkte zusammen, so entsteht ein Kreis mit reellem oder imaginärem Radius, je nachdem die Curve eine Ellipse oder eine Hyperbel war. Durch Variiren von b erhält man ein System confocaler Kegelschnitte.

Wir gehen nun zur Ableitung der Centralgleichung des Kegelschnittes über. Ist die Mittelpunkt-Gleichung in der Normalform

13) $$M \equiv \varrho - x_m \cos\theta - y_m \sin\theta = 0$$

und sind die Brennpunkt-Gleichungen

14) $$F_1 \equiv \varrho - x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta = 0,$$

so ist $$F_2 \equiv \varrho - x_2 \cos\theta - y_2 \sin\theta = 0,$$

$$F_1 - F_2 = (x_2 - x_1)\cos\theta + (y_2 - y_1)\sin\theta.$$

Ist $2c$ die Entfernung beider Brennpunkte und ω der Winkel, welchen die Curvenaxe $2a$ mit der Coordinatenaxe bildet, so ist

also $$x_2 - x_1 = 2c\,.\cos\omega, \quad y_2 - y_1 = 2c\,.\sin\omega,$$

$$F_1 - F_2 = 2c\,.\cos(\theta-\omega).$$

Schreiben wir hierzu die gemäss 7) zu bildende Gleichung

$$F_1 + F_2 = 2M,$$

so finden wir durch Quadriren und Subtrahiren mit Berücksichtigung von 12)

$$M^2 - c^2.\cos^2(\theta-\omega) = \pm b^2.$$

Wegen $c^2 = a^2 \mp b^2$ ist auch

$$M^2 = (a^2 \mp b^2)\cos^2(\theta-\omega) \pm b^2$$

und wir können schliessen:

15) Sind a und b die Halbaxen eines Centralkegelschnittes, ist ω der Winkel, welchen seine Axe mit der Coordinatenaxe bildet, und ist $M=0$ die Gleichung seines Mittelpunktes in der Normalform, so ist seine Gleichung

$$M^2 = a^2.\cos^2(\theta-\omega) \pm b^2.\sin^2(\theta-\omega).$$

Die Gleichung

$$\lambda M^2 = a^2 . \cos^2(\theta - \omega) \pm b^2 . \sin^2(\theta - \omega)$$

giebt uns durch Variiren von λ eine Schaar concentrischer, ähnlicher und ähnlich gelegener Kegelschnitte an.

Wählt man den Mittelpunkt zum Coordinatenanfang und lässt die Axe mit der Coordinatenaxe zusammenfallen, so wird die Kegelschnitts-Gleichung

$$\varrho^2 = a^2 \cos^2\theta \pm b^2 \sin^2\theta$$

oder in rechtwinkligen Liniencoordinaten

$$a^2\xi^2 \pm b^2\eta^2 = 1.$$

Wählen wir statt des Mittelpunktes den einen Brennpunkt zum Coordinatenanfang, so wird die Gleichung

$$\varrho . F = \pm b^2.$$

Ist hierbei

$$F \equiv \varrho - m \cos\theta - n \sin\theta,$$

so können wir auch schreiben

$$\varrho^2 - m\varrho \cos\theta - n\varrho \sin\theta = \pm b^2.$$

Wir wollen uns nun daran erinnern, dass die polaren Liniencoordinaten der Tangente identisch sind mit den polaren Punktcoordinaten des Fusspunktes des vom Anfang auf sie gefällten Perpendikels. Fassen wir also in der eben entwickelten Gleichung ϱ, θ als Punktcoordinaten auf, so lesen wir sofort den Satz ab: Die Fusspunkte der Senkrechten, welche vom einen Brennpunkte auf die Tangente gefällt werden können, liegen sämmtlich auf der Peripherie eines Kreises. Aehnlich können wir auch mit der Punktgleichung verfahren. Multipliciren wir eine solche mit ϱ, so erhalten wir

$$\varrho^2 - m\varrho \cos\theta - n\varrho \sin\theta = 0,$$

d. h.: Fällt man von einem Punkte Senkrechte auf alle Geraden, welche sich durch einen zweiten Punkt hindurchlegen lassen, so liegen die Fusspunkte auf der Peripherie eines Kreises.

Allgemein lässt sich sagen:

16) L i e g t e i n e G l e i c h u n g m i t e i n e r v a r i a b e l e n L ä n g e n c o o r d i n a t e u n d m i t e i n e r v a r i a b e l e n W i n k e l c o o r d i n a t e v o r, s o k ö n n e n d i e s e b e i d e n G r ö s s e n s o w o h l a l s P u n k t -, a l s a u c h a l s L i n i e n c o o r d i n a t e n a u f g e f a s s t w e r d e n. V o n d e n b e i d e n s o e n t s t a n d e n e n C u r v e n b i l d e t d i e z w e i t e d i e F u s s p u n k t - C u r v e d e r e r s t e r e n i n B e z i e h u n g a u f d e n C o o r d i n a t e n a n f a n g a l s A u s g a n g s p u n k t.

Dieses Verfahren wollen wir nun umgekehrt zur Anwendung bringen, um die Gleichung der Parabel zu finden. Bekanntlich ist die Fusspunkt-Curve einer Parabel mit deren Brennpunkt als Ausgangspunkt die Scheiteltangente. Wählen wir den Brennpunkt zum Coordinatenanfang und die Parabelaxe zur Coordinatenaxe, so ist, wenn q die Focaldistanz des Scheitels bezeichnet, die Gleichung der Scheiteltangente in polaren Punktcoordinaten

$$\varrho \cos\theta = q.$$

Folglich heisst die Gleichung der Parabel in polaren Liniencoordinaten ebenso. Auf Grund der Coordinatentransformation 9) schliessen wir:

17) Ist $F=0$ die Gleichung des Brennpunktes der Parabel in der Normalform, ω der Winkel, welchen ihre Axe mit der Coordinatenaxe bildet, und q die Focaldistanz des Scheitels, so ist ihre Gleichung

$$F.\cos(\theta-\omega) = q.$$

Wählen wir den Scheitel als Coordinatenanfang und nehmen $\omega = 180^0$, also die gewöhnliche Lage der Parabel, so ist

$$F \equiv \varrho - q\cos\theta$$

und die Parabelgleichung wird

$$\varrho\cos\theta - q\cos^2\theta + q = 0$$

oder

$$\varrho\cot\theta + q\sin\theta = 0.$$

Von Interesse ist noch der Uebergang der Gleichung des Centralkegelschnittes in die der Parabel. Nehmen wir in der ersteren den einen Brennpunkt zum Coordinatenanfang an und $\omega = 180^0$, so wird

$$F_1 \equiv \varrho, \quad F_2 \equiv \varrho + 2c.\cos\theta.$$

Alsdann kann die Gleichung des Centralkegelschnittes geschrieben werden

$$\varrho\left(\frac{\varrho}{2c} + \cos\theta\right) = \frac{b^2}{2c}.$$

Beim Uebergang zur Parabel wird $c = \infty$, und die Gleichung lautet

$$\varrho.\cos\theta = \lim\frac{b^2}{2c},$$

also ist

$$\lim\frac{b^2}{2c} = q.$$

Wir können auch leicht durch Liniencoordinaten eine Punktgleichung der Ellipse herstellen.

Der Ellipsengleichung in Punktcoordinaten

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

wird auch genügt durch

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi.$$

Setzen wir diese Werthe in die Punktgleichung ein, so erhalten wir

$$\varrho = a.\cos\varphi\cos\theta + b.\sin\varphi\sin\theta.$$

Durch Verallgemeinerung des Coordinatensystems ergiebt sich folgender Satz:

Variirt in der Punktgleichung

$$M = a.\cos\varphi\cos(\theta-\omega) + b\sin\varphi\sin(\theta-\omega)$$

oder auch

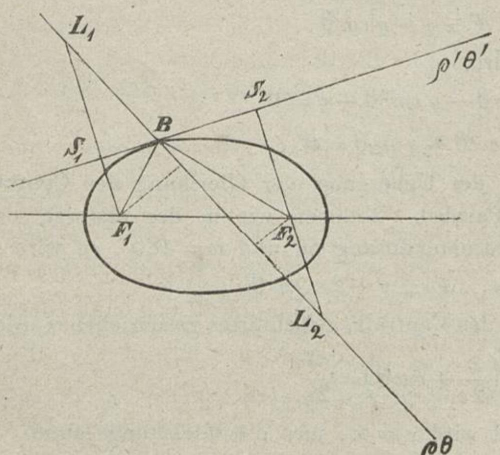
$$M = \frac{a+b}{2}\cos(\varphi-\theta+\omega) + \frac{a-b}{2}\cos(\varphi+\theta-\omega)$$

der Winkel φ, so beschreibt der Punkt eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Gleichung $M=0$ befriedigt, deren Halbaxen a und b sind und deren Hauptaxe mit der Coordinatenaxe den Winkel ω bildet.

Aehnliches lässt sich von der Hyperbel nachweisen.

Wir gehen nun dazu über, die Gleichung des Berührungspunktes bei dem Centralkegelschnitt zu entwickeln. Wir stützen uns dabei auf den Satz, dass die Radien vectoren des Berührungspunktes mit der Tangente gleiche Winkel bilden. In Fig. 2 sind von den Brennpunkten F_1 und F_2 auf die Tangente mit den Coordinaten ϱ', θ' und dem Berührungspunkte B die Senkrechten F_1S_1 und F_2S_2 gefällt worden. Ferner ist durch B eine beliebige Gerade mit den Coordinaten ϱ, θ gelegt worden, und sind die Senkrechten bis zu ihren Schnittpunkten L_1, L_2 mit dieser verlängert worden. Dann ist nach jenem Satze

Fig. 2.



$$\angle F_1BS_1 = \angle F_2BS_2, \text{ also } \triangle F_1BS_1 \sim \triangle F_2BS_2,$$

und verhält sich sonach

$$F_1S_1 : F_2S_2 = BS_1 : BS_2 = L_1S_1 : L_2S_2.$$

Hieraus geht hervor

$$\frac{L_1S_1}{F_1S_1} = \frac{L_2S_2}{F_2S_2}, \quad \frac{L_1F_1}{F_1S_1} - 1 = \frac{L_2F_2}{F_2S_2} + 1, \quad \frac{L_1F_1}{F_1S_1} - \frac{L_2F_2}{F_2S_2} = 2.$$

Ist nun die Gleichung des einen Brennpunktes in der Normalform $F_1 = 0$, so ist nach 6) F_1 die Länge desjenigen Perpendikels, welches von diesem Brennpunkte auf die Gerade $\varrho\,\theta$ gefällt werden kann. Die beiden von F_1 ausgehenden Perpendikel bilden nun denselben Winkel, als die sich in B kreuzenden Geraden, nämlich $\angle(\theta-\theta')$, also ist

$$F_1 = F_1L_1\cos(\theta-\theta').$$

Ferner erhalten wir die Länge des Perpendikels $F_1 S_1$ dadurch, dass wir in die Gleichung $F_1 = 0$ die Coordinaten ϱ', θ' einsetzen. Wir wollen den so erhaltenen Werth mit F'_1 bezeichnen; dann ist

$$\frac{L_1 F_1}{F_1 S_1} = \frac{F_1}{F'_1 \cos(\theta - \theta')}.$$

Analog ist

$$\frac{L_2 F_2}{F_2 S_2} = - \frac{F_2}{F'_2 \cos(\theta - \theta')}.$$

Somit wird die Gleichung des Berührungspunktes

$$18) \qquad \frac{F_1}{F'_1} + \frac{F_2}{F'_2} = 2 \cos(\theta - \theta').$$

Multipliciren wir die Gleichung mit $F'_1 F'_2$ und berücksichtigen, dass weil $\varrho'\theta'$ Tangente ist, die Gleichung existiren muss

$$F'_1 F'_2 = \pm b^2,$$

so erhalten wir für die Gleichung des Berührungspunktes

$$19) \qquad F_1 F'_2 + F_2 F'_1 = \pm 2 b^2 . \cos(\theta - \theta').$$

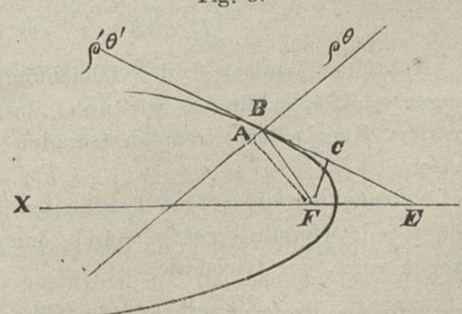
In dieser Form wird uns die Gleichung ihrer Symmetrie wegen noch Dienste leisten. Ausserdem sei noch bemerkt, dass die Entwickelung bei der Hyperbel im Wesentlichen dieselbe ist und dass das Resultat vollständig mit dem angegebenen übereinstimmt.

Im speciellen Falle $F_1 = F_2$ erhalten wir die Gleichung des Berührungspunktes beim Kreise, dessen Mittelpunkt $M = 0$ und dessen Radius r ist, in den beiden Formen

$$20) \qquad \frac{M}{M'} = \cos(\theta - \theta'), \quad M = \pm r . \cos(\theta - \theta').$$

Die Gleichung des Berührungspunktes bei der Parabel stützen wir auf den Satz, dass die Tangente mit der Axe denselben Winkel bildet, als mit dem Radius vector ihres Berührungspunktes. Es sei B der Berührungspunkt (Fig. 3). Durch ihn gehe eine Tangente mit den Coordinaten ϱ', θ', welche die Parabelaxe FX in E schneidet; ausserdem gehe durch ihn eine andere Gerade ϱ, θ. Vom Brennpunkte F sei auf letztere das Perpendikel FA und auf die Tangente das FC gefällt. Lassen wir die obige Bezeichnung auch hier gelten, so ist $FA \equiv F$, $FC \equiv F'$. Denken wir uns ausserdem die Parabelaxe der Curvenaxe parallel, so ist

Fig. 3.



$$\angle AF = \theta \text{ und } \angle CFX = \theta'.$$

Ferner ist nach dem obengenannten Satze

$$\angle BF = 2 . \angle BEF = 2[\angle CF - 90^0] = 2\theta' - 180,$$

also $\angle BFA = 2\theta' - \theta - 180^0$ und

$$\frac{F}{cos(\theta - 2\theta')} = -BF = \frac{F'}{cos\theta'},$$

da $\angle BFC = \angle EFC$. Also ist die Gleichung des Berührungspunktes

$$21) \qquad F cos\theta' = F' cos(\theta - 2\theta').$$

Wir können diese Gleichung auch aus der entsprechenden bei dem Centralkegelschnitt herleiten. Läuft wieder die Curvenaxe der Coordinatenaxe parallel und fällt der Anfang mit dem einen Brennpunkt $F_1 = 0$ zusammen, so ist für den andern

$$F_2 \equiv \varrho - 2c\, cos\theta, \quad F'_2 \equiv \varrho' - 2c\, cos\theta',$$

mithin

$$\frac{F_2}{F'_2} = \frac{\frac{\varrho}{2c} - cos\theta}{\frac{\varrho'}{2c} - cos\theta'}.$$

Geht nun der Kegelschnitt in eine Parabel über, so ist $2c = \infty$, und jener Bruch wird

$$\frac{F_2}{F'_2} = \frac{cos\theta}{cos\theta'},$$

also die Gleichung des Berührungspunktes [s. 18)]

$$\frac{F}{F'} + \frac{cos\theta}{cos\theta'} = 2\, cos(\theta - \theta').$$

Wegen $2\, cos\alpha\, cos\beta = cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta)$ ist dann

$$\frac{F . cos\theta'}{F'} + cos\theta = cos\theta + cos(\theta - 2\theta')$$

oder endlich

$$F . cos\theta' = F' . cos(\theta - 2\theta').$$

Aus der Symmetrie der Gleichung des Berührungspunktes einer Tangente, 19), schliessen wir nun, dass die G l e i c h u n g d e s P o l e s der dem Kegelschnitt fremden Geraden $\varrho'\theta'$ dieselbe sei, in folgender Weise.

Nehmen wir die beiden bestimmten Tangenten $\varrho'\theta'$ und $\varrho''\theta''$ an, so genügt jede Gerade, welche durch den Berührungspunkt der ersteren gezogen wird, der Gleichung

$$F_1 F'_2 + F_2 F'_1 = \pm\, 2b^2 . cos(\theta - \theta'),$$

und eine jede Gerade, welche durch den Berührungspunkt der zweiten gezogen wird, der Gleichung

$$F_1 F''_2 + F_2 F''_1 = \pm\, 2b^2 . cos(\theta - \theta'').$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten derjenigen Geraden, welche beide Berührungspunkte miteinander verbindet, mit ϱ^0, θ^0, so muss das System der beiden Gleichungen identisch giltig sein:

$$F_1^0 F'_2 + F_2^0 F'_1 = \pm 2b^2 . \cos(\theta^0 - \theta'),$$
$$F_2^0 F''_2 + F_2^0 F''_1 = \pm 2b^2 . \cos(\theta^0 - \theta'').$$

Stellen wir nun die Gleichung auf

$$F_1^0 F_2 + F_2^0 F_1 = \pm 2b^2 \cos(\theta^0 - \theta),$$

so ist dieselbe ihrem Bau nach die eines Punktes, und zwar wegen der soeben angegebenen Identitäten die Gleichung desjenigen Punktes, durch welchen die beiden Geraden $\varrho'\theta'$ und $\varrho''\theta''$ hindurchgehen, d. h. des Schnittpunktes beider Tangenten. Bekanntlich wird aber dieser Punkt als Pol der Geraden $\varrho^0\theta^0$ bezeichnet. Wenden wir endlich statt der Coordinaten $\varrho^0\theta^0$ die anderen $\varrho'\theta'$ wieder an, so gilt Folgendes:

Die Gleichung des Poles der Geraden $\varrho'\theta'$ ist

22) $$F_1 F'_2 + F_2 F'_1 = \pm 2b^2 . \cos(\theta - \theta').$$

Schneidet die Gerade $\varrho'\theta'$ den Kegelschnitt gar nicht, so kann doch ihr Pol nach 22) construirt werden, und halten wir die Bezeichnung „Pol der Geraden" fest, wiewohl die bisherige Erklärung nicht mehr anwendbar ist.

Wir können auch in der Gleichung 22) beide Coordinatenpaare $\varrho\theta$ und $\varrho'\theta'$ als veränderlich annehmen und sagen dann, jene Gleichung ist die Bedingung dafür, dass die beiden Geraden $\varrho\theta$ und $\varrho'\theta'$ harmonische Polaren sind.

Bei Aufstellung der Centralgleichung des Kegelschnitts 15) benutzten wir die Gleichungen

$$F_1 + F_2 = 2M \text{ und } F_1 - F_2 = 2c . \cos(\theta - \omega).$$

Dem entsprechend ist

$$F'_1 + F'_2 = 2M' \text{ und } F'_1 - F'_2 = 2c . \cos(\theta' - \omega),$$

Durch Multiplication je zweier untereinander stehenden Gleichungen ergiebt sich

$$F_1 F'_1 + F_1 F'_2 + F_2 F'_1 + F_2 F'_2 = 4MM',$$
$$F_1 F'_1 - F_1 F'_2 - F_2 F'_1 + F_2 F'_2 = 4c^2 . \cos(\theta - \omega)\cos(\theta' - \omega),$$

also durch Subtraction

$$F_1 F'_2 + F_2 F'_1 = 2MM' - 2c^2 . \cos(\theta - \omega)\cos(\theta' - \omega);$$

nach 22)

$$MM' - c^2 . \cos(\theta - \omega)\cos(\theta' - \omega) = \pm b^2 . \cos(\theta - \theta').$$

Da $c^2 = a^2 \mp b^2$ und $\theta - \theta' = (\theta - \omega) - (\theta' - \omega)$, so ist die Gleichung des Poles mit Hilfe der Centralgleichung

23) $$MM' = a^2 \cos(\theta - \omega) . \cos(\theta' - \omega) \pm b^2 . \sin(\theta - \omega)\sin(\theta' - \omega).$$

Nehmen wir den Curvenmittelpunkt zum Coordinatenanfang und setzen $\omega = 0$, so wird diese Gleichung

$$\varrho\varrho' = a^2 \cos\theta' \cos\theta \pm b^2 \sin\theta' \sin\theta.$$

Sind also x, y die Polarcoordinaten, so ist

$$x = a^2 \frac{\cos\theta'}{\varrho'}, \quad y = \pm b^2 \frac{\sin\theta'}{\varrho'}.$$

Lassen wir noch die Accente fort und denken an den Zusammenhang zwischen rechtwinkligen und polaren Liniencoordinaten, so können wir sagen:

24) Sind x, y Punktcoordinaten und ξ, η oder ϱ, θ die Liniencoordinaten seiner Polare in Beziehung auf den Kegelschnitt

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so ist

$$-\xi = \frac{\cos\theta}{\varrho} = \frac{x}{a^2} \text{ und } -\eta = \frac{\sin\theta}{\varrho} = \frac{y}{\pm b^2}.$$

Sind r, t die Polarcoordinaten des Poles, so ist

$$r^2 = \xi^2 a^4 + \eta^2 b^4, \quad \frac{tg\,\theta}{tg\,t} = \frac{a^2}{\pm b^2}.$$

Für $x = y = 0$ wird, da wegen $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ nicht $\cos\theta = \sin\theta = 0$ sein kann, $\varrho = \infty$, d. h. die Polare des Mittelpunktes liegt im Unendlichen. Einer linearen oder quadratischen Verbindung der rechten Seiten entspricht eine ebensolche der linken. D. h.: „Bewegt sich der Punkt auf einer geraden Linie oder beschreibt er einen Kegelschnitt, so dreht sich seine Polare um einen festen Punkt, resp. beschreibt auch einen Kegelschnitt, und umgekehrt.“

§ 3.

Discussion der Kegelschnitts-Gleichung in der allgemeinen Form.

Die Kegelschnittsgleichung in rechtwinkligen Liniencoordinaten lautet in der allgemeinen Form

25) $$\alpha_{11}\xi^2 + 2\alpha_{12}\xi\eta + \alpha_{22}\eta^2 + 2\alpha_{13}\xi + 2\alpha_{23}\eta + \alpha_{33} = 0.$$

Durch Substitution von

$$\xi = -\frac{\cos\theta}{\varrho}, \quad \eta = -\frac{\sin\theta}{\varrho}$$

geht dieselbe in folgende Gleichung mit Polarcoordinaten über:

26) $$\alpha_{33}\varrho^2 - 2\varrho(\alpha_{13}\cos\theta + \alpha_{23}\sin\theta) + \alpha_{11}\cos^2\theta + \alpha_{22}\sin^2\theta + \alpha_{12}\sin 2\theta = 0.$$

Wir fragen zunächst: Unter welcher Bedingung zerfällt der Kegelschnitt in die beiden Punkte mit den rechtwinkligen Coordinaten x_f, y_f und x_g, y_g? Alsdann muss sein

$$\alpha_{33}(\varrho - x_f\cos\theta - y_f\sin\theta)(\varrho - x_g\cos\theta - y_g\sin\theta)$$
$$\equiv \alpha_{33}\varrho^2 - 2\varrho(\alpha_{13}\cos\theta + \alpha_{23}\sin\theta) + \alpha_{11}\cos^2\theta + \alpha_{22}\sin^2\theta + \alpha_{12}\sin^2\theta$$

Setzen wir nacheinander $\varrho = 0$, $\theta = 0$, $\theta = 90^0$, so ergiebt sich

$$\alpha_{33}(x_f + x_g) = 2\alpha_{13}, \quad \alpha_{33}(y_f + y_g) = 2\alpha_{23},$$
$$\alpha_{33}\, x_f x_g = \alpha_{11}, \quad \alpha_{33}\, y_f y_g = \alpha_{22},$$
$$\alpha_{33}(x_f y_g + y_f x_g) = 2\alpha_{12}.$$

Hieraus folgt:

26*) $\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{33}}, \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{33}}$ sind die rechtwinkligen Coordinaten der Mitte der Verbindungslinie beider Punkte.

x_f und x_g sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\alpha_{33} x^2 - 2\alpha_{13} x + \alpha_{11} = 0,$$

ebenso y_f und y_g die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\alpha_{33} y^2 - 2\alpha_{23} y + \alpha_{22} = 0.$$

Es ist mithin

$$\alpha_{33}\, x_f = \alpha_{13} \pm \sqrt{\alpha^2_{13} - \alpha_{11}\alpha_{33}},$$
$$\alpha_{33}\, x_g = \alpha_{13} \mp \sqrt{\alpha^2_{13} - \alpha_{11}\alpha_{33}},$$
$$\alpha_{33}\, y_f = \alpha_{23} \pm \sqrt{\alpha^2_{23} - \alpha_{22}\alpha_{33}},$$
$$\alpha_{33}\, y_g = \alpha_{23} \mp \sqrt{\alpha^2_{23} - \alpha_{22}\alpha_{33}}.$$

Die Bedingung, unter welcher die Zerlegung möglich ist, lautet dann

$$\alpha_{13}\alpha_{23} - \sqrt{\alpha^2_{13} - \alpha_{11}\alpha_{33}} \cdot \sqrt{\alpha^2_{23} - \alpha_{22}\alpha_{33}} = \alpha_{12}\alpha_{33}.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\Delta \equiv \frac{1}{\alpha_{33}}\left[(\alpha^2_{13} - \alpha_{11}\alpha_{33})(\alpha^2_{23} - \alpha_{22}\alpha_{33}) - (\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}\alpha_{33})^2\right]$$

27)
$$= 2\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha^2_{12}\alpha_{33} - \alpha^2_{23}\alpha_{11} - \alpha^2_{13}\alpha_{22} + \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}$$
$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix}.$$

Alsdann lautet das gefundene Resultat:

28) Unter der Bedingung

$$\Delta = 0$$

zerfällt der Kegelschnitt in zwei Punkte.

Nehmen wir ferner an, dass die Gleichung 26) einen wirklichen Kegelschnitt vertritt, so können wir rücksichtlich der Grösse α_{33} die beiden Fälle unterscheiden:

$$\text{I. } \alpha_{33} = 1; \qquad \text{II. } \alpha_{33} = 0.$$

Jeder andere Fall lässt sich leicht auf den ersten zurückführen. Wir wollen zunächst diesen ersten Fall festhalten.

Die kleine Halbaxe des Kegelschnitts sei b. Ihr Quadrat b^2 denken wir uns stets, um gleichzeitig beide Curvengattungen zu betrachten, als mit doppeltem Vorzeichen versehen, lassen es aber der Einfachheit halber fort. Dann lässt sich die Gleichung 26) auch so schreiben:

$$29)\quad \varrho^2 - 2\varrho(\alpha_{13}\cos\theta + \alpha_{23}\sin\theta) + (\alpha_{11}+b^2)\cos^2\theta + (\alpha_{22}+b^2).\sin^2\theta + \alpha_{12}\sin 2\theta = b^2.$$

Diese Gleichung muss ferner auf die Form 12)

$$F_1 F_2 = b^2$$

gebracht werden können, d. h. die linke Seite muss sich in zwei Factoren zerlegen lassen, oder b^2 ist eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$30)\quad \begin{vmatrix} \alpha_{11}+b^2 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}+b^2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 0$$

oder auch der Gleichung

$$31)\quad b^4 - b^2(\alpha^2_{13} + \alpha^2_{23} - \alpha_{11} - \alpha_{22}) + \varDelta = 0.$$

Sind $x_m . y_m$ die rechtwinkligen Coordinaten des Mittelpunktes, so erhalten wir aus 26*) sofort ihre Werthe, da der Mittelpunkt die Verbindungslinie der Brennpunkte halbirt. Es ist also

$$x_m = \alpha_{13}, \quad y_m = \alpha_{23}$$

die Mittelpunktsgleichung

$$32)\quad M \equiv \varrho - \alpha_{13}\cos\theta - \alpha_{23}\sin\theta = 0.$$

Hiernach lässt sich die Kegelschnittsgleichung auch so schreiben:

$$2M\varrho - \varrho^2 + \alpha_{11}\cos^2\theta + \alpha_{22}\sin^2\theta + \alpha_{12}\sin 2\theta = 0$$

oder auch

$$33)\quad M^2 = (\alpha^2_{13} - \alpha_{11})\cos^2\theta + (\alpha^2_{23} - \alpha_{22})\sin^2\theta + (\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12})\sin 2\theta = 0.$$

Vergleichen wir sie in dieser Gestalt mit der Gleichung 15)

$$M^2 = a^2\cos^2(\theta - \omega) + b^2.\sin^2(\theta - \omega),$$

so ergiebt sich

$$34)\quad \begin{aligned} \alpha^2_{13} - \alpha_{11} &= a^2.\cos^2\omega + b^2.\sin^2\omega, \\ \alpha^2_{23} - \alpha_{22} &= a^2.\sin^2\omega + b^2.\cos^2\omega, \\ \alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12} &= (a^2 - b^2).\frac{\sin 2\omega}{2}. \end{aligned}$$

Durch Addition der beiden ersten Gleichungen erhalten wir

$$35)\quad \alpha^2_{13} + \alpha^2_{23} - \alpha_{11} - \alpha_{22} = a^2 + b^2.$$

Setzen wir diesen Werth in 31) ein, so wird dieselbe

$$b^4 - b^2(a^2 + b^2) + \varDelta = 0,$$

d. h.

$$36)\quad \varDelta = a^2.b^2.$$

Aus 35) und 36) erkennen wir, dass a^2 die andere Wurzel der quadratischen Gleichung 30) ist.

a^2 und b^2 sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$37)\quad \begin{vmatrix} \alpha_{11}+z & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}+z & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$z^2 - z(\alpha^2_{13} + \alpha^2_{23} - \alpha_{11} - \alpha_{22}) + \Delta = 0.$$

Dividiren wir die dritte Gleichung von 34) durch die Differenz der beiden ersten, so haben wir

$$38) \qquad tg\, 2\omega = \frac{2(\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12})}{\alpha^2_{13} - \alpha^2_{23} - \alpha_{11} + \alpha_{22}}.$$

Aus der Gleichung 37) scheint hervorzugehen, dass, wenn wir die Kegelschnittsgleichung in der Form schreiben:

$$\varrho^2 - 2\varrho(\alpha_{13}\cos\theta + \alpha_{23}\sin\theta) + (\alpha_{11} + a^2)\cos^2\theta + (\alpha_{22} + a^2)\sin^2\theta + \alpha_{12}\sin 2\theta = a^2,$$

sich die linke Seite derselben ebenfalls in zwei Factoren zerlegen lassen müsse. Man erhält dann in der That auch zwei Brennpunkte, aber zwei imaginäre; sie liegen auf der reellen kleinen Axe des Kegelschnittes, um $\pm i\sqrt{a^2 - b^2}$ vom Mittelpunkte entfernt. Wir haben so die fünf wichtigsten Momente des Kegelschnittes, nämlich seinen Mittelpunkt, seine Halbaxen und die Richtung seiner Axe auf einfache Weise aus der allgemeinen Gleichung bestimmt. Bei der Berechnung der quadratischen Gleichung 37) kann man nie im Zweifel sein, welche Wurzel a^2 und welche b^2 angiebt. Erhält man nämlich zwei positive Werthe, so ist die Curve eine Ellipse, also der grössere Werth a^2 und der kleinere b^2. Erhält man eine positive und eine negative Wurzel, so ist die Curve eine Hyperbel, und die positive $= a^2$, die negative $= b^2$. Sind die Wurzeln beide negativ, so wird allerdings die Curve imaginär. Dies tritt ein, wenn $\Delta > 0$ und $\alpha^2_{13} + \alpha^2_{23} < \alpha_{11} + \alpha_{22}$. Mit Benutzung von 27) können die Bedingungen auch geschrieben werden

$$(\alpha^2_{13} - \alpha_{11})(\alpha^2_{23} - \alpha_{22}) > (\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12})^2, \quad (\alpha^2_{13} - \alpha_{11}) + (\alpha^2_{23} - \alpha_{22}) < 0.$$

Ist nun aber die Summe zweier Grössen negativ, aber ihr Product positiv, so muss jede einzelne negativ sein. Also können wir auch sagen

$$\alpha_{11} > \alpha^2_{13}, \quad \alpha_{22} > \alpha^2_{23}, \quad \Delta > 0.$$

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung würden complex sein, wenn

$$0 > [(\alpha^2_{13} - \alpha_{11}) + (\alpha^2_{23} - \alpha_{22})]^2 - 4\Delta \text{ nach 27)},$$
$$0 > [(\alpha^2_{13} - \alpha_{11}) + (\alpha^2_{23} - \alpha_{22})]^2 - 4(\alpha^2_{13} - \alpha_{11})(\alpha^2_{23} - \alpha_{22}) + 4(\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12})^2,$$
$$0 > [(\alpha^2_{13} - \alpha_{11}) - (\alpha^2_{23} - \alpha_{22})]^2 + 4(\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12})^2,$$

was niemals möglich ist.

Also ist der einzige Fall, in welchem bei reellen Grössen α der Kegelschnitt imaginär wird, der, dass die quadratische Gleichung zwei negative Wurzeln besitzt. Denn in jedem andern Falle lässt sich a^2, b^2, x_m, y_m und ω in brauchbarer Weise bestimmen. Man stösst nirgends auf Schwierigkeiten.

Soll die Curve einen Kreis mit dem Radius r darstellen, so muss nach den Gleichungen 34) sein

$$\alpha_{13}\alpha_{23} = \alpha_{12} \text{ und } r^2 = \alpha^2_{13} - \alpha_{11} = \alpha^2_{23} - \alpha_{22}.$$

Dann wird auch, wie das sein muss, Gleichung 38)

$$tg\, 2\omega = \tfrac{0}{0}.$$

Für $a^2 + b^2 = 0$ haben wir eine gleichseitige Hyperbel, d. h. wenn $\varDelta < 0$, $\alpha^2_{13} + \alpha^2_{23} = \alpha_{11} + \alpha_{22}$. Dann ist nämlich $a = \sqrt{-\varDelta}$. Wir fassen nun das gefundene Resultat zusammen.

39) Die Gleichung

$$\alpha_{11}\xi^2 + 2\alpha_{12}\xi\eta + \alpha_{22}\eta^2 + 2\alpha_{13}\xi + 2\alpha_{22}\eta + 1 = 0$$

stellt eine Ellipse, ein Punktpaar oder eine Hyperbel dar, je nachdem

$$\varDelta \gtreqless 0.$$

Die Ellipse wird imaginär, wenn

$$\alpha_{11} > \alpha^2_{13}, \quad \alpha_{22} > \alpha^2_{23}.$$

Sie wird ein Kreis mit dem Radius r, wenn

$$\alpha_{13}\alpha_{23} = \alpha_{12}, \quad \alpha^2_{13} - \alpha_{11} = \alpha^2_{23} - \alpha_{22} = r^2.$$

Zur Bestimmung der Brennpunkte x_f, y_f und x_g, y_g bedienen wir uns der bei Gleichung 26) gefundenen Werthe. Wir müssen dabei berücksichtigen, dass die Grössen α_{11} und α_{22} eine Vermehrung um b^2 erlitten haben, und erhalten dann

$$40)\quad \left.\begin{array}{l} x_f + x_g = 2\alpha_{13},\ x_f . x_g = \alpha_{11} + b^2 \\ y_f + y_g = 2\alpha_{23},\ y_f . y_g = \alpha_{22} + b^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_f . x_g - y_f . y_g = \alpha_{11} - \alpha_{22}, \\ x_f . y_g + x_g . y_f = 2\alpha_{12}. \end{array}$$

Wir haben nun zur Bestimmung der Brennpunkte vier zum Theil quadratische Gleichungen mit vier Unbekannten. Setzen wir $x_g = 2\alpha_{13} - x_f = 2a_{13} - x$ und $y_g = 2\alpha_{23} - y_f = 2\alpha_{23} - y$ in den anderen Gleichungen ein, so erhalten wir als Bestimmungsgleichungen der Brennpunkt-Coordinaten

$$\left\{\begin{array}{l} xy - \alpha_{23}x - \alpha_{13}y + \alpha_{12} = 0, \\ x^2 - y^2 - 2\alpha_{13}x + 2\alpha_{23}y + \alpha_{11} - \alpha_{22} = 0 \end{array}\right.$$

41) oder auch

$$\left\{\begin{array}{l} (x - \alpha_{13})(y - \alpha_{23}) = \alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}, \\ (x - \alpha_{13})^2 - (y - \alpha_{23})^2 = \alpha^2_{13} - \alpha^2_{23} - \alpha_{11} + \alpha_{22}. \end{array}\right.$$

Beide Gleichungen sind miteinander verwandt. Betrachten wir nämlich x, y nicht als Unbekannte, sondern als Veränderliche, so drücken beide Gleichungen gleichseitige, dem Kegelschnitt concentrische Hyperbeln aus, und zwar sind die Asymptoten der einen Hyperbel die Axen der anderen, und umgekehrt. Schreiben wir die Kegelschnittsgleichung in der Form

$$\varrho^2 - 2\varrho(\alpha_{13}\cos\theta + \alpha_{23}\sin\theta) + \beta_{11}\cos^2\theta + \beta_{12}\sin 2\theta + \beta = 0,$$

wo $\beta_{11} = \alpha_{11} - \alpha_{22}$, $\beta_{12} = \alpha_{12}$ und $\beta = \alpha_{22}$, so sehen wir, was schon Gleichung 12) folgern liess, dass durch Variiren von β eine confocale Kegelschnittsschaar entsteht. Lassen wir weiter auch noch β_{12} variiren, so beschreiben die Brennpunkte die zweite der in 41) angegebenen Hyperbeln; variirt dagegen β_{11}, so beschreiben sie die erste.

Sind r_f, θ_f und r_g, θ_g die Polarcoordinaten der Brennpunkte, so werden die letzten Gleichungen von 40)

$$r_f r_g . \sin(\theta_f+\theta_g) = 2\alpha_{12},$$
$$r_f r_g . \cos(\theta_f+\theta_g) = \alpha_{11}-\alpha_{22},$$

durch Division

42) $$tg(\theta_f+\theta_g) = \frac{2\alpha_{12}}{\alpha_{11}-\alpha_{22}}.$$

Verbindet man die Brennpunkte mit dem Coordinatenanfang und halbirt den Winkel der Verbindungslinien, so schliesst diese Halbirungslinie mit der Coordinatenaxe den Winkel $\frac{\theta_f+\theta_g}{2}$ ein. Wir sehen daher, dass wir diesem Winkel durch Drehung der Coordinatenaxe jeden beliebigen Werth geben können. Hat er den Werth Null, so ist auch $\alpha_{12}=0$ und die Brennpunkte liegen auf der ersteren der in 41) angegebenen Hyperbeln, welche durch den Coordinatenanfang hindurchgeht und deren Asymptoten den Coordinatenaxen parallel laufen. Ist $\frac{\theta_f+\theta_g}{2}=45^0$, also $tg(\theta_f+\theta_g)=\infty$, und $\alpha_{11}-\alpha_{22}=0$, so erhalten wir als Ort der Brennpunkte die zweite Hyperbel, welche durch den Anfang geht, die neuen Coordinatenaxen aber zu Curvenaxen hat. Da eine Drehung von 45^0 stattgefunden hat, so finden wir das Obige bestätigt.

Die Gleichungen 41) sind dann von Wichtigkeit, wenn die Grössen α von einer Veränderlichen abhängig gemacht sind, wodurch die allgemeine Gleichung zweiten Grades eine Schaar Kegelschnitte vertritt. Eliminirt man dann aus beiden Gleichungen diese Veränderliche, so erhält man den Ort der Brennpunkte der genannten Kegelschnittsschaar.

Die Halbaxen des Kegelschnittes ergeben sich dann besonders leicht, wenn

$$\alpha_{13}\alpha_{23}=\alpha_{12}, \quad \alpha^2_{13}-\alpha_{11} \gtrless \alpha^2_{23}-\alpha_{22}.$$

Dann ist nach 38) $tg\,2\omega=0$, also entweder $\omega=0$ oder $\omega=90^0$, und zwar

$$\text{für } \omega=0 \text{ nach 34): } a^2=\alpha^2_{13}-\alpha_{11}, \quad b^2=\alpha^2_{23}-\alpha_{22},$$

und

$$\text{für } \omega=90^0\text{: } \quad a^2=\alpha^2_{23}-\alpha_{22}, \quad b^2=\alpha^2_{13}-\alpha_{11}.$$

Hiermit stimmt überein, dass für $\alpha_{13}\alpha_{23}-\alpha_{12}=0$ nach 41) sein muss

$$(x_f-x_m)(y_f-y_m)=0,$$

d. h. entweder $x_f=x_m$, dann ist $\omega=90^0$, oder $y_f=y_m$, dann ist $\omega=0$.

Für $\alpha^2_{13}-\alpha_{11}=\alpha^2_{23}-\alpha_{22}$, $\alpha_{13}\alpha_{23}\gtrless\alpha_{12}$ wird $tg\,2\omega=\infty$, also $\omega=45_0$ oder $\omega=135^0$. Dann ist [Gleichung 34)]

$$a^2 + b^2 = 2(\alpha^2_{13} - \alpha_{11}),$$
$$a^2 - b^2 = 2(\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}).$$

Diese Fälle kann man bei jedem Kegelschnitte durch Axendrehung herbeiführen.

Ist der Anfang auch Curvenmittelpunkt, so ist wegen $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes

$$\varrho^2 + \alpha_{11}\cos^2\theta + \alpha_{22}\sin^2\theta + \alpha_{12}\sin 2\theta = 0.$$

Steht eine der beiden Curvenaxen auf der Coordinatenaxe senkrecht, so ist $\alpha_{12} = 0$ und die Gleichung selbst

$$\varrho^2 + \alpha_{11}\cos^2\theta + \alpha_{22}\sin^2\theta = 0.$$

Ist die grosse Axe Coordinatenaxe, so ist $\alpha_{11} = -a^2$, $\alpha_{22} = -b^2$; ist die kleine Axe Coordinatenaxe, so ist $\alpha_{11} = -b^2$, $\alpha_{22} = -a^2$. Bei einer Neigung von 45^0 ist $\alpha_{11} = \alpha_{22}$, also die Curvengleichung

$$\varrho^2 + \alpha_{11} + \alpha_{12}\sin 2\theta = 0,$$

und zwar ist $\alpha_{11} = -\frac{a^2+b^2}{2}$, $\alpha_{12} = -\frac{a^2-b^2}{2}$. Man vergleiche bei diesen Werthen die Centralgleichung 15).

Wir wollen noch Einiges durchnehmen über die geometrische Bedeutung der Coefficienten der allgemeinen Gleichung in der Form

$$\varrho^2 - 2\varrho(\alpha_{13}\cos\theta + \alpha_{23}\sin\theta) + \alpha_{11}\cos^2\theta + \alpha_{22}\sin^2\theta + \alpha_{12}\sin 2\theta = 0.$$

Die nothwendige Homogeneïtät der Gleichung zeigt uns, dass α_{13} und α_{23} Strecken, α_{11}, α_{22} und α_{12} Flächen sind. Ersteres haben wir schon constatirt. Es sind nämlich α_{13} und α_{23} die Entfernungen des Mittelpunktes von den beiden Coordinatenaxen. Um α_{11} und α_{22} zu interpretiren, übertragen wir den Begriff der Potenz des Punktes beim Kreise auf die Potenz einer Geraden beim Kegelschnitt. Wir wollen unter derselben die Differenz verstehen, welche wir erhalten, wenn wir vom Rechteck aus den Abständen der Brennpunkte von der Geraden das Quadrat der kleinen Halbaxe subtrahiren. Es ist klar, dass eine Gerade mit dem Kegelschnitt zwei, einen oder gar keinen Punkt gemeinsam hat, je nachdem ihre Potenz negativ, Null oder positiv ist. Wir sehen aus der Kegelschnittsgleichung $F_1 F_2 - b^2 = 0$, dass wir die Potenz einer beliebigen Geraden erhalten, wenn wir ihre Coordinaten in die linke Seite der Kegelschnittsgleichung einsetzen. Da die Coordinatenaxe (x-Axe) die Coordinaten $\varrho = 0$, $\theta = 90^0$ besitzt, so ist ihre Potenz $= \alpha_{22}$, und da die y-Axe die Coordinaten $\varrho = 0$, $\theta = 0$ hat, so ist ihre Potenz $= \alpha_{11}$. Da ferner nach 42) $\alpha_{12} = \frac{1}{2} r_f . r_g . \sin(\theta_f + \theta_g)$, so können wir sagen: α_{12} ist die Fläche desjenigen Dreiecks, welches den Coordinatenanfang, den einen Brennpunkt und den Spiegelpunkt des andern in Beziehung auf die Coordinatenaxe zu Ecken hat.

Nach dieser Ausführung scheint die Discussion der allgemeinen Kegelschnittsgleichung und die Bestimmung der für den Kegelschnitt wichtigsten Grössen a, b, x_m, y_m, ω in Liniencoordinaten einfacher zu sein als in Punktcoordinaten.

Es bleibt uns nur noch übrig, den Fall

II. $$\alpha_{33}=0$$

näher zu untersuchen. Die Kegelschnittsgleichung lautet dann

$$43)\quad 2\varrho\,(\alpha_{13}\cos\theta+\alpha_{23}\sin\theta)=\alpha_{11}\cos^2\theta+\alpha_{22}\sin^2\theta+\alpha_{12}\sin 2\theta.$$

Ist ausserdem noch $\alpha_{13}=\alpha_{23}=0$, so geht aus

$$44)\quad \alpha_{11}\cos^2\theta+\alpha_{22}\sin^2\theta+\alpha_{12}\sin 2\theta=0$$

hervor

$$tg\,\theta=\frac{-\alpha_{12}\pm\sqrt{\alpha^2_{12}-\alpha_{11}\alpha_{22}}}{\alpha_{22}}.$$

Ist auf diese Weise θ als Constante bestimmt, so repräsentirt die Gleichung 44) den Schnittpunkt sämmtlicher unter $(90^0-\theta)$ gegen die Coordinatenaxe geneigten, also einander parallelen Geraden. Da die Gleichung quadratisch ist, so können wir sagen, sie stellt zwei im Unendlichen gelegene Punkte dar, die allerdings imaginär werden oder auch in einen einzigen zusammenfallen können.

Ist dagegen nicht $\alpha_{13}=\alpha_{23}=0$, so kann die Gleichung 43) durch Division mit der Wurzelgrösse $2\sqrt{\alpha^2_{13}+\alpha^2_{23}}$ auf die Form gebracht werden

$$\varrho\,(\cos\theta\cos\omega+\sin\theta\sin\omega)=\beta_{11}\cos^2\theta+\beta_{22}\sin^2\theta+\beta_{12}\sin 2\theta,$$

wo

$$tg\,\omega=\frac{\alpha_{23}}{\alpha_{13}},\quad \beta_{11}=\frac{\alpha_{11}}{2\sqrt{\alpha^2_{13}+\alpha^2_{23}}},\quad \beta_{22}=\frac{\alpha_{22}}{2\sqrt{\alpha^2_{13}+\alpha^2_{23}}},\quad \beta_{12}=\frac{\alpha_{12}}{2\sqrt{\alpha^2_{13}+\alpha^2_{23}}}.$$

Diese Gleichung repräsentirt aber nach 17) eine Parabel, deren Axe unter Winkel ω gegen die Coordinatenaxe geneigt ist. Hat ihr Brennpunkt die Coordinaten x_f, y_f, und ist q die Focaldistanz des Scheitels, so lässt sie sich auch schreiben

$$(\varrho-x_f\cos\theta-y_f\sin\theta)(\cos\theta\cos\omega+\sin\theta\sin\omega)=q\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta),$$

und wir erhalten

$$\beta_{11}=x_f\cos\omega+q,$$
$$\beta_{22}=y_f\sin\omega+q,$$
$$2\beta_{12}=x_f\sin\omega+y_f\cos\omega,$$

also

$$\beta_{11}-\beta_{22}=x_f\cos\omega-y_f\sin\omega,$$

d. h.

$$46)\quad \begin{aligned} x_f&=2\beta_{12}\sin\omega+(\beta_{11}-\beta_{22})\cos\omega,\\ y_f&=2\beta_{12}\cos\omega-(\beta_{11}-\beta_{22})\sin\omega,\\ q&=\beta_{11}\sin^2\omega+\beta_{22}\cos^2\omega-\beta_{12}\sin 2\omega.\end{aligned}$$

Wir haben immer eine Parabel, so lange nicht $q=0$. Dann geht die Parabel in ihren Brennpunkt über; also wenn

$$\beta_{11}\, tg^2\omega - 2\beta_{12}\, tg\,\omega + \beta_{22} = 0$$

oder

$$\alpha_{11}\,\alpha^2_{23} = 2\,\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{23} + \alpha_{22}\,\alpha^2_{13} = 0.$$

Der Gleichung 39) ist noch nachzutragen:

47) Für $\alpha_{33} = 0$ stellt die Gleichung

$$\alpha_{11}\,\xi^2 + 2\,\alpha_{12}\,\xi\,\eta + \alpha_{22}\,\eta^2 + 2\,\alpha_{13}\,\xi + 2\,\alpha_{23}\,\eta + \alpha_{33} = 0$$

eine Parabel dar, so lange nicht

$$\alpha_{11}\,\alpha^2_{23} - 2\,\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{23} + \alpha_{22}\,\alpha^2_{13} = 0.$$

Ist aber diese Bedingung erfüllt und nicht gleichzeitig

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0,$$

so repräsentirt die Gleichung einen im Endlichen gelegenen Punkt, im andern Falle ein im Unendlichen gelegenes Punktepaar.