XV.

Lemniscatische Geometrie, Verwandtschaft und Kinematik, abgeleitet mit Hilfe der Function complexen Arguments $Z=\sqrt{z}$.

Von

Dr. Gustaf Holzmüller,

Director der Provinzial-Gewerbeschule zu Hagen.

(Hierzu Taf. VI, Fig. 1–5.)

§ 1. Vorbemerkungen.

In Folgendem soll die durch die Function complexen Arguments $Z=\sqrt{z}$ vermittelte Abbildung in Bezug auf ihre geometrischen Consequenzen einer speciellern Untersuchung unterworfen werden.

Es wird sich zeigen, dass bei dieser conformen Uebertragung jedem beliebigen Kreise in der Ebene des Arguments eine lemniscatische Curve $p.p_1=c$ in der Ebene der Function entspricht, die stets den Nullpunkt zum Centrum hat, die jedoch nach Gestalt, Axenlage und Brennweite ohne Einschränkung variiren kann. Ist im speciellen Falle der Kreis eine Gerade, so geht die Lemniscate in eine gleichseitige Hyperbel über, deren lemniscatische Brennpunkte im Unendlichen zu denken sind.

In einem bestimmten Bereiche der Geometrie wird demnach jedem Satze über Kreis und Gerade, über Kreisbüschel und Kreisschaar, über Strahlenbüschel durch einen Punkt und Punktreihen auf einer Geraden ein solcher über Lemniscaten und gleichseitige Hyperbeln desselben Centrums, über Lemniscatenbüschel und Lemniscatenschaar, über Büschel gleichseitiger Hyperbeln durch zwei Punkte und Punktreihenpaare auf gleichseitiger Hyperbel entsprechen, und ebenso wird jede dahin gehörige Constructionsmethode ihr Analogon finden.

Besonderes Augenmerk soll auf eine aus der Transformation durch reciproke Radii vectores entspringende Operation gerichtet werden, die man als „isothermische Spiegelung gegen die Lemniscate“ bezeichnen könnte. Dieselbe ist mit elementaren Hilfsmitteln durchführbar und hat eine Reihe interessanter Consequenzen aufzuweisen. Ueber den Specialfall der Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel habe ich bereits in den „Beiträgen zur Theorie der isogonalen Verwandtschaften“ in dieser Zeitschrift XVIII, S. 227 flgg., einige Mittheilungen gegeben und auf den Reichthum geometrischer Beziehungen hingewiesen, die aus dieser Transformation hervorgehen.

Bekanntlich liefert die Abbildung durch reciproke Radii vectores Gebilde, die in Kreisverwandtschaft stehen, und umgekehrt lässt sich jeder Fall der Kreisverwandtschaft, die allgemein der Transformation durch die Function complexen Arguments $Z = \frac{az + b}{cz + d}$ entspricht, im Wesentlichen auf eine Abbildung durch reciproke Radii vectores zurückführen. So wird auch die isothermische Spiegelung gegen die Lemniscate auf eine Verwandtschaft führen, bei welcher jedes Individuum unter den Lemniscaten desselben Centrums in der einen Ebene einem solchen unter den Curven desselben Charakters in der andern entspricht, eine Beziehung, die man zweckmässig als „lemniscatische Verwandtschaft" bezeichnen kann. Dieselbe wird wiederum durch eine bestimmte Function complexen Arguments repräsentirt sein.

Die Kreisverwandtschaft hat eine ausgedehnte, aber wohlbegrenzte Gruppe von sonst schwierigen Problemen aus dem Gebiete der Geometrie, der Wärmetheorie und der conformen Abbildungen zur Lösung geführt. Dasselbe ist hier zu erwarten. Zwar scheint in dem Umstande, dass nur von Lemniscaten desselben Centrums gesprochen wird, im Vergleich zur Kreisverwandtschaft, wo die Lage des Kreiscentrums ganz beliebig ist, eine gewisse Beschränkung zu liegen; es stellt sich jedoch heraus, dass der beliebigen Lage des Kreiscentrums die unbeschränkt willkürliche Lage des einen lemniscatischen Brennpunktes entspricht, und dass im Gegensatz zur Aehnlichkeit sämmtlicher Kreise die unendliche Mannichfaltigkeit der lemniscatischen Gestaltung zur Geltung kommt. Schon der Umstand ist bemerkenswerth, dass die Transformation durch reciproke Radii vectores als der Specialfall der lemniscatischen Spiegelung zu betrachten ist, bei dem die beiden Brennpunkte der spiegelnden Curve in einen zusammenfallen.

Von besonderem Interesse ist wohl die Bemerkung, dass der von Möbius* bewiesene Satz über die Doppelverhältnisse und Doppelwinkel, die für entsprechende Punktquaternionen in kreisverwandten Systemen übereinstimmen, auch hier, wenn auch in neuer Form, erhalten bleibt, so dass die Theorie der lemniscatischen Verwandtschaft zu vollständiger Allgemeinheit geführt werden kann. Damit ist auch der Weg gezeigt, die bei anderen isogonalen Verwandtschaften den Doppelverhältnissen entsprechenden Beziehungen zu ermitteln und so ihre Theorie zum Abschluss zu bringen, was bis jetzt nur bei der Aehnlichkeits- und Kreisverwandtschaft** erreicht war.

* Möbius: „Die Theorie der Kreisverwandtschaft", Abhdl. der königl. sächs. Ges. d. Wiss. IV, S. 544 flgg.

** Vergl. die Bemerkung bei Durège: „Elemente der Theorie der Functionen etc.", S. 33.

Die Theorie der krummlinigen Coordinaten wird insofern einen Beitrag erhalten, als die von Lamé behandelten lemniscatischen Coordinaten* eine wesentliche Verallgemeinerung erfahren, analog der Ausdehnung der Kreiscoordinaten durch Einführung des Kreisbüschels $\vartheta - \vartheta_1 = \gamma$ und der orthogonalen Kreisschaar $\frac{p}{p_1} = c$.

Bei der Wichtigkeit, die Jacobi** solchen Substitutionen für die Integration der Differentialgleichungen und die Lösung mechanischer Probleme beilegt, mag dies nicht unerwähnt bleiben.

Ueber Lösung von Problemen conformer Abbildung durch Einführung der verallgemeinerten lemniscatischen Coordinaten in die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

auf dem von Jacobi (Crelle's Journal Bd. 36) gegebenen Wege sollen einige Andeutungen folgen.

Am Schlusse finden sich noch Bemerkungen über die jetzt angebahnte Kinematik conform veränderlicher Systeme,*** speciell der lemniscatisch verwandten, so dass sich die Fruchtbarkeit der Methode, jedoch auch die Grenzen ihrer Tragweite, hinreichend klarlegen werden.

---

§ 2. Allgemeiner Charakter der Abbildung $Z = \sqrt{z}$.

Zum Zweck der Präcisirung des Folgenden sei es gestattet, über den Charakter der vorliegenden Abbildung einiges Bekannte vorauszuschicken.

Zwischen beiden Ebenen besteht die Beziehung

$$1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & X + Yi = \sqrt{x + yi}, \\ & R\,[\cos\Phi + i\,\sin\Phi] = \sqrt{r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)}, \end{aligned} \right.$$

so dass $R = +\sqrt{r}$ und Φ entweder gleich $\frac{\varphi}{2}$ oder gleich $180^0 + \frac{\varphi}{2}$ ist. Jedem Punkte A der z-Ebene entsprechen also zwei Punkte A_1 und A_2 der Z-Ebene, deren Verbindungslinie durch den Nullpunkt halbirt wird. Zwei so zusammengehörige Punkte sollen stets als Punktpaar bezeichnet werden. Die Construction des einem gegebenen Punkte entsprechenden Punktpaares geschieht durch Halbirung der Abweichung φ und Construction der mittleren Proportionale zwischen r und der Einheit. Die Uebertragung geschieht also mit elementaren Hilfsmitteln.

* Lamé: *„Leçons sur les coordonnées curvilignes"*, S. 217.

** Jacobi: „Vorlesungen über Dynamik", S. 199.

*** Burmester: „Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung gesetzmässig veränderlicher Systeme", diese Zeitschr. XX, S. 381 flgg.

Jeder vom Nullpunkte unter der Neigung φ gegen die positive reelle Axe ausgehenden Geraden entspricht eine unter $\frac{\varphi}{2}$ geneigte Gerade der Z-Ebene und ihre Rückwärtsverlängerung über den Nullpunkt hinaus. Der vollständigen Geraden durch den Nullpunkt der z-Ebene entsprechen zwei orthogonale Gerade mit den Neigungen $\frac{\varphi}{2}$ und $\frac{\varphi}{2} + 90^0$.

Jedem Kreise mit Radius r um den Nullpunkt der z-Ebene entspricht ein Kreis mit Radius $\sqrt{r}$ um den Nullpunkt der Z-Ebene, dem doppelten Umgange auf dem ersteren der einfache Umgang auf dem letzteren. Um dies zu veranschaulichen und gleichzeitig die obige Zweideutigkeit aufzuheben, muss man nach Riemann die z-Ebene als zweiblätterig betrachten, und zwar so, dass beide Blätter längs einer beliebigen, sich selbst nicht schneidenden Linie vom Nullpunkte nach dem unendlich fernen Punkte sich gegenseitig durchkreuzen. Man denke sich diesen „Schnitt" längs der positiven reellen Axe gelegt und setze fest, dass dem oberen Blatte der z-Ebene der erste und zweite Quadrant der Z-Ebene, dem unteren Blatte der dritte und vierte Quadrant entspricht. Vermeidet man es alsdann, den Schnitt zu überschreiten und so aus dem oberen Blatte in das untere zu gelangen, so kann man die Geometrie jedes Blattes eindeutig auf eine Halbebene übertragen.

Im Nullpunkte aber ist es zweifelhaft, in welchem Blatte man sich befindet. In ihm hängen beide Blätter zusammen, was dem Zusammenfallen der beiden Wurzelwerthe für $z = 0$ entspricht. Während man also, wenn ein Punkt der z-Ebene von irgend einer Stelle eines bestimmten der beiden Blätter aus sich beliebig bewegt, im Allgemeinen stets weiss, in welcher Schicht man sich befindet, so dass also der entsprechende Punkt der Z-Ebene eindeutig bestimmt ist, hört diese Eindeutigkeit auf, sobald der Punkt den Nullpunkt passirt. Man kann dort willkürlich in beiden Blättern weitergehen, der Weg verzweigt sich in zwei sich deckende Arme, in der Z-Ebene entsprechend in zwei sich rechtwinklig schneidende Züge. Der Nullpunkt der z-Ebene ist also ein Verzweigungspunkt. Ein einfacher Umgang um denselben führt ohne Unstetigkeit in das andere Blatt, der doppelte Umgang führt ins erste zurück. Man nennt deshalb den Punkt einen Windungspunkt erster Ordnung, dessen Bedeutung sich mit Hilfe des in Fig. 1 dargestellten Modells veranschaulichen liesse.*

Nimmt man an, dass nur ein unendlicher Punkt existire, so müssen dort die Blätter ebenfalls zusammenhängend gedacht werden, und er ist ebenso

* Vergl. Figurentafel bei Neumann: „Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale".

als Windungspunkt erster Ordnung aufzufassen, wodurch die unbestimmte Vorstellung des unendlich fernen Bereiches zu einer präcisen wird.

Die Transformation $Z=\sqrt{z}$ giebt, wie jede durch eine Function complexen Arguments vermittelte, in der Z-Ebene Gebilde, die den entsprechenden der z-Ebene conform, d. h. in den kleinsten Theilen ähnlich sind. Zwei Curven der einen Ebene schneiden sich also unter demselben Winkel, wie die entsprechenden der andern. Im Nullpunkte aber hört diese Aehnlichkeit auf, denn jeder Winkel, der in ihm seinen Scheitel hat, wird, wie oben gezeigt, auf die Hälfte reducirt. Aehnlich ist das Verhalten des unendlichen Punktes zu denken.

Ferner: Das Dimensionsverhältniss kleiner entsprechender Bereiche beider Ebenen hängt ab vom absoluten Betrage des Differentialquotienten*

$$\frac{dZ}{dz}=\frac{1}{2\sqrt{r}}\left[\cos\left(\frac{-\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-\varphi}{2}\right)\right],\text{ resp.}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{r}}\left[\cos\left(180^0-\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(180^0-\frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

Folglich: In der Entfernung r vom Nullpunkte ist das Vergrösserungsverhältniss $1:\frac{1}{2\sqrt{r}}$. Auf dem Kreise mit Radius $r=\frac{1}{4}$ ist es gleich der Einheit, ausserhalb desselben kleiner, innerhalb grösser, und zwar wird die Umgebung des Nullpunktes unendlichfach vergrössert, die des unendlichen Punktes unendlichfach verkleinert dargestellt. Beide Punkte sind also in mehrfacher Hinsicht singulären Charakters.

Die Abweichung des Differentialquotienten $\frac{-\varphi}{2}$, resp. $180^0-\frac{\varphi}{2}$ zeigt an, dass die Tangente einer Curve in einem Punkte der z-Ebene um diese Winkel gedreht werden muss, wenn sie mit den Tangenten in den correspondirenden Punkten der entsprechenden Curven der Z-Ebene parallel und gleichgerichtet werden soll.

Erhebt man Gleichung 1) zum Quadrat, so ergiebt sich aus der Gleichsetzung der reellen und der imaginären Theile

2) $$X^2-Y^2=x,$$
3) $$2XY=y.$$

Folglich:

Die Curve $f(x,y)=0$ der z-Ebene verwandelt sich durch die Transformation $Z=\sqrt{z}$ in die Curve $f[(X^2-Y^2),(2XY)]=0$ der Z-Ebene.

Curven n^{ten} Grades gehen also in solche vom $2n^{ten}$ Grade über, deren Gleichung sich nicht ändert, wenn man gleichzeitig die Vorzeichen

---

* Siebeck: „Ueber graphische Darstellung imaginärer Functionen", Crelle's Journal Bd. 55.

von X und Y ändert. Klappt man eine solche Curve erst um die X-Axe, dann um die Y-Axe, so deckt sie sich in letzterer Lage mit ihrer ersten Lage.

Umgekehrt lässt sich mit Hilfe der Transformation $Z=z^2$ die Behandlung einer ausgedehnten Curvengruppe $2n^{\text{ten}}$ Grades auf die von Curven n^{ten} Grades reduciren.

§ 3. Uebertragung der Geraden und des Kreises durch die Abbildung $Z=\sqrt{z}$ und die daraus entspringenden verallgemeinerten lemniscatischen Coordinaten.

Nach Gleichung 2) verwandelt sich die verticale Gerade $x=a$ in die gleichseitige Hyperbel

$$4)\qquad X^2-Y^2=a,$$

deren Centrum der Nullpunkt ist und deren Scheitel $\pm\sqrt{a}$ und Brennpunkte $\pm\sqrt{2a}$ auf der reellen oder imaginären Axe liegen, je nachdem a positiv oder negativ ist. Dass der Punkt $2a$, das Spiegelbild des Nullpunktes gegen die Gerade, in den Brennpunkt der Hyperbel transformirt wird, giebt später Veranlassung zu einem interessanten Satze. Allgemein:

Die verticale Parallelenschaar der z-Ebene geht über in eine Schaar gleichseitiger Hyperbeln desselben Centrums, die sich im Endlichen nicht schneiden und deren Brennpunkte auf der reellen und imaginären Axe liegen.

Bilden die Schnittpunkte der Verticalenschaar mit der reellen Axe die Reihe

$$\ldots -3a,\ -2a,\ -a,\ 0,\ a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,$$

so liegen die Schnittpunkte der Hyperbeln mit beiden Axen in den Entfernungen

$$0,\ \sqrt{a},\ \sqrt{2a},\ \sqrt{3a},\ \ldots$$

vom Nullpunkte (vergl. Fig. 2).

Nach Gleichung 3) entspricht der horizontalen Geraden $y=b$ die Curve

$$5)\qquad 2XY=b.$$

Dies ist gleichfalls eine gleichseitige Hyperbel, deren Axe die Linie $+45^0$ oder -45^0 ist, je nach dem Vorzeichen von b. Der Beweis liegt als specieller Fall in folgender Betrachtung. Die Curven, welche die verticale Axe unter dem Winkel α schneiden, werden gefunden, wenn man untersucht, was der Verticalenschaar bei der Abbildung

$$Z=\sqrt{(\cos\alpha+i\sin\alpha)\,.\,z}=\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{z}$$

entspricht. Diese leistet aber dasselbe, wie $Z = \sqrt{z}$, nur muss die Z-Ebene um den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ gedreht werden. Folglich:

Der Parallelenschaar mit Neigung α gegen die reelle Axe entspricht eine Schaar gleichseitiger Hyperbeln desselben Centrums, deren Axe die Linie $\frac{\alpha}{2} + 45^0$ oder $\frac{\alpha}{2} - 45^0$ ist.

Gleichzeitig ergiebt sich folgende Consequenz:

Jede isogonale Trajectorienschaar der gleichseitigen Hyperbelschaar ist wieder eine gleichseitige Hyperbelschaar. Ist α der constante Schnittwinkel, so sind die Axen beider Systeme um $\frac{\alpha}{2}$ gegen einander gedreht.

So ist z. B. die durch Gleichung 5) dargestellte Schaar die Orthogonalschaar der durch Gleichung 4) repräsentirten. Dies bestätigt den Satz vom constanten Inhalt des Rechtecks $X.Y$ für die gleichseitige Hyperbel, der sich durch Orthogonalprojection in den Satz vom Parallelogramm constanten Inhalts der allgemeinen Hyperbel verwandelt.

Der isogonale Charakter der Verwandtschaft $Z = \sqrt{z}$ kann an dieser Stelle selbstständig nachgewiesen werden.

Die oben besprochenen Vergrösserungsverhältnisse werden besonders veranschaulicht durch die Abbildung orthogonaler Parallelenschaaren, welche die Ebene in ein System von Quadraten eintheilen. In Fig. 2 ist dies durchgeführt. Die beiden orthogonalen Hyperbelschaaren theilen die Z-Ebene in ein System von rechtwinkligen Flächenräumen ein, die mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit, und zwar der quadratischen Gestalt, zustreben.

Es handelt sich also um zwei Isothermenschaaren, deren Schnittpunkte mit den Axen und den Linien $\pm 45^0$ vom Centrum die Entfernungen $0, \sqrt{a}, \sqrt{2a}, \sqrt{3a}, \ldots$ haben. Der singuläre Charakter des Nullpunktes ist sofort zu erkennen, denn an Stelle des rechten Winkels tritt dort ein Winkel von 45^0.

Nun ist bekannt, dass für Radii vectores, die von den Durchschnitten einer gleichseitigen Hyperbel mit einer durch das Centrum gehenden Geraden nach ihren einzelnen Punkten gezogen sind, die Winkelsumme $\vartheta + \vartheta_1 = const.$ resp. $= 180^0 + const.$ ist, und zwar ist die Constante das Doppelte des Winkels, unter dem die Asymptote, an welche sich der eine Hyperbelarm anlehnt, gegen die Schnittlinie geneigt ist. Folglich:

Die Gerade durch den Punkt $(a + bi)$, welche gegen den „Radius" desselben um den Winkel β, resp. $180^0 + \beta$ geneigt ist, geht durch die Transformation $Z = \sqrt{z}$ über in die gleichseitige Hyperbel durch das Punktpaar $\sqrt{a + bi}$, deren Radii vectores, von den Punkten $\sqrt{a+bi}$ ausgehend, gegen die Verbindungslinie derselben das Gesetz $\vartheta+\vartheta_1=\beta$, resp. $\vartheta+\vartheta_1 = 180^0+\beta$ befolgen.

Nimmt man jedoch, wie es bei Polarcoordinaten gebräuchlich ist, den Radius nur positiv, so kann man sagen:

Die Abbildung $Z=\sqrt{z}$ verwandelt die Relation $\varphi=\beta$ in Bezug auf den „Radius" eines Punktes $a+bi$ in die Relation $\vartheta+\vartheta_1=\beta$ in Bezug auf das Punktpaar $\sqrt{a+bi}$ und dessen Verbindungslinie, d. h. z. B. die Gerade $\varphi=\beta$ geht über in die gleichseitige Hyperbel $arc.tan\dfrac{y}{x+\sqrt{e}}+arc.tan\dfrac{y}{x-\sqrt{e}}=\beta$, wenn die Entfernung des Schnittpunktes der Geraden und der reellen Axe vom Nullpunkte mit e bezeichnet wird.

Einem Strahlenbüschel durch jenen Punkt, dessen Abweichungen die arithmetische Reihe $0, \gamma, 2\gamma, 3\gamma, \ldots$ bilden, entspricht ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln, deren benachbarte Individua sich unter γ schneiden und deren Winkelsummen $(\vartheta+\vartheta_1)$ dieselbe arithmetische Reihe bilden. Die Asymptoten des Büschels folgen einander nach der Reihe $0, \frac{\gamma}{2}, \frac{2\gamma}{2}, \frac{3\gamma}{2}, \ldots$ (vergl. Fig. 3).

Um die entsprechenden Betrachtungen für den Kreis durchzuführen, beschränke man sich auf den Fall, dass das Kreiscentrum auf der reellen Axe in der Entfernung e vom Nullpunkte liegt. Die allgemeine Lage erledigt sich dann durch die Function $Z=\sqrt{(\cos\alpha+i\sin\alpha)z}$ ebenso, wie oben.

Die Gleichung des Kreises

$$(x-e)^2+y^2=c^2$$

geht durch unsere Transformation nach Gleichung 2) und 3) und einigen Umformungen über in

$$6)\quad \begin{cases} (X^2+Y^2)^2-2e(X^2-Y^2)=c^2-e^2, \\ [(X+\sqrt{e})^2+Y^2].[(X-\sqrt{e})^2+Y^2]=c^2. \end{cases}$$

Dies ist aber die Gleichung einer lemniscatischen Curve mit den Brennpunkten $\pm\sqrt{e}$ und dem constanten Product der Radii vectores $p.p_1=c$.

Das allgemeine Resultat ist also:

Der Kreis um den Punkt $a+bi$ mit dem Radius $r=c$ geht über in die Lemniscate $p.p_1=c$ mit dem Brennpunktpaare $\sqrt{a+bi}$.

Dass das Kreiscentrum in die Brennpunkte der Lemniscate transformirt wird, ist besonders bemerkenswerth.

Nur der doppelt zu denkende Kreis geht in die vollständige Lemniscate über. Schliesst er den Nullpunkt aus, so entspricht ihm die aus zwei Ovalen bestehende Lemniscate; schliesst er ihn ein, so entsteht die einfache Lemniscate; geht er durch den Nullpunkt, so verwandelt er sich in die gewöhnliche Schleifenlemniscate.

Die gleichseitige Hyperbel ist als Lemniscate zu betrachten, deren lemniscatische Brennpunkte im Unendlichen liegen.

Der Extract des Obigen liegt nun in folgendem sehr verwerthbaren Resultate:

Ist die Gleichung einer Curve in Bezug auf den Punkt $(a+bi)$ und den Radius desselben in Polarcoordinaten $f(r\varphi)=0$, so geht sie durch die Transformation $Z=\sqrt{z}$ über in die Curve $f[(p.p_1),(\vartheta+\vartheta_1)]=0$, deren Radii vectores auf das Punktpaar $\sqrt{a+bi}$ und dessen Verbindungslinie zu beziehen sind.*

Das System concentrischer Kreise und der orthogonalen Radien kann zur Eintheilung der Ebene in ähnliche rechtwinklige Flächenstücke benutzt werden, die zur Construction und Untersuchung der logarithmischen Spiralen verwendbar sind. Die Abweichungen der Radien bilden dabei eine arithmetische, ihre Längen eine geometrische Reihe. Folglich:

Die confocale Lemniscatenschaar wird von dem durch ihre Brennpunkte gehenden Büschel gleichseitiger Hyperbeln desselben Centrums orthogonal durchschnitten. Man erreicht die Eintheilung der Ebene in rechtwinklige Flächenstücke, die der Aehnlichkeit zustreben, wenn man die Parameter $(\vartheta+\vartheta_1)$ in arithmetischer, die Parameter $p.p_1$ in geometrischer Reihe aufeinander folgen lässt.

In Fig. 3 ist die Eintheilung in kleine „Quadrate" durchgeführt, die man z. B. erreicht, wenn die Winkelsumme $(\vartheta+\vartheta_1)$ die Reihe 0, a, $2a$, $3a$, ..., die Producte $p.p_1$ die Reihe e^0, e^a, e^{2a}, e^{3a}, ... bilden. Letzteres geht aus der logarithmischen Abbildung** hervor.

Man vergleiche hier die Bemerkungen über diese Curven und ihre isothermischen Parameter in dem bereits citirten Werke von Lamé.

Dort wird unter Anderem bemerkt, wie aus der Differentialgleichung der Gleichung 6)

$$(X^2+Y^2-e).(X\,dX+Y\,dY)+2eY\,dY=0$$

folgt, dass die confocalen Lemniscaten ihre Maxima zum Theil auf der imaginären Axe, zum Theil auf dem Kreise mit Radius $\sqrt{e}$ um den Null-

* Vergl. an dieser Stelle die entsprechenden Bemerkungen in den „Beiträgen zur Theorie der isogonalen Verwandtschaften" im 18. und 20. Bande dieser Zeitschrift.

** „Ueber die logarithmische Abbildung etc.", 16. Bd. dieser Zeitschrift.

punkt haben, ferner, dass derselbe Kreis in bestimmter Weise die Gruppe der eingebuchteten Lemniscaten von der der nicht eingebuchteten trennt.

Es sei hier Folgendes hinzugefügt:

Die Brennpunkte des gleichseitigen Hyperbelbüschels liegen sämmtlich auf der orthogonalen Schleifenlemniscate, welche die Büschelpunkte zu Brennpunkten hat; die Scheitelpunkte liegen auf der im Verhältniss $1:\sqrt{\frac{1}{2}}$ verkleinerten Lemniscate.

Der Beweis ergiebt sich aus der Bemerkung, dass die Spiegelpunkte des Nullpunktes gegen ein Strahlenbüschel auf einem Orthogonalkreise des letzteren liegen, der durch den Nullpunkt geht.

Diese lemniscatischen Coordinaten sind jedoch einer durchgreifenden Verallgemeinerung fähig, die sich aus der Abbildung des Kreisbüschels durch zwei Punkte und der orthogonalen Kreisschaar ergiebt. Die Mittelpunkte jeder dieser Schaaren liegen auf der gemeinschaftlichen Potenzlinie der andern, die selbst ein Individuum der ersteren Schaar ist. Folglich:

Sämmtliche Lemniscaten desselben Centrums, die durch zwei feste Punktpaare gehen, haben ihre Brennpunkte auf einer gleichseitigen Hyperbel, die orthogonal zu der zum Büschel gehörigen Hyperbel ist. Die Orthogonalschaar ist wiederum ein System von Lemniscaten desselben Centrums, deren Brennpunkte auf der zweiten der erwähnten Hyperbeln liegen. (Fig. 5 stellt ein solches Lemniscatenbüschel und die orthogonale Lemniscatenschaar dar.)

Die Scheitel beider Lemniscatenbüschel liegen auf gleichseitigen Hyperbeln, die im Verhältniss $\sqrt{2}:1$ grösser sind, als die beiden genannten.

Beiläufig sei bemerkt, dass, wenn sich zwei Lemniscaten desselben Centrums schneiden, sämmtliche Schnittwinkel gleich sind.

Die Frage nach den Parametern der verallgemeinerten lemniscatischen Coordinaten erledigt sich folgendermassen:

Sind $a+bi$ und $a_1+b_1 i$ die Schnittpunkte eines Kreisbüschels, so hat jedes Individuum die Gleichung $\xi-\xi_1=\beta$, resp. $180^0-\beta$, wenn diese Winkel gegen die Verbindungslinie der beiden Punkte gemessen werden. Misst man jedoch die Winkel gegen die „Radien“ der beiden Punkte, so wird zwar die Constante β eine andere, z. B. α, die Gleichung selbst aber wird sonst nicht geändert. Nach Obigem geht aber bei vorliegender Abbildung die Coordinate ξ in eine Winkelsumme $(\vartheta+\vartheta_1)$, ξ_1 in eine Winkelsumme $(\chi+\chi_1)$ über, also:

Das Lemniscatenbüschel durch die Punktpaare $\sqrt{a+bi}$ und $\sqrt{a_1+b_1 i}$, welches dem obigen Kreisbüschel entspricht, befolgt das Gesetz:

7) $$(\vartheta+\vartheta_1)-(\chi+\chi_1)=\alpha, \text{ resp. } (180^0-\alpha),*$$
wobei die Winkelsumme $\vartheta+\vartheta_1$ gegen die Verbindungslinie des einen, $\chi+\chi_1$ gegen die des andern Punktpaares zu messen ist.

Die Orthogonalschaar des Kreisbüschels hat, wenn p und p_1 die von $a+bi$ und a_1+b_1i ausgehenden Radii vectores sind, die Gleichung $\frac{p}{p_1}=c$. Bezeichnet man also die von dem Punktpaare $\sqrt{a+bi}$ ausgehenden Radii vectores mit p, p_1, die von $\sqrt{a_1+b_1i}$ ausgehenden mit q, q_1, so folgt:

Die Radii vectores der Orthogonalschaar des Lemniscatenbüschels befolgen das Gesetz

8) $$\frac{p \cdot p_1}{q \cdot q_1}=c.$$

Beide Resultate, zusammengefasst, geben den Satz:

Der geometrische Ort für die constante Differenz der Winkelsummen $(\vartheta+\vartheta_1)$ und $(\chi+\chi_1)$ der von zwei Punktpaaren ausgehenden Radii vectores ist eine durch beide Punktpaare gehende Lemniscate. Der geometrische Ort für das constante Verhältniss der Producte $p.p_1$ und $q.q_1$ der Radii vectores ist eine zur vorigen orthogonale Lemniscate.

Aus den entsprechenden Sätzen über Kreisschaaren folgt, dass die Fälle

9) $$\begin{cases} (\vartheta+\vartheta_1)-(\chi+\chi_1)=0, \text{ resp. } 180^0, \\ \dfrac{p \cdot p_1}{q \cdot q_1}=1 \end{cases}$$

auf die beiden genannten gleichseitigen Hyperbeln führen, die man nach Analogie der Potenzlinien als „Potenzhyperbeln" des Büschels, resp. der Schaar bezeichnen kann. Wird eine von diesen Hyperbeln zu zwei durch den Nullpunkt gehenden orthogonalen Geraden, so findet gegen dieselben Symmetrie statt. Werden beide zu je zwei Geraden, was dem Falle entspricht, dass die Potenzlinien der beiden Kreisschaaren durch den Nullpunkt gehen, so findet gegen alle vier Gerade Symmetrie statt. In diesem Falle gehört zum Büschel ein Kreis, gegen welchen Reciprocität stattfindet.

Geht das Kreisbüschel durch den Nullpunkt, so fällt eins der entsprechenden Punktpaare mit diesem zusammen, und es entsteht ein Büschel von Schleifenlemniscaten durch den Nullpunkt und ein Punktpaar mit der Gleichung

10) $$(\vartheta+\vartheta_1)-2\chi=\alpha$$

und die Orthogonalschaar

* Das Gesetz entspricht auch dem Satze vom constanten Peripheriewinkel bei dem Kreise.

11) $$p \,.\, p_1 = c \,.\, q^2.$$

Dass beides Curven sind, die man durch Transformation der confocalen Lemniscatenschaar und des orthogonalen Hyperbelbüschels mittelst reciproker Radii vectores vom Nullpunkte aus erhalten kann, ist leicht zu zeigen. Dieser Satz wird sich jedoch als Specialfall eines allgemeineren erledigen.

Fig. 4 stellt dieses Curvensystem dar, und zwar ist die Eintheilung der Ebene in „Quadrate“ durchgeführt. Die gewöhnliche, symmetrisch gegen die reelle Axe liegende Schleifenlemniscate hat hier die Gleichung

$$(\vartheta + \vartheta_1) - 2\chi = 90^0,$$

die entsprechende Hyperbel hat die Gleichung

$$p \,.\, p_1 = q^2,^*$$

so dass stets das Rechteck aus dem einen Paare der Radii vectores gleich dem Quadrate des dritten ist (es handelt sich eben um drei Radii vectores und drei „Brennpunkte“).

Bilden die Parameter des allgemeinen Lemniscatenbüschels, d. h. die constanten Differenzen $(\vartheta + \vartheta_1) - (\chi + \chi_1)$, eine arithmetische, die Parameter der Orthogonalschaar, d. h. die constanten Verhältnisse $\frac{p \,.\, p_1}{q \,.\, q_1}$, eine geometrische Reihe, so lässt sich die Eintheilung der Ebene in ein System von „Rechtecken“ erzielen, die der Aehnlichkeit zustreben.

Die Eintheilung in „Quadrate“ wird erreicht durch Anwendung der Reihen

$$\ldots\ -3\alpha,\ -2\alpha,\ -\alpha,\ 0,\ \alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ \ldots,$$
$$\ldots\ e^{-3\alpha},\ e^{-2\alpha},\ e^{-\alpha},\ e^0,\ e^\alpha,\ e^{2\alpha},\ e^{3\alpha},\ \ldots.$$

Durch Verbindung der aufeinander folgenden Diagonalpunkte des „Rechteck“-Netzes erhält man mit beliebiger Genauigkeit die isogonalen Trajectorien des Lemniscatenbüschels. Dieselben entsprechen den „logarithmischen Doppelspiralen“, die ich in der citirten Abhandlung (Ueber logarithmische Abbildung) ausführlicher behandelt habe und deren einfachste Gleichung ich in dieser Zeitschrift XX, S. 6, als

$$\frac{p}{p_1} = c \,.\, \varkappa^{\vartheta - \vartheta_1}$$

---

* Auf die Analogie der beiden Gleichungen, die sich auch in der Form

$$\sin\,[(\vartheta + \vartheta_1) - 2\chi] = 1 \text{ und } \frac{p \,.\, p_1}{q^2} = 1$$

schreiben lassen, wird besonders aufmerksam gemacht. (Vergl. das Entsprechende in der Kreisverwandtschaft von Möbius.)

aufstellte, wo $\varkappa = e^{\frac{a}{b}}$ und $\frac{a}{b}$ Tangente des constanten Schnittwinkels gegen das Kreisbüschel ist. Die Gleichung der allgemeinsten „lemniscatischen Spiralen" (wenn man wegen der Form der Gleichung diesen Namen beibehalten will) ist also

$$12)\qquad \frac{p \cdot p_1}{q \cdot q_1} = c \, . \, \varkappa^{(\varphi+\varphi_1)-(\chi+\chi_1)}.$$

Diese transcendenten Curven befolgen also das Gesetz:

Das Verhältniss der Producte je zweier zusammengehöriger Radii vectores nimmt geometrisch zu oder ab, wenn die Differenz der entsprechenden Winkelsummen arithmetisch wächst.

Die Eigenschaften derselben lassen sich aus denen der logarithmischen Doppelspiralen einfach ableiten, was später an einigen Beispielen gezeigt werden soll. Für jetzt sei bemerkt, dass ihre Parallelschaaren als Isothermensysteme zu betrachten sind, als deren isogonale Trajectorien sich Curven desselben Charakters ergeben.

Für den Fall der confocalen Lemniscaten vereinfacht sich die Gleichung zu folgender:

$$13)\qquad p \, . \, p_1 = c \, . \, \varkappa^{\vartheta+\vartheta_1},$$

wie schon in der citirten Abhandlung aus der Gleichung der logarithmischen Spirale $r = c \, . \, \varkappa^{\vartheta}$ geschlossen wurde.

Auch die anderen Specialfälle, bei denen Symmetrie auftritt, sind leicht zu erledigen.

Die Allgemeinheit des durch die Gleichungen 7) und 8) dargestellten Coordinatensystems ist eine sehr bemerkenswerthe. Bei ausserordentlicher Mannichfaltigkeit der Gestaltung umfasst es neben einer Reihe von symmetrischen Fällen die von Lamé eingeführten confocalen Lemniscaten, ferner das System der beiden orthogonalen Hyperbelschaaren, das der beiden orthogonalen Kreisschaaren und endlich die Polarcoordinaten und die gewöhnlichen geradlinigen als specielle Fälle. Als noch allgemeinere Coordinaten liessen sich die durch Gleichung 12) dargestellten lemniscatischen Spiralen betrachten; die praktische Verwerthbarkeit derselben mag jedoch für jetzt dahingestellt bleiben.

---

§ 4. Die Geometrie des Kreises, der Geraden und der projectivischen Gebilde, transformirt durch die Function $Z = \sqrt{z}$.

Es handelt sich jetzt darum, die Grundlagen der aus vorliegender Transformation entspringenden Geometrie, die als lemniscatische Geometrie bezeichnet werden soll, kurz zu skizziren. Dass dabei, wie vorher, stets nur von Hyperbeln und Lemniscaten desselben Centrums die Rede ist, soll nicht mehr besonders hervorgehoben werden.

Der Grundsatz, dass zwischen zwei Punkten nur eine Gerade möglich ist, geht in folgenden über:

Durch zwei Punktpaare ist nur **eine** gleichseitige Hyperbel möglich.

Die beiden Postulate der Geometrie verwandeln sich in folgende:

1. Die durch zwei Punktpaare bestimmte gleichseitige Hyperbel zu zeichnen;
2. um ein gegebenes Brennpunktpaar eine Lemniscate mit gegebenem Parameter $p.p_1 = c$ zu legen.

Beide sind mit elementaren Hilfsmitteln ausführbar.

An Stelle gleicher Strecken treten Hyperbelbogen, die „correspondirende" genannt werden sollen. Sie stehen untereinander in einer Beziehung, die als specieller Fall der unten behandelten lemniscatischen Verwandtschaft zu betrachten ist. Beispiele werden dies am besten klarlegen.

Kreise der z-Ebene mit demselben Radius c können zur Deckung gebracht werden, indem man den Mittelpunkt des einen direct nach dem des andern wandern lässt. Dem entspricht in der Z-Ebene Folgendes: Bewegt man den einen Brennpunkt einer Lemniscate $p.p_1 = c$ in der Z-Ebene auf beliebigem Wege, z. B. auf gleichseitiger Hyperbel, nach dem einen Brennpunkte einer Lemniscate desselben Parameters, die jedoch eine andere Brennweite und Axenlage hat, so unterliegt die Curve während der Wanderung einer stetigen Veränderung ihrer Gestalt, schmiegt sich in jedem Momente neuen Bedingungen an und deckt sich schliesslich mit der zweiten Curve. Der andere Brennpunkt fügt sich natürlich der Bewegung so, wie es der Begriff des Punktpaares vorschreibt.

In diesem Sinne also lassen sich Lemniscaten desselben Parameters $p.p_1 = c$ zur Deckung bringen. Wir sagen: sie sind „lemniscatisch congruent" oder „correspondirend".

Ferner: Correspondirende Hyperbelbogen, die Geraden von der Länge l entsprechen, haben die Eigenschaft, dass die Differenz der lemniscatischen Radii vectores, die von den Durchschnitten der Hyperbel mit irgend einer Axe durch den Nullpunkt ausgehen, für ihre Endpunkte $p.p_1 - q.q_1 = l$ ist. Sie lassen sich unter stetiger Gestaltveränderung auf dem Wege zur Deckung bringen, welcher der parallelen Verschiebung und schliesslichen Drehung einer Geraden entspricht, die mit einer andern zur Deckung gebracht werden soll.

In dem Momente, wo der Hyperbelbogen den Nullpunkt passirt, degenerirt er in eine oder zwei orthogonale Gerade, während die Lemniscate in dem Momente, wo ihr Brennpunkt den Nullpunkt durchwandert, zum Kreise, wo er hingegen den unendlichen Punkt passirt, zur gleichseitigen Hyperbel wird.

Das Resultat solcher Bewegungen unter dauernder Gestaltveränderung im „lemniscatisch veränderlichen System" ist stets identisch mit einer Abbildung durch eine einfach zu bestimmende Function, die ein specieller Fall der die lemniscatische Verwandtschaft repräsentirenden Function ist. So fremdartig auch diese Bewegungen auf den ersten Blick erscheinen mögen, so kommen sie doch in der Wärmetheorie zur Geltung, sobald es sich nicht um einen stationären Wärmezustand handelt, sondern um eine Bewegung der Isothermen durch fortschreitende und sich ausbreitende Erwärmung. In der Optik tritt eine hierher gehörige Bewegung sogar in die reale Erscheinung. Es handelt sich um das System der Interferenzlemniscaten und des gleichseitigen Hyperbelbüschels, welches durch Polarisation entsteht. Die bei Drehung des Krystalls oder des Nicol'schen Prismas entstehenden Bewegungen sollen noch einmal zur Sprache kommen.*

Das Gegebene reicht hin, die Fundamentalsätze und Constructionen eines gewissen Bereiches der Elementargeometrie richtig, und zwar mit elementaren Hilfsmitteln, zu übertragen. Stets wird man zum Ziele kommen, wenn man die einfachere Construction mit den durch $z = Z^2$ in die z-Ebene transformirten Daten in letzterer durchführt und das Resultat in die Z-Ebene zurücktransformirt. In den meisten Fällen sind jedoch erhebliche Abkürzungen möglich. Einige Beispiele von Aufgaben, deren Lösung auf der Hand liegt, werden genügen:

a) Theilung eines gegebenen Hyperbelbogens in zwei oder mehr correspondirende Theile und Verlängerung desselben um correspondirende Theile;

b) Errichtung der Orthogonalhyperbel im gegebenen Punkte einer gleichseitigen Hyperbel und Fällen derselben von einem ausserhalb liegenden Punkte auf dieselbe;

c) Halbirung des von zwei sich schneidenden gleichseitigen Hyperbeln gebildeten Winkels durch eine dritte u. s. w.

Correspondirende Hyperbeldreiecke sind solche, die congruenten Dreiecken der z-Ebene entsprechen und sich auf dem besprochenen Wege zur Deckung bringen lassen. Liegen sie nicht gleichstimmig, so ist das eine Dreieck vorher um die reelle oder imaginäre Axe zu klap-

* Durch ein einfaches Experiment kann man sich einen vorläufigen Begriff von solchen Bewegungen im gesetzmässig-veränderlichen System machen. Man stelle einen geraden Kreiskegel mit spiegelndem Mantel auf eine mit zwei orthogonalen Parallelschaaren bedeckte Papierfläche und bringe das Auge senkrecht über die Spitze des Kegels. Bewegt man dann die Zeichnung in beliebigem Sinne unter dem Kegel fort, so bewegen sich die Spiegelbilder der Parallelschaar, zwei sich schneidende Curvensysteme, unter stetiger Gestaltveränderung. Die Bewegung eines gefärbten Kreises in einem der Parallelstreifen würde im Spiegelbilde die oben besprochene Bewegung der Lemniscate einigermassen veranschaulichen können.

pen. Dass die Winkel solcher Dreiecke gleich sind, folgt aus dem isogonalen Charakter der Verwandtschaft $Z=\sqrt{z}$. An Stelle der Seitengleichheit tritt Folgendes: Bezeichnet man die Durchschnitte der ein Dreieck ABC bildenden gleichseitigen Hyperbeln a, b, c mit einer beliebigen Geraden durch den Nullpunkt bezüglich mit P, Q, R, P_1, Q_1, R_1, so sind die „lemniscatischen Entfernungen“ der Punkte A, B und C von einander charakterisirt durch die Differenzen folgender lemniscatischen Coordinaten:

$$14)\quad PC.P_1C-PB.P_1B,\ QA.Q_1A-QC.Q_1C,\ RB.R_1B-RA.R_1A.$$

Sind diese Relationen für zwei Hyperbeldreiecke identisch, so sind die Dreiecke correspondirende. Die Uebertragung der anderen Congruenzsätze ist ohne Schwierigkeit. — Sind übrigens λ, μ, ν, λ_1, μ_1, ν_1 die Winkel der lemniscatischen Radii vectores gegen die zu Grunde gelegte Gerade, so stimmen in correspondirenden Dreiecken auch die homologen Differenzen der Winkelsummen

$$15)\quad (\nu+\nu_1)-(\lambda+\lambda_1),\quad (\lambda+\lambda_1)-(\mu+\mu_1),\quad (\mu+\mu_1)-(\nu+\nu_1)$$

überein.

Sind die Ausdrücke 14) für zwei Hyperbeldreiecke proportional, so stimmen die Dreiecke gleichfalls in den Differenzen 15) überein. Sie sind „lemniscatisch ähnlich“. In leicht zu ermittelnden Specialfällen der Lage kann die lemniscatische Aehnlicheit in die gewöhnliche Aehnlichkeit übergehen.

In ähnlicher Weise findet die gesammte Geometrie der Lage ihre Uebertragung, während die Geometrie des Masses nur in speciellen Fällen der Uebersetzung fähig ist.

Aus den wesentlichsten Eigenschaften der Potenzlinien z. B. schliesst man auf die analogen der Potenzhyperbeln. Die Sätze von den Aehnlichkeitspunkten, von Pol und Polare, der Pascal'sche und Brianchon'sche Satz (zunächst für den Kreis) sind leicht zu übersetzen. Offenbar ist auch das Tactionsproblem, eine Lemnicate zu construiren, die drei gegebene Lemniscaten desselben Centrums berührt, mit elementaren Hilfsmitteln durchführbar.

Sind ferner P, Q und R, S zugeordnete harmonische Punkte in der z-Ebene, und p, q, r, s ihre Entfernungen vom Durchschnitt der Geraden mit einer durch den Nullpunkt gelegten Axe, so ist das Doppelverhältniss

$$\frac{r-p}{r-q}\cdot\frac{s-q}{s-p}=-1.$$

Durch Transformation $Z=\sqrt{z}$ gehen die vier Punkte in vier auf einer gleichseitigen Hyperbel liegende Punktpaare über, die man „lemniscatisch-harmonische“ nennen kann. Die lemniscatischen Radii vectores jeder der beiden Punktgruppen, bezogen auf die Durchschnitte der Hyperbel mit der durch den Nullpunkt gelegten Axe, genügen demnach der Relation

$$16)\qquad \frac{r.r_1 - p.p_1}{r.r_1 - q.q_1} \cdot \frac{s.s_1 - q.q_1}{s.s_1 - p.p_1} = -1.$$

Die Relation für die Winkel harmonischer Strahlen a, b, c, d,

$$17)\qquad \frac{\sin(ac)\,\sin(bd)}{\sin(bc)\,\sin(ad)} = -1,$$

bleibt für die von den entsprechenden Hyperbeln gebildeten Winkel unverändert bestehen. Für die lemniscatischen Radii vectores, bezogen auf die Verbindungslinie des Punktpaares, von dem die Hyperbeln ausstrahlen, verwandelt sie sich bei entsprechender Bezeichnung in folgende:

$$18)\qquad \frac{\sin[(\gamma+\gamma_1)-(\alpha+\alpha_1)]\,.\,\sin[(\delta+\delta_1)-(\beta+\beta_1)]}{\sin[(\gamma+\gamma_1)-(\beta+\beta_1)]\,.\,\sin[(\delta+\delta_1)-(\alpha+\alpha_1)]} = -1.$$

Die Sätze über harmonische Punkte und Strahlen sind nun ohne Weiteres auf díe lemniscatisch-harmonischen Punktpaare auf gleichseitiger Hyperbel und auf lemniscatisch-harmonische Hyperbeln durch ein Punktpaar zu übertragen.

Jetzt ist es leicht, die Fundamentaleigenschaften projectivischer Gebilde in die lemniscatische Geometrie einzuführen. Wir werden der Kürze halber dabei im Allgemeinen nur von Punktquaternionen in einer Halbebene sprechen. Für die paarweise zugeordneten Punkte gilt dann dasselbe.

Schneidet man vier von einem Punktpaare ausstrahlende gleichseitige Hyperbeln durch beliebige gleichseitige Hyperbeln desselben Centrums, so ist für die lemniscatischen Coordinaten der Schnittpunkte, bezogen auf die Durchschnitte der schneidenden Hyperbeln mit einer beliebigen Geraden durch den Nullpunkt, das lemniscatische Doppelverhältniss stets constant, also:

$$19)\qquad \begin{aligned} &\frac{r.r_1 - p.p_1}{r.r_1 - q.q_1} \cdot \frac{s.s_1 - q.q_1}{s.s_1 - p.p_1} = \frac{\sin(ac)\,\sin(bd)}{\sin(bc)\,\sin(ad)} \\ &= \frac{\sin[(\gamma+\gamma_1)-(\alpha+\alpha_1)]\,\sin[(\delta+\delta_1)-(\beta+\beta_1)]}{\sin[(\gamma+\gamma_1)-(\beta+\beta_1)]\,\sin[(\delta+\delta_1)-(\alpha-\alpha_1)]} = const. \end{aligned}$$

Ferner:

Zieht man durch vier auf gleichseitiger Hyperbel liegende Punktpaare beliebige Büschel gleichseitiger Hyperbeln desselben Centrums, so ist stets das lemniscatische Doppelverhältniss constant, also

$$20)\qquad \begin{aligned} &\frac{\sin(ac)\,\sin(bd)}{\sin(bc)\,\sin(ad)} = \frac{\sin[(\gamma+\gamma_1)-(\alpha+\alpha_1)]\,\sin[(\delta+\delta_1)-(\beta+\beta_1)]}{\sin[(\gamma+\gamma_1)-(\beta+\beta_1)]\,\sin[(\delta+\delta_1)-(\alpha+\alpha_1)]} \\ &= \frac{r.r_1 - p.p_1}{r.r_1 - q.q_1} \cdot \frac{s.s_1 - q.q_1}{s.s_1 - p.p_1} = const. \end{aligned}$$

Das Princip der Dualität bleibt in voller Allgemeinheit bestehen. So entsprechen sich z. B. folgende Sätze:

a) Die Durchschnitte entsprechender Elemente zweier lemniscatisch-projectivischen Büschel gleichseitiger Hyperbeln desselben Centrums liegen auf einer Curve vierten Grades mit zwei Brennpunktpaaren, deren Gleichung in lemniscatischen Coordinaten sich auf eine der folgenden Formen reduciren lässt:

$$21)\begin{cases} p\,.\,p_1 + q\,.\,q_1 = c, & \text{der Ellipse entsprechend;} \\ p\,.\,p_1 - q\,.\,q_1 = c, & \text{der Hyperbel entsprechend;} \\ p\,.\,p_1 \cos^2\dfrac{\vartheta+\vartheta_1}{2} = \dfrac{P}{4}, & \text{der Parabel entsprechend (Polargleichung für Brennpunkt).} \end{cases}$$

b) Die Verbindungshyperbeln entsprechender Elemente zweier lemniscatisch-projectivischer Punktreihen auf gleichseitigen Hyperbeln desselben Centrums haben eine der *sub* 21) genannten Curven vierten Grades zur Enveloppe.

In Betreff der Parabel sei bemerkt, dass, wenn der Brennpunkt im Nullpunkte liegt, die Gleichung der transformirten Curve wird

$$r \cos\vartheta = \sqrt{\frac{P}{4}},$$

woraus folgt, dass sämmtliche Parabeln, die den Nullpunkt zum Centrum haben, durch die Abbildung $Z = \sqrt{z}$ in Gerade übergehen, so dass man aus Sätzen über Parabel und Gerade entsprechende über Gerade und gleichseitige Hyperbel ableiten kann.

Dass von den Curven 21) der Pascal'sche und Brianchon'sche Satz etc. Geltung haben, nur dass man statt „Gerade" zu setzen hat „gleichseitige Hyperbel", ist selbstverständlich.

Als besonders interessant seien erwähnt die Uebertragungen der Siebeck'schen Curvenschaaren,* die mit den elliptischen Functionen zusammenhängen.

Die Analoga der Methode der reciproken Radii vectores und der Kreisverwandtschaft, bei welcher die Doppelverhältnisse in noch allgemeinerer Gestalt auftreten, sollen im folgenden Paragraphen besonders behandelt werden.

§ 5. Lemniscatische Reciprocität und lemniscatische Verwandtschaft.

Angenommen, zwei Ebenen stehen in der Beziehung, dass jedem Punktpaare der einen ein und nur ein Punktpaar der andern entspricht,

* Siebeck: „Ueber eine Gattung von Curven vierten Grades etc.", Crelle's Journal Bd. 57 und 59.

und dass je vier Punktpaaren der ersteren, die auf einer der Lemniscaten desselben Centrums liegen, jedesmal vier Punktpaare der andern entsprechen, die gleichfalls auf einer solchen Lemniscate liegen, kurz, dass unter allen Lemniscaten eines gemeinschaftlichen Centrums der einen Ebene jedes Individuum einem solchen unter den Lemniscaten desselben Centrums in der andern Ebene entspricht, dann steht jedes Gebilde der einen Ebene zu dem entsprechenden der andern in einer bestimmten geometrischen Beziehung, die man als lemniscatische Verwandtschaft bezeichnen kann.

Die Realität ihrer Existenz und ihr isogonaler Charakter gehen schon daraus hervor, dass kreisverwandte Gebilde der z-Ebene durch die Abbildung $Z=\sqrt{z}$ in lemniscatisch verwandte übergehen. Der Bereich dieser Verwandtschaft ist ferner ein scharf begrenzter, da die Abbildung $z=Z^2$ lemniscatisch verwandte Systeme in kreisverwandte überführt, sobald der Nullpunkt der Transformation mit dem gemeinschaftlichen Centrum jedes Systems zusammenfällt. Jedoch dürfte auch der rein geometrische Nachweis, der dem von Möbius für die Kreisverwandtschaft gegebenen entsprechen würde, ohne Schwierigkeit durchführbar sein. Hier soll dieser Weg nicht eingeschlagen werden, da schon das Studium der Möbius'schen Abhandlung dem Anfänger einige Schwierigkeiten bereitet, die hier in erhöhtem Masse eintreten würden. Directer führt Folgendes zum Ziele:

Die Eigenschaften der Kreisverwandtschaft werden besonders übersichtlich durch den Umstand, dass sich dieselbe im Wesentlichen auf die Transformation durch reciproke Radii vectores zurückführen lässt. Man hat nur vom Massstabe der Zeichnung, von der speciellen Lage des abbildenden Centrums (des Nullpunktes) und von einer Drehung des Systems (Richtung der reellen Axe) abzusehen. Alle diese Nebenumstände beeinflussen den geometrischen Charakter der Gebilde nicht und erledigen sich durch Congruenz oder Aehnlichkeit. Analytisch gesprochen: Die Abbildung $Z=\frac{az+b}{cz+d}$ lässt sich durch lineare Substitutionen auf $Z=\frac{1}{z}$ reduciren.

Ganz analog lässt sich die lemniscatische Verwandtschaft zurückführen auf eine Operation, die bei der Abbildung $Z=\sqrt{z}$ der Transformation durch reciproke Radii vectores entsprechen würde, die man demnach als lemniscatische Reciprocität oder als isothermische Spiegelung gegen die Lemniscate bezeichnen dürfte. Letzterer Name empfiehlt sich deshalb, weil jede isothermische Spiegelung durch Transformation vermittelst einer bestimmten Function complexen Argumentes in die wirkliche Spiegelung gegen eine Gerade verwandelt werden kann, woraus gleichzeitig folgt, dass alle diese Spiegelungen involutorisch sind.

Wiederum müsste bei der Reduction der lemniscatischen Verwandtschaft auf die lemniscatische Reciprocität von den genannten Nebenumständen zu abstrahiren sein.

Da die Lemniscate im speciellen Falle zum Kreise, resp. zur gleichseitigen Hyperbel wird, so ist die Methode der reciproken Radii vectores und ebenso die isothermische Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel, die ich in der bereits citirten Abhandlung als „Uebertragung von Hyperbel auf Complementarhyperbel“ bezeichnete, als specieller Fall in der jetzt zu behandelnden Spiegelungsmethode enthalten. Dort geschah die Uebertragung durch confocale Ellipsen. Man wird jetzt sehen, dass sie auch durch orthogonale Hyperbeln und Lemniscaten vermittelt werden kann, ebenso, wie jedes Spiegelbild gegen die Gerade nicht nur durch Lothe, sondern überhaupt durch orthogonale Curvenschaaren erzeugt werden kann, die symmetrisch gegen die Gerade sind.

Die Spiegelung gegen die Lemniscate ist also eine Operation von bemerkenswerther Allgemeinheit.

Um ihren Charakter zu skizziren, sind in Folgendem die entsprechenden Eigenschaften der Kreis- und der lemniscatischen Reciprocität tabellarisch zusammengestellt. Der Radius des spiegelnden Kreises sei $r = 1$, die Entfernung seines Centrums vom Nullpunkte der Transformation $Z = \sqrt{z}$ sei e. Entsprechend sei der Parameter der spiegelnden Lemniscate $p \cdot p_1 = 1$, die Entfernung der Brennpunkte vom Nullpunkte der Z-Ebene sei $\sqrt{e}$. Da e ganz beliebig sein kann, so ist durch diese Bestimmungen die Allgemeinheit nicht beschränkt, die ganze Mannichfaltigkeit der Lemniscaten kommt zur vollen Geltung.

Reciproke Radii vectores.	**Lemniscatische Reciprocität.**
1. Jeder concentrische Kreis mit Radius $r = c$ geht über in einen concentrischen mit Radius $r = \frac{1}{c}$.	1. Jede confocale Lemniscate $p \cdot p_1 = c$ geht über in eine confocale $p \cdot p_1 = \frac{1}{c}$.
2. Jeder Radius der concentrischen Kreisschaar erzeugt sich selbst wieder.	2. Jede gleichseitige Orthogonalhyperbel der Confocalschaar erzeugt sich selbst wieder.
3. Der äussere und innere Raum des Kreises werden eindeutig aufeinander abgebildet. Der Nullpunkt und der unendliche Punkt entsprechen einander. — Die Abbildung	3. Streng genommen ist die Abbildung eine zweideutige. So entspricht der unendliche Punkt den beiden Brennpunkten, die imaginäre Axe und die Verbindungslinie der

wird mit elementaren Hilfsmitteln bewerkstelligt.

Brennpunkte führen gleichfalls auf Zweideutigkeit, die Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel ist durchaus zweideutig. Beschränkt man jedoch die Betrachtung auf die Halbebene rechts von der imaginären Axe, so kann man die Zweideutigkeit vermeiden. Nur muss die Strecke von 0 bis $\sqrt{c}$ aufgeschnitten gedacht werden. — Die Abbildung wird elementar bewerkstelligt.

4. Ein Kreis mit Radius $r = c$, in Bezug auf den die Potenz des abbildenden Centrums t^2 ist, geht über in einen Kreis mit Radius $r = \frac{c}{t^2}$, in Bezug auf den die Potenz des abbildenden Centrums $\frac{1}{t^2}$ ist.

Die Mittelpunkte beider Kreise entsprechen einander im Allgemeinen nicht. Ist der eine vom abbildenden Centrum um a entfernt, so hat der andere die Entfernung $\frac{a}{t^2}$. Beide liegen auf einer durch das Abbildungscentrum gehenden Geraden.

4. Eine Lemniscate mit beliebigem Brennpunktpaare und dem Parameter $q \cdot q_1 = c$, in Bezug auf welche die lemniscatische Potenz* der abbildenden Brennpunkte $p^2 \cdot p_1^2 = t^2$ ist, geht über in eine Lemniscate mit dem Parameter $q \cdot q_1 = \frac{c}{t^2}$, in Bezug auf welche die lemniscatische Potenz der abbildenden Brennpunkte $p^2 \cdot p_1^2 = \frac{1}{t^2}$ ist.

Die Brennpunkte beider Lemniscaten entsprechen einander im Allgemeinen nicht. Ist für das eine Paar die lemniscatische Entfernung vom abbildenden Brennpunktpaare $p \cdot p_1 = a$, so ist für das andere Paar $p \cdot p_1 = \frac{a}{t^2}$. Beide Paare liegen auf der durch das abbildende Brennpunktpaar gehenden gleichseitigen Hyperbel.

* Der Begriff der lemniscatischen Potenz ist leicht, nur etwas umständlich auszudrücken:

Liegt ein Punktpaar ausserhalb der Lemniscate, so lege man durch das Punktpaar eine tangirende Hyperbel. Ist der Parameter des Berührungspunktes in Bezug auf das Punktpaar $p \cdot p_1 = t$, so ist t^2 die lemniscatische Potenz des Punktpaares in Bezug auf die Lemniscate. Liegt hingegen das Punktpaar innerhalb, so lege man eine gleichseitige Hyperbel durch das Punktpaar und die Brennpunkte und errichte auf dieser im Punktpaare die Orthogonalhyperbel. Jetzt ist das Quadrat vom Parameter des Schnittpunktes (gegen das Punktpaar) als Potenz zu betrachten.

5. Schliesst der abzubildende Kreis das Abbildungscentrum aus, so ist letzteres äusserer Aehnlichkeitspunkt der beiden sich entsprechenden Kreise; schliesst er es ein, so ist es innerer Aehnlichkeitspunkt. Alle drei Kreise haben gemeinschaftliche Potenzlinie.

6. Einfacher ist Alles auszudrücken, wenn der abzubildende Kreis den abbildenden unter einem Winkel α schneidet. Der reciproke schneidet dann in denselben Punkten unter dem Winkel $-\alpha$. Orthogonalkreise des abbildenden gehen also in sich selbst über. Zwei beliebige Punkte und ihre Abbildungen liegen stets auf einem Orthogonalkreise des abbildenden Kreises.

7. Jede Gerade in Entfernung c vom Transformationscentrum geht über in einen durch letzteres gehenden Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Normale der Geraden in Entfernung $\frac{1}{2c}$ vom Centrum liegt.

Umgekehrt verwandeln sich Kreise durch das Centrum in entsprechende Gerade.

5. Schliesst die Lemniscate das abbildende Brennpunktpaar aus, so schneiden sich in letzterem die gemeinschaftlichen äusseren Berührungshyperbeln der sich entsprechenden Lemniscaten. Schliesst sie es ein, so ist das Brennpunktpaar Durchschnitt einer leicht zu definirenden Hyperbel mit der durch beide Brennpunktpaare gehenden gleichseitigen Hyperbel. Alle drei Lemniscaten haben eine gemeinschaftliche Potenzhyperbel.

6. Einfacher wird der Ausdruck, wenn die abzubildende Lemniscate die abbildende unter dem Winkel α schneidet. Die reciproke schneidet dann in denselben Punkten unter dem Winkel $-\alpha$. Orthogonallemniscaten der abbildenden gehen also in sich selbst über. Zwei beliebige Punktpaare und ihre Abbildungen liegen stets auf einer Orthogonallemniscate der abbildenden Lemniscate.

7. Jede gleichseitige Hyperbel in der lemniscatischen Entfernung $p.p_1 = c$ vom abbildenden Centrum (welche also die confocale Lemniscate $p.p_1 = c$ berührt) geht über in eine durch das abbildende Brennpunktpaar gehende Lemniscate, deren Brennpunkte von letzterem die lemniscatische Entfernung $p.p_1 = \frac{1}{2c}$ haben und auf der Orthogonalhyperbel liegen, die vom abbildenden Centrum auf die erstgenannte Hyperbel zu fällen ist.

Umgekehrt verwandeln sich Lemniscaten durch das Centrum in entsprechende gleichseitige Hyperbeln.

8. Das Kreisbüschel durch die Punkte r, φ und r_1, φ_1 verwandelt sich in das Kreisbüschel durch $\frac{1}{r}, \varphi$ und $\frac{1}{r_1}, \varphi_1$. Die Orthogonalschaar des ersteren geht in die des letztern über. Jede isogonale Trajectorienschaar des erstern (logarithmische Doppelspiralen) wird in die entsprechende des letztern verwandelt.

9. Die Reciprocität gegen den Kreis mit Radius $r = 1$ um den Punkt $a + bi$ ist, abgesehen vom Umklappen um die reelle Axe, identisch mit der Abbildung

$$Z = a + bi + \frac{1}{z - (a + bi)}.$$

Die Spiegelung gegen den Kreis mit Radius $r = c$ um $a + bi$ ist im Wesentlichen identisch mit der Abbildung

$$Z = a + bi + \frac{c^2}{z - (a + bi)}.$$

10. Die Spiegelung gegen die verticale Gerade $x = a$ ist im Wesentlichen identisch mit der Transformation

$$Z = 2a - z.$$

8. Das Lemniscatenbüschel durch die Punktpaare

$$[p \cdot p_1 = r, \ \vartheta + \vartheta_1 = \varphi]$$

und

$$[p \cdot p_1 = r_1, \ \vartheta + \vartheta_1 = \varphi_1]$$

verwandelt sich in das Lemniscatenbüschel durch

$$\left[p \cdot p_1 = \frac{1}{r}, \ \vartheta + \vartheta_1 = \varphi\right]$$

und

$$\left[p \cdot p_1 = \frac{1}{r_1}, \ \vartheta + \vartheta_1 = \varphi_1\right];$$

die orthogonale Lemniscatenschaar des erstern in die des letztern. Jede isogonale Trajectorienschaar des erstern (allgemeine lemniscatische Spiralenschaar) geht in die entsprechende des letztern über.

9. Die isothermische Spiegelung gegen die Lemniscate $p \cdot p_1 = 1$ um das Punktpaar $\sqrt{a + bi}$ ist im Wesentlichen identisch mit der Abbildung

$$Z = \sqrt{a + bi + \frac{1}{z^2 - (a + bi)}}$$

$\Bigg($für die Schleifenlemniscate um ± 1 also $Z = \sqrt{1 + \frac{1}{z^2 - 1}}\Bigg)$.

Die Spiegelung gegen die Lemniscate $p \cdot p_1 = c$ um $\sqrt{a + bi}$ reducirt sich auf die Abbildung

$$Z = \sqrt{a + bi + \frac{c^2}{z^2 - (a + bi)}}.$$

10. Die Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel durch das Punktpaar $\sqrt{a}$ mit den Brennpunkten $\sqrt{2a}$ wird repräsentirt durch die Function

$$Z = \sqrt{2a - z^2}.$$

Sind z. B. die Brennpunkte ± 1, so ist die abbildende Function

$$Z = \sqrt{1 - z^2}.$$

Bei dieser Spiegelung bleibt der Radius des gespiegelten Kreises ungeändert. Geometrisch kann die Operation durchgeführt werden durch Lothe, die um sich selbst verlängert werden. — Gerade gehen in Gerade über.

Bei dieser Spiegelung bleibt der Parameter $p . p_1$ ungeändert. Der Brennpunkt λ geht in $\sqrt{1-\lambda^2}$ über. Die Spiegelung kann vollführt werden durch Orthogonalhyperbeln, die um correspondirende Bogen verlängert werden.* Gleichseitige Hyperbeln gehen wieder in solche über.

11. Ist der abbildende Kreis mit Radius $r = c$ um den Nullpunkt geschlagen, so ist die abbildende Function

$$Z = \frac{c^2}{z}.$$

11. Ist die Lemniscate im speciellen Falle ein Kreis um den Nullpunkt, so bleiben die allgemeinen Gesetze bestehen. Transformation durch reciproke Radii vectores vom Nullpunkte aus verwandelt also Lemniscatenschaaren wiederum in solche, so dass z. B. Fig. 3 durch diese Operation in Fig. 4 übergeht.

12. Transformirt man ein Kreisbüschel durch reciproke Radii vectores mittelst beliebigen Kreises, der einen der Büschelpunkte zum Centrum hat, so geht das Kreisbüschel in eine Radienschaar, die Kreisschaar in ein System concentrischer Kreise über. Die logarithmischen Doppelspiralen, welche die isogonalen Trajectorien des Büschels sind, gehen in logarithmische Spiralen über.

12. Wird ein durch zwei Punktpaare gehendes Lemniscatenbüschel durch eine Lemniscate, deren Brennpunkte mit einem Büschelpunktpaare zusammenfallen, isothermisch gespiegelt, so entsteht ein Hyperbelbüschel. Die Orthogonalschaar geht in eine Schaar confocaler Lemniscaten über. Die entsprechende Curvenschaar 12) verwandelt sich in eine von der Form 13).

13. Die Aufgabe, den Raum zwischen zwei sich nicht schneidenden Kreisen in einen concentrischen

13. Die Aufgabe, den Raum zwischen zwei beliebigen, sich nicht schneidenden Lemniscaten in einen

* Da die Spiegelung auch durch confocale Ellipsen vermittelt werden kann, so ergiebt sich mancher interessante Zusammenhang. Schlägt man z. B. mit der Halbaxe einer einfachen Lemniscate einen Kreis um den Scheitel der confocalen Schleifenlemniscate, so trifft man die imaginäre Axe im Schnittpunkte derselben mit der ersten Lemniscate. Das Verhalten ist also ähnlich dem der Ellipsenhalbaxen. So ergeben sich manche Constructionserleichterungen, z. B. zur Herstellung des Netzes in Fig. 3, resp. 4, wo stets je acht Punkte auf einer der confocalen Ellipsen liegen. Auch für die Construction des Netzes der *sin am*-, *cos am*-, *Δ am*-Curven (*mod* $\varkappa$ positiv, reell und < 1) ist dies zu verwerthen.

Kreisring zu verwandeln, hat also folgende geometrische Lösung: Man construire die Potenzlinie beider Kreise, schlage um einen beliebigen Punkt derselben einen Orthogonalkreis und nehme einen der Durchschnitte desselben mit der Centrale der gegebenen Kreise zum Centrum der Transformation durch reciproke Radii vectores. Der Radius des spiegelnden Kreises ist beliebig. Von der Wahl des Büschelpunktes hängt es ab, welcher Kreis der innere wird.

14. Diese Transformation und überhaupt jede Kreisverwandtschaft lässt sich reduciren auf die Abbildung durch eine Function von der Form

$$Z=\frac{az+b}{cz+d}.$$

confocalen Lemniscatenring zu verwandeln, hat also folgende Lösung: Man construire die Potenzhyperbel beider Lemniscaten, lege um ein beliebiges Punktpaar derselben eine orthogonale Lemniscate und mache ein Durchschnitts-Punktpaar derselben mit der Centralhyperbel zu Brennpunkten der spiegelnden Lemniscate, deren Parameter beliebig ist. Von der Wahl des Durchschnitts-Punktpaares hängt es ab, welche Lemniscate die innere wird.

14. Diese Transformation und überhaupt jede lemniscatische Verwandtschaft lässt sich reduciren auf die Abbildung durch eine Function von der Form

$$Z=\sqrt{\frac{az^2+b}{cz^2+d}},$$

der noch eine additive Constante hinzugefügt werden kann.

Für das Spätere sei noch bemerkt, dass die Drehung einer Geraden um einen beliebigen Punkt ein Resultat giebt, welches der Transformation $Z=a+(\cos\alpha+i\sin\alpha)(z-a)$ entspricht. Folglich wird die in der Optik auftretende Drehung der Polarisationshyperbeln um das Brennpunktpaar $\sqrt{e}$ in ihrem Resultate dargestellt durch die Abbildung

$$Z=\sqrt{e+(\cos\alpha+i\sin\alpha)(z^2-e)}.$$

Das Resultat entspricht also stets der Spiegelung gegen eine der gleichseitigen Hyperbeln durch einen Punkt.

Ferner ist noch von Interesse die Frage, auf welchen Curven bei der isothermischen Spiegelung gegen die Lemniscate das Vergrösserungsverhältniss constant ist, d. h. für welche Punkte der absolute Betrag des Differentialquotienten constant ist. Zwei Specialfälle geben ein einfaches Resultat.

15. Die Function $Z=\sqrt{1-z^2}$ vermittelt die Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel mit den Brennpunkten ± 1. Da der Differentialquotient

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{-z}{\sqrt{1-z^2}}$$

für reelle Werthe des Arguments, die kleiner als die Einheit sind, reell ist, so folgt aus

$$X + Yi = -\frac{x+yi}{\sqrt{1-(x+yi)^2}}$$

die Gleichung

$$X - Yi = -\frac{x-yi}{\sqrt{1-(x-yi)^2}},$$

also entsteht durch Multiplication und Radicirung der absolute Betrag

$$R = \frac{r}{\sqrt[4]{(1+x+yi)(1+x-yi)(1-x+yi)(1-x-yi)}} = \frac{r}{\sqrt{p \cdot p_1}},$$

wenn p und p_1 die von ± 1 ausgehenden Radii vectores sind.*

Setzt man diesen absoluten Betrag, also auch das Vergrösserungsverhältniss $R = c$, so ergiebt sich Folgendes:

Bei der isothermischen Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel mit den Brennpunkten ± 1 ist das Vergrösserungsverhältniss constant gleich c für die Punkte der Curve

$$22)\qquad \frac{r^2}{p \cdot p_1} = c^2,$$

d. h. für die Individua der Orthogonalschaar des durch 0 und ± 1 gehenden Büschels von Schleifenlemniscaten.

[Vergl. Fig. 4 und Gleichung 11)].

Nun verwandelt sich aber bei der Abbildung $Z = \sqrt{1-z^2}$ der Parameter $p \cdot p_1$, von ± 1 aus gerechnet, in das Quadrat des vom Nullpunkte ausgehenden Radius r, und umgekehrt r^2 in $p \cdot p_1$. (Vergl. Beiträge zur Theorie etc. S. 235.) Folglich: Die durch Gleichung 22) dargestellte Curve geht über in die Lemniscate

$$23)\qquad \frac{r^2}{p \cdot p_1} = \frac{1}{c^2}.$$

Die Curve 22) und ihr Spiegelbild 23) gegen die gleichseitige Hyperbel haben also folgende Beziehungen:

1. Ihre Parameter (in Bezug auf Radii vectores von 0 und ± 1 aus) sind reciprok.
2. Ist der Brennpunkt der einen $\pm \lambda$, so ist der der andern $\pm \sqrt{1-\lambda^2}$; liegt also das eine Paar auf der imaginären Axe, so liegt das andere auf der reellen, und zwar ausserhalb ± 1.

---

* Multiplication von $(1+x+yi)$ und $(1+x-yi)$ giebt das Quadrat des absoluten Betrages jeder dieser conjugirten Zahlen, d. h. den Radius vector p im Quadrat. Der Richtungssinn des Radius vector wird durch diese Multiplication gewissermassen eliminirt.

3. Ist die Brennpunktsgleichung der einen Lemniscate $p \cdot p_1 = \varkappa$, so lautet die der andern genau ebenso; nur sind die neuen Brennpunkte zu Grunde zu legen.
4. Hat die eine den Umfang u, so ist der Umfang der andern $c.u$.
5. Ist die eine in gleiche Bogen getheilt, so wird, wenn man durch die Theilpunkte Orthogonalhyperbeln zur spiegelnden Hyperbel oder Lemniscaten durch 0 und ± 1 legt, auch die andere in gleiche Bogen getheilt.

Hier ist also die Analogie mit der Transformation durch reciproke Radii vectores eine sehr weitgehende. Der Umstand, dass man von der Theilung einer einfachen Lemniscate zu der einer aus zwei Ovalen bestehenden übergehen kann, dürfte für das Gebiet der Curventheilung von Interesse sein.

Aehnliches geschieht bei der Spiegelung gegen die Schleifenlemniscate. Sind ihre Brennpunkte ± 1, also auch der Parameter gleich 1, so wird diese Transformation vermittelt durch

$$Z = \sqrt{1 + \frac{1}{z^2 - 1}}.$$

Hier ist

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{-z}{(z^2-1)^2 \sqrt{1 + \frac{1}{z^2-1}}} = \frac{-1}{(z^2-1)^{3/2}}.$$

Multiplicirt man hier die Gleichungen conjugirten Arguments, so ergiebt sich als absoluter Betrag

$$R = \frac{1}{[(x+yi+1)(x-yi+1)(x+yi-1)(x-yi-1)]^{3/4}} = \left(\frac{1}{p \cdot p_1}\right)^{3/2},$$

wobei die Radii vectores wiederum von ± 1 ausgehen. Setzt man $R = c$, so folgt:

Bei der Spiegelung gegen die Schleifenlemniscate sind die confocalen Lemniscaten die Curven constanten Vergrösserungsverhältnisses, und zwar ist dasselbe constant gleich c für die Lemniscate

24) $$p \cdot p_1 = c^{-2/3}.$$

Diese geht aber durch die Transformation über in die confocale Lemniscate

25) $$p \cdot p_1 = c^{2/3}.$$

Setzt man $c^{-2/3} = \varkappa$, also $c^{2/3} = \frac{1}{\varkappa}$ und $c = \varkappa^{-3/2}$, so ergiebt sich der Satz:

Haben zwei confocale Lemniscaten mit Brennpunkten ± 1 die reciproken Parameter $\varkappa$ und $\frac{1}{\varkappa}$, so ist der Umfang des zweiten das $\varkappa^{-3/2}$-fache vom Umfang des erstern.

Sind z. B. die Parameter 2 und $\frac{1}{2}$, so verhalten sich die Umfänge wie $1 : \frac{1}{\sqrt{8}}$. Ist die eine Curve in gleiche Theile getheilt, so wird die zweite durch die Orthogonalhyperbeln, die durch die Theilpunkte gelegt werden, ebenfalls in gleiche Theile getheilt.

Bei der Spiegelung gegen die Lemniscate allgemeiner Gestalt scheint diese Analogie mit der Kreisreciprocität aufzuhören. Sind z. B. die Brennpunkte $\sqrt{e}$ und der Parameter die Einheit, so ergiebt sich auf demselben Wege, dass die Curven constanten Vergrösserungsverhältnisses c die Gleichung

$$26)\qquad \frac{r^2}{p^3 \cdot p_1^{\,3} \cdot q \cdot q_1} = e \cdot c^2$$

haben, wo die Radii vectores p, p_1 von ± 1, q, q_1 von $\pm\sqrt{1+\frac{1}{e}}$, und r von 0 ausgehen.

Jetzt ist es leicht, die allgemeinen Eigenschaften der lemniscatischen Verwandtschaft nach Analogie der Möbius'schen Abhandlung über die Kreisverwandtschaft auszusprechen. Wir beschränken uns darauf, die wichtigsten Sätze über Doppelverhältnisse und Doppelwinkel, die Möbius für Punktquaternionen in kreisverwandten Ebenen aufgestellt hat, zu übertragen. Um Zweideutigkeiten auszuweichen, nehmen wir stets an, dass die Punktquaternionen sich in einer Halbebene befinden; dann gilt jeder Satz gleichzeitig für die vier zugeordneten Punkte.

Sind A, B, C, D und a, b, c, d entsprechende Punkte kreisverwandter Ebenen, so ist

$$\frac{AB \cdot CD}{BC \cdot DA} = \frac{ab \cdot cd}{bc \cdot da},$$

also, wenn man die Durchschnitte der Geraden AB, BC, CD und DA mit einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden P, Q, R, S nennt und in der andern Ebene die entsprechenden Buchstaben wählt:

$$\frac{(PB - PA)(RD - RC)}{(QC - QB)(SA - SD)} = \frac{(pb - pa)(rd - rc)}{(qc - qb)(sa - sd)}.$$

Durch die Transformation $Z = \sqrt{z}$ geht der Satz in folgenden über:

Sind A, B, C, D und a, b, c, d entsprechende Punkte lemniscatisch verwandter Halbebenen, und bezeichnet man die Durchschnitte der durch A und B, B und C, C und D, D und A gehenden gleichseitigen Hyperbeln mit einer durch den Nullpunkt gelegten Geraden mit P, P_1, Q, Q_1, R, R_1, S, S_1, während man in der andern Ebene die entsprechenden kleinen Buchstaben wählt, so gilt der Satz:

$$27)\quad \frac{(PB.P_1B - PA.P_1A).(RD.R_1D - RC.R_1C)}{(QC.Q_1C - QB.Q_1B).(SA.S_1A - SD.S_1D)} = \frac{(pb.p_1b - pa.p_1a).(rd.r_1d - rc.r_1c)}{(qc.q_1c - qb.q_1b).(sa.s_1a - sd.s_1d)},$$

d. h. die „lemniscatischen Doppelverhältnisse" sind gleich.

Liegen im speciellen Falle die vier Punktpaare der einen Ebene auf einer Lemniscate (mit Nullpunkt als Centrum), so liegen auch die entsprechenden der andern auf einer Lemniscate, und für beide Quaternionenpaare besteht die der Ptolemäischen entsprechende Relation

$$28)\quad \begin{cases} \dfrac{(PB.P_1B - PA.P_1A)(RD.R_1D - RC.R_1C) + (QC.Q_1C - QB.Q_1B)(SA.S_1A - SD.S_1D)}{(VC.V_1C - VA.V_1A)(WD.W_1D - WB.W_1B)} \\ = \dfrac{(pb.p_1b - pa.p_1a)(rd.r_1d - rc.r_1c) + (qc.q_1c - qb.q_1b)(sa.s_1a - sd.s_1d)}{(vc.v_1c - va.v_1a)(wd.w_1d - wb.w_1b)} \\ = 1, \end{cases}$$

wo V, V_1, W, W_1 etc. die Durchschnitte der Diagonalhyperbeln mit der Axe bedeuten.

Sind A, B und C feste Punkte und X ein variabler Punkt, der jedoch so wandert, dass stets die Bedingung

$$\frac{AB.XC}{BC.AX} = 1$$

erfüllt bleibt, so ist der geometrische Ort für X ein Kreis durch B, dessen durch A und C gehender Durchmesser harmonisch getheilt wird. Folglich:

Sind A, B und C fest und genügt X stets der Bedingung, dass

$$29)\quad \frac{(PB.P_1B - PA.P_1A).(YC.Y_1C - YX.Y_1X)}{(QC.Q_1C - QB.Q_1B).(ZX.Z_1X - ZA.Z_1A)} = 1$$

ist (wo P, Q, Y, Z die Durchschnitte der entsprechenden Hyperbeln mit der durch den Nullpunkt gelegten Axe sind), so ist der geometrische Ort von X eine Lemniscate.

Man erkennt Folgendes:

Soll zu einem System von Punktpaaren einer Ebene ein lemniscatisch verwandtes System in einer andern Ebene construirt werden, so kann man in der zweiten Ebene die drei Punktpaaren entsprechenden Paare willkürlich wählen und den Drehungssinn für die Winkel willkürlich bestimmen. Dann aber ist die Verwandtschaft vollständig bestimmt und die weiteren Uebertragungen sind mit elementaren Hilfsmitteln durchführbar.

Die entsprechenden Sätze für die „Doppelwinkel" sind ebenso zu übersetzen. $ABCD$ und $abcd$ seien entsprechende Punktquaternionen kreisverwandter Ebenen. Dann ist nach Möbius

30) $\angle ABC + CDA = abc + cda$ und $\angle BCD + DAB = bcd + dab$.

Bei der Transformation $Z=\sqrt{z}$ bleibt wegen des isogonalen Charakters derselben diese Relation für Winkel, unter denen sich die das Viereck bildenden gleichseitigen Hyperbeln schneiden, unverändert bestehen; folglich gilt er auch von den lemniscatischen Winkelsummen, die den entsprechenden Radii vectores zugehören. Also:

Die lemniscatischen Doppelwinkel entsprechender Paare von Punktquaternionen in lemniscatisch verwandten Ebenen sind einander gleich.

Ist für ein Punktquaternionenpaar der lemniscatischen Ebene die Winkelsumme des Hyperbelvierecks

$$31)\qquad \angle ABC + CDA = BCD + DAB = 180^0,$$

so gilt von dem Viereckspaare die der Ptolemäischen entsprechende Relation 28); ist umgekehrt letztere erfüllt, so gilt auch die Relation 31), d. h. das Viereckspaar hat seine Eckpunkte auf einer Lemniscate.

Demnach lässt sich die lemniscatische Verwandtschaft auch dadurch definiren, dass das lemniscatische Doppelverhältniss jedes Punktquaternionenpaares der einen Ebene gleich ist dem lemniscatischen Doppelverhältnisse des entsprechenden Punktquaternionenpaares der andern Ebene, oder dadurch, dass die lemniscatischen Doppelwinkel von Punktquaternionenpaaren der einen Ebene gleich den Doppelwinkeln der entsprechenden in der andern Ebene sind.

Schliesslich sei bemerkt, dass auch der von Möbius und Bretschneider für jedes Viereck bewiesene Satz

$$\frac{\sin(ABC+CDA)}{\sin(BCA+ADB)}=\frac{AC.BD}{BA.CD}\ *$$

in einen leicht auszusprechenden über die lemniscatischen Doppelverhältnisse und Doppelwinkel eines Viereckqaares übergeht.

Um den Algorithmus zu vereinfachen, dürften als abgekürzte Bezeichnungen für das lemniscatische Doppelverhältniss, resp. die lemniscatischen Doppelwinkel, die Symbole

$$[ABCD] \text{ und } \angle[ABCD]$$

ausreichen, die den Möbius'schen Zeichen ganz analog sind.

Das Gegebene reicht hin, die von Möbius über die Kreisverwandtschaft ausgesprochenen allgemeinen Sätze ausnahmslos in solche über die lemniscatische Verwandtschaft zu übertragen.

§ 6. Einige Sätze und Probleme, die der lemniscatischen Verwandtschaft und ihrer Combination mit anderen Verwandtschaften entspringen.

Auch hier ist nur von Lemniscaten und gleichseitigen Hyperbeln desselben Centrums, resp. von den isogonalen Trajectorien der entspre-

* Möbius: „Theorie der Kreisverwandtschaft", S. 552.

chenden Schaaren und Büschel die Rede. Die Entwickelung der Sätze und Probleme, die jetzt ohne Beweis angegeben werden sollen, ergiebt sich leicht aus der Kenntniss der Kreisverwandtschaft, der logarithmischen Abbildung und der behandelten Transformation $Z=\sqrt{z}$. Auf anderen Wegen würden sich dem Beweise, resp. der Ausführung der Probleme grössere Schwierigkeiten entgegenstellen.

1. Lemniscaten, die einem Streifen zwischen gleichseitigen Hyperbeln derselben Parallelschaar (Fig. 2) eingeschrieben sind, haben ihre Brennpunkte auf derjenigen Hyperbel derselben Schaar, welche den Streifen in zwei correspondirende Theile zerlegt. Berühren sich die Individua der eingeschriebenen Reihe gegenseitig, so liegen die Berührungspunkte auf derselben Hyperbel.

   Dasselbe gilt von Lemniscatenreihen in dem Raume zwischen zwei sich schneidenden gleichseitigen Hyperbeln.
2. Die einem Ringe zwischen zwei confocalen Lemniscaten eingeschriebenen Lemniscaten haben ihre Brennpunkte auf einer confocalen Lemniscate. Berühren sie sich gegenseitig, so liegt die Reihe der Berührungspunkte auf einer andern confocalen Lemniscate, die den Ring in zwei correspondirende Theile zerlegt. Schliesst die Reihe nach einem, resp. mehreren Umgängen, was vom Verhältniss der Parameter beider Lemniscaten abhängt, so schliesst sie stets, welchen Anfangspunkt man auch wählen möge. (Die verschiedenen Zeichnungen, die auf diese Weise entstehen, sind lemniscatisch verwandt!)
3. Der Satz von den Berührungspunkten der eingeschriebenen Lemniscatenreihe gilt auch von dem Raume zwischen nicht confocalen Lemniscaten, die sich schneiden, berühren, umschliessen oder auseinander liegen. Dann liegen aber die Brennpunkte auf einer der Curven vierten Grades, die durch die Gleichungen 21) dargestellt sind. Schneiden sich die umhüllenden Lemniscaten nicht, so ist eine Schliessung der Reihe möglich, die Art derselben aber abhängig von den Parametern beider Curven und der lemniscatischen Entfernung ihrer Brennpunkte.
4. In ähnlicher Weise übertragen sich die Schliessungsprobleme, die von Jacobi mit dem Additionstheorem der elliptischen Functionen in Verbindung gebracht sind.* Die Geraden gehen dabe natürlich in tangirende gleichseitige Hyperbeln über.

---

* Jacobi: „Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein Problem der Elementargeometrie", Crelle's Journ. Bd. 3; und Durège: „Theorie der elliptischen Functionen", Abschn. 10.

In der Abhandlung über „die logarithmische Abbildung etc.“ entwickelte ich die Eigenschaften der logarithmischen Spirale und der isogonalen Trajectorien der Kreisschaar (d. h. der logarithmischen Doppelspiralen) aus denen der Geraden mit Hilfe der Abbildungen complexen Arguments

$$Z = lg\, z, \text{ resp. } Z = e^z$$

und

$$Z = lg \frac{az+b}{cz+d}, \text{ resp. } Z = \frac{a_1 e^z + b_1}{c_1 e^z + d_1}.$$

In entsprechender Weise verwandelt die Abbildung

32) $$Z = \sqrt{\frac{ae^z + b}{ce^z + d}}$$

Gerade in allgemeine lemniscatische Spiralen, deren Gleichung ist

12) $$\frac{p \cdot p_1}{q \cdot q_1} = c \cdot \varkappa^{(\varphi + \varphi_1) - (\chi + \chi_1)},$$

während die einfachere Transformation

33) $$Z = \sqrt{e^z}$$

auf die den logarithmischen Spiralen entsprechenden isogonalen Trajectorien der confocalen Lemniscatenschaar, also auf die durch Gleichung 13)

$$p \cdot p_1 = c \varkappa^{\vartheta + \vartheta_1}$$

repräsentirten Curven führt.

Von den Eigenschaften dieser transcendenten Curven seien nur einige genannt:

5. Die Parallschaaren der lemniscatischen Spiralen bilden isothermische Curvenschaaren, deren Individua sich, abgesehen von den Büschelpunkten, gegenseitig nicht schneiden. Um diese Punkte finden unendlich viele Windungen statt. Im Allgemeinen haben zwei bestimmte Individua je zwei Asymptoten.
6. Ihre isogonalen Trajectorien sind Curven desselben Charakters. Mit Hilfe der Orthogonalschaar kann man die Eintheilung der Ebenen in „ähnliche Rechtecke“ erzielen.
7. Die isothermische Spiegelung gegen eine solche Curve, die im speciellen Falle Lemniscate, Kreis, Hyperbel sein kann, verwandelt lemniscatische Spiralen mit denselben Büschelpunkten wiederum in solche. Die abbildende Function für diesen Fall ist nach Analogie eines früheren leicht aufzustellen.
8. Die Berührungspunkte von Lemniscatenreihen, die dem Raume zwischen zwei lemniscatischen Parallelspiralen eingeschrieben sind, liegen auf einer den Streifen correspondirend theilenden Parallelspirale. Haben die Curven die Form 13), so liegen auch die Brennpunkte auf einer Parallelspirale, die jedoch mit der vorigen nicht zusammenfällt.

9. Die gleichseitigen Hyperbeln desselben Centrums, welche eine lemniscatische Spirale in aufeinanderfolgenden Punkten unter constantem Winkel schneiden, haben eine Curve der Parallelschaar zur Enveloppe. In speciellen Fällen ist die erste Curve mit der Enveloppe identisch. (Man denke z. B. an das Analogon der Selbstevolute.

Dasselbe gilt von Lemniscaten, die durch das Brennpunktpaar der Curve 13), resp. durch ein Büschelpunktpaar der Curve 12) gehen und dieselbe in aufeinanderfolgenden Punkten unter constantem Winkel schneiden. Der erste Theil des Satzes ist also der specielle Fall des zweiten, wo der Büschelpunkt im Unendlichen liegt.

Die Sätze über Krümmungskreise der Doppelspiralen, resp. der logarithmischen Spiralen, die in jener Abhandlung ausgesprochen sind, gehen über in solche über Lemniscaten, deren Krümmung mit der der lemniscatischen Spiralen identisch ist. Man könnte dieselben als Krümmungslemniscaten bezeichnen, wobei zu bemerken ist, dass die Krümmungslemniscate einer beliebigen Curve für einen bestimmten Punkt mit der Wahl des Lemniscatencentrums variirt.

Noch einige Bemerkungen über Abbildungsaufgaben, die mit der lemniscatischen Verwandtschaft zusammenhängen, seien gestattet.

Die Aufgabe: den von zwei Lemniscaten eines Büschels und zwei orthogonalen Lemniscaten begrenzten rechtwinkligen Raum auf den Einheitskreis abzubilden, ist synthetisch auf folgendem Wege lösbar: Die Abbildung $Z = z^2$ verwandelt jenen Raum in einen von zwei sich schneidenden Kreisen und zwei Orthogonalkreisen begrenzten (wobei zu bemerken ist, dass der abzubildende Raum und der nach dem Begriffe der Punktpaare ihm coordinirte sich jetzt decken). Durch eine Abbildung von der Form $Z = \frac{az+b}{cz+d}$ geht dieser neue Raum in ein von Radien begrenztes Stück eines concentrischen Kreisringes über, der durch die Transformation $Z = lg\,z$ in ein Rechteck verwandelt wird, dessen Centrum (durch Hinzufügung einer additiven Constante) in den Nullpunkt zu verlegen ist. Ist nun das Verhältniss der Rechtecksseiten $2K : K'$, so wird die Abbildung des Rechtecks auf die Halbebene vermittelt durch die Function

$$Z = \sin am\, z\, (\mathrm{mod}\, \varkappa),*$$

* Die hier zur Sprache kommende Aufgabe, das Rechteck conform auf den Einheitskreis abzubilden, ist von Herrn Prof. Dr. H. A. Schwarz bereits im Jahre 1864 gelöst worden und muss wohl als das erste mit den Hilfsmitteln der Analysis vollständig durchgeführte Beispiel zu dem in Riemann's Dissertation § 21 behandelten allgemeinen Abbildungsproblem betrachtet werden. Ausser der Lösung einer grössern Reihe von Aufgaben von principieller Wichtigkeit ist es

wo jedoch der Modul $\varkappa$ dem Periodenverhältnisse entsprechend zu bestimmen ist.

Bis jetzt ist die fragliche Abbildung vermittelt durch eine Function von der Form

$$Z = sin\,am\left[g + lg\frac{a z^2 + b}{c z^2 + d}\right] \;(mod\,\varkappa).$$

Durch die Abbildung

$$Z = \frac{1 + i\sqrt{\varkappa}\,.\,sin\,am\,u}{i + \sqrt{\varkappa}\,.\,sin\,am\,u} \;(mod\,\varkappa),\text{ wo } u = g + lg\frac{a z^2 + b}{c z^2 + d},$$

wird schliesslich die Halbebene conform auf die Fläche des nicht eingeschnittenen Einheitskreises übertragen.*

Nach Voraussagung dieses Resultates dürfte auch die analytische Lösung der Aufgabn zu ermöglichen sein. Sind

$$f(xy) = \alpha = \left(\frac{p\,.\,p_1}{q\,.\,q_1}\right),$$
$$f_1(xy) = \beta = [(\vartheta + \vartheta_1) - (\chi + \chi_1)]$$

die Gleichungen der Lemniscatenschaar und des Lemniscatenbüschels, der hier geeigneten Coordinatensysteme, so müssten mit Hilfe dieser Gleichungen x und y durch die beiden Parameter dargestellt und letztere als neue Coordinaten auf dem Jacobi'schen Wege (Crelle's Journal Bd. 36) in die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

eingeführt werden. Die Schwierigkeiten der Integration derselben für den vorgeschriebenen Bereich dürften sich in den Specialfällen der Symmetrie noch vermindern. Die Lösung der Aufgabe würde auf die Verwerthbarkeit der allgemeinen lemniscatischen Coordinaten für die Analysis ein helles Licht werfen.

Herrn Schwarz gelungen, das von Riemann zu Grunde gelegte Dirichlet'sche Princip, gegen welches erhebliche Bedenken geltend gemacht werden, durch ein anderes Beweisverfahren zu ersetzen. — Man vergleiche die Arbeiten des Herrn Schwarz im 70. und 77. Bande des Crelle'schen Journals, im Programm 18$\frac{69}{70}$ der polytechnischen Schule zu Zürich, im Monatsberichte der königl. Akademie der Wissenschaften vom October 1870, im 15. Jahrgange der naturforschenden Gesellschaft in Zürich etc.

Einige Schüler des Herrn Schwarz haben auf Anregung desselben eine Reihe von Abbildungsaufgaben analytisch gelöst. Vergl.:

Hentschel: „Ueber einige conforme Abbildungen", 17. Jahrg. dieser Zeitschrift.

Derselbe: „Conforme Abbildung einiger einfach zusammenhängender Flächen etc.", Programm 1874 des Gymnasiums zu Salzwedel.

Amstein: „Conforme Abbildung des regulären Octaeders etc.", Zürich 1872.

* Vergl. Jochmann: „Zur Abbildung des Rechtecks auf die Kreisfläche", diese Zeitschr. Jahrg. 14.

Auch die Function, welche die Abbildung eines von je zwei „parallelen“ lemniscatischen Spiralen begrenzten rechtwinkligen Raumes auf den Einheitskreis vermittelt, lässt sich mit Hilfe der Umkehrung von Function 32) synthetisch leicht voraussagen, ebenso das Resultat für eine ganze Gruppe hierher gehöriger Aufgaben.

Wir begnügen uns mit diesen Andeutungen.

In den „Beiträgen zur Theorie der isogonalen Verwandtschaften“ wies ich ferner darauf hin, dass zu den *sinam*- und Δam-Curven ($mod\,\varkappa$ +, reell und <1) stets ein Kreis und eine Lemniscate, zu den *cosam*-Curven unter denselben Bedingungen für den Modul stets zwei Lemniscaten gehören, Sätze, für die ich in den weiteren Beiträgen einfache Beweise gab und die sich für gewisse Specialfälle auf die Trajectorien zu 45^0 ausdehnen lassen. Es findet in jenen Curvensystemen gegen die fraglichen Individua Reciprocität statt, was die Construction unterstützt und ein geometrisches Bild von den Erleichterungen giebt, die bei Berechnung von Werthtabellen für elliptische Functionen möglich sind: der unbegrenzte Bereich der Z-Ebene wird nämlich in 16 Theile zerlegt, für welche Construction, resp. Rechnung erledigt sind, sobald man die Resultate für einen der Theile kennt.*

Schliesslich sei bemerkt, dass die Abbildungen $Z=\sqrt[4]{z}$, $Z=\sqrt[8]{z}$ etc. nichts wesentlich Neues ergeben, nur treten z. B. bei der ersteren Transformation an Stelle der Coordinaten $p.p_1$ und $(\vartheta+\vartheta_1)$ jetzt $p.p_1.p_2.p_3$ und $(\vartheta+\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3)$, die von den vier Punkten ausstrahlen, die durch $\sqrt[4]{a+bi}$ dargestellt sind.

Dabei tritt an Stelle der Schleifenlemniscate eine analoge, aus vier Theilen bestehende Curve, deren einzelne Züge sich im Nullpunkte unter von 45^0 schneiden. Man könnte hier von Lemniscaten zweiter, vierter, achter etc. Ordnung sprechen.

Es ist vorauszusehen, dass ähnliche Verhältnisse bei der Abbildung $Z=\sqrt[n]{z}$ auftreten, wo n eine ganze, positive, reelle Zahl ist. Die Entwickelungen würden den obigen ganz analog sein.

---

§ 7. Bemerkungen über die Kinematik des lemniscatisch-veränderlichen Systems.

Nach § 4 verwandelt sich durch die Transformation $Z=\sqrt{z}$ jedes starre, in der z-Ebene frei bewegliche System in ein „lemniscatisch

* Vergl. auch die Bemerkung des Herrn Schwarz in der ersten der citirten Abhandlungen über den von Abel bewiesenen Satz, dass der Werth von $sinam\,\dfrac{(p+qi)K}{2^{2n}+1}$ sich durch Auflösung quadratischer Gleichungen ergiebt.

veränderliches" in der Z-Ebene frei bewegliches Gebilde, dessen strenge Definition keine Schwierigkeiten bietet. Die Bewegung geschieht im Allgemeinen stets unter gesetzmässiger Gestaltveränderung. An Stelle des Zwanges, der im Begriffe der Starrheit liegt, tritt jetzt der Zwang, dass die gleichseitigen Verbindungshyperbeln je dreier Punktpaare des Systems bei Bewegung des letzteren stets correspondirende Hyperbelbogen bleiben, wobei die Hyperbeln stets dasselbe gemeinschaftliche Centrum beibehalten und ihre Schnittwinkel offenbar ungeändert bleiben, so dass es sich um ein „conform veränderliches System" handelt.

Einige Fälle solcher Bewegung sollen jetzt besprochen werden.

1. Der parallelen Verschiebung eines starren Gebildes der z-Ebene längs einer festen Geraden mit constanter Geschwindigkeit c entspricht eine Bewegung des entsprechenden lemniscatisch-veränderlichen Gebildes (strenger noch Gebildepaares) der Z-Ebene derart, dass jeder Punkt desselben sich auf einer gleichseitigen Hyperbel bewegt, die zur Parallelschaar der Hyperbel gehört, welche jener Richtungsgeraden entspricht. Dabei ist die Richtung und Geschwindigkeit jedes Punktes variabel, und zwar letztere abhängig von der momentanen Entfernung vom Nullpunkte, nämlich

$$v = \frac{c}{2\sqrt{r}},$$

d. h. gleich dem Producte aus c und dem absoluten Betrage des Differentialquotienten $\frac{dZ}{dz}$.* Man könnte jedoch sagen, dass, da das Product $p \cdot p_1 = c$ sich gleichmässig ändert, die „lemniscatische Geschwindigkeit" constant sei. Die Winkelsumme $\vartheta + \vartheta_1$ bleibt selbstverständlich ungeändert.

In dem Momente, wo ein Punkt den Nullpunkt passirt, fällt er mit seinem zugeordneten zusammen, und die Geschwindigkeit beider ist unendlich gross.** Gleichzeitig tritt eine Degeneration jeder den Nullpunkt passirenden Curve ein, so dass z. B. jede gleichseitige Hyperbel in zwei orthogonale Gerade degenerirt. Beispielshalber unterwerfe man das System der Fig. 2 einer solchen Bewegung. Es wird sich unter Anderem zeigen, dass die kleinen „Quadrate" sich unter steter Vergrösserung beschleunigt bewegen, sobald sie sich dem Nullpunkte nähern, während bei zunehmender Entfernung das Umgekehrte stattfindet. In

* Vergl. die citirte Siebeck'sche Abhandlung, Crelle's Journal Bd. 55.

** Es ist eine vielfach verbreitete Ansicht, dass unendlich grosse Geschwindigkeiten in der Natur nicht vorkämen. Jedenfalls sind jedoch optische Probleme von dieser Ansicht auszuschliessen. Bei den jetzt zu behandelnden optischen Erscheinungen treten in der That momentane, unendlich grosse Geschwindigkeiten bestimmter Punkte ein, die volle Analogie mit dem mathematischen Falle vorausgesetzt.

der Nähe des Nullpunktes beginnt das „Quadrat" auffallend zu degeneriren, erhält sogar gegebenenfalls einen Winkel von 45°.

2. Ein starres System von Radien und concentrischen Kreisen rotire um einen festen Punkt $a + bi$ der z-Ebene, und zwar mit constanter Winkelgeschwindigkeit, so dass die Neigungswinkel der Radien gleichmässig wachsen, während jeder Kreis sich in sich selbst bewegt.

Dem entspricht in der Z-Ebene eine Drehung des gleichseitigen Hyperbelbüschels um zwei feste Punkte, bei welcher jede Lemniscate der Orthogonalschaar sich in sich selbst bewegt, während jede Hyperbel unter beständiger Gestaltveränderung sich so dreht, dass die Winkelsumme $(\vartheta + \vartheta_1)$ der entsprechenden Radii vectores für die Punkte jeder Hyperbel arithmetisch wächst. Dabei bewegen sich nach Obigem die Brennpunkte jeder Hyperbel auf der orthogonalen Schleifenlemniscate; die Scheitelpunkte bewegen sich auf der Hyperbel selbst und ausserdem mit der Hyperbel, und zwar geschieht ihre absolute Bewegung auf der im Verhältniss $1 : \sqrt{\frac{1}{2}}$ verkleinerten Schleifenlemniscate. In dem Momente, wo der Scheitel der Hyperbel den Nullpunkt passirt, ist seine Geschwindigkeit unendlich gross.

Diese interessante, jetzt leicht zu discutirende Bewegung kommt zur Erscheinung bei den Polarisationshyperbeln und Interferenzlemniscaten optisch zweiaxiger Krystalle (Salpeter), sobald man das analysirende Nicol'sche Prisma oder das Krystallblättchen in seiner Ebene dreht. Jeder Punkt des Hyperbelbüschels bewegt sich auf einer der Interferenzlemniscaten. Das Büschel degenerirt in dem Moment zum orthogonalen Axenkreuze, wo die Ebene der optischen Axen mit der Schwingungsebene des einen Nicol'schen Prismas zusammenfällt.

3. Bewegt sich ein starres Kreisbüschel mit seiner Orthogonalschaar gleichzeitig drehend und verschiebend in der z-Ebene, so entstehen in der Z-Ebene die verschiedensten Gestalten des in Fig. 5 veranschaulichten Coordinatensystems.

4. Die Bewegung eines starren Systems der z-Ebene lässt sich betrachten als eine continuirliche Reihe aufeinanderfolgender Rotationen um aufeinanderfolgende Punkte, welche das sogenannte Polvieleck und für die Grenze die Polbahn bilden. Die relative Bewegung des Drehungspoles gegen das bewegte System giebt eine zweite, mit Annäherung leicht zu construirende Curve, die sogenannte Polcurve. Bekanntlich geschieht die Bewegung des Systems so, als ob die starr mit ihm verbundene Polcurve auf der festen Polbahn ohne Gleitung sich abrollte.*

Dieser Fundamentalsatz der Kinematik findet folgende Uebertragung. Die allgemeine Bewegung des lemniscatisch-veränderlichen Systems in

* Vergl. Reuleaux: „Theoretische Kinematik", § 6, wo sich eine anschauliche Darstellung des Satzes findet.

seiner Ebene ist aufzufassen als eine Reihe der oben besprochenen lemniscatischen Drehungen um aufeinanderfolgende Punktpaare, welche die lemniscatische Polbahn bilden. Die Polcurve, d. h. die relative Bewegung des Poles gegen das bewegte System ist durch die elementare Uebertragung der Construction, welche die gewöhnliche Polcurve giebt, mittelst der Function $Z=\sqrt{z}$ mit Annäherung darzustellen. Die Bewegung des Systems geschieht so, als ob die mit ihm „lemniscatisch verbundene“ Polcurve unter entsprechender Gestaltveränderung auf der festen Polbahn, ohne zu gleiten, sich abrollte.

Die Sätze über die Bewegung der Krümmungsmittelpunkte gehen über in solche von den Brennpunkten der oben definirten Krümmungslemniscaten. Jeder Punkt des Systems beschreibt seine Roulette, jede gleichseitige Hyperbel erzeugt ihre Enveloppe.

So ist z. B. das Cycloidenproblem einer einfachen Uebertragung fähig.

Noch einige Fälle der Uebertragung von Bewegungen veränderlicher Systeme:

5. Man denke sich in der z-Ebene ein System concentrischer Kreise, die aus einem Punkte hervorquellen und dauernd anschwellen, wie sie sich auf einer ruhigen Wasserfläche nach dem Aufschlagen eines Steines entwickeln. Die Uebertragung $Z=\sqrt{z}$ giebt eine Bewegung confocaler Lemniscaten, deren Ovale aus den Brennpunkten hervorquellen, sich im Nullpunkte treffen und, vereinigt anschwellend, sich allmälig der Kreisgestalt nähern. Jeder Punkt bewegt sich dabei auf einer orthogonalen gleichseitigen Hyperbel. Ueber die Wanderung der Maximalpunkte auf Kreis und Gerade ist § 3 zu vergleichen.

Die Erscheinung würde in der Physik bei dem allerdings nur hypothetischen Experimente auftreten, dass die Salpeterplatte ihre Dicke gesetzmässig änderte.

6. Denkt man sich die concentrischen Kreise in der z-Ebene anschwellend und gleichzeitig die Radien rotirend, so entspricht dieser Bewegung das Anschwellen der confocalen Lemniscaten und das gleichzeitige Drehen der Hyperbeln. Diese Bewegung tritt in die Erscheinung beim Drehen der Salpeterplatte im Polarisationsapparate um eine horizontale Axe.

Denkt man sich dabei die Abweichungen der Radien arithmetisch wachsend und gleichzeitig die Länge der Kreisradien geometrisch zu- oder abnehmend, so bewegt sich jeder Eckpunkt des Netzes auf einer logarithmischen Spirale. In der Z-Ebene würden sich die Eckpunkte des lemniscatischen Netzes auf einer lemniscatischen Spirale der Form 13) bewegen.

Das eben besprochene optische Experiment würde diese Bewegung wenigstens einigermassen veranschaulichen.

Durch diese Betrachtungen ist der Forschung ein neues Gebiet der Kinematik gesetzmässig veränderlicher Systeme eröffnet. Die von Herrn Burmester in der citirten Abhandlung gegebenen allgemeinen Sätze über die Bewegung im kreisverwandt-veränderlichen System sind sofort der entsprechenden Uebertragung fähig.

Diese Andeutungen mögen hinreichen, um von der Verwerthbarkeit der lemniscatischen Verwandtschaft und der allgemeinen lemniscatischen Coordinaten ein Bild zu geben. Wir schliessen mit dem Vorbehalte eingehenderer Untersuchungen auf diesem noch nicht bebauten Gebiete.
