Werk

Titel: Zeitschrift für Mathematik und Physik

Verlag: Teubner

Jahr: 1876

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 MATH I, 755:21

Werk Id: PPN599415665_0021

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN599415665_0021|LOG_0040

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

21. Jahrgang. 6. Heft.

Mit 1 lithographirten Tafel.

Ausgegeben am 10. November 1876.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1876.

XVI.

Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung.

Von

Dr. R. Beez,

Professor an der Realschule zu Plauen i. V.

(Fortsetzung.)

In dem vorhergehenden Theile dieser Abhandlung[1]) hatte ich auf Grund der Gleichungen 18) und 26) die Behauptung aufgestellt, dass das Krümmungsmass einer Mannigfaltigkeit, deren Curvenelement durch die Gleichung

$$\partial s^2 = \Sigma a_{ik}\,\partial x_i\,\partial x_k$$

gegeben ist, im Allgemeinen nur für $n=2$ eine reine Function der Coefficienten a_{ik} und deren ersten und zweiten Derivirten sei, woraus sich dann weiter ergeben hätte, dass eine höhere Mannigfaltigkeit nur mit Verlust ihrer ursprünglichen Krümmung deformirt werden könne.

Geht man nämlich von der entgegengesetzten Annahme aus, dass das Krümmungsmass K aus den Coefficienten a_{ik} sich berechnen lässt, so ergiebt sich sofort aus der Gleichung 26) auch die Darstellbarkeit der Grösse D_{11} und analog sämmtlicher D_{ik} aus denselben Coefficienten, sobald $n>2$ ist. Führt man weiter die so gefundenen Werthe der D_{ik} in Gleichung 18) ein, so ist ersichtlich, dass nicht blos das Krümmungsmass der Mannigfaltigkeit oder das reciproke Product der n Hauptkrümmungshalbmesser, sondern jeder einzelne Hauptkrümmungshalbmesser durch die Grössen a_{ik} bestimmt wird. Dasselbe gilt dann auch von den Krümmungslinien der Mannigfaltigkeit und endlich von dem Krümmungshalbmesser jedes beliebigen Normalschnittes. Denn multiplicirt man die Gleichungen 18) der Reihe nach mit $\partial p_1, \partial p_2, \ldots \partial p_n$ und addirt, so erhält man

$$\Sigma_{ik}\left(\frac{a_{ik}}{\varrho}+\frac{D_{ik}}{H}\right)\partial p_i\,\partial p_k = 0,$$

woraus

---

1) Diese Zeitschrift XX, S. 423.

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{\Sigma D_{ik}\,\partial p_i\,\partial p_k}{H\,\Sigma a_{ik}\,\partial p_i\,\partial p_k}\ ^{2)}$$

sich ergiebt. Da die n Hauptkrümmungshalbmesser dieser Gleichung genügen, so drückt ϱ überhaupt den Krümmungshalbmesser desjenigen Normalschnittes aus, welcher durch das Element $\Sigma a_{ik}\,\partial p_i\,\partial p_k$ hindurchgeht. Nun muss eine Mannigfaltigkeit, für welche in jedem Punkte ausser der Länge des Curvenelements die Krümmung jedes beliebigen Normalschnittes gegeben ist, als eine bestimmte angesehen werden. Die Krümmung irgend eines Normalschnittes aber kann, wie wir soeben gesehen haben, aus den Coefficienten a_{ik} des Curvenelements berechnet werden. Es ist daher klar, dass eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen, welche in einem ebenen Raume von $n+1$ Dimensionen enthalten ist, durch den Ausdruck für das Curvenelement vollständig bestimmt wird, sobald n die Zahl 2 übersteigt. Nimmt man nun ebenfalls nach Analogie der Linien und Flächen im empirischen Raume an, dass eine n-fache Mannigfaltigkeit in einem ebenen Raume von $n+1$ Dimensionen sich deformiren, d. h. biegen lasse, ohne dass Dehnung oder Zusammenziehung der einzelnen Theile stattfindet,[3] so kommt man, sobald das Gegentheil meiner Behauptung als richtig erwiesen wird, zu folgenden Sätzen:

1. Bei der Deformation einer Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen bewahren die Krümmungslinien ihren Charakter als Krümmungslinien.

2. Bei der Deformation einer Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen bleibt nicht nur das Krümmungsmass in jedem einzelnen Punkte, sondern auch die Krümmung sämmtlicher Normalschnitte — mögen sie nun Hauptschnitte sein oder nicht — unverändert.

Beide Sätze stehen in vollem Widerspruch mit den entsprechenden Sätzen der Flächen, d. h. also derjenigen Mannigfaltigkeiten, die noch vollständig unserer Anschauung zugänglich sind, ja an denen wir überhaupt erst unsere geometrischen Vorstellungen erlernt haben.

---

2) Herr R. Lipschitz hat dieselbe Gleichung in der Form

$$-\frac{1}{\varrho} = \frac{\overline{\mu}(dy)}{\overline{g}(dy)}$$

aufgestellt (Borchardt's Journal Bd. 81, S. 233).

3) Diese Annahme ist wohl von allen Mathematikern, die sich mit höheren Mannigfaltigkeiten beschäftigt haben, ohne Bedenken zugelassen worden. Auch Herr R. Lipschitz ist der Ansicht (Borchardt's Journal Bd. 81, S. 232), dass eine Transformation des Ausdruckes $\partial s^2 = \Sigma a_{ik}\,\partial x_i\,\partial x_k$ durch Einführung eines neuen Systems von n independenten Variabelen der Biegung einer Oberfläche entspricht, wobei das Quadrat des Linearelements der Oberfläche nicht geändert wird.

Der zweite Satz enthält aber auch in bester Form eine *contradictio in adjecto*, denn er spricht von einer Deformation, bei welcher Nichts deformirt wird.

Nun hat Herr Lipschitz neuerdings[4]) den vollständigen Beweis geliefert, dass die Kronecker'sche Verallgemeinerung des Gaussschen Krümmungsmasses

$$K = \frac{1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \cdot \varrho_n}$$

für jedes gerade n eine reine Function der Coefficienten a_{ik} der Form $\Sigma a_{ik}\, \partial x_i \partial x_k$ und ihrer ersten und zweiten Derivirten sei, für jedes ungerade n aber durch die Quadratwurzel aus einer reinen Function jener Coefficienten dargestellt werden könne. Die nothwendigen Consequenzen dieses Theorems sind in den bereits angeführten Sätzen 1 und 2 enthalten.

Offenbar ist hiermit die Theorie der höheren Mannigfaltigkeiten an einem höchst kritischen Punkte angelangt und die Entscheidung kann nicht mehr fern liegen, ob eine in sich widerspruchsfreie Geometrie von Räumen, die mehr als drei Dimensionen enthalten, auf der Grundlage der gewöhnlichen Geometrie möglich ist oder nicht. Einer solchen über unsere Erfahrung hinausgehenden Geometrie wollen wir der Kürze wegen im Folgenden den Namen „Metageometrie" beilegen, wodurch sie zugleich in präciser Weise von anderen Mannigfaltigkeitstheorien, die nicht auf durchgreifender Analogie mit der empirischen Ausdehnungslehre beruhen, unterschieden werden kann.

Sollte sich auch schliesslich die Unmöglichkeit einer Metageometrie herausstellen, so würden zwar die auf diesem Gebiet geführten Untersuchungen nur ein negatives Resultat, nämlich den Beweis liefern, dass ausser dem empirisch gegebenen Raume kein anderer ihm analog gebildeter von mehr als drei Dimensionen denkbar sei. Dieses eine Resultat würde jedoch wegen seiner eminenten erkenntniss-theoretischen Bedeutung selbst mit dem Opfer der ganzen Metageometrie nicht zu theuer erkauft sein.

Was die Widersprüche in den oben aufgestellten Sätzen 1 und 2 anlangt, so glaube ich, dass dieselben durch eine von der gewöhnlichen etwas abweichende Fassung des Hauptsatzes der Deformationstheorie, wenn auch nicht vollständig gehoben, doch wenigstens insoweit gemildert werden können, dass das Princip der Analogie nicht geradezu verletzt wird. Jener Deformationssatz lautet in der gewöhnlichen Weise: Wenn die Ausdrücke für die Linearelemente zweier Mannigfaltigkeiten

---

4) Borchardt's Journal Bd. 81, S. 230. Herr R. Lipschitz hatte bereits für gerade n im 71. Bande desselben Journals diesen Beweis gegeben, doch ist mir erst durch seine neuere Mittheilung die Identität seiner Formeln mit den von mir auf directem Wege gefundenen Ausdrücken klar geworden.

$$\partial s^2 = \Sigma a_{ik} \partial p_i \partial p_k$$

und

$$\partial s'^2 = \Sigma a'_{ik} \partial p'_i \partial p'_k$$

vorgelegt sind und es möglich ist, durch Einführung eines Systems von n unabhängigen Functionen der n unabhängigen Variabelen $p'_1, p'_2, \ldots p'_n$ an Stelle der Variabele $p_1, p_2, \ldots p_n$ den ersten Ausdruck in den zweiten so zu transformiren, dass er mit ihm identisch wird, so lässt sich die zweite Mannigfaltigkeit auf der erstern abwickeln.

Aus den im Vorhergehenden angestellten Betrachtungen scheint mir nun aber hervorzugehen, dass dieser Satz folgendermassen formulirt werden müsse: Wenn die Linearelemente zweier Mannigfaltigkeiten durch die soeben angegebene Substitution gleich gemacht werden können, so lassen sich die beiden Mannigfaltigkeiten zur Coincidenz bringen, wozu bei den Mannigfaltigkeiten der ersten und zweiten Ordnung eventuell eine Deformation erforderlich ist.

Wenn nun auch die in den obigen Sätzen 1 und 2 enthaltenen Widersprüche abgeschwächt worden sind, so kommt man doch selbst bei dem besten Willen, die Theorie der höheren Mannigfaltigkeiten aufrecht zu erhalten, in Bezug auf Biegung derselben über gewisse erhebliche Zweifel nicht hinweg.

Bei dem Ausdrucke „Biegung“ denken wir zunächst an einen vorwiegend in die Länge, oder zugleich in Länge und Breite ausgedehnten Körper, dessen Enden einander genähert oder von einander entfernt werden sollen. Hierbei findet die Biegung in dem Raume selbst statt, von welchem der Körper ein begrenztes Stück ist. Sie wird also charakterisirt als Biegung einer Mannigfaltigkeit in sich selbst nach einer der Mannigfaltigkeit angehörenden Dimension, wobei natürlich die Verschiebbarkeit der Mannigfaltigkeit in sich selbst ohne Biegung vorausgesetzt wird. Eine derartige Biegung ist, wie man leicht einsieht, bei Linien, Flächen und Körpern des gewöhnlichen Raumes stets mit Dehnung oder Zusammenziehung einzelner Theile verbunden. Wir können daher wohl den allgemeinen Satz aufstellen: B e i j e d e r B i e g u n g e i n e r M a n n i g f a l t i g k e i t i n s i c h s e l b s t f i n d e t D e h n u n g u n d Z u s a m m e n z i e h u n g s t a t t.

Anders verhält es sich bei der Deformation. Eine Linie lässt sich unter allen Umständen auf einer andern abwickeln, ohne dass sie gedehnt wird; dabei ändert sie ihr Krümmungsmass und, was in diesem Falle hiermit gleichbedeutend ist, ihren Krümmungshalbmesser. Eine Fläche lässt sich ebenfalls deformiren, wobei das Krümmungsmass erhalten bleibt, aber die Werthe der einzelnen Krümmungshalbmesser sich ändern. Die Deformationsfähigkeit der Linien und Flächen leuchtet uns deshalb auf der Stelle ein, weil sie in Bezug auf die Dimension, nach welcher sie gebogen werden, unendlich dünn sind. Dies ist aber auch bei den höheren Mannigfaltigkeiten der Fall. Eine Raumgrösse von n Dimensionen ist in Bezug auf einen ebenen Raum von $n+1$ Dimensionen, in welchem die Biegung vorgenommen werden soll, von unendlich geringer Dicke. So würde z. B. unser gewöhnlicher Raum einem Beobachter, der in der vierten Dimension sehen könnte, als eine Mannigfaltigkeit von verschwindender vierter Dimension erscheinen. Derselbe Beobachter würde infolge dessen die frappante Wahrnehmung machen, dass kein Punkt unseres Raumes ihm durch einen andern verdeckt wird, dass es kein Vorn und Hinten in demselben giebt, sondern alle Theile nebeneinander gewissermassen in flächenhafter Ausbreitung zu sehen sind.[5]) Er würde das Innere eines geschlossenen Körpers mit einem Blicke durch- oder überschauen, gerade so, wie uns das Innere einer geschlossenen ebenen Figur sich vollständig öffnet, sobald unser Auge aus der Ebene dieser Figur in die dritte Dimension versetzt wird. Vom Standpunkte der Metageometrie aus sehe ich daher absolut keinen Grund, warum eine n-fache Mannigfaltigkeit, die in einem ebenen Raume von $n+1$ Dimensionen enthalten ist, sich nicht sollte ohne Dehnung und Zusammenziehung biegen lassen, da sie ja in Bezug auf diese $n+1^{\text{te}}$ Dimension unendlich dünn ist. Und doch würde diese Annahme dem Lipschitz'schen Satze widersprechen.

Denn, wenn eine Mannigfaltigkeit gebogen wird, so müsste doch mindestens ein Krümmungshalbmesser seine Grösse ändern. Die Aenderung eines einzigen Krümmungshalbmessers aber würde nicht möglich sein ohne entsprechende Aenderung in der Länge des Curvenelements selbst. Bleibt dieses ungeändert, so müssen auch sämmtliche Krümmungshalbmesser ihre ursprünglichen Werthe beibehalten Es scheint mir daher ausser Zweifel, dass man nur die Alternative hat, entweder die Metageometrie ganz aufzugeben, oder wenigstens die Deformationsfähigkeit höherer Mannigfaltigkeiten in Abrede zu stellen. Man würde also, wenn man sich für das Letztere entschiede, annehmen müssen, dass eine Mannigfaltigkeit von einer höheren als der zweiten Ordnung nur mit gleichzeitiger Dehnung und Zusammenziehung einzelner Theile gebogen werden könne.

Eine Prüfung der im Vorigen gefundenen Resultate wird sich am besten an den Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen, unter denen unser Raum die einfachste und zugleich die einzige uns bekannte Species ist, vornehmen zu lassen. Wir wollen zu diesem Zwecke die bei Gleichung 51) abgebrochene Rechnung gemäss der höchst schätzenswerthen Andeutung[6]) des Herrn R. Lipschitz weiter fortsetzen.

---

5) Diese Analogie scheint mir zu wenig zu Gunsten einer vierten Dimension zu sprechen.

6) Borchardt's Journal Bd. 81, S. 236.

Wenn $n=3$ ist, so giebt die Formel 14) das Krümmungsmass

$$K=\frac{1}{\sqrt[2]{a^5}}\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix},$$

welches sich nach 51) auch in der Gestalt

$$K=\frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{1}{D_{11}}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

darstellen lässt, worin A_{22}, A_{23}, A_{33} die in 48) angegebenen Werthe besitzen. Bezeichnen wir ferner den Coefficienten von D_{ik} in der Determinante

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix}$$

mit δ_{ik}, so ist nach einem bekannten Determinantensatze

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix}^2$$

und da

$$\delta_{ik}=a\,.\,A_{ik},$$

so wird

$$K=\frac{1}{a}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{1}{D_{11}}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{ik}=A_{ki}.$$

Bezeichnet man ferner die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

mit A und den Coefficienten von A_{ik} in derselben mit α_{ik}, so findet sich

$$D_{11}=\sqrt{\frac{a}{A}}\,.\,\alpha_{11}.$$

Auf entsprechende Weise wird allgemein

$$D_{ik}=\sqrt{\frac{a}{A}}\,.\,\alpha_{ik}$$

erhalten. Durch Einsetzung dieser Werthe in 18) nehmen die Differentialgleichungen der Krümmungslinien folgende Form an:

$$\left(\frac{a_{11}}{\varrho}+\frac{\alpha_{11}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_1+\left(\frac{a_{12}}{\varrho}+\frac{\alpha_{12}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_2+\left(\frac{a_{13}}{\varrho}+\frac{\alpha_{13}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_3=0,$$

$$\left(\frac{a_{21}}{\varrho}+\frac{\alpha_{21}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_1+\left(\frac{a_{22}}{\varrho}+\frac{\alpha_{22}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_2+\left(\frac{a_{23}}{\varrho}+\frac{\alpha_{23}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_3=0,$$

$$\left(\frac{a_{31}}{\varrho}+\frac{\alpha_{31}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_1+\left(\frac{a_{32}}{\varrho}+\frac{\alpha_{32}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_2+\left(\frac{a_{33}}{\varrho}+\frac{\alpha_{33}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_3=0,$$

und der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes, der durch das Element ∂s gelegt, wird

$$\text{A)} \qquad \frac{1}{\varrho} = - \frac{\Sigma \alpha_{ik} \partial p_i \partial p_k}{\sqrt{A}\; \Sigma a_{ik} \partial p_i \partial p_k}.$$

Wendet man die gefundenen Ausdrücke auf das Riemann'sche Linearelement

$$\partial s^2 = \frac{1}{\lambda^2}(\partial x_1{}^2 + \partial x_2{}^2 + \partial x_3{}^2),$$

$$\lambda = 1 + \frac{\alpha}{4}(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2),$$

an, so ergiebt sich, da

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = \frac{\alpha}{\lambda^4},$$

$$A_{12} = A_{23} = A_{31} = 0,$$

$$K = \sqrt{\alpha^3}.$$

Setzt man nun $\alpha = \frac{1}{R^2}$, so kommt

$$K = \pm \frac{1}{R^3}.$$

Ferner ergiebt sich aus den Differentialgleichungen der Krümmungslinien

$$\left(\frac{1}{\varrho} + \sqrt{\alpha}\right)^3 = 0,$$

so dass also die drei Hauptkrümmungshalbmesser ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 den Werth $-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ erhalten. Derselbe Werth ergiebt sich auch für den Krümmungshalbmesser jedes beliebigen Normalschnittes aus Gleichung A). In Betreff des Vorzeichens ist zu bemerken, dass sämmtliche Krümmungshalbmesser entweder positiv oder negativ zu nehmen sind, da bei stetiger Aenderung in der Lage des Curvenelements ein plötzliches Ueberspringen des Krümmungshalbmessers von einem positiven auf einen negativen Werth, ohne dass einmal $\frac{1}{\varrho} = 0$ wird, unmöglich ist. Durch das Riemann'sche Curvenelement für $n = 3$ wird also eine Mannigfaltigkeit bestimmt, deren Normalschnitte dieselbe Krümmung $+\frac{1}{R}$ oder $-\frac{1}{R}$ haben und deren Krümmungsmass demgemäss entweder $+\frac{1}{R^3}$ oder $-\frac{1}{R^3}$ ist. Je nachdem man nämlich die Richtung der Normale nach Innen als positiv oder negativ annimmt, sind die Krümmungshalbmesser entweder sämmtlich gleich $+R$ oder gleich $-R$ zu setzen. Die Riemann'sche Formel für das Curvenelement charakterisirt also für $n > 2$ lediglich eine kugelförmige Mannigfaltigkeit. Wenn Riemann dieselbe als den Ausdruck für das Linearelement einer Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung überhaupt bezeichnet, so beruht dies auf der unhaltbaren Voraussetzung, dass eine Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung in eine kugelförmige Mannigfaltigkeit ohne Dehnung umgebogen werden könne.

In die Kategorie der Mannigfaltigkeiten dritter Ordnung fällt nun auch der sogenannte „Nicht-Euklidische Raum". Bekanntlich ist die Nicht-Euklidische Ebene eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen mit constantem negativem Krümmungsmass, sie lässt sich mit Biegung in sich selbst verschieben und deshalb lassen sich Figuren in derselben, ebenso wie in der Ebene oder auf der Kugel, zur Deckung bringen.

Wenn der Analogie nach der Nicht-Euklidische Raum als eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen mit negativem constantem Krümmungsmass definirt wird, so ergiebt sich seine Unmöglichkeit einfach daraus, dass eine Mannigfaltigkeit ungerader Ordnung von wesentlich negativer Krümmung überhaupt nicht denkbar ist. Denn sobald man die Vorzeichen der Hauptkrümmungshalbmesser sämmtlich umkehrt, erhält man den entgegengesetzten positiven Werth. Eingehendere Betrachtungen über die Nicht-Euklidische Geometrie werden weiter unten an geeigneter Stelle ihren Platz finden.

Zu den oben aufgestellten vier Verallgemeinerungen des Gauss'schen Krümmungsmasses tritt endlich noch die Riemann'sche, die wir bis jetzt absichtlich nicht berührt haben, da sie wenigstens nicht unmittelbar auf der Gleichung 30) beruht. Bevor ich jedoch näher auf dieselbe eingehe, sei es mir gestattet, einige allgemeine Bemerkungen in Bezug auf die epochemachende Riemann'sche Schrift „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen", vorauszuschicken.

Als ich im Jahre 1868 zum Zwecke des elementaren geometrischen Unterrichts an der hiesigen Realschule es unternahm, einen Leitfaden der Geometrie auf wissenschaftlicher Basis zu entwerfen,[7]) hatte ich bereits, ohne die Riemann'sche Schrift zu kennen, welche mir erst, nachdem der der Druck meines Buches fast vollendet war, zu Gesichte kam, die Analogie des gewöhnlichen Raumes mit der Ebene und der geraden Linie wahrgenommen und den genannten drei Mannigfaltigkeiten die Eigenschaft der Gleichartigkeit beigelegt. Dieser Ausdruck war jedoch insofern nicht glücklich gewählt, als in ihm jene merkwürdige und, wie ich glaubte, bisher noch nicht beachtete Eigenthümlichkeit des gewöhnlichen Raumes, dass er unter den Mannigfaltigkeiten oder Raumgrössen von drei Dimensionen genau dieselbe Stellung einnimmt, wie die Ebene unter den Flächen und die Gerade unter den Linien, nicht sofort deutlich hervortrat. Man charakterisirt diese Eigenthümlichkeit mit Riemann ganz treffend durch den Aus-

7) R. Beez, Elemente der Geometrie. Plauen, im März 1869.

druck „Ebenheit“, doch würde es wohl consequenter sein, sie durch das Prädicat „Geradheit“ zu bezeichnen, da dann auch die Ebene als „gerade Fläche“ unter den allgemeinen Begriff einer geraden Mannigfaltigkeit sich subsummiren liesse. Der Beweis, dass unser Raum eben ist, würde sofort zu führen sein, wenn die Unmöglichkeit eines Raumes von vier Dimensionen deutlich sich erkennen liesse. Wäre aber ein Raum von vier Dimensionen denkbar und darüber hinaus kein höherer Raum von mehr als vier Dimensionen, so würde die Ebenheit des empirischen Raumes sich ergeben, wenn ausser freier Beweglichkeit der Körper auch die Unendlichkeit unseres Raumes constatirt wäre. Gäbe es aber noch einen Raum von fünf Dimensionen und keinen darüber, so müsste man ausserdem noch beweisen, dass unser Raum bei einer Drehung um vier feste Punkte immer mit sich selbst zusammenfiele. Denn wäre dieses nicht der Fall, so könnte er auch das Analogon der cylindrischen Spirale sein u. s. w.

Was die wissenschaftliche Bedeutung der Riemann'schen Schrift anlangt, so kann es jedenfalls nicht hoch genug angeschlagen werden, dass durch sie zwei neue fruchtbare Begriffe in die Mathematik eingeführt worden sind, nämlich erstens der Begriff einer Mannigfaltigkeit oder mehrfach ausgedehnten Grösse überhaupt und zweitens der schon erwähnte Begriff einer ebenen oder geraden Mannigfaltigkeit. Hierdurch ist der Weg zu einer Metageometrie erst gebahnt worden.

Wenn ich nun auch den hohen Werth der Riemann'schen Schrift als Grundlage für die Theorie der höheren Mannigfaltigkeiten vollständig anerkenne, so vermag ich doch nicht allenthalben, mich den Voraussetzungen Riemann's anzuschliessen. Eine derselben, nämlich die Annahme, dass es möglich sei, constant gekrümmte Mannigfaltigkeiten höherer Ordnungen in sich selbst ohne Dehnung zu verschieben, ist schon oben als unhaltbar nachgewiesen worden. Ferner ist darauf aufmerksam zu machen, dass das Gauss'sche Krümmungsmass nur für torsionslose Flächen, d. h. für Flächen in einem ebenen Raume von drei Dimensionen, nicht aber für gewundene Flächen, d. h. für solche Flächen, welche einen ebenen Raum von mehr als drei Dimensionen durchziehen, giltig ist. Von der letztern Art dürften aber wohl im Allgemeinen die Riemann'schen Flächen sein, aus denen das Krümmungsmass der Mannigfaltigkeit bestimmt werden soll.

Endlich erscheint mir die Annahme, dass das Curvenelement einer Mannigfaltigkeit anders als durch die Quadratwurzel aus einem homogenen Differentialausdruck zweiten Grades dargestellt werden könne, nicht vereinbar mit dem Wesen der gewöhnlichen Geometrie und einer auf sie gegründeten Metageometrie zu sein. Die gebräuchliche Darstellung des Curvenelements einer Fläche und allgemein einer höhern Mannigfaltigkeit beruht doch in letzter Instanz auf dem Satze, dass das

Quadrat einer begrenzten Geraden in einer Ebene gleich der Summe der Quadrate ihrer Projectionen auf zwei rechtwinklige Axen ist. Dieser Satz — der Fundamentalsatz der algebraischen Geometrie — hat sein Gegenstück in dem Satze der Mechanik, dass das Quadrat einer Kraft durch die Summe der Quadrate ihrer rechtwinkligen Componenten sich ersetzen lässt. Eine derartige Uebereinstimmung in den metrischen Relationen der gewöhnlichen Geometrie und der Mechanik weist offenbar auf einen tiefen innern Zusammenhang zwischen der Natur des empirischen Raumes und der Beschaffenheit der in ihm wirkenden Kräfte hin. Infolge dieser Uebereinstimmung sind Geometrie und Physik als solidarisch miteinander verbunden zu betrachten und jede Aenderung in unseren Voraussetzungen über den Raum, in welchem Kräfte wirken sollen, macht sofort auch eine entsprechende Aenderung der Principien der Mechanik nöthig. Giebt man daher in der Geometrie den Pythagoräischen Satz oder dessen Erweiterung auf — was der Fall ist, wenn man das Curvenelement in einer andern, als der gewöhnlichen Form darzustellen unternimmt —, so muss man consequenterweise in der auf diese Geometrie zu gründenden Mechanik den Satz vom Parallelogramm der Kräfte über Bord werfen. Es wird also durch die Annahme, dass man das Linienelement einer Mannigfaltigkeit durch die p^{te} Wurzel aus einem homogenen Differentialausdrucke p^{ten} Grades darstellen könne, die gewöhnliche Geometrie und Mechanik vollständig negirt und deshalb kann diese Erweiterung der Form des Linienelements einer Mannigfaltigkeit in unserer Metageometrie keinen Platz finden, wobei ich jedoch nicht in Abrede stellen will, dass sie in einer andern Mannigfaltigkeitstheorie möglich sei.

Dass vom rein analytischen Standpunkte aus gegen eine solche Verallgemeinerung Nichts einzuwenden sei, ebenso wenig wie gegen die Ausdehnung der für den gewöhnlichen Raum geltenden mechanischen Begriffe auf Räume von anderer Beschaffenheit,[8]) versteht sich von selbst. Nur darf man nicht glauben, dass eine blosse Applicirung dieser mechanischen Principien auf anders geartete Räume auch schon eine Dynamik in diesen Räumen — also eine Art „Metadynamik" — darstellte. Es ist vielmehr ausser allem Zweifel, dass eine Aenderung in den räumlichen Voraussetzungen auch eine adäquate Aenderung in den mechanischen Grundbegriffen bedingen müsse, wenn man die Analogie mit der gewöhnlichen Geometrie und Mechanik aufrecht erhalten will.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen wollen wir zunächst versuchen, den Gedankengang Riemann's zu reproduciren, wobei uns die

---

8) S. Lipschitz, Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist, Borchardt's Journal Bd. 74; ferner die Abhandlungen Schering's: Hamilton-Jacobi'sche Theorie für Kräfte, deren Maass von der Bewegung der Körper abhängt, Göttingen 1873, und: Verallgemeinerung der Poisson-Jacobi'schen Störungsformeln, Göttingen 1874

bereits mehrfach erwähnte Abhandlung[9]) von Beltrami wesentliche Dienste leisten wird. Wenn wir hierbei vielleicht etwas ausführlicher zu Werke gehen, als unbedingt nöthig erscheint, so leitet uns nur die Absicht, zum Verständniss der Riemann'schen Schrift nach Kräften beizutragen und über unsere Auffassung derselben nirgends einen Zweifel entstehen zu lassen.

Riemann's Entwickelungen stützen sich auf die Verallgemeinerung der bekannten Gauss'schen Formel

52) $$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + m^2 \partial \vartheta^2,$$

worin ∂s das Linienelement der Fläche, ϱ die von einem beliebig gewählten Punkte der Fläche nach einem der Endpunkte von ∂s gezogene kürzeste oder geodätische Linie und ϑ den Winkel bedeutet, den dieselbe im Punkte $\varrho = 0$ mit einer fest angenommenen, ebenfalls geodätischen Linie bildet. In diesem Falle ist, wie sich aus Gleichung 30) leicht ergiebt, wenn $E = 1$, $F = 0$, $G = m^2$ gesetzt wird, das Krümmungsmass

$$K = -\frac{1}{m} \frac{\partial^2 m}{\partial \varrho^2}.$$

Ist die Fläche abwickelbar oder eben, so hat man

52*) $$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + \varrho^2 \partial \vartheta^2,$$

die bekannte Formel für das Linienelement der Ebene in Polarcoordinaten. Für die Kugel, deren geodätische Linien ϱ sämmtlich grösste Kreise sind, erhält man, wenn man

$$x = R \sin \frac{\varrho}{R} \cos \vartheta,$$

$$y = R \sin \frac{\varrho}{R} \sin \vartheta,$$

$$z = R \cos \frac{\varrho}{R}$$

setzt, wodurch der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

genügt wird:

52**) $$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + \left(R \cos \frac{\varrho}{R}\right)^2 \partial \vartheta^2.$$

Es mögen nun neue Coordinaten eingeführt werden, welche durch die Gleichungen

53) $$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= \varrho \cos \vartheta, \\ x_2 &= \varrho \sin \vartheta \end{aligned} \right.$$

oder durch das Gleichungssystem

53*) $$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= \varrho \lambda_1, \\ x_2 &= \varrho \lambda_2, \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 &= 1 \end{aligned} \right.$$

definirt sind. Aus 53*) findet man

9) *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante, Annali di matematica Serie II, Tom II.*

$$\partial x_1^2 + \partial x_2^2 = \partial \varrho^2 + \varrho^2 (\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2),$$

woraus in Verbindung mit Gleichung 52), welche man auch schreiben kann

54) $$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + m^2 (\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2),$$

die Gleichung

$$\partial s^2 = \partial x_1^2 = \partial x_2^2 + (m^2 - \varrho^2)(\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2)$$

entsteht. Durch Differentiation der Gleichungen

$$\lambda_1 = \frac{x_1}{\varrho}, \quad \lambda_2 = \frac{x_2}{\varrho}$$

findet man aber

$$\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2 = \frac{\varrho^2 (\partial x_1^2 + \partial x_2^2) - \varrho^2 \partial \varrho^2}{\varrho^4}$$
$$= \frac{(x_1^2 + x_2^2)(\partial x_1^2 + \partial x_2^2) - (x_1 \partial x_1 + x_2 \partial x_2)^2}{\varrho^4}$$
$$= \frac{(x_1 \partial x_2 - x_2 \partial x_1)^2}{\varrho^4},$$

welche, in die vorige Gleichung substituirt, für das Curvenelement die wichtige Formel liefert:

55) $$\partial s^2 = \partial x_1^2 + \partial x_2^2 + \frac{4(m^2 - \varrho^2)}{\varrho^4} \left(\frac{x_1 \partial x_2 - x_2 \partial x_1}{2} \right)^2.$$

Wenn der Factor $\frac{4(m^2 - \varrho^2)}{\varrho^4}$ verschwindet, so erhält man das Linearelement einer Ebene, d. h. einer Fläche von verschwindender Krümmung; offenbar steht also dieser Coefficient zum Krümmungsmass in naher Beziehung. Untersuchen wir zuvörderst, welchen Werth derselbe für die Kugelfläche annimmt. In diesem Falle ist

$$m = R \sin \frac{\varrho}{R}$$

und es nähert sich der Ausdruck

$$\frac{4(m^2 - \varrho^2)}{\varrho^4} = \frac{4\left(R^2 \sin^2 \frac{\varrho}{R} - \varrho^2 \right)}{\varrho^4}$$

für $\varrho = 0$ dem Grenzwerth

$$-\tfrac{4}{3} \cdot \frac{1}{R^2}.$$

Multiplicirt man denselben mit $-\frac{3}{4}$, so erhält man das Krümmungsmass der Kugelfläche $\frac{1}{R^2}$. Beiläufig mag auch noch bemerkt werden, dass der Ausdruck

$$\left(\frac{x_1 \partial x_2 - x_2 \partial x_1}{2} \right)^2,$$

in welchem x_1 und x_2 für ein verschwindendes ϱ ebenfalls zur Null abnehmen, das Quadrat des unendlich kleinen Dreiecks darstellt, welches durch die Punkte

$$(0, 0), \quad (x_1, x_2), \quad (\partial x_1, \partial x_2)$$

gebildet wird.

Es entsteht nun die Frage, ob allgemein, wenn m eine beliebige Function von ϱ und θ darstellt, die Gleichung

56) $$K = -\tfrac{3}{4} \lim_{\varrho = 0} \frac{4(m^2 - \varrho^2)}{\varrho^4}$$

giltig bleibt, worin K das Krümmungsmass der Fläche im Punkte $\varrho = 0$ bedeutet. Beltrami[10]) beweist dies folgendermassen. Unter der Voraussetzung der Stetigkeit und Endlichkeit des Krümmungsmasses in der Nähe des Punktes $\varrho = 0$ folgt aus der Gauss'schen Formel

$$K = -\frac{1}{m} \frac{\partial^2 m}{\partial \varrho^2},$$

dass m von der Form

57) $$m = \varrho + b\varrho^3$$

sein müsse, wo b eine von ϱ und ϑ abhängige Function ist, die mit ihren Derivirten nach ϱ endlich und stetig bleibt. Dann hat man im Punkte $\varrho = 0$

$$K = -6 b_0.$$

Nun ist mit Rücksicht auf 57)

$$\frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^4} = 2b_0 = -\frac{K}{3}, \quad \varrho = 0,$$

also

$$K = -\tfrac{3}{4} \lim \frac{4(m^2 - \varrho^2)}{\varrho^4}, \quad \varrho = 0.$$

Einen directen Beweis der Richtigkeit dieser Formel findet man, wenn man mit Hilfe der Gleichung 30) unter Zugrundelegung der Gleichung 50) das Krümmungsmass der Fläche bestimmt und berücksichtigt, dass für $\varrho = 0$ auch x_1 und x_2 verschwinden. Denn schreibt man 55) in der Form

$$\partial s^2 = \left(1 + \frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^4} x_2^2\right) \partial x_1^2 - 2 x_1 x_2 \frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^4} \partial x_1 \partial x_2 + \left(1 + \frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^4} x_1^2\right) \partial x_2^2,$$

so ist klar, dass in der Nähe eines gewöhnlichen, d. h. nicht mit einer Singularität behafteten Punktes $\varrho = 0$ auf der Fläche der Quotient $\frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^4}$ eine endliche und stetige Grösse darstellen wird, deren Ableitungen nach ∂x_1 und ∂x_2 nicht unendlich werden. Vertauscht man nun in Gleichung 30) p mit x_1, q mit x_2, setzt

---

10) *Teoria fondamentale* etc. oder Math. Ann. Bd. 2, S. 6.

$$E = 1 + \frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^4} x_2^2,$$

$$F = -\frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^4} x_1 x_2,$$

$$G = 1 + \frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^4} x_1^2$$

und substituirt die Ableitungen dieser Grössen nach x_1 und x_2 in die Gleichung 30), so reducirt sich dieselbe schliesslich, wenn $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ gesetzt werden, auf den einfachen Ausdruck

$$K \lim \frac{m^2}{\varrho^2} = -3 \lim \frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^4}, \quad \varrho = 0.$$

Der Quotient $\frac{m^2}{\varrho^2}$ hat aber für $\varrho = 0$ zur Grenze die Einheit. Denn das Linienelement der krummen Fläche fällt für $\varrho = 0$ offenbar zusammen mit dem Linienelement

$$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + \varrho^2 \partial \vartheta^2$$

der im Punkte $\varrho = 0$ berührenden Ebene. Man erhält daher auch auf diesem Wege für das Krümmungsmass einer Fläche den Ausdruck 56).

Bevor wir die erhaltenen Resultate, die in der Hauptsache schon Beltrami gefunden hat, auf Gebiete von mehr als zwei Dimensionen ausdehnen, wollen wir ebenfalls nach Anleitung dieses scharfsinnigen Interpreten Lobatschefsky's und Riemann's diejenige Formel für das Linienelement einer Fläche von constanter Krümmung ableiten, aus welcher die allgemeine Formel Riemann's für das Linienelement einer constant gekrümmten Mannigfaltigkeit höherer Ordnung hervorgegangen ist. Zu diesem Zwecke erinnern wir zunächst daran, dass die Formel 52**)

$$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + \left(R \sin \frac{\varrho}{R}\right)^2 \partial \vartheta^2$$

nicht blos für die Kugelfläche vom Halbmesser R, sondern überhaupt für jede Fläche, deren Krümmung constant und gleich $\frac{1}{R^2}$ ist, Geltung hat. Denn aus dem Satze von der Erhaltung der Krümmung einer Fläche bei der Deformation geht hervor, dass, wenn die Krümmung constant und gleich c ist, die Fläche stets auf einer Kugel vom Halbmesser $\sqrt{\frac{1}{c}}$ aufgewickelt werden kann und dass man daher dem Linienelement einer solchen Fläche stets die obige Form 52**) geben kann, die zunächst nur für die Kugel abgeleitet worden war. Führt man in das mit ihr identische System

$$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + R^2 \sin^2 \frac{\varrho}{R} (\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2), \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$$

eine neue Art Coordinaten ein, welche durch die Gleichungen

$$x_1 = 2R\lambda_1 \tan\frac{\varrho}{2R},$$

$$x_2 = 2R\lambda_2 \tan\frac{\varrho}{2R}$$

definirt sind, so wird

$$\partial x_1 = \frac{1}{\cos^2\frac{\varrho}{2R}}\lambda_1\,\partial\varrho + 2R\tan\frac{\varrho}{2R}\,\partial\lambda_1$$

oder

$$\partial x_1 \cos^2\frac{\varrho}{2R} = \lambda_1\,\partial\varrho + R\sin\frac{\varrho}{R}\,\partial\lambda_1$$

und ebenso

$$\partial x_2 \cos^2\frac{\varrho}{2R} = \lambda_2\,\partial\varrho + R\sin\frac{\varrho}{R}\,\partial\lambda_2,$$

woraus sich durch Quadrirung und Addition, da

$$\lambda_1\,\partial\lambda_1 + \lambda_2\,\partial\lambda_2 = 0$$

ist, ergiebt

$$(\partial x_1^{\,2} + \partial x_2^{\,2})\cos^4\frac{\varrho}{2R} = \partial\varrho^2 + R^2\sin^2\frac{\varrho}{R}(\partial\lambda_1^{\,2} + \partial\lambda_2^{\,2})$$
$$= \partial s^2.$$

Wegen 57) ist aber

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = 4R^2\tan^2\frac{\varrho}{2R}$$
$$= \frac{4R^2}{\cos^2\frac{\varrho}{2R}} - 4R^2,$$

folglich

$$\cos^2\frac{\varrho}{2R} = \frac{4R^2}{4R^2 + x_1^{\,2} + x_2^{\,2}},$$

also

$$\partial s = \frac{1}{1 + \frac{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}}{4R^2}}\sqrt{\partial x_1^{\,2} + \partial x_2^{\,2}},$$

oder wenn man

$$R = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$$

setzt,

59)
$$\partial s = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}(x_1^{\,2} + x_2^{\,2})}\sqrt{\partial x_1^{\,2} + \partial x_2^{\,2}}.$$

Dies ist die Riemann'sche Formel für $n = 2$. Schreibt man sie in der Gestalt

$$\partial s^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{4}(x_1^{\,2} + x_2^{\,2})\right)^2}\partial x_1^{\,2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{4}(x_1^{\,2} + x_2^{\,2})\right)^2}\partial x_2^{\,2}$$

und berechnet die Krümmung nach Gleichung 30), indem man

$$E = G = \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{4}(x_1^2 + x_2^2)\right)^2}, \quad F = 0$$

setzt, oder aus einer der beiden Gleichungen 35) und 39), indem man n den Werth 2 giebt, so erhält man für die Krümmung der Fläche den constanten Werth

$$K = \alpha.$$

Die bis jetzt für Flächen aufgestellten Formeln wollen wir weiter in der Art verallgemeinern, dass wir zu den Riemann'schen Ausdrücken gelangen. Offenbar ist die Formel, von der wir ausgingen:

$$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + m^2 \, \partial \vartheta^2,$$

wenn sie in der Gestalt

$$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + m^2 (\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2)$$

mit der Bedingung

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$$

geschrieben wird, ein specieller Fall der allgemeineren Gleichung

60) $$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + m^2 (\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2 + \ldots + \partial \lambda_n^2),$$
$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 1.$$

Führt man neue Coordinaten

61) $$x_k = \varrho \lambda_k, \quad k = 1, 2. \ldots n$$

ein, die also der Bedingung

62) $$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \varrho^2$$

genügen, so ergiebt sich leicht

$$\partial x_1^2 + \partial x_2^2 + \ldots + \partial x_n^2 = \partial \varrho^2 + \varrho^2 (\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2 + \ldots + \partial \lambda_n^2),$$

folglich, wenn man $\partial \varrho^2$ aus 60) eliminirt:

$$\partial s^2 = \Sigma \, \partial x_k^2 + (m^2 - \varrho^2) \, \Sigma \, \partial \lambda_k^2, \quad k = 1, 2 \ldots n.$$

Da

$$\partial \lambda_k = \frac{\varrho \, \partial x_k - x_k \, \partial \varrho}{\varrho^2}$$

ist, so folgt

$$\Sigma \, \partial \lambda_k^2 = \frac{\Sigma x_k^2 \, \Sigma \, \partial x_k^2 - (\Sigma x_k \, \partial x_k)^2}{\varrho^4}$$
$$= \frac{\Sigma (x_i \, \partial x_k - x_k \, \partial x_i)^2}{\varrho^4}, \quad i, k = 1, 2 \ldots n.$$

Daher wird

63) $$\partial s^2 = \Sigma \, \partial x_k^2 + \frac{4(m^2 - \varrho^2)}{\varrho^4} \, \Sigma \left(\frac{x_i \, \partial x_k - x_k \, \partial x_i}{2} \right)^2.$$

Da im Punkte $\varrho = 0$ die x sämmtlich aufeinander senkrecht sind, so stellt

$$\Sigma \left(\frac{x_i \, \partial x_k - x_k \, \partial x_i}{2} \right)^2$$

für verschwindende x das Quadrat der Fläche des unendlich kleinen Dreiecks, welches durch die Punkte

$$(0, 0, \ldots 0), \quad (\partial x_1, \partial x_2, \ldots \partial x_n), \quad (x_1, x_2, \ldots x_n)$$

bestimmt ist, dar. Seine Projection auf die durch die Linienelemente x_i und x_k gelegte Ebene hat den Ausdruck

$$\frac{x_i \partial x_k - x_k \partial x_i}{2}.$$

Analog dem Frühern würde nun auch der Grenzwerth

$$Lim \frac{4(m^2 - \varrho^2)}{\varrho^4}, \quad \varrho = 0$$

in nächster Beziehung zum Krümmungsmass stehen müssen, da das Verschwinden von $\frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^4}$ den Ausdruck 63) auf

$$\partial s^2 = \partial x_1^2 + \partial x_2^2 + \ldots + \partial x_n^2$$

reducirt, welches das Quadrat des Linienelements einer ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit darstellt.

Bevor wir jedoch unsere Untersuchung weiter fortsetzen, wollen wir uns überzeugen, ob die vorstehende Entwickelung auch wirklich mit den Angaben Riemann's im Einklang sich befindet, und zugleich diejenigen Partien seiner Schrift zusammenstellen, welche auf das Krümmungsmass einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit Bezug haben.

Auf S. 9 und 10 heisst es:

„und setze ... solche Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$, dass die Quadratsumme $= s^2$ ist. (S. Gl. 62, wo ϱ mit s zu vertauschen ist.) Führt man diese Grössen ein, so wird für unendlich kleine Werthe von x das Quadrat des Linienelements $= \Sigma \partial x^2$ [63)], das Glied der nächsten Ordnung in demselben aber gleich einem homogenen Ausdrucke zweiten Grades der $\frac{n(n-1)}{2}$ Grössen $(x_1 \partial x_2 - x_2 \partial x_1)$, $(x_1 \partial x_3 - x_3 \partial x_1) \ldots$, also eine unendlich kleine Grösse von der vierten Dimension, so dass man eine endliche Grösse $\left(\frac{4(m^2 - \varrho^2)}{\varrho^4}\right)$ erhält, wenn man sie durch das Quadrat des unendlich kleinen Dreiecks dividirt, in dessen Eckpunkten die Werthe der Veränderlichen sind $(0, 0, 0 \ldots)$, $(x_1, x_2, x_3 \ldots)$, $(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3 \ldots)$. Diese Grösse behält denselben Werth, so lange die Grössen x und ∂x in denselben binären Linearformen (x_i und x_k) enthalten sind, oder so lange die beiden kürzesten Linien von den Werthen 0 bis zu den Werthen x und von den Werthen 0 bis zu den Werthen ∂x in demselben Flächenelemente bleiben, und hängt also nur von Ort und Richtung derselben ab. Sie wird offenbar $= 0$, wenn die dargestellte Mannigfaltigkeit eben, d. h. das Quadrat des Linienelements auf $\Sigma \partial x^2$ reducirbar ist und kann daher als das Mass der in diesem Punkte in dieser Flächenrichtung stattfindenden

Abweichung der Mannigfaltigkeit von der Ebenheit angesehen werden. Multiplicirt mit $-\frac{3}{4}$ wird sie der Grösse gleich, welche Herr Geh. Hofrath Gauss das Krümmungsmass einer Fläche genannt hat. Zur Bestimmung der Massverhältnisse einer n-fach ausgedehnten in der vorausgesetzten Form darstellbaren Mannigfaltigkeit wurden vorhin $\frac{n(n-1)}{2}$ Functionen des Ortes nöthig gefunden; wenn also das Krümmungsmass in jedem Punkte in $\frac{n(n-1)}{2}$ Flächenrichtungen gegeben ist, so werden daraus die Massverhältnisse der Mannigfaltigkeit sich bestimmen lassen, wofern nur zwischen diesen Werthen keine identischen Relationen stattfinden, was in der That, allgemein zu reden, nicht der Fall ist."

Ferner auf S. 12:

„Um dem Krümmungsmass einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in einem gegebenen Punkte und einer gegebenen durch ihn gelegten Flächenrichtung eine greifbare Bedeutung zu geben, muss man davon ausgehen, dass eine von einem Punkte ausgehende kürzeste Linie völlig bestimmt ist, wenn ihre Anfangsrichtung gegeben ist. Hiernach wird man eine bestimmte Fläche erhalten, wenn man sämmtliche von dem gegebenen Punkte ausgehenden und in dem gegebenen Flächenelement liegenden Anfangsrichtungen zu kürzesten Linien verlängert, und diese Fläche hat in dem gegebenen Punkte ein bestimmtes Krümmungsmass, welches zugleich das Krümmungsmass der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in dem gegebenen Punkte und der gegebenen Flächenrichtung ist."

Aus den angezogenen Stellen geht deutlich hervor, dass Riemann nicht sowohl einen bestimmten Ausdruck für das Krümmungsmass einer n-fachen Mannigfaltigkeit aufzustellen beabsichtigt, als vielmehr die Meinung ausspricht, dass man die Massverhältnisse derselben bestimmen könne, wenn das Krümmungsmass in jedem Punkte nach $\frac{n(n-1)}{2}$ Flächenrichtungen gegeben ist.

Wir wollen zunächst untersuchen, ob es im Allgemeinen möglich ist, aus der Formel 63) die Krümmung einer Fläche zu bestimmen, welche die beiden Linearelemente x_i und x_k enthält. Wir setzen zu diesem Zwecke in 63) sämmtliche x bis auf die genannten x_i und x_k gleich Null und erhalten

$$63^*)\quad \partial s^2 = \partial x_i^2 + \partial x_k^2 + \left(\frac{4\,(m^2-\varrho^2)}{\varrho^4}\right)_{ik}\left(\frac{x_i\,\partial x_k - x_k\,\partial x_i}{2}\right)^2,$$

worin

$$\left(\frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4}\right)_{ik} = \frac{m^2-(x_i^2+x_k^2)}{(x_i^2+x_k^2)^2}.$$

Die Formel 63*) hat dann ganz die Form der Gleichung 55), so dass man versucht ist, zu glauben, der Grenzwerth

$$64)\qquad k = -\tfrac{3}{4}\, lim \left(\frac{4(m^2-\varrho^2)}{\varrho^4}\right)_{ik}, \quad \varrho = 0\ ^{11)}$$

ergäbe wie dort das Krümmungsmass der durch das Linearelement 63*) charakterisirten Fläche. Dass dies jedoch falsch sein würde, lehrt folgende einfache Betrachtung. Die Gleichung 56) ist aus 30) abgeleitet worden, bei deren Entwickelung vorausgesetzt wurde, dass die Cartesischen Coordinaten x, y, z einer Fläche als Functionen zweier unabhängigen Parameter p und q gegeben seien, so dass also die Gleichungen stattfinden

$$x = f_1(p, q), \quad y = f_2(p, q), \quad z = f_3(p, q).$$

Die Fläche, deren Krümmung durch die Gleichung 56) ausgedrückt wird, ist demnach eine solche, welche in einem ebenen Raume von drei Dimensionen enthalten ist. Da wir eine Curve, die in einem ebenen Raume von zwei Dimensionen, d. h. in einer Ebene liegt, als eine torsionslose Curve oder als Curve von einfacher Krümmung bezeichnen, so würden wir der Analogie nach jede Fläche der gewöhnlichen Geometrie — also auch die in Rede stehende — zu den torsionslosen Flächen oder Flächen von einfacher Krümmung zu rechnen haben. Einen Gegensatz zu diesen bilden die gewundenen Flächen, die einen Raum von mehr als drei Dimensionen durchziehen. Sie sind das Analogon der Curven doppelter Krümmung. Wenn eine solche im gewöhnlichen Raume durch die Gleichungen

$$x_0 = f_0(p), \quad x_1 = f_1(p), \quad x_2 = f_2(p),$$

im ebenen Raume von $n+1$ Dimensionen aber allgemein durch das System

$$x_k = f_k(p), \quad k = 0, 1, 2 \ldots n, \quad n > 1$$

sich darstellen lässt, so würde dem entsprechend eine Fläche von doppelter Krümmung durch das Gleichungssystem

$$x_k = f_k(p_1, p_2), \quad k = 0, 1, 2 \ldots n, \quad n > 2$$

zu charakterisiren sein. Hieraus ergiebt sich aber das Linearelement derselben:

$$65)\qquad \begin{aligned} \partial s^2 &= \Sigma\, \partial x_k^2 \\ &= a_{11}\, \partial p_1^2 + 2 a_{12}\, \partial p_1\, \partial p_2 + a_{22}\, \partial p_2^2, \end{aligned}$$

und die Coefficienten dieser Form würden die Werthe haben:

11) Dieser Ausdruck ist identisch mit dem von Lipschitz aufgestellten:

$$k_0 = -\tfrac{3}{4}\, \frac{[2\varphi(du) - 2 f_0(du)]_2}{f_0(u)(f_0(du) - d\sqrt{f_0(u)})^2},$$

sobald man nur ein gewisses Geschlecht von Formen in Betracht zieht. (Siehe Lipschitz, Fortgesetzte Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen, Borchardt's Journal Bd 72.)

$$a_{11} = \Sigma\left(\frac{\partial x_k}{\partial p_1}\right)^2,$$

$$a_{12} = a_{21} = \Sigma\frac{\partial x_k}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial p_2},$$

$$a_{22} = \Sigma\left(\frac{\partial x_k}{\partial p_2}\right)^2.$$

Der analytische Ausdruck für das Linienelement einer gewundenen Fläche unterscheidet sich demnach nicht von dem für das Linienelement einer Fläche einfacher Krümmung und doch beruht er auf wesentlich anderen geometrischen Voraussetzungen. Wenn nun die *Gauss*'sche Gleichung 30) aus den Coefficienten dieser quadratischen Form 65) das Krümmungsmass einer Fläche finden lehrt, so darf man nicht ausser Acht lassen, dass die ganze Entwickelung auf der Annahme $n = 2$ basirt ist. Denn nur in diesem Falle ist die Normale eines Punktes der Fläche eindeutig bestimmt. Ist $n > 2$, so ist die Lage der Normale unbestimmt, wie bei den Curven doppelter Krümmung. Man hat dann zunächst diejenige ebene Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen zu construiren, in welcher zwei aufeinander folgende Flächenelemente liegen — die Krümmungsmannigfaltigkeit. Denn ganz ebenso, wie bei den gewundenen Curven im Ausdrucke des Krümmungshalbmessers die Bestimmungsstücke der Osculationsebene auftreten, müssten auch in der Formel für die Krümmung einer gewundenen Fläche die Bestimmungsstücke des ebenen dreifachen Osculationsraumes enthalten sein. Dies ist aber bei der *Gauss*'schen Formel nicht der Fall, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil sie eben nur für Flächen gilt, deren Osculationsräume sämmtlich mit dem einen, empirisch gegebenen Raume zusammenfallen.

Durch das Vorstehende halte ich es für erwiesen, *dass im Allgemeinen die Krümmung einer Fläche, deren Linienelement durch die Gleichung 63*) gegeben ist, sobald sie nicht in einem ebenen Raume von drei Dimensionen liegt, durch die Gleichung 64) nicht gefunden werden kann, und somit ist die Unhaltbarkeit der Riemann'schen Definition dargethan.*

Aber auch zugegeben, dass es möglich sei, die Krümmungen der $\frac{n(n-1)}{2}$ Flächenelemente zu bestimmen, welche durch die n Kanten des rechtwinkligen Elementar-Parallelepipedons $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ sich legen lassen, so ist nicht abzusehen, wie aus denselben das Krümmungsmass der Mannigfaltigkeit zusammengesetzt werden soll, wenn nicht dieses Parallelepiped mit demjenigen zusammenfällt, welches die Elemente der n Krümmungslinien im Punkte $\varrho = 0$ bilden. Dies findet nur statt bei den ebenen und kugelförmigen Mannigfaltigkeiten und deshalb gelangt man auch bei diesen, wie wir noch zeigen wollen, mittelst des Riemann'schen Verfahrens zu einem richtigen Resultat.

Wir schicken die Bemerkung voraus, dass die $\frac{n(n-1)}{2}$ Werthe des Ausdruckes

$$lim\left(\frac{4(m^2-\varrho^2)}{\varrho^4}\right)_{ik},\quad \varrho=0$$

unmöglich von einander verschieden sein können. Denn da

$$\frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4}=\frac{m^2-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^2},$$

so wird für $\varrho=0$, wodurch auch $x_1, x_2, \ldots x_n$ Null werden, der vorstehende Ausdruck sich einem Werthe nähern, der von den x unabhängig ist. Denselben Grenzwerth wird aber auch

$$\left(\frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4}\right)_{ik}=\frac{m^2-(x_i^2+x_k^2)}{(x_i^2+x_k^2)^2}$$

haben. Denn es bleibt sich jedenfalls gleich, ob man in dem Ausdrucke $\frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4}$ gleichzeitig alle x gleich Null setzt, oder erst $(n-2)$ derselben und schliesslich auch noch die übrigen zwei. Da nun die ebenen und kugelförmigen Mannigfaltigkeiten in jedem Punkte nach jeder beliebigen Flächenrichtung, die durch zwei senkrecht aufeinander stehende geodätische Linien bestimmt ist, denselben Werth der Krümmung besitzen, ja zwei beliebig gewählte, einander senkrecht durchschneidende geodätische Linien überdies auch als Krümmungslinien angesehen werden können, so wird sich für sie in der That sowohl das Krümmungsmass nach den $\frac{n(n-1)}{2}$ Flächenrichtungen im Punkte $\varrho=0$, als auch die Krümmung der Mannigfaltigkeit selbst in diesem Punkte berechnen lassen.

Eine ebene n-fache Mannigfaltigkeit lässt sich durch das System

66) $$x_k-x_k^0=b_{k,1}\,p_1+b_{k,2}\,p_2+\ldots+b_{k,n}\,p_n,\qquad k=0,1,\ldots n,$$

worin die x die Cartesischen Coordinaten des veränderlichen Punktes, p die n Parameter bedeuten, darstellen. Unterwirft man die Constanten b den Bedingungen

$$b_{0r}^2+b_{1r}^2+\ldots+b_{nr}^2=1,$$
$$b_{0r}\,b_{0s}+b_{1r}\,b_{1s}+\ldots+b_{nr}\,b_{ns}=0,$$

so sind die Geraden $p_1, p_2 \ldots p_n$ auf einander senkrecht und das Linearelement hat die Form

$$\partial s^2=\partial x_0^2+\partial x_1^2+\ldots+\partial x_n^2$$
$$=\partial p_1^2+\partial p_2^2+\ldots+\partial p_n^2.$$

In diesem Falle ist nach 63)

$$-\tfrac{3}{4}\,Lim\,\frac{4(m^2-\varrho^2)}{\varrho^4},\quad \varrho=0$$

für sämmtliche $\frac{n(n-1)}{2}$ Flächenelemente $(\partial p_i, \partial p_k)$ Null. Durch Elimination der p aus den Gleichungen 66) erhält man aber die Gleichung der ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit in der Form

$$F = a_0(x_0 - x_0^0) + a_1(x_1 - x_1^0) + \ldots + a_n(x_n - x_n^0) = 0.$$

Das Krümmungsmass derselben ergiebt sich aus der Formel[12])

$$67)\qquad K = -\frac{1}{S^{n+2}} \cdot \begin{vmatrix} 0 & F_0 & F_1 & \ldots & F_n \\ F_0 & F_{00} & F_{01} & \ldots & F_{0n} \\ F_1 & F_{10} & F_{11} & \ldots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ F_n & F_{n0} & F_{n1} & \ldots & F_{nn} \end{vmatrix},$$

worin $F_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$, $F_{ki} = \frac{\partial F_k}{\partial x_i}$, $S = \sqrt{F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_n^2}$ ebenfalls gleich Null.

Um das Curvenelement der kugelförmigen Mannigfaltigkeit zu erhalten, setze man

$$68)\qquad \begin{aligned} x_0 &= R\cos\frac{\varrho}{R}, \\ x_1 &= R\sin\frac{\varrho}{R}\cos\vartheta_1, \\ x_2 &= R\sin\frac{\varrho}{R}\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_{n-1} &= R\sin\frac{\varrho}{R}\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{n-2}\cos\vartheta_{n-1}, \\ x_n &= R\sin\frac{\varrho}{R}\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\ \ldots\sin\vartheta_{n-2}\sin\vartheta_{n-1}, \end{aligned}$$

welche Werthe, wie man leicht sieht, der Gleichung des kugelförmigen Raumes

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$$

genügen. Das Linienelement dieser Mannigfaltigkeit ist dann

$$\begin{aligned} \partial s^2 &= \partial x_0^2 + \partial x_1^2 + \ldots + \partial x_n^2 \\ 69)\qquad &= \partial\varrho^2 + \left(R\sin\frac{\varrho}{R}\right)^2 \{\partial\vartheta_1^2 + \sin^2\vartheta_1\,\partial\vartheta_2^2 + \ldots \\ &\qquad \ldots + \sin^2\vartheta_1\sin^2\vartheta_2\ldots\sin^2\vartheta_{n-2}\,\partial\vartheta^2_{n-1}\}. \end{aligned}$$

Setzt man

12) S. Mathem. Annal. Bd. VII, S. 392.

$$68)\quad \begin{aligned} \lambda_1 &= \cos\vartheta_1, \\ \lambda_2 &= \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2, \\ &\vdots \\ \lambda_{n-1} &= \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \cos\vartheta_{n-1}, \\ \lambda_n &= \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \sin\vartheta_{n-1}, \end{aligned}$$

so ist

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 1$$

und man erhält das Linienelement der Mannigfaltigkeit in der Form

$$69^{*})\quad \partial s^2 = \partial \varrho^2 + \left(R \sin\frac{\varrho}{R}\right)^2 (\partial\lambda_1^2 + \partial\lambda_2^2 + \ldots + \partial\lambda_n^2).$$

Führt man in diese Formel neue Coordinaten ein, welche durch die Gleichungen

$$p_k = \varrho\lambda_k, \quad k = 1, 2, \ldots n$$

definirt sind, worin die λ dieselbe Bedeutung haben wie vorher, so folgt

$$\Sigma\,\partial p_k^2 = \partial\varrho^2 + \varrho^2\,\Sigma\,\partial\lambda_k^2$$

und man findet ganz wie bei Ableitung der Gleichung 63)

$$70)\quad \partial s^2 = \Sigma\,\partial p_k^2 + \frac{4\left(R^2 \sin^2\frac{\varrho}{R} - \varrho^2\right)}{\varrho^4}\,\Sigma\left(\frac{p_i\,\partial p_k - p_k\,\partial p_i}{2}\right)^2.$$

Für $\varrho = 0$ wird

$$Lim\,\frac{4\left(R^2 \sin^2\frac{\varrho}{R} - \varrho^2\right)}{\varrho^4} = -\tfrac{4}{3}\cdot\frac{1}{R^2}.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $-\frac{3}{4}$, so erhält man $\frac{1}{R^2}$, welches das Krümmungsmass einer Kugelfläche ist. Dasselbe Resultat erhält man aber auch, wenn man $(n-2)$ der p gleich Null setzt und unter Voraussetzung der Torsionslosigkeit der hierdurch bestimmten Elementarfläche das Krümmungsmass derselben ableitet. Das Linearelement dieser Fläche hat dann die Form

$$71)\quad \partial s^2 = \partial p_i^2 + \partial p_k^2 + 4\left(\frac{R^2 \sin^2\frac{\varrho}{R} - \varrho^2}{\varrho^4}\right)_{ik}\left(\frac{p_i\,\partial p_k - p_k\,\partial p_i}{2}\right)^2,$$

und es ist leicht nachzuweisen, dass wir es im vorliegenden Falle in der That mit einer torsionslosen Fläche zu thun haben. Denn um direct von dem Ausdrucke

$$\partial s^2 = \partial x_0^2 + \partial x_1^2 + \ldots + \partial x_n^2,$$

wobei die x der Bedingung

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$$

genügen, zu der Formel 70) zu gelangen, haben wir für x folgende Werthe zu substituiren:

$$x_0 = R\cos\frac{\varrho}{R},$$

$$x_1 = R\frac{p_1}{\varrho}\sin\frac{\varrho}{R},$$

$$x_2 = R\frac{p_2}{\varrho}\sin\frac{\varrho}{R},$$

$$\vdots$$

$$x_n = R\frac{p_n}{\varrho}\sin\frac{\varrho}{R}.$$

Setzt man hier alle p bis auf p_i und p_k gleich Null, so erhält man

$$x_0 = R\cos\frac{\varrho}{R},$$

$$x_i = R\frac{p_i}{\varrho}\sin\frac{\varrho}{R},$$

$$x_k = R\frac{p_k}{\varrho}\sin\frac{\varrho}{R}.$$

Diese drei Gleichungen repräsentiren eine im ebenen Raume x_0, x_i, x_k gelegene Kugel

$$x_0^2 + x_i^2 + x_k^2 = R^2,$$

deren Curvenelement durch die Gleichung 71) gegeben ist. Die geodätischen Linien sowohl, als die Krümmungslinien der kugelförmigen Mannigfaltigkeit sind grösste Kreise; daher lassen sich für $\varrho = 0$ die ∂p als die Elemente der n Krümmungslinien ansehen, die vom Punkte $\varrho = 0$ ausgehen. Bedeuten nun ϱ_i und ϱ_k die zu den Elementen ∂p_i und ∂p_k gehörigen Hauptkrümmungshalbmesser, so kann das Krümmungsmass K_{ik} der durch die Gleichung 71) charakterisirten Fläche einerseits durch die Formel

$$K_{ik} = -3\,Lim\left(\frac{R^2\sin^2\frac{\varrho}{R} - \varrho^2}{\varrho^4}\right)_{ik}, \quad \varrho = 0,$$

andererseits durch

$$K_{ik} = \frac{1}{\varrho_i \cdot \varrho_k}$$

dargestellt werden. Das Krümmungsmass der n-fachen Kugelmannigfaltigkeit ergiebt sich daher

$$K = \frac{1}{\varrho_1\,\varrho_2 \cdots \varrho_n} = \sqrt[n-1]{K_{ik}^{\frac{n(n-1)}{2}}},$$

und da

$$K_{ik} = \frac{1}{R^2}$$

ist:

$$K = \frac{1}{R^n}.$$

Das gleiche Resultat erhält man, wenn man das Krümmungsmass derselben Mannigfaltigkeit:

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$$

aus der Formel 67) berechnet, worin

$$F = x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 - R^2,$$

$$F_k = 2x_k, \quad S = \sqrt{F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_n^2},$$

$$F_{ik} = F_{ki} = 0, \quad F_{kk} = 2$$

zu setzen ist.

Der Formel 69*), welche einen Ausdruck für das Linienelement des n-fachen kugelförmigen Raumes liefert, wollen wir endlich noch die Gestalt geben, welche Riemann dem Linienelement einer constant gekrümmten Mannigfaltigkeit von n Dimensionen überhaupt vindicirt. Setzen wir

72) $$p_r = 2R\lambda_r \tan\frac{\varrho}{2R},$$

so wird

$$\partial p_r \cos^2\frac{\varrho}{2R} = \lambda_r \partial\varrho + R\sin\frac{\varrho}{R}\partial\lambda_r,$$

also

73) $$\partial\varrho^2 + \left(R\sin\frac{\varrho}{R}\right)^2 \Sigma\partial\lambda_r^2 = \cos^4\frac{\varrho}{2R}\Sigma\partial p_r^2.$$

Durch Vergleichung von 69*) und 73) findet man

$$\partial s = \cos^2\frac{\varrho}{2R}\sqrt{\Sigma\partial p_r^2}.$$

Nun ist wegen 72)

$$\Sigma p_r^2 = 4R^2\tan^2\frac{\varrho}{2R},$$

folglich

$$\cos^2\frac{\varrho}{2R} = \frac{4R^2}{4R^2 + \Sigma p_r^2},$$

also

$$\partial s = \frac{1}{1 + \frac{\Sigma p_r^2}{4R^2}}\sqrt{\Sigma\partial p_r^2}$$

oder, wenn man

$$R = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$$

setzt:

74) $$\partial s = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}\Sigma p_r^2}\sqrt{\Sigma\partial p_r^2}, \quad r = 1, 2, \ldots n.$$

Diese Formel stellt also das Linienelement einer kugelförmigen Mannigfaltigkeit dar. Wenn Riemann sie überhaupt als Ausdruck für das Linienelement einer Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung angesehen wissen will, so beruht dies, wie schon oben erwähnt worden ist, auf der unhaltbaren Voraussetzung, dass eine Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung sich deformiren und auf einer kugelförmigen Mannigfaltigkeit von ebensoviel Dimensionen aufwickeln lasse.

Die kugelförmige Mannigfaltigkeit, deren Linienelement durch die Gleichung 74) gegeben ist, besitzt — wie nach der Ableitung dieser Formel nicht anders zu erwarten steht — in ihren sämmtlichen Elementarflächen, die ohne Ausnahme torsionslos sind, die Krümmung α. Denn setzt man alle p bis auf p_i und p_k gleich Null, so kommt

$$\partial s = \frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}(p_i^2+p_k^2)} \sqrt{\partial p_i^2 + \partial p_k^2},$$

welche Gleichung dieselbe Form hat, wie 59). Die Torsionslosigkeit der betreffenden Fläche ergiebt sich durch eine ähnliche Betrachtung, wie vorher. Um das Element

$$\partial s^2 = \partial x_0^2 + \partial x_1^2 + \ldots + \partial x_n^2$$

des kugelförmigen Raumes

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$$

in die Form 74) zu transformiren, hat man

$$x_0 = R \cos \frac{\varrho}{R},$$

$$x_r = \frac{p_r}{2} \sin \frac{\varrho}{R} \cot \frac{\varrho}{2R}$$

mit der Bedingung

$$\Sigma p_r^2 = 4 R^2 \tan^2 \frac{\varrho}{2R}$$

zu setzen. Dann verschwinden, wenn man die p bis auf zwei gleich Null setzt, alle x bis auf drei, folglich hat man eine Fläche, welche in einem ebenen Raume von drei Dimensionen liegt, für welche also die Gauss'sche Formel 30) giltig ist.

Gehen wir noch einen Augenblick auf die Formel 60) zurück, welche aller Wahrscheinlichkeit nach Riemann seinen Betrachtungen zu Grunde gelegt hat. Sie lautete:

$$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + m^2 (\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2 + \ldots + \partial \lambda_n^2), \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 1$$

oder, wenn wir statt der λ die in 68*) gegebenen Werthe einführen:

75) $$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + m^2 (\partial \vartheta_1^2 + \sin^2 \vartheta_1 \, \partial \vartheta_2^2 + \ldots + \sin^2 \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_2 \ldots \sin^2 \vartheta_{n-2} \, \partial \vartheta_{n-1}^2),$$

und stellte die Verallgemeinerung der Gauss'schen Gleichung

$$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + m^2 \partial \vartheta_1^2$$

dar. Um das Linienelement der kugelförmigen Mannigfaltigkeit aus ihr zu erhalten, hat man $m = R \sin \frac{\varrho}{R}$ zu setzen. Ebenso ergiebt sich das

Linienelement der ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit, wenn man für m die Grösse ϱ substituirt. Denn wenn $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Cartesischen Coordinaten einer ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit bedeuten, so erhält man das Linienelement, in Polarcoordinaten ausgedrückt, wenn man

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varrho \cos\vartheta_1, \\
x_2 &= \varrho \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2, \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
x_{n-1} &= \varrho \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \cos\vartheta_{n-1}, \\
x_n &= \varrho \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \sin\vartheta_{n-1}
\end{aligned}$$

setzt. Man findet dann

$$\begin{aligned}
\partial s^2 &= \Sigma \partial x_k^2 \\
&= \partial\varrho^2 + \varrho^2 \partial\vartheta_1^2 + \varrho^2 \sin^2\vartheta_1 \partial\vartheta_2^2 + \ldots + \varrho^2 \sin^2\vartheta_1 \sin^2\vartheta_2 \ldots \sin^2\vartheta_{n-2} \partial\vartheta^2_{n-1}.
\end{aligned}$$

Dass aber die Formel 75) dem Linienelement jeder beliebigen andern Mannigfaltigkeit Genüge leistet, dürfte wohl nicht zu erwarten sein. Hierzu ist sie offenbar nicht allgemein genug. Wir ersetzen sie daher durch die umfassendere Gleichung:

$$76) \qquad \partial s^2 = \partial\varrho^2 + m_1^2 \partial\vartheta_1^2 + m_2^2 \partial\vartheta_2^2 + \ldots + m^2_{n-1} \partial\vartheta^2_{n-1}.$$

Da für $\varrho = 0$ das Linienelement der n-fachen Mannigfaltigkeit zusammenfällt mit dem Linienelement der in diesem Punkte berührenden ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit, so müssen die m folgenden Grenzbedingungen Genüge leisten:

$$77) \qquad \begin{aligned}
&Lim \frac{m_1}{\varrho} = 1, \\
&Lim \frac{m_2}{\varrho} = \sin\vartheta_1, \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&Lim \frac{m_{n-1}}{\varrho} = \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-2}.
\end{aligned}$$

Auch Beltrami und Lipschitz haben in ihren späteren Abhandlungen[13]) allgemeinere Gleichungen abgeleitet. Von den Formeln, die sie daselbst aufstellen:

$$\partial s^2 = \partial x_0^2 + \Sigma a_{ik} \partial x_i \partial x_k, \quad {i \atop k} = 1, 2, \ldots n-1$$

und

$$\partial s^2 = \partial R^2 + \Sigma m_{ik} \partial\varphi_r \partial\varphi_s, \quad {r \atop s} = 1, 2, \ldots n-1,$$

---

13) *Beltrami, Sulla teorica generale dei parametri differenziali*, S. 17, und Lipschitz, Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist. Borchardt's Journal Bd. 74, S. 146, Gl. 74), in welcher $2(U+H) = 1$ zu setzen ist.

ist aber nur noch ein Schritt bis zu der Formel 76). Dass diese aus der allgemeinen quadratischen Form

$$\partial s = \Sigma a_{ik}\, \partial x_i \partial x_k$$

wirklich abgeleitet werden könne, ergiebt sich aus Beltrami's Theorie des ersten Differentialparameters. Wir erhalten mit Hilfe derselben folgende Transformationsrelationen:

78) $$\Sigma_{ik} \frac{\alpha_{ik}}{a} \frac{\partial \varrho}{\partial x_i} \frac{\partial \varrho}{\partial x_k} = 1 = \Delta_1(\varrho),$$

79) $$\Sigma_{ik} \frac{\alpha_{ik}}{a} \frac{\partial \varrho}{\partial x_i} \frac{\partial \vartheta_r}{\partial x_k} = 0,$$

80) $$\Sigma_{ik} \frac{\alpha_{ik}}{a} \frac{\partial \vartheta_r}{\partial x_i} \frac{\partial \vartheta_r}{\partial x_k} = \frac{1}{m_r^2},$$

81) $$\Sigma_{ik} \frac{\alpha_{ik}}{a} \frac{\partial \vartheta_r}{\partial x_i} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial x_k} = 0,$$

worin

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial a}{\partial a_{ik}}$$

ist. Die partielle Differentialgleichung 78) stellt den ersten Differentialparameter von ϱ in Bezug auf die Form

$$\varphi = \Sigma a_{ik}\, \partial x_i \partial x_k$$

dar. Sie fällt zusammen, wie weiter unten gezeigt werden soll, mit der Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung, welche das System der isoperimetrischen Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{d \dfrac{\partial \varphi}{\partial x'_i}}{dt}, \quad x'_i = \frac{d x_i}{dt}, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

ersetzt, denen die x zu genügen haben, damit das Integral

$$\varrho = \int \sqrt{a_{ik} \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dx_k}{dt}}\, dt$$

ein Minimum wird. Für $n = 2$ hat Gauss in Art. 22 seiner *Disquisitiones circa superficies curvas* unter Voraussetzung der gewöhnlichen Form des Curvenelements einer Fläche

$$\partial s^2 = E\, \partial p^2 + 2F\, \partial p\, \partial q + G\, \partial q^2$$

die betreffenden Transformationsrelationen [s. Gl. 5) und 6)] gegeben. Dieselben sind:

$$EG - F^2 = E\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^2 - 2F\frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial r}{\partial q} + G\left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)^2,$$

$$\left(E\frac{\partial r}{\partial q} - F\frac{\partial r}{\partial p}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \left(F\frac{\partial r}{\partial q} - G\frac{\partial r}{\partial p}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p}.$$

Setzt man hierin $p = p_1$, $q = p_2$, $E = a_{11}$, $F = a_{12} = a_{21}$, $G = a_{22}$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a$, so lassen sich diese Gleichungen übersichtlicher schreiben:

$$\frac{1}{a}\left(a_{22}\left(\frac{\partial r}{\partial p_1}\right)^2 - 2a_{12}\frac{\partial r}{\partial p_1}\frac{\partial r}{\partial p_2} + a_{11}\left(\frac{\partial r}{\partial p_2}\right)^2\right) = 1,$$

$$\frac{1}{a}\left(a_{22}\frac{\partial r}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} - a_{21}\frac{\partial r}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} - a_{12}\frac{\partial r}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + a_{11}\frac{\partial r}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\right) = 0$$

oder, da

$$a_{22} = \alpha_{11}, \quad -a_{21} = \alpha_{12}, \quad -a_{12} = \alpha_{21}, \quad a_{11} = \alpha_{22}$$

ist:

$$\frac{\alpha_{11}}{a}\left(\frac{\partial r}{\partial p_1}\right)^2 + \frac{2\alpha_{12}}{a}\frac{\partial r}{\partial p_1}\frac{\partial r}{\partial p_2} + \frac{\alpha_{22}}{a}\left(\frac{\partial r}{\partial p_2}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{\alpha_{11}}{a}\frac{\partial r}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \frac{\alpha_{12}}{a}\frac{\partial r}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \frac{\alpha_{21}}{a}\frac{\partial r}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \frac{\alpha_{22}}{a}\frac{\partial r}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} = 0,$$

welche bezüglich den Gleichungen 78) und 79) entsprechen. Es ist also zur Vervollständigung noch die dritte Gleichung 80) hinzuzufügen:

$$\frac{\alpha_{11}}{a}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\right)^2 + \frac{2\alpha_{12}}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \frac{\alpha_{22}}{a}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\right)^2 = \frac{1}{m^2}$$

oder in der Gauss'schen Bezeichnungsweise

$$\frac{EG - F^2}{m^2} = E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial q} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)^2.$$

Sie dient zur Bestimmung der Function m. Die vierte Gleichung 81) kommt für $n = 2$ in Wegfall.

Eine ausführlichere Ableitung der Gleichung 78) soll am Schlusse der Abhandlung gegeben werden, nachdem zuvor die Zulässigkeit der Form, unter welcher Beltrami im Anschluss an Riemann's Abhandlung das Linearelement einer Mannigfaltigkeit von constanter negativer Krümmung und die Berechtigung der damit im Zusammenhang stehenden Nicht-Euklidischen Geometrie des Raumes geprüft worden ist.

(Schluss folgt.)

Berichtigungen im vorhergehenden Theile der Abhandlung.

Seite 432	Zeile 12	von oben	statt	$+\frac{\partial a_{ik}}{\partial p_1}$	ist zu lesen		$-\frac{\partial a_{ik}}{\partial p_n}$,
„ 436	„ 3	„ „	„	$\frac{\partial h}{\partial x_l} = \frac{x}{2}x_l$	„ „	„	$\frac{\partial h}{\partial x_l} = \frac{\alpha}{2}x_l$,
„ 438	„ 11	„ unten	„	$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x_l^2}$	„ „	„	$\frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x_l^2\right)^2}$,
„ 443	„ 1	„ oben	„	$G_4 = \psi$	„ „	„	$G_4 = -\frac{1}{2}\psi$,
„ 443	„ 13	„ „	„	A_{22}	„ „	„	A_{12},
„ 444	„ 10	„ unten	„	ψ	„ „	„	$-\frac{1}{2}\psi$.

XVII.

Axonometrische Theorie der perspectivischen und projectivischen Collineation im Raume.

Von

Prof. Dr. GUIDO HAUCK

in Tübingen.

(Fortsetzung zu V, Heft 2.)

(Hierzu Taf. VIII, Fig. 1—5.)

Die folgenden Ausführungen schliessen sich direct an den Aufsatz: „Grundzüge einer allgemeinen axonometrischen Theorie der darstellenden Perspective" im 2. Hefte des gegenwärtigen Jahrgangs dieser Zeitschrift (S. 81 flgg.) an. Sie übertragen die dort gewonnenen Resultate auf die räumliche Projection und geben damit die Grundzüge einer axonometrischen Theorie der Reliefperspective und der collinearen Verwandtschaft räumlicher Systeme. Die Leichtigkeit, mit welcher diese Uebertragung von Statten geht, oder umgekehrt die Einfachheit der Specialisirungen, durch welche die Theorie der Planperspective aus derjenigen der centrischen Collineation und diese aus der Theorie der projectivischen Collineation fliesst, dürfte ein Zeugniss für die Brauchbarkeit der Methode sein. Sie ist eben durch das axonometrische Princip bedingt, nach welchem die Bildfigur auf dasjenige Coordinatensystem bezogen wird, welches die Abbildung des Coordinatensystems der Originalfigur repräsentirt. Bei Untersuchungen über collineare Verwandtschaft wird das Bildcoordinatensystem häufig beliebig angenommen, insofern dieselbe dargestellt wird durch drei lineare Relationen der allgemeinsten Form zwischen den Coordinaten zweier entsprechender Punkte. Den Connex zwischen dieser Darstellungsweise und unserer axonometrischen Methode stellen die §§ 13 und 14 her. Dabei wird beiläufig die collineare Abbildung eines Ellipsoids, namentlich seine Abbildung als Kugelfläche, besprochen. — § 12 giebt ein einfaches Criterium dafür, dass eine durch fünf Paare entsprechender Punkte gegebene Collineation eine centrische sei, und lehrt ein einfaches praktisches Verfahren, zwei solche Systeme in perspectivische Lage überzuführen, was jederzeit auf doppelte Weise (directe und inverse Lage) geschehen kann. — Der

Unterschied zwischen gleichstimmiger und ungleichstimmiger Collineation wird durch die in den §§ 9, 12 und 14 enthaltenen Bemerkungen ins richtige Licht gesetzt. — § 15 bespricht die in der allgemeinen Theorie mit inbegriffene Collineation ebener Systeme. — Schliesslich wirft § 16 ein interessantes Licht auf die ganze Theorie, indem er die axonometrischen Coordinaten mit den Chasles'schen und projectivischen Coordinaten in Beziehung setzt.

§ 8.

Allgemeine Sätze über Collineation.

Es erscheint zweckmässig, die Fundamentalsätze über Collineation im Raume, auf die wir uns im Folgenden beziehen werden, als Einleitung vorauszuschicken.*

Zwei räumliche Systeme heissen projectivisch collinear, wenn sie so aufeinander bezogen sind, dass jedem Punkte des einen Systems ein und nur ein Punkt des andern Systems entspricht und dass solchen Punkten des einen Systems, die in gerader Linie liegen, stets solche Punkte des andern Systems entsprechen, die ebenfalls in gerader Linie liegen. Alsdann entspricht auch jeder Ebene wieder eine Ebene, jeder Fläche n^{ter} Ordnung wieder eine Fläche n^{ter} Ordnung.

Existiren in zwei collinearen räumlichen Systemen zwei einander entsprechende congruente Strahlenbündel, so liegt der Specialfall der centrischen oder perspectivischen Collineation vor. Man kann nämlich zwei solche Systeme in perspectivische Lage überführen, indem man jene zwei Strahlenbündel zur Coincidenz bringt. Zwei centrisch collineare Systeme in perspectivischer Lage haben ausser ihrem gemeinschaftlichen Strahlenbündel, dessen Centrum wir Collineationscentrum nennen, auch noch sämmtliche Punkte einer Ebene entsprechend gemein, welche wir die Collineationsebene nennen. Je zwei entsprechende Gerade beider Systeme müssen sich in einem Punkte der Collineationsebene schneiden, den wir die Spur der Geraden nennen.

Von zwei perspectivisch collinearen Figuren kann jede als die Reliefabbildung der andern angesehen werden. Denn die Eindrücke, welche

* Als wichtigste Originalarbeiten über Collineation im Raume vergleiche man: Möbius, Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827, S. 301 flgg. — *Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures.* Neue Ausgabe, *Paris 1865, Tome I,* S. 357 flgg. — Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes, Berlin 1837, S. 72 flgg. — Richelot, Ueber die einfachste Correlation in zwei räumlichen Gebieten, Crelle's Journal Bd. 70, S. 137 flgg. — Mägis, Ueber die allgemeinste eindeutige Correlation zweier räumlicher Gebilde, Königsberg 1868. — *Stephen Smith, On the Focal Properties of Homographic Figures, Procedings of the London Mathematical Society, Vol. II, 1869*, S. 196 flgg.

beide einem im Collineationscentrum befindlichen Auge machen, sind identisch. Mit Rücksicht hierauf fassen wir von zwei collinearen Figuren die eine als Original- oder Objectfigur, die andere als Bildfigur auf,* wobei jedoch ausdrücklich constatirt werden möge, dass es vollständig gleichgiltig ist, welche Figur als Original und welche als Bild genommen wird, und dass ein Tausch zwischen Original und Bild jederzeit vorgenommen werden kann.

Diejenigen Punkte des Bildsystems, welche den unendlich entfernten Punkten des Originalsystems entsprechen, nennen wir **Fluchtpunkte**. Dieselben liegen alle in einer Ebene, welche wir die **Fluchtebene** nennen und welche das Bild der unendlich fernen Ebene des Originalsystems repräsentirt. Alle Punkte des Originalsystems, welche den unendlich fernen Punkten des Bildsystems entsprechen, nennen wir **Gegenpunkte**; sie liegen alle in einer Ebene, der **Gegenebene**,** welche der unendlich fernen Ebene des Bildsystems entspricht. Fluchtebene und Gegenebene sind beide der Collineationsebene parallel (denn die Schnittlinie der Fluchtebene mit der Collineationsebene ist der Fluchtebene und der unendlich fernen Ebene des Originalsystems entsprechend gemein, liegt also im Unendlichen).

Zu einer gegebenen Originalfigur ist die Bildfigur vollständig und eindeutig bestimmt, wenn die Lage des Collineationscentrums oder Auges, der Collineationsebene und der Fluchtebene in Beziehung zur Originalfigur gegeben ist. Man kann alsdann das Bild μ irgend einer Geraden m der Originalfigur auf folgende Weise finden: Construire (Taf. VIII, Fig. 1) die Spur M der Geraden m als Schnittpunkt derselben mit der Collineationsebene. Construire den Fluchtpunkt F als Schnittpunkt der Fluchtebene mit einer durch das Auge A zur Geraden m gelegten Parallelen. Dann ist MF das Bild μ.

Zieht man durch das Auge A eine Parallele zu μ, so schneidet diese die gegebene Gerade m in deren Gegenpunkt G. Da nun die vier Punkte $AFMG$ die Ecken eines Parallelogramms bilden, so folgt: Der Abstand des Auges von der Gegenebene ist gleich dem Abstande der Collineationsebene von der Fluchtebene.

§ 9.

Axonometrische Behandlung der Reliefperspective.

Gegeben sei irgend ein räumliches Object durch die auf ein rechtwinkliges Axencoordinatensystem O, xyz bezogenen Coordinaten seiner Punkte. Wir stellen uns die Aufgabe, dessen reliefperspectivisches Bild

---

* Wir übertragen diese Determination auch auf projectivisch collineare Systeme.

** Vergl. S. 83 Anmerkung.

zu construiren, wenn die relative Lage von Auge, Collineationsebene und Fluchtebene gegen das Objectcoordinatensystem gegeben ist. Wir lösen diese Aufgabe wieder dadurch, dass wir zunächst das Bild der drei Coordinatenaxen und dann für jeden einzelnen Objectpunkt das Bild seines projicirenden Parallelepipedons construiren.

Das Bild der drei Coordinatenaxen sei der räumliche Dreistrahl $\Omega, \xi\eta\zeta$ (Heft 2, Taf. II, Fig. 1).* Derselbe ist bestimmt durch die drei scheinbaren Axenwinkel, die wir wieder mit w_{12}, w_{23}, w_{31} bezeichnen, wobei aber nun

67) $$w_{12} + w_{23} + w_{31} < 360^0.$$

Im Uebrigen gelten die Ausführungen des § 1 Wort für Wort auch für die Reliefperspective. Wir haben wieder die Reductionsformeln:

I. 68) $$\xi = \frac{f_1 x}{x - g_1}, \quad \eta = \frac{f_2 y}{y - g_2}, \quad \zeta = \frac{f_3 z}{z - g_3},$$

wo f_i und g_i wieder die Abscissen der Fluchtpunkte und Gegenpunkte repräsentiren.

Ebenso behalten die in § 3 besprochenen graphischen Methoden der Coordinatenreduction, sowie die Constructionen am scheinbaren Axensystem, durch welche das Bild eines Punktes aus seinen reducirten Coordinaten erhalten wird, in der Reliefperspective ihre volle Giltigkeit. Nur sind jetzt Taf. II, Fig. 1b und Fig. 2 als planperspectivische Abbildungen der in Wirklichkeit räumlichen Figuren anzusehen.

Die Aufgabe kommt somit wieder darauf hinaus, die neun Grundconstanten w_{ik}, f_i und g_i auszudrücken als Functionen der Orientirungsconstanten.

Die auf das Objectcoordinatensystem bezogenen Coordinaten des Auges seien a_1, a_2, a_3; die Axenabschnitte der Collineationsebene seien m_1, m_2, m_3, und die Axenabschnitte der mit ihr parallelen Fluchtebene qm_1, qm_2, qm_3. Wir haben also die sieben Orientirungsconstanten a_1, a_2, a_3, m_1, m_2, m_3, q.

Die drei Coordinatenaxen (Taf. VIII, Fig. 2a) mögen von der Collineationsebene in den Punkten M_1, M_2, M_3, von der Fluchtebene in den Punkten N_1, N_2, N_3, von der Gegenebene in den Punkten G_1, G_2, G_3 und von einer durch das Auge zu diesen drei Ebenen gelegten Parallelebene in den Punkten H_1, H_2, H_3 geschnitten werden. Dem am Schlusse von § 8 citirten Satze zufolge ist nun

69) $$H_i G_i = N_i M_i = m_i - q m_i.$$

Diese Bemerkung liefert uns die Mittel zur Berechnung der drei Gegenstrecken g_1, g_2, g_3. Die Gleichung der durch A gelegten Parallelebene ist zunächst:

* Auf Taf. II im 2. Hefte sind die Punkte O und Ω mit o und ω bezeichnet.

70) $$\frac{x}{m_1} + \frac{y}{m_2} + \frac{z}{m_3} = \frac{a_1}{m_1} + \frac{a_2}{m_2} + \frac{a_3}{m_3}.$$

Deren Axenabschnitte sind:

71) $$O_i H_i = m_i \left(\frac{a_1}{m_1} + \frac{a_2}{m_2} + \frac{a_3}{m_3}\right),$$

und hieraus folgt für die drei Axenabschnitte der Gegenebene oder die drei Gegenstrecken:

72) $$g_i = O_i H_i + H_i G_i = m_i \left(\frac{a_1}{m_1} + \frac{a_2}{m_2} + \frac{a_3}{m_3} + 1 - q\right).$$

Führt man also die Bezeichnung ein

II. 73) $$\varkappa = \frac{a_1}{m_1} + \frac{a_2}{m_2} + \frac{a_3}{m_3} + 1 - q,$$

so hat man für g_i die Werthe:

IV. 74) $$g_i = \varkappa m_i.$$

Die geometrische Bedeutung der Hilfsgrösse $\varkappa$ ist dieselbe wie bei der Planperspective:

75) $$\varkappa = \frac{r}{r - \varrho},$$

wenn nämlich wieder AO mit r und $A\Omega$ mit ϱ bezeichnet wird.

Um die übrigen Grundconstanten zu bestimmen, sind die Schlussfolgerungen genau dieselben wie bei der Planperspective. Die Coordinaten von Ω sind $\frac{a_1}{\varkappa}$, $\frac{a_2}{\varkappa}$, $\frac{a_3}{\varkappa}$, woraus sich für die Strecken ΩM_i die Werthe ergeben:

III. 76) $$\mu_i^2 = m_i^2 - 2\frac{m_i a_i}{\varkappa} + \frac{r^2}{\varkappa^2}.$$

Hierauf folgt aus der Bemerkung, dass die Punkte M_1, M_2, M_3 den Coordinatenaxen und deren Bildern entsprechend gemein sind:

V. 77) $$f_i = (1 - \varkappa)\mu_i,$$

und schliesslich ergiebt sich aus den drei Dreiecken $M_i \Omega M_k$:

VI. 78) $$\cos w_{ik} = \frac{\mu_i^2 + \mu_k^2 - m_i^2 - m_k^2}{2\mu_i \mu_k}.$$

Wir sehen also, dass für die Reliefperspective genau dieselben Formeln gelten, wie für die Planperspective. Nur die Hilfsgrösse $\varkappa$ hat einen etwas andern Werth. — Hat q den Werth 1, so fällt die Fluchtebene mit der Collineationsebene zusammen, und die Reliefperspective wird zur Planperspective.

Durch die drei Axenwinkel w_{12}, w_{23}, w_{31} ist das Bildcoordinatensystem nicht vollständig bestimmt, insofern aus denselben zweierlei Axensysteme construirt werden können, die zu einander symmetrisch sind. Das eine ist mit dem Objectcoordinatensystem gleichstimmig, das andere ungleichstimmig. Zur Entscheidung über die Wahl zwischen diesen zwei Formen wird uns folgende Betrachtung die Mittel liefern:

Wir haben im Vorangehenden — entsprechend Taf. VIII, Fig. 2a — stillschweigend angenommen, Collineationscentrum und Collineationsebene liegen zwischen Gegenebene und Fluchtebene, d. h. es sei $q < 1$. Man überzeugt sich jedoch leicht — vergl. hierzu Taf. VIII, Fig. 3a —, dass unsere Formeln auch für den Fall gelten, wo $q > 1$ ist. Zwischen diesen zwei Fällen besteht folgender charakteristische Unterschied:

Liegen Collineationscentrum und Collineationsebene zwischen Gegenebene und Fluchtebene, so liegt jeder Punkt der Originalfigur mit seinem Bilde auf einer und derselben Seite der Collineationsebene. Hieraus folgt, dass jeder Dreistrahl der Originalfigur mit seinem Bilde gleichstimmig ist. (Denn sind S_1, S_2, S_3 die Spuren der drei Strahlen, P und Π die zwei Scheitel, so liegen die Spitzen P und Π der zwei Pyramiden $S_1 S_2 S_3 P$ und $S_1 S_2 S_3 \Pi$ auf einer und derselben Seite der gemeinschaftlichen Grundfläche.) Liegen dagegen Fluchtebene und Gegenebene zwischen Collineationscentrum und Collineationsebene, so liegen irgend zwei entsprechende Punkte auf entgegengesetzten Seiten der Collineationsebene, und hieraus folgt, dass jeder Dreistrahl der Originalfigur mit seinem Bilde ungleichstimmig ist.

Wir nennen im ersten Falle die collineare Verwandtschaft zwischen beiden Figuren eine gleichstimmige, im zweiten Falle eine ungleichstimmige.*

Aus dem Gesagten geht nun für die Construction des Bildcoordinatensystems folgende Regel hervor:

Das Bildcoordinatensystem ist gleichstimmig oder ungleichstimmig mit dem Objectcoordinatensystem zu construiren, je nachdem $q \lessgtr 1$ ist.

Eliminirt man aus den obigen Gleichungen die sieben Orientirungsconstanten, so bleiben noch zwei Beziehungen zwischen den neun Grundconstanten. Es sind dies die aus den drei Gleichungen

$$\text{VIII. 79)} \qquad \lambda^2 (g_i^2 + g_k^2) = f_i^2 + f_k^2 - 2 f_i f_k \cos w_{ik}$$

durch Elimination von λ^2 folgenden.

Diese Gleichungen sprechen die Aehnlichkeit des Fluchtpunktendreiecks und des Gegenpunktendreiecks aus, wie dies bei

---

* In der Reliefsculptur und der decorativen Kunst findet nur die gleichstimmige centrische Collineation Verwerthung. — Als wichtigster Specialfall der ungleichstimmigen centrischen Collineation ist die involutorische Collineation zu nennen mit $q = \varkappa$.

der Planperspective näher erörtert wurde. Alle hieraus gezogenen Folgerungen gelten also auch für die Reliefperspective. Namentlich erinnern wir an die zwei graphischen Bestimmungen eines Grundconstantensystems (s. Heft 2, S. 91 und 92). Es tritt bei diesen Constructionen nur die eine Aenderung ein, dass Punkt ω nunmehr ausserhalb der Ebene des Fluchtpunktendreiecks anzunehmen ist.

Soll ein Grundconstantensystem mittelst Rechnung aufgestellt werden, so dürfen sieben Grundconstanten willkürlich gewählt werden. Man wählt entweder f_1, f_2, f_3, w_{12}, w_{23}, w_{31}, λ willkürlich und hat dann zur Bestimmung von g_1, g_2, g_3 die Gleichungen 23) oder 24), oder man wählt f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, λ willkürlich und hat zur Bestimmung von w_{12}, w_{23}, w_{31} die Gleichungen 29).

Jedem Werthsysteme der Grundconstanten entsprechen zwei Bildsysteme, — ein mit dem Originalsystem gleichstimmiges und ein mit ihm ungleichstimmiges.

Bezeichnet man wieder den Fusspunkt der vom Auge auf die Ebene des Fluchtpunktendreiecks gefällten Senkrechten als Hauptpunkt und die Länge dieser Senkrechten als Augdistanz, so gilt Alles, was in der Planperspective (vergl. Heft 2, S. 94) über Hauptpunkt und Augdistanz gesagt wurde, auch für die Reliefperspective. Auch die Formeln XIX) und XX) behalten ihre Giltigkeit.

§ 10.

Malerische Perspective. — Bemerkungen über optische Wirkung.

Unter den Specialfällen verdient in erster Linie die malerische Perspective und deren Unterfall: die Cavalierperspective, Beachtung.

Was in § 6 hierüber bemerkt ist, behält in der Reliefperspective seine volle Giltigkeit. Namentlich beachte man die zwei Gleichungen 40) und 41) und die graphische Bestimmung eines malerisch-perspectivischen Grundconstantensystems (Heft 2, Taf. II, Fig. 7). Bei letzterer tritt nur die eine Aenderung ein, dass die auf einander senkrecht stehenden Geraden $F_1 F_2$ und $\omega\zeta$ nunmehr windschief sind. Taf II, Fig. 7 ist jetzt als planperspectivische Abbildung der in Wirklichkeit räumlichen Figur zu betrachten. — Bei der Cavalierperspective ist $w_{23} = 90^0$, die Wahl der übrigen Grundconstanten w_{12}, w_{31}, f_1, g_1, p ist vollständig willkürlich.

In der Kunst wird zu reliefperspectivischen Constructionen fast ausschliesslich die malerische Perspective verwendet; namentlich ist es die Cavalierperspective, welche die *in praxi* gebräuchlichsten Constructionsmethoden*

* Man vergl. hierüber: *Poudra, Traité de perspective-relief, Paris* 1862.

liefert. Ich glaube jedoch, dass auch eine schiefe Annahme der Collineationsebene in gewissen Fällen ihre volle Berechtigung hat. Die physiologische Seite der Frage, inwieweit die Annahme einer verticalen Stellung der Bildebene oder Collineationsebene in der Planperspective oder Reliefperspective nothwendig oder zweckmässig ist, wird nicht selten mit einer gewissen Leichtfertigkeit behandelt, und scheint mir daher ein genaueres Eingehen auf diesen Punkt — wenn auch von unserem eigentlichen Thema etwas abliegend — doch nicht überflüssig zu sein.

Der Grund dafür, dass im Allgemeinen die malerische Perspective unter allen Perspectivarten die naturgetreuesten Bilder liefert, liegt in dem Umstande, dass nur bei ihr verticale Linien sich als Parallelen darstellen, was mit unserer Gewohnheit, von verticalen Geraden einen parallelen Eindruck zu erhalten, harmonirt. Diese Gewohnheit aber findet ihre physiologische Erklärung in Folgendem: Hat die optische Axe des Auges beim Betrachten eines Objects eine horizontale Lage, so hat das Flächenelement der Netzhaut (gelber Fleck), auf welches das von den brechenden Medien des Auges entworfene Bildchen fällt, eine verticale Stellung. In diesem Falle ist also jenes inverse Bildchen ein malerisch-perspectivisches, in welchem alle *in natura* verticalen Linien sich als Parallelen abbilden; in diesem — aber nur in diesem — Falle kommen uns daher jene Linien als parallel zum Bewusstsein. Die genannte Stellung des Auges ist nun bei aufrechter Haltung des Kopfes die natürliche und deshalb gewöhnliche, und daher rührt es, dass unserem Auge verticale Linien allerdings für gewöhnlich einen parallelen Eindruck machen. Der parallele Eindruck hört jedoch auf, sobald wir mit schiefgestellter Augenaxe — von unten hinauf oder von oben herab — beobachten. Es entstehen in solchem Falle Netzhautbildchen, ähnlich jenen unnatürlichen Photographien architektonischer Objecte, die mit geneigter *Camera obscura* aufgenommen wurden.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass bei der malerischen Perspective der Augpunkt so angenommen werden muss, dass von ihm aus das vertical aufgestellte Bild oder Relief mit horizontal gestellter Augenaxe bequem betrachtet werden kann. Diese Regel wird auch im Allgemeinen immer befolgt. Nur bei Abbildungen aus der Vogel- oder Froschperspective wird die Einhaltung derselben unmöglich, und es wird daher für solche die Bildebene häufig mit Vortheil geneigt angenommen. — Reliefabbildungen aus der Vogelperspective sind nun zwar äusserst selten, wohl aber treten solche aus der Froschperspective häufig auf, z. B. in den Fries-, Gibelfeld- und Deckenreliefs, und für diese dürfte sich daher aus den angeführten Gründen unter Umständen eine schiefe Annahme der Collineationsebene empfehlen. Da bei einem Relief dieses Genres noch der weitere günstige Umstand hinzukommt, dass der Standpunkt des Beschauers nicht willkürlich, sondern fast immer genau vorgezeigt ist, so glaube ich, dass, wenn bei der Construction eines solchen Reliefs jener Punkt als Augpunkt und die Collineationsebene senkrecht zur Augenaxe des Beschauers gewählt würde, man überraschende Effecte erzielen könnte.*

§ 11.
Schiefwinkliges Objectcoordinatensystem.

Unseren seitherigen Betrachtungen haben wir stets ein rechtwinkliges Objectcoordinatensystem zu Grunde gelegt. Es ist jedoch nothwendig, unsere Untersuchungen für ein schiefwinkliges System zu erweitern. Im Wesentlichen ändert sich hierbei Nichts, nur die Formeln III), VI) und VIII) erleiden einige Modificationen.

Sind u_{12}, u_{23}, u_{31} die von den drei Coordinatenaxen eingeschlossenen Winkel, so erhalten die genannten Gleichungen folgende Gestalt:

$$\text{III}^0.\ 80)\quad \mu_i^2 = m_i^2 - 2\frac{m_i a_i}{\varkappa} + \frac{r^2}{\varkappa^2} - 2\frac{m_i}{\varkappa}(a_k \cos u_{ik} + a_l \cos u_{li}),$$

$$\text{VI}^0.\ 81)\quad \cos w_{ik} = \frac{\mu_i^2 + \mu_k^2 - m_i^2 - m_k^2 + 2 m_i m_k \cos u_{ik}}{2\mu_i \mu_k},$$

$$\text{VIII}^0.\ 82)\quad \lambda^2(g_i^2 + g_k^2 - 2 g_i g_k \cos u_{ik}) = f_i^2 + f_k^2 - 2 f_i f_k \cos w_{ik}.$$

Der letzten Gleichung zufolge gilt auch bei Zugrundelegung eines schiefwinkligen Coördinatensystems der Satz: „Fluchtpunktendreieck und Gegenpunktendreieck sind ähnlich.“ Dagegen kommt der Satz, dass die Winkel dieser Dreiecke alle spitz sein müssen (vergl. S. 91), nunmehr in Wegfall.

§ 12.
Projectivische Collineation.

Die Aehnlichkeit von Fluchtpunktendreieck und Gegenpunktendreieck ist das charakteristische Merkmal der perspectivischen Collineation. Ohne diese Aehnlichkeit haben wir den allgemeinen Fall der projectivischen Collineation.

Wählt man also die Grössen u_{12}, u_{23}, u_{31}; g_1, g_2, g_3 und w_{12}, w_{23}, w_{31}, f_1, f_2, f_3 vollkommen willkürlich und bezieht irgend eine Originalfigur auf das Cartesische Coordinatensystem mit den Axenwinkeln u_{ik}, construirt sodann zu diesem eine Bildfigur mit Zugrundelegung von w_{ik} als scheinbaren Axenwinkeln, f_i als Fluchtstrecken und g_i als Gegen-

* Wenn Herr Poudra in dem oben citirten Werke (S. 91) vorschlägt, bei Gibelfeldern die Horizontebene schief aufsteigend anzunehmen und dem Relief bei der Aufstellung eine leichte Neigung nach vorn zu geben, so muss ich diesem Vorschlage meine Zustimmung entschieden versagen, wiewohl ich glaube, dass ihn bei demselben ähnliche Gedanken wie die oben ausgesprochenen geleitet haben.

strecken, so ist die Bildfigur mit der Originalfigur projectivisch collinear, und zwar gleichstimmig oder ungleichstimmig collinear, je nachdem das Bildcoordinatensystem mit dem Originalcoordinatensystem gleichstimmig oder ungleichstimmig construirt wird.* Man kann sich dann umgekehrt die Bildfigur als ursprünglich denken, indem man sie auf das Cartesische Coordinatensystem mit den Axenwinkeln w_{ik} bezieht und die frühere Originalfigur aus ihr dadurch entstehen lässt, dass man u_{ik} als scheinbare Axenwinkel, g_i als Fluchtstrecken und f_i als Gegenstrecken nimmt.

Statt die collineare Beziehung zweier räumlicher Systeme durch die willkürliche Annahme der Grundconstanten zu bestimmen, kann die Bestimmung auch dadurch geschehen, dass fünf beliebig gewählten Punkten des einen Systems, von denen keine vier in einer Ebene liegen, irgend fünf Punkte des andern Systems, von denen ebenfalls keine vier in einer Ebene liegen, als entsprechende zugewiesen werden.

Wir stellen uns dementsprechend die Aufgabe: Wenn fünf Paare entsprechender Punkte einer Collineation gegeben sind, 1. zu jedem sechsten Punkte des einen Systems den entsprechenden des andern Systems zu construiren; 2. die Beziehung aufzufinden, die zwischen den zwei gegebenen Punktsystemen stattfinden muss, damit die Collineation eine concentrische sei; 3. vorausgesetzt, dass diese Beziehung stattfindet: die zwei Punktsysteme in perspectivische Lage überzuführen.

Zum Behuf der Lösung dieser Aufgaben müssen wir unsere axonometrischen Anschauungen von den seitherigen perspectivischen Fesseln befreien. Was wir bisher nur als reliefperspectivische Abbildung eines Cartesischen Coordinatensystems betrachtet haben, stellen wir nunmehr unabhängig von jenem als eine neue Art von Coordinatensystem auf. Wir führen hierfür den Namen „axonometrisches Coordinatensystem." ein. Die Namen: Coordinatenursprung, Coordinatenaxen, Axenwinkel, erklären sich selbst. Statt des Namens „Fluchtpunkte" führen wir den Namen „Knotenpunkte" ein und nennen deren Abscissen „Axenlängen". Den Namen „Fluchtpunkte" reserviren wir ausschliesslich für die Bilder von unendlich fernen Punkten und verwenden nur in bestimmten Fällen Fluchtpunkte als Knotenpunkte. — Soll irgend ein Punkt E auf ein axonometrisches Coordinatensystem, dessen Ursprung O und dessen Knotenpunkte K_1, K_2, K_3 sind (Taf. VIII, Fig. 4), bezogen werden, so zieht man $K_3 E$, welche die Ebene $K_1 O K_2$ schneidet in e, zieht Oe, welche die Linie $K_1 K_2$ schneidet in D, zieht endlich $K_2 e$, $K_1 e$ und DE, welche die drei Axen schneiden in den Punkten E_1, E_2

* Dass der zunächst nur für die centrische Collineation (s. § 9) nachgewiesene Satz: „In zwei collinearen Gebilden sind entsprechende Dreistrahlen entweder sämmtlich gleichstimmig oder sämmtlich ungleichstimmig", auch für die projectivische Collineation gilt, beweist sich aus dem am Schlusse dieses Paragraphen erwähnten Satze.

und E_3. Wir nennen diese letzteren Punkte die „Coordinatenpunkte“ und ihre Entfernungen von O die „axonometrischen Coordinaten“ des Punktes E.

Diese Construction lässt sich auch in folgender Form aussprechen: Um irgend einen Punkt E auf das axonometrische Coordinatensystem $O, K_1 K_2 K_3$ zu beziehen, legt man durch je zwei Knotenpunkte $K_i K_k$ und den Punkt E eine Ebene, welche die dritte Axe in dem Coordinatenpunkte E_l schneidet.

Wie umgekehrt ein Punkt im Raume aus seinen axonometrischen Coordinaten construirt wird, bedarf keiner weitern Erklärung.

Das Cartesische Coordinatensystem ist ein specieller Fall des axonometrischen: die Knotenpunkte sind die unendlich fernen Punkte der Axen.

Zwei axonometrische Coordinatensysteme mit gemeinschaftlichen Axen, aber verschiedenen Knotenpunkten nennen wir conaxial. Zu jedem axonometrischen Coordinatensystem existirt also ein conaxiales Cartesisches.

Es seien nun (Taf. VIII, Fig. 4) $O K_1 K_2 K_3 E$ fünf Punkte des einen von zwei collinearen Systemen, $\Omega K_1 K_2 K_3 E$ die ihnen entsprechenden Punkte des andern. Es soll zu irgend einem sechsten Punkte P des ersten Systems der entsprechende Punkt Π des zweiten Systems construirt werden.

Wir wählen irgend einen der fünf Punkte des ersten Systems, z. B. O, als Ursprung, drei andere, z. B. $K_1 K_2 K_3$, als Knotenpunkte eines axonometrischen Coordinatensystems, auf das wir den fünften Punkt E nach der oben besprochenen Procedur beziehen. Mit den fünf Punkten $\Omega K_1 K_2 K_3 E$ verfahren wir genau ebenso. Sind alsdann $E_1 E_2 E_3$ und $E_1 E_2 E_3$ die Coordinatenpunkte der Punkte E und E, so sind durch die Punkte $O E_i K_i$ und $\Omega E_i K_i$ auf je zwei entsprechenden Axen zwei projectivische Punktreihen bestimmt. Um nun zu Punkt P des ersten Systems den entsprechenden Punkt Π des zweiten Systems zu construiren, beziehen wir Punkt P auf das lateinische Coordinatensystem, suchen zu seinen Coordinatenpunkten $P_1 P_2 P_3$ die entsprechenden Punkte $\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3$ der drei griechischen Punktreihen* und construiren aus ihnen als Coordinatenpunkten den Punkt Π.**

Bei Anwendung dieser Construction auf eine grössere Anzahl von Punkten ist es häufig von Vortheil, die zwei Coordinatensysteme conaxial

* Man bringt zu dem Ende die zwei Punktreihen $O E_i K_i$ und $\Omega E_i K_i$ in perspectivische Lage, indem man sie so legt, dass die Punkte O und Ω zusammenfallen (vergl. § 3).

** Diese Construction ist übereinstimmend mit der schon von Möbius gegebenen; vergl. Möbius, Bar. Calcul, S. 329. Dagegen dürften die folgenden Constructionen neu sein.

zu ändern, in der Art, dass statt der Punkte $K_1 K_2 K_3$ und $K_1 K_2 K_3$ die Coordinatenpunkte irgend zweier anderer entsprechender Punkte als Knotenpunkte gewählt werden. Es können namentlich die den unendlich fernen Punkten der drei griechischen Punktreihen entsprechenden Punkte $G_1 G_2 G_3$ construirt und diese als Knotenpunkte des lateinischen Coordinatensystems benützt werden; alsdann bestimmen sich die Punkte des griechischen Systems durch Cartesische Coordinaten. Oder man kann umgekehrt die Punkte des lateinischen Systems durch Cartesische Coordinaten bestimmen und hat dann als Knotenpunkte im griechischen System die den unendlich fernen Punkten der lateinischen Axen entsprechenden Punkte $F_1 F_2 F_3$ zu nehmen.

Ueberhaupt empfiehlt es sich, die Punkte $G_1 G_2 G_3$ und $F_1 F_2 F_3$ gleich zu Anfang zu construiren,* indem sie die beste Auskunft über die Natur der collinearen Beziehung ertheilen. So ergiebt sich z. B. als Lösung der zweiten oben formulirten Aufgabe aus dem Vorangehenden unmittelbar der Satz:

Die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass die durch die zwei Punktsysteme bestimmte Collineation eine centrische sei, besteht darin, dass die zwei Dreiecke $G_1 G_2 G_3$ und $F_1 F_2 F_3$ ähnlich sind.

Trifft dieses Criterium zu, so können die zwei Systeme durch folgende praktische Construction in perspectivische Lage gebracht werden (Taf. VIII, Fig. 2):

Errichte über dem Dreieck $G_1 G_2 G_3$ als Basis eine mit $F_1 F_2 F_3 \Omega$ ähnliche Pyramide $G_1 G_2 G_3 A$, und über dem Dreieck $F_1 F_2 F_3$ als Basis eine mit $G_1 G_2 G_3 O$ ähnliche Pyramide $F_1 F_2 F_3 A'$. Lege die zwei hierdurch entstandenen ähnlichen Gebilde (Doppelpyramiden) $G_1 G_2 G_3 O A$ und $F_1 F_2 F_3 A' \Omega$ so, dass die homologen Kanten parallel sind und dass die zwei Punkte A und A' in einen Punkt A zusammenfallen. Alsdann liegen beide Systeme perspectivisch und haben Punkt A als Collineationscentrum.

Man kann die zwei Doppelpyramiden in zwei verschiedenen Formen construiren: bei der einen liegen die beiden Spitzen auf der nämlichen Seite der Grundfläche, bei der andern auf entgegengesetzten Seiten. Bei der einen Form sind die zwei Doppelpyramiden direct ähnlich und wer-

* Dies wird am zweckmässigsten auf graphischem Wege geschehen. Uebrigens bestimmen sich die Fluchtstrecken und Gegenstrecken auch leicht durch Rechnung: Sind k_i und $\varkappa_i$ die Abscissen der Punkte K_i und K_i, ferner e_i und ε_i die axonometrischen Coordinaten der zwei Punkte E und E, so erhält man mittelst der Formeln I):

83) $$f_i = \frac{\varkappa_i \varepsilon_i (k_i - e_i)}{k_i \varepsilon_i - \varkappa_i e_i}, \quad g_i = \frac{k_i e_i (\varkappa_i - \varepsilon_i)}{\varkappa_i e_i - k_i \varepsilon_i}.$$

den also in direct ähnliche Lage gebracht (Fig. 2b), bei der andern Form sind sie invers ähnlich und werden in invers ähnliche Lage gebracht (Fig. 2a). Zwei centrisch collineare räumliche Systeme können demnach jederzeit auf zwei verschiedene Arten in perspectivische Lage übergeführt werden. Da bei der Lage a) je zwei entsprechende Punkte der zwei Systeme auf der nämlichen —, bei der Lage b) auf verschiedenen Seiten vom Collineationscentrum liegen, so ist die Lage a) (bei welcher die zwei Doppelpyramiden invers ähnlich sind) als directe —, die Lage b) (bei welcher die zwei Doppelpyramiden direct ähnlich sind) als inverse zu bezeichnen.*

Fig. 2a und 2b zeigt die zwei Lagen für den Fall, dass diejenigen zwei Doppelpyramiden, bei welchen die Spitzen auf der nämlichen Seite der Grundfläche liegen, invers ähnlich sind; Fig. 3a und 3b zeigt die zwei Lagen für den Fall, dass diese zwei Formen direct ähnlich sind. Im Falle der Fig. 2 ist die Collineation eine gleichstimmige, im Falle der Fig. 3 eine ungleichstimmige.

Der Beweis für die Richtigkeit unserer Construction für beide Lagen in beiden Fällen beruht darauf, dass von den zwei projectivischen Punktreihen auf je zwei entsprechenden Axen der Ursprung, der Fluchtpunkt und der unendlich ferne Punkt der einen Reihe resp. mit dem Ursprunge, dem unendlich fernen Punkte und dem Gegenpunkte der andern Reihe durch jene Construction thatsächlich in perspectivische Lage gebracht sind; damit liegt aber auch jedes vierte Paar entsprechender Punkte der zwei Punktreihen perspectivisch, also K_i mit K_i, ferner E_i mit E_i und daher auch E mit E.

Schliesslich möge noch der Satz erwähnt werden, dass zu zwei projectivisch collinearen Systemen jederzeit, und zwar auf fünffach unendlich verschiedene Weise ein drittes construirt werden kann, das mit beiden centrisch collinear ist. Am einfachsten wird die Bestimmung, wenn entweder die drei Axenwinkel des gesuchten Systems als Rechte gewählt, oder wenn drei Paare entsprechender Punkte der zwei gegebenen Systeme als Bilder von drei unendlich fernen Punkten des gesuchten Systems genommen und gleichzeitig als Knotenpunkte verwerthet werden.

---

* Findet die centrische Collineation bei directer Lage ihre praktische Verwerthung in der Reliefsculptur und in der decorativen Kunst, so hat die inverse Lage eine wichtige Bedeutung in der Optik, insofern das von einem Linsensystem entworfene Bild eines Objects mit dem Object gleichstimmig centrisch collinear in inverser Lage ist. Man vergl. hierüber die Abhandlung von Möbius: „Entwickelung der Lehre von dioptrischen Bildern mit Hilfe der Collineationsverwandtschaft“, in den Berichten der königl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig, math.-phys. Classe, 1855, S. 8 flgg.

§ 13.

Transformation auf das conaxiale Cartesische Coordinatensystem. — Collineare Abbildungen eines Ellipsoids.

Von zwei projectivisch collinearen Figuren sei die Originalfigur auf das rechtwinklige Coordinatensystem O, xyz, die Bildfigur auf das axonometrische Coordinatensystem Ω, $F_1 F_2 F_3$ bezogen. Die collineare Beziehung beider Figuren sei bestimmt durch die neun Grundconstanten w_{ik}, f_i, g_i.

Sind nun $\xi \eta \zeta$ die axonometrischen Coordinaten irgend eines Punktes Π der Bildfigur, $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ die auf das conaxiale Cartesische System bezogenen Cartesischen Coordinaten desselben Punktes, so bestehen zwischen $\xi \eta \zeta$ und $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ einfache Beziehungen. Es ergeben sich nämlich aus der Bemerkung, dass z. B. ξ, f_2, f_3 die Axenabschnitte der durch $F_2 F_3$ und Π gelegten Ebene sind, dass folglich die Gleichung dieser Ebene in den Cartesischen Coordinaten $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ lautet: $\frac{\mathfrak{x}}{\xi} + \frac{\mathfrak{y}}{f_2} + \frac{\mathfrak{z}}{f_3} = 1$, — die Relationen:

$$84)\quad \xi = \frac{\mathfrak{x}}{1 - \frac{\mathfrak{y}}{f_2} - \frac{\mathfrak{z}}{f_3}}, \quad \eta = \frac{\mathfrak{y}}{1 - \frac{\mathfrak{z}}{f_3} - \frac{\mathfrak{x}}{f_1}}, \quad \zeta = \frac{\mathfrak{z}}{1 - \frac{\mathfrak{x}}{f_1} - \frac{\mathfrak{y}}{f_2}}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen I) ein, so erhält man folgende Beziehungen zwischen den Coordinaten xyz eines Punktes P der Originalfigur und den Cartesischen Coordinaten $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ des entsprechenden Punktes Π der Bildfigur:

$$85)\quad x = \frac{g_1 \frac{\mathfrak{x}}{f_1}}{\frac{\mathfrak{x}}{f_1} + \frac{\mathfrak{y}}{f_2} + \frac{\mathfrak{z}}{f_3} - 1}, \quad y = \frac{g_2 \frac{\mathfrak{y}}{f_2}}{\frac{\mathfrak{x}}{f_1} + \frac{\mathfrak{y}}{f_2} + \frac{\mathfrak{z}}{f_3} - 1}, \quad z = \frac{g_3 \frac{\mathfrak{z}}{f_3}}{\frac{\mathfrak{x}}{f_1} + \frac{\mathfrak{y}}{f_2} + \frac{\mathfrak{z}}{f_3} - 1}.$$

Als Beispiel für die Anwendung dieser wichtigen Relationen stellen wir uns folgende Aufgabe:

Gegeben sei im Originalsystem ein Ellipsoid

$$86)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Wie sind die axonometrischen Grundconstanten zu wählen, damit demselben als collineare Abbildung ein bestimmter Flächentypus, namentlich eine Kugelfläche, entspreche?

Die Anwendung unserer Formeln 85) auf die Gleichung 86) liefert für die Abbildung der Fläche die Gleichung:

$$87)\quad \frac{g_1^2}{a^2} \frac{\mathfrak{x}^2}{f_1^2} + \frac{g_2^2}{b^2} \frac{\mathfrak{y}^2}{f_2^2} + \frac{g_3^2}{c^2} \frac{\mathfrak{z}^2}{f_3^2} - \left(\frac{\mathfrak{x}}{f_1} + \frac{\mathfrak{y}}{f_2} + \frac{\mathfrak{z}}{f_3} - 1\right)^2 = 0$$

oder entwickelt:

$$88)\quad \begin{aligned} &\frac{\mathfrak{x}^2}{f_1^2}\left(\frac{g_1^2}{a^2}-1\right)+\frac{\mathfrak{y}^2}{f_2^2}\left(\frac{g_2^2}{b^2}-1\right)+\frac{\mathfrak{z}^2}{f_3^2}\left(\frac{g_3^2}{c^2}-1\right) \\ &-2\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{f_1 f_2}-2\frac{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}{f_2 f_3}-2\frac{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}{f_3 f_1}+2\frac{\mathfrak{x}}{f_1}+2\frac{\mathfrak{y}}{f_2}+2\frac{\mathfrak{z}}{f_3}-1=0. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir zum Behuf der Discussion dieser Gleichung die Determinante derselben mit A (so dass also

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

ist, wo nach bekannter Bezeichnungsweise a_{11}, $2a_{12}$, $2a_{13}$, $2a_{14}$, ... die Coefficienten von x^2, xy, xz, x, ... bedeuten), so ergiebt sich für A folgender Werth:

$$89)\quad A=-\frac{1}{f_1^2 f_2^2 f_3^2}\,\frac{g_1^2 g_2^2 g_3^2}{a^2 b^2 c^2}.$$

Hieraus folgt* vor Allem, dass A nie positiv werden kann, dass sich also ein Ellipsoid nie als Regelfläche, sondern nur als Ellipsoid, elliptisches Paraboloid oder elliptisches Hyperboloid abbilden kann.**

Welcher dieser drei Fälle eintritt, hängt davon ab, ob die Gegenebene das Originalellipsoid nicht schneidet oder berührt oder schneidet. Es sind also hierfür lediglich die drei Grössen g_i massgebend, und zwar ergiebt sich folgendes Criterium:

Die Abbildung ist ein Ellipsoid, Paraboloid oder Hyperboloid, je nachdem:

$$90)\quad \frac{a^2}{g_1^2}+\frac{b^2}{g_2^2}+\frac{c^2}{g_3^2}\lesseqgtr 1.$$

Fragen wir endlich nach den Bedingungen, die die Grundconstanten erfüllen müssen, damit sich das Ellipsoid speciell als Kugelfläche abbilde, so liefert die Vergleichung der Gleichung 88) mit der allgemeinen — auf das Cartesische System mit den Axenwinkeln $w_{12}\, w_{23}\, w_{31}$ bezogenen — Gleichung einer Kugel

$$\begin{aligned} &\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2+2\mathfrak{x}\mathfrak{y}\cos w_{12}+2\mathfrak{y}\mathfrak{z}\cos w_{23}+2\mathfrak{z}\mathfrak{x}\cos w_{31} \\ &\qquad -2p\mathfrak{x}-2q\mathfrak{y}-2r\mathfrak{z}+s=0 \end{aligned}$$

folgende Bedingungen:

$$91)\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{f_1^2}\left(\frac{g_1^2}{a^2}-1\right)=\frac{1}{f_2^2}\left(\frac{g_2^2}{b^2}-1\right)=\frac{1}{f_3^2}\left(\frac{g_3^2}{c^2}-1\right)=W, \\ &\cos w_{12}=-\frac{1}{f_1 f_2}\,\frac{1}{W},\quad \cos w_{23}=-\frac{1}{f_2 f_3}\,\frac{1}{W},\quad \cos w_{31}=-\frac{1}{f_3 f_1}\,\frac{1}{W}. \end{aligned}\right.$$

---

* Vergl. Hesse, Vorlesungen über analyt. Geometrie des Raumes, 3. Aufl., S. 465. (Die Determinante A ist dort mit C_0 bezeichnet.)

** Vergl. Möbius, Bar. Calcul, S. 314.

Da hiernach vier Grundconstanten unbestimmt bleiben, so können als weitere Bestimmungsgleichungen noch die Gleichungen VIII) hinzugefügt werden. Damit ist der Poncelet'sche Satz* bewiesen, dass jede Kugel als die Reliefperspective eines beliebigen Ellipsoids angesehen werden kann. — Oder es können die drei Grössen g_i willkürlich gewählt werden, womit die Aufgabe gelöst ist: Ein beliebiges Ellipsoid und eine dasselbe nicht reell schneidende Ebene so collinear abzubilden, dass das Ellipsoid sich als Kugelfläche darstellt und das Bild der Ebene ins Unendliche fällt.

§ 14.

Bestimmung der Collineation durch drei lineare Relationen zwischen den Coordinaten zweier entsprechender Punkte.

Die Leichtigkeit, mit welcher sich die Aufgabe des vorigen Paragraphen erledigte, ist eben durch das axonometrische Princip bedingt, nach welchem die Bildfigur auf dasjenige Coordinatensystem bezogen wird, dessen Axen die Abbildungen der Coordinatenaxen der Originalfigur sind. Bezieht man aber nun die Bildfigur auf ein vollkommen willkürliches Coordinatensystem XYZ, das wir, wie das Coordinatensystem der Originalfigur, rechtwinklig und mit diesem gleichstimmig annehmen wollen, so gehen die Formeln 85) über in Gleichungen von folgender Form:

$$92)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4}{d_1 X + d_2 Y + d_3 Z + d_4}, \\ y &= \frac{b_1 X + b_2 Y + b_3 Z + b_4}{d_1 X + d_2 Y + d_3 Z + d_4}, \\ z &= \frac{c_1 X + c_2 Y + c_3 Z + c_4}{d_1 X + d_2 Y + d_3 Z + d_4}. \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen repräsentiren den allgemeinsten analytischen Ausdruck für die collineare Beziehung zweier räumlicher Systeme und bilden häufig den Ausgangspunkt bei der Untersuchung der collinearen Verwandtschaft.** Es ergiebt sich nun für uns die Aufgabe, diese Bestimmungsart der Collineation mit unserer axonometrischen Methode in Beziehung zu setzen, d. h. es ergiebt sich die Aufgabe:

Wenn die collineare Beziehung zweier räumlicher Systeme durch die Formeln 92) gegeben ist, die neun axonometrischen Grundconstanten w_{ik}, f_i, g_i auszudrücken als Functionen der in jenen Gleichungen enthaltenen Coefficienten $a_i b_i c_i d_i$.***

---

* Vergl. *Poncelet, Traité des propr. proj., Tome I*, S. 396.

** Z. B. in den S. 403 citirten Arbeiten von Magnus, Richelot und Mägis

*** Da sich die Gleichungen 92) nicht ändern, wenn man sämmtliche 16 Coefficienten mit einem und demselben Factor multiplicirt, so kann einer dieser Coefficienten $= 1$ gesetzt werden, so dass alsdann ihre Anzahl sich auf 15 reducirt.

Wir beginnen die Lösung dieser Aufgabe damit, dass wir das Bildsystem transformiren auf dasjenige Cartesische Coordinatensystem $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$, dessen Axen die Bilder der Axen des Originalsystems sind.

Die auf das Coordinatensystem XYZ bezogenen Coordinaten des neuen Ursprungs seien $p_1 p_2 p_3$. Die Richtungswinkel der neuen Axen seien $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, $\beta_1 \beta_2 \beta_3$, $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$; zwischen den letzteren bestehen die Beziehungen:

$$\text{93)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1, \\ \cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3 = 1, \\ \cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3 = 1. \end{array} \right.$$

Alsdann haben wir die Transformationsformeln:

$$\text{94)} \quad \left\{ \begin{array}{l} X = p_1 + \mathfrak{x}\cos\alpha_1 + \mathfrak{y}\cos\beta_1 + \mathfrak{z}\cos\gamma_1, \\ Y = p_2 + \mathfrak{x}\cos\alpha_2 + \mathfrak{y}\cos\beta_2 + \mathfrak{z}\cos\gamma_2, \\ Z = p_3 + \mathfrak{x}\cos\alpha_3 + \mathfrak{y}\cos\beta_3 + \mathfrak{z}\cos\gamma_3. \end{array} \right.$$

Wendet man nun diese Substitutionen auf die Gleichungen 92) an, so müssen die letzteren identisch werden mit den Gleichungen 85). Dies liefert folgende Bedingungsgleichungen:

$$\text{95)} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 = 0, \\ b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 + b_4 = 0, \\ c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 + c_4 = 0; \end{array} \right.$$

$$\text{96)} \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1\cos\alpha_1 + b_2\cos\alpha_2 + b_3\cos\alpha_3 = 0, \\ c_1\cos\alpha_1 + c_2\cos\alpha_2 + c_3\cos\alpha_3 = 0, \\ c_1\cos\beta_1 + c_2\cos\beta_2 + c_3\cos\beta_3 = 0, \\ a_1\cos\beta_1 + a_2\cos\beta_2 + a_3\cos\beta_3 = 0, \\ a_1\cos\gamma_1 + a_2\cos\gamma_2 + a_3\cos\gamma_3 = 0, \\ b_1\cos\gamma_1 + b_2\cos\gamma_2 + b_3\cos\gamma_3 = 0; \end{array} \right.$$

$$\text{97)} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{g_1}{f_1} = \dfrac{a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + a_3\cos\alpha_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4}, \\ -\dfrac{g_2}{f_2} = \dfrac{b_1\cos\beta_1 + b_2\cos\beta_2 + b_3\cos\beta_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4}, \\ -\dfrac{g_3}{f_3} = \dfrac{c_1\cos\gamma_1 + c_2\cos\gamma_2 + c_3\cos\gamma_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4}; \end{array} \right.$$

$$\text{98)} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{1}{f_1} = \dfrac{d_1\cos\alpha_1 + d_2\cos\alpha_2 + d_3\cos\alpha_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4}, \\ -\dfrac{1}{f_2} = \dfrac{d_1\cos\beta_1 + d_2\cos\beta_2 + d_3\cos\beta_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4}, \\ -\dfrac{1}{f_3} = \dfrac{d_1\cos\gamma_1 + d_2\cos\gamma_2 + d_3\cos\gamma_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4}. \end{array} \right.$$

Aus den 18 Gleichungen 93), 95), 96), 97), 98) bestimmen sich nun die 18 Grössen $p_i\, \alpha_i\, \beta_i\, \gamma_i\, f_i\, g_i$. Schliesslich ergeben sich dann die drei Axenwinkel w_{ik} aus den Gleichungen

$$99)\quad \begin{cases} \cos w_{12} = \cos\alpha_1 \cos\beta_1 + \cos\alpha_2 \cos\beta_2 + \cos\alpha_3 \cos\beta_3, \\ \cos w_{23} = \cos\beta_1 \cos\gamma_1 + \cos\beta_2 \cos\gamma_2 + \cos\beta_3 \cos\gamma_3, \\ \cos w_{31} = \cos\gamma_1 \cos\alpha_1 + \cos\gamma_2 \cos\alpha_2 + \cos\gamma_3 \cos\alpha_3. \end{cases}$$

Zum Behuf der Auflösung unserer Gleichungen führen wir folgende Bezeichnungen ein: Wir bezeichnen die Unterdeterminanten der Substitutionsdeterminante

$$100)\quad R = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

mit $A_1 A_2 \ldots B_1 \ldots$, ferner die Unterdeterminanten der Determinante

$$101)\quad D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

mit $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{B}_1 \ldots$

Es liefern nun zunächst die Gleichungen 95) für die Ursprungscoordinaten — und die Gleichungen 96) und 93) für die Richtungswinkel folgende Werthe:

$$102)\quad p_i = \frac{D_i}{D_4};$$

$$103)\quad \begin{cases} \cos^2\alpha_i = \dfrac{\mathfrak{A}_i^2}{\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2}, \\ \cos^2\beta_i = \dfrac{\mathfrak{B}_i^2}{\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{B}_2^2 + \mathfrak{B}_3^2}, \\ \cos^2\gamma_i = \dfrac{\mathfrak{C}_i^2}{\mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{C}_2^2 + \mathfrak{C}_3^2}. \end{cases}$$

Mit diesen Werthen erhält man sodann aus den Gleichungen 97) 98) und 99) für die axonometrischen Grundconstanten folgende Ausdrücke:

$$104)\quad \begin{cases} g_1 = -\dfrac{D_4}{A_4}, \\ g_2 = -\dfrac{D_4}{B_4}, \\ g_3 = -\dfrac{D_4}{C_4}; \end{cases}$$

$$105)\quad \begin{cases} f_1 = \pm \dfrac{R}{D_4} \dfrac{\sqrt{\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2}}{A_4}, \\ f_2 = \pm \dfrac{R}{D_4} \dfrac{\sqrt{\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{B}_2^2 + \mathfrak{B}_3^2}}{B_4}, \\ f_3 = \pm \dfrac{R}{D_4} \dfrac{\sqrt{\mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{C}_2^2 + \mathfrak{C}_3^2}}{C_4}; \end{cases}$$

$$106)\quad \begin{cases} \cos w_{12} = \dfrac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3}{\sqrt{\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2}\sqrt{\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{B}_2^2 + \mathfrak{B}_3^2}}, \\ \cos w_{23} = \dfrac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3}{\sqrt{\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{B}_2^2 + \mathfrak{B}_3^2}\sqrt{\mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{C}_2^2 + \mathfrak{C}_3^2}}, \\ \cos w_{31} = \dfrac{\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{C}_3\mathfrak{A}_3}{\sqrt{\mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{C}_2^2 + \mathfrak{C}_3^2}\sqrt{\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2}}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 105) und 106) können noch auf eine etwas andere Form gebracht werden. Bildet man nämlich nach dem Multiplicationstheorem das Quadrat von D_4 und bezeichnet die Unterdeterminanten der so entstehenden Determinante

$$107)\qquad D_4^2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix}$$

mit Q_{ik}, so ist z. B.

$$\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2 = Q_{11},$$

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3 = Q_{12} \text{ u. s. f.}$$

Man erhält daher für f_i und $\cos w_{ik}$ folgende Ausdrücke:

$$108)\quad \begin{cases} f_1 = \pm \dfrac{R}{D_4}\dfrac{\sqrt{Q_{11}}}{A_4}, \\ f_2 = \pm \dfrac{R}{D_4}\dfrac{\sqrt{Q_{22}}}{B_4}, \\ f_3 = \pm \dfrac{R}{D_4}\dfrac{\sqrt{Q_{33}}}{C_4}; \end{cases}$$

$$109)\quad \begin{cases} \cos w_{12} = \dfrac{Q_{12}}{\sqrt{Q_{11}Q_{22}}}, \\ \cos w_{23} = \dfrac{Q_{23}}{\sqrt{Q_{22}Q_{33}}}, \\ \cos w_{31} = \dfrac{Q_{31}}{\sqrt{Q_{33}Q_{11}}}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 105) und 108) lassen die Vorzeichen von f_i unbestimmt. Dieselben bestimmen sich aus denjenigen der g_i, insofern f_i und g_i entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Bezüglich der Axenwinkel w_{ik} muss noch entschieden werden, wie aus denselben das Bildcoordinatensystem zusammenzusetzen ist, ob gleichstimmig mit dem Originalcoordinatensystem, oder ungleichstimmig. D. h. es ist zu entscheiden, ob die durch die Formeln 92) bestimmte Collineation eine gleichstimmige oder ungleichstimmige ist.

Das Bild des Dreistrahls o, xyz sei $\omega, \xi\eta\zeta$. Wir denken uns ein mit O, XYZ paralleles Coordinatensystem mit Ursprung in ω. Sind dann $X'Y'Z'$ die auf dieses System bezogenen Coordinaten eines auf $\omega\xi$ beliebig gewählten Punktes, ebenso $X''Y''Z''$ und $X'''Y'''Z'''$ die Coordinaten zweier auf $\omega\eta$ und $\omega\zeta$ beliebig gewählter Punkte, so ist der Dreistrahl $\omega, \xi\eta\zeta$ mit O, XYZ gleichstimmig oder ungleichstimmig, je nachdem

$$110)\quad \begin{vmatrix} X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \\ X''' & Y''' & Z''' \end{vmatrix} \gtrless 1$$

ist. Es handelt sich nun darum, diese Determinante, die wir mit $\varDelta$ bezeichnen wollen, auszudrücken in den Coefficienten $a_i\, b_i\, c_i\, d_i$.

Zwischen den Coordinaten unserer drei Punkte bestehen vermöge ihrer Lage auf den drei Strahlen $\omega\xi$, $\omega\eta$, $\omega\zeta$ folgende Beziehungen:

$$111)\quad \left\{\begin{aligned} b_1 X' + b_2 Y' + b_3 Z' &= 0, \\ c_1 X' + c_2 Y' + c_3 Z' &= 0, \\ c_1 X'' + c_2 Y'' + c_3 Z'' &= 0, \\ a_1 X'' + a_2 Y'' + a_3 Z'' &= 0, \\ a_1 X''' + a_2 Y''' + a_3 Z''' &= 0, \\ b_1 X''' + b_2 Y''' + b_3 Z''' &= 0. \end{aligned}\right.$$

Setzt man daher je eine Coordinate der drei Punkte $= 1$, so erhält man für $\varDelta$ folgenden Werth:

$$112)\quad \varDelta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1} & \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_1} \\ \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_2} & 1 & \frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{B}_2} \\ \frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_3} & \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{C}_3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mathfrak{A}_1}\,\frac{1}{\mathfrak{B}_2}\,\frac{1}{\mathfrak{C}_3} \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{B}_3 \\ \mathfrak{C}_1 & \mathfrak{C}_2 & \mathfrak{C}_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mathfrak{A}_1}\,\frac{1}{\mathfrak{B}_2}\,\frac{1}{\mathfrak{C}_3}\, D_4^{\,2}.$$

Wir haben somit (weil O, XYZ mit o, xyz gleichstimmig) den Satz:

Die durch die Formeln 92) bestimmte Collineation ist eine gleichstimmige oder ungleichstimmige, je nachdem

$$113)\quad \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{C}_3 \gtrless 1.$$

Diesem Criterium entsprechend ist nun das Bildcoordinatensystem entweder gleichstimmig oder ungleichstimmig mit dem Originalcoordinatensystem zu construiren.

Anmerkung. Substituirt man die obigen Ausdrücke in den Bedingungsgleichungen 90) und 91), so ist damit die Aufgabe gelöst: Welche Beziehungen müssen zwischen den Coefficienten einer linearen Substitution obwalten, damit einem im Originalsystem gegebenen Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ im Bildsystem ein bestimmter Flächentypus (namentlich eine Kugelfläche) entspreche?

§ 15.

Collineation zwischen ebenen Systemen.

In der vorangehenden axonometrischen Theorie der collinearen Verwandtschaft von räumlichen Systemen ist die Collineation zwischen ebenen

Systemen mit einbegriffen, insofern man nur nothwendig hat, von den unseren Betrachtungen zu Grunde gelegten Coordinatensystemen immer nur eine Coordinatenebene, z. B. die xy-Ebene, bezw. $\xi\eta$-Ebene, zu berücksichtigen. Es mögen in dieser Beziehung folgende Andeutungen genügen:

Das axonometrische Coordinatensystem in der Ebene wird gebildet von zwei vom Ursprung O ausgehenden Axen mit den Knotenpunkten K_1 und K_2. Auf dasselbe wird ein Punkt E dadurch bezogen, dass man $K_2 E$ und $K_1 E$ zieht, welche die beiden Axen in den Coordinatenpunkten E_1 und E_2 schneiden; OE_1 und OE_2 sind die axonometrischen Coordinaten des Punktes E.

Die collineare Beziehung zwischen zwei ebenen Figuren kann dadurch bestimmt werden, dass man die fünf axonometrischen Grundconstanten $w_{12} f_1 f_2 g_1 g_2$ willkürlich wählt, die Originalfigur auf ein Cartesisches Coordinatensystem O, xy bezieht und die nach den Formeln

$$\xi = \frac{f_1 x}{x - g_1}, \quad \eta = \frac{f_2 y}{y - g_2}$$

reducirten Coordinaten auf das axonometrische Coordinatensystem $\Omega, F_1 F_2$ mit w_{12} als Axenwinkeln und $f_1 f_2$ als Axenlängen bezieht.

Dass zwei collineare ebene Systeme immer, und zwar auf unendlich verschiedene Weise, in perspectivische Lage gebracht werden können,* ergiebt sich folgendermassen:

Geht man von der perspectivischen Abbildung eines ebenen Systems aus, indem man die xy-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems O, xyz als Ebene des Originalsystems wählt, die Lage der Ebene des Bildsystems durch ihre drei Axenabschnitte $m_1 m_2 m_3$ und die Lage des Auges durch seine drei Coordinaten $a_1 a_2 a_3$ bestimmt, so erhält man in den Gleichungen II) bis VI) (S. 406) die fünf Grundconstanten $w_{12} f_1 f_2 g_1 g_2$ ausgedrückt als Functionen der sechs Orientirungsconstanten $m_1 m_2 m_3 a_1 a_2 a_3$. Will man alsdann umgekehrt die sechs Orientirungsconstanten als Functionen der fünf Grundconstanten ausdrücken, so bleibt eine der ersteren unbestimmt.

Ist die collineare Beziehung zwischen zwei ebenen Systemen durch vier Paare entsprechender Punkte OK_1K_2E und $\Omega K_1 K_2 E$ gegeben, so ist das Verfahren analog mit dem in § 12 angegebenen. Die dort gelehrte Lösung der Aufgabe, zwei collineare Systeme in perspectivische Lage überzuführen, reducirt sich für ebene Systeme auf folgende Construction:

Beziehe die Punkte E und E auf die zwei axonometrischen Coordinatensysteme $O, K_1 K_2$ und $\Omega, K_1 K_2$, ihre Coordinatenpunkte seien $E_1 E_2$ und $E_1 E_2$; construire für die zwei projectivischen Punktreihen

* Vergl. *Jacobi*, *„Theoria analytica generalis projectionis centralis“*, Crelle's Journal Bd. 8, S. 338.

OE_1K_1 und $\Omega E_1 K_1$ den Gegenpunkt G_1 und Fluchtpunkt F_1, desgleichen für die zwei Punktreihen OE_2K_2 und $\Omega E_2 K_2$ die Punkte G_2 und F_2; lege durch $G_1 G_2$ (Taf. VIII, Fig. 2) unter beliebigem Winkel φ gegen die Ebene des Originalsytems eine Ebene und construire in dieser ein Dreieck $G_1 G_2 A$ ähnlich $F_1 F_2 \Omega$; lege ebenso durch $F_1 F_2$ unter demselben Neigungswinkel φ gegen die Ebene des Bildsystems eine Ebene und construire in ihr ein Dreieck $F_1 F_2 A'$ ähnlich $G_1 G_2 O$; ziehe AO und $A'\Omega$ und bringe die zwei so entstandenen ähnlichen Tetraeder OG_1G_2A und $A'F_1F_2\Omega$ in ähnliche Lage, so dass Punkt A mit A' zusammenfällt.

Die zwei Tetraeder können sowohl direct ähnlich, als invers ähnlich construirt werden. Hierdurch sind zwei verschiedene Arten der perspectivischen Lage — eine (resp) inverse und eine directe — bedingt, von denen jede einzelne durch Veränderung des Winkels φ beliebig variirt werden kann. — Mit $\varphi = 0$ oder $= 180^0$ fallen die zwei Systeme in eine und dieselbe Ebene. Demnach können zwei collineare ebene Systeme in einer und derselben Ebene auf vier verschiedene Arten in perspectivische Lage gebracht werden.* Die Figuren 5 (Taf. VIII) zeigen diese vier Lagen: Fig. a) und b) die zwei directen, Fig. c) und d) die zwei inversen Lagen, a) und c) mit $\varphi = 0$, b) und d) mit $\varphi = 180^0$.

Die Ausführungen der §§ 13 und 14 lassen sich ebenfalls mit Leichtigkeit auf ebene Systeme übertragen:

Die Transformationsformeln vom axonometrischen zum conaxialen Cartesischen Bildcoordinatensystem lauten:

114) $$\xi = \frac{\mathfrak{x}}{1 - \frac{\mathfrak{y}}{f_2}}, \quad \eta = \frac{\mathfrak{y}}{1 - \frac{\mathfrak{x}}{f_1}}.$$

Zwischen den Coordinaten xy eines Punktes der Originalfigur und den Cartesischen Coordinaten $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ des entsprechenden Punktes der Bildfigur bestehen die Beziehungen:

115) $$x = \frac{g_1 \frac{\mathfrak{x}}{f_1}}{\frac{\mathfrak{x}}{f_1} + \frac{\mathfrak{y}}{f_2} - 1}, \quad y = \frac{g_2 \frac{\mathfrak{y}}{f_2}}{\frac{\mathfrak{x}}{f_1} + \frac{\mathfrak{y}}{f_2} - 1}.$$

Als Criterium dafür, dass die Ellipse

116) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sich im Bildsystem als Ellipse, Parabel oder Hyperbel abbilde, ergiebt sich:

* Vergl. die S. 403 citirte Abhandlung von Stephen Smith, S. 202.

$$117)\qquad \frac{a^2}{g_1^{\,2}}+\frac{b^2}{g_2^{\,2}} \lesseqgtr 1.$$

Für den Kreis erhält man die Bedingungen:

$$118)\qquad \frac{1}{f_1^{\,2}}\left(\frac{g_1^{\,2}}{a^2}-1\right)=\frac{1}{f_2^{\,2}}\left(\frac{g_2^{\,2}}{b^2}-1\right)=-\frac{1}{f_1 f_2 \cos w_{12}}.$$

Da hiernach drei Grundconstanten unbestimmt bleiben, so können z. B. die zwei Grössen g_i willkürlich gewählt werden. Damit ist der Poncelet'sche Satz* bewiesen: Eine Ellipse und eine sie nicht schneidende Gerade können stets so projicirt werden, dass die Ellipse sich als Kreis abbildet und dass das Bild der Geraden ins Unendliche fällt.

Ist die collineare Beziehung zwischen zwei ebenen Systemen durch die zwei linearen Relationen

$$119)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{a_1 X + a_2 Y + a_3}{d_1 X + d_2 Y + d_3},\\ y &= \frac{b_1 X + b_2 Y + b_3}{d_1 X + d_2 Y + d_3} \end{aligned}\right.$$

gegeben, und bezeichnet man die Unterdeterminanten der Substitutionsdeterminante

$$120)\qquad R=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

mit $A_1 A_2 \ldots B_1 \ldots$, so drücken sich die fünf Grundconstanten folgendermassen in den Substitutionscoefficienten aus:

$$121)\qquad \left\{\begin{aligned} g_1 &= -\frac{D_3}{A_3},\\ g_2 &= -\frac{D_3}{B_3}, \end{aligned}\right. \qquad 122)\qquad \left\{\begin{aligned} f_1 &= \pm\frac{R}{D_3}\,\frac{\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}}}{A_3},\\ f_2 &= \pm\frac{R}{D_3}\,\frac{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}}{B_3}, \end{aligned}\right.$$

$$123)\qquad \cos w_{12} = -\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}\,\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}}}.$$

§ 16.

Schlusswort. Chasles'sche und projectivische Coordinaten.

Die in § 12 definirten axonometrischen Coordinaten stehen in naher Beziehung zu den allgemeinen projectivischen Coordinaten. Sie können nämlich als eine Modification der Chasles'schen Coordinaten** angesehen werden, welche ihrerseits einen Specialfall der — von Möbius

---

* Vergl. *Poncelet, Traité des propr. proj. des fig., Tome I,* S. 53.

** Für die Ebene findet man die ausführliche Behandlung dieser Coordinaten in *Chasles, Traité de Géométrie supérieure, Paris 1852,* S. 341 flgg. Für den Raum ist das von Chasles in seiner Geschichte der Geometrie (s. die deutsche Ausgabe von Sohnke, Halle 1839, S. 282) aufgestellte allgemeinere Coordinatensystem in derselben Weise zu specialisiren, wie Chasles dies in seinem *Traité de Géom. sup.,* S. 341, für die Ebene ausgeführt hat.

angedeuteten, von v. Staudt ausgesprochenen und von Fiedler nutzbar gemachten und mit den tetrametrischen Coordinaten identificirten — allgemeinen projectivischen Coordinaten* repräsentiren.

Es sei nämlich $O, K_1 K_2 K_3$ ein axonometrisches Coordinatensystem, $k_1 k_2 k_3$ seien die Axenlängen, $e_1 e_2 e_3$ und xyz die axonometrischen Coordinaten zweier Punkte E und P. Bezeichnen wir nun mit $e_1^{(c)} e_2^{(c)} e_3^{(c)}$ und $x^{(c)} y^{(c)} z^{(c)}$ die auf dasselbe System bezogenen Chasles'schen Coordinaten der Punkte E und P, ferner mit $x^{(F)} y^{(F)} z^{(F)}$ die auf dasselbe System mit E als Einheitspunkt bezogenen projectivischen (Fiedler'schen) Coordinaten von P, so definiren sich die Chasles'schen und projectivischen Coordinaten durch folgende Gleichungen:

124) $$x^{(c)} = \frac{x}{k_1 - x}, \quad y^{(c)} = \frac{y}{k_2 - y}, \quad z^{(c)} = \frac{z}{k_3 - z};$$

125) $$x^{(F)} = \frac{x^{(c)}}{e_1^{(c)}} = \frac{\dfrac{x}{k_1 - x}}{\dfrac{e_1}{k_1 - e_1}}, \quad y^{(F)} = \frac{y^{(c)}}{e_2^{(c)}} = \frac{\dfrac{y}{k_2 - y}}{\dfrac{e_2}{k_2 - e_2}}, \quad z^{(F)} = \frac{z^{(c)}}{e_3^{(c)}} = \frac{\dfrac{z}{k_3 - z}}{\dfrac{e_3}{k_3 - e_3}}.$$

Sind $\chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4$ die auf das Fundamentaltetraeder $O K_1 K_2 K_3$ mit E als Einheitspunkt bezogenen tetrametrischen Coordinaten von P (so dass also $\chi_i = \frac{\mathfrak{p}_i}{\mathfrak{e}_i}$ ist, wenn $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \mathfrak{p}_4$ und $\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3 \mathfrak{e}_4$ resp. die Abstände der Punkte P und E von den Ebenen $O K_2 K_3$, $O K_3 K_1$, $O K_1 K_2$, $K_1 K_2 K_3$ bedeuten), so ist:

126) $$\frac{\chi_1}{\chi_4} = x^{(F)}, \quad \frac{\chi_2}{\chi_4} = y^{(F)}, \quad \frac{\chi_3}{\chi_4} = z^{(F)}.$$

Ist eine Collineation durch fünf Paare entsprechender Punkte $O K_1 K_2 K_3 E$ und $\Omega\, K_1\, K_2\, K_3\, E$ gegeben, so finden zwischen den axonometrischen, Chasles'schen und projectivischen Coordinaten zweier entsprechender Punkte P und Π folgende Beziehungen statt:

127) $$\xi = \frac{\varkappa_1 \varepsilon_1 (k_1 - e_1) x}{(k_1 \varepsilon_1 - \varkappa_1 e_1) x + k_1 e_1 (\varkappa_1 - \varepsilon_1)},^{**} \quad \eta \text{ und } \zeta \text{ entsprechend},$$

128) $$\xi^{(c)} = \frac{\varepsilon_1^{(c)}}{e_1^{(c)}} x^{(c)},$$

129) $$\xi^{(F)} = x^{(F)}.$$

So brauchbar sich auch die axonometrischen Coordinaten namentlich in constructiver Beziehung vermöge ihrer Handlichkeit und An-

* Vergl. Möbius, Bar. Calcul, S. 320 und 329; v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 2. Heft, Nürnberg 1857, S. 266; Fiedler, Ueber die projectivischen Coordinaten, in der Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich, Bd. 15, S. 152 flgg., oder Fiedler, Darstellende Geometrie, Leipzig 1871, S 507 flgg.

** Diese Gleichung folgt unmittelbar aus Gleichung I) in Verbindung mit 83). Die griechischen Buchstaben haben hier und im Folgenden für das griechische Punktsystem genau dieselbe Bedeutung, wie die gleichlautenden lateinischen Buchstaben für das lateinische System.

schaulichkeit erweisen, so ungeeignet zeigt sich häufig ihre Anwendung bei analytischen Untersuchungen (schon darum, weil die Ordnung einer Fläche nicht mit dem Grade ihrer Gleichung in axonometrischen Coordinaten übereinstimmt). Der Uebergang von axonometrischen Coordinaten zu Chasles'schen oder projectivischen oder tetrametrischen kann aber nun nach den obigen Formeln jeden Augenblick mit Leichtigkeit bewerkstelligt werden. Am besten wird man thun, alle vier Arten von Coordinaten gleichzeitig zu berücksichtigen, indem man sich die Modificationen, die die Form eines analytischen Ausdruckes beim Uebergange von einer Art zu einer andern erleidet, jederzeit präsent erhält und sich eine möglichste Fertigkeit und Ungenirtheit im Changiren aneignet.

Die in § 12 gegebene Lösung der Aufgabe: „Wenn eine Collineation durch fünf Paare entsprechender Punkte gegeben ist, zu jedem sechsten Punkte den entsprechenden zu construiren", ist übereinstimmend mit der schon von Möbius, dem scharfsinnigen Erfinder der tetrametrischen Coordinaten, gegebenen Construction. Sie fliesst jedoch bei Möbius nicht mit der innern Nothwendigkeit aus der Natur seines Coordinatensystems, als dies bei unserer axonometrischen Methode der Fall ist. Es ist bei Möbius weniger die Theorie der barycentrischen Coordinaten, als vielmehr die Theorie der geometrischen Netze, welche speciell jener Construction das Leben gegeben hat. Mit dieser Construction hat aber nun Möbius den Grundgedanken der allgemeinen projectivischen Coordinaten ausgesprochen und damit den Keim zu der Verschmelzung der constructiven und analytischen Methode gelegt, deren wir uns heute erfreuen. v. Staudt nahm den Möbius'schen Gedanken auf und verarbeitete ihn weiter, indem er die Doppelverhältnisse als Variable einführte.* Aber erst Fiedler wurde sich der eminenten Bedeutung dieser Coordinaten vollständig bewusst. Er hat das Ziel seines Strebens: die analytische und constructive Methode so enge miteinander zu verknüpfen, dass es sich bei ihrer Anwendung nicht mehr um ein *aut — aut*, sondern vielmehr um ein *sive — sive* handle, durch die Ausbildung der projectivischen Coordinaten auf's Schönste realisirt und sich dadurch das hohe Verdienst erworben, die Kluft, die zwischen beiden Methoden bestand, für immer geschlossen zu haben.

---

* Uebrigens deutet schon Möbius S. 330 an: „— die zwei oder drei Doppelverhältnisse, wodurch jeder andere Punkt der gegebenen Figur in Bezug auf die ersten vier oder fünf Punkte vollkommen bestimmt wird, ...".

XVIII.

Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven dritter Ordnung.

Von

MILINOWSKI,

Oberlehrer am Gymnasium zu Weissenburg im Elsass.

I. Allgemeine Eigenschaften.

Um auf rein synthetischem Wege die Eigenschaften der ebenen Curven dritter Ordnung zu erforschen, geht man wohl am besten von einer Curve dritter Ordnung aus, welche als Ort der gemeinschaftlichen Tripel der in einem Kegelschnittnetze vorkommenden Büschel auftritt und die daher nach Steiner (vergl. Steiner's Vorlesungen, herausgegeben von Schroeter) Tripelcurve heissen soll. Namentlich ist in den Eigenschaften des Kegelschnittnetzes auch ein Mittel gegeben, die Polareigenschaften der Curven dritter Ordnung abzuleiten, was ich in einem Programm des Tilsiter Gymnasiums vom Jahre 1872 in einer Abhandlung: „Die Polaren der ebenen Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkten", ausgesprochen habe. Gleichzeitig hat Herr Dr. Slawyk in seiner Inauguraldissertation „Die Polareigenschaften der allgemeinen ebenen Curven dritter Ordnung" (Breslau, Jungfer's Buchdruckerei) die Polareigenschaften der ebenen Curven dritter Ordnung aus den Eigenschaften des Kegelschnittnetzes abgeleitet. Um diese Ableitung allgemein giltig zu machen, bleibt noch zu zeigen, dass eine Tripelcurve eine ganz allgemeine Curve dritter Ordnung ist, also z. B. auch erzeugt werden kann durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel Letzteres habe ich im Programm des Gymnasiums von Weissenburg vom Jahre 1875 in der Abhandlung „Die Haupterzeugungsarten der ebenen Curven dritter Ordnung" bewiesen. Später bin ich jedoch auf einen weit einfachern Beweis gestossen, den ich im Folgenden mittheile. Daran knüpfe ich die Theorie der Polaren einer Curve dritter Ordnung, indem ich von der Chasles'schen Erzeugungsart ausgehe. Die angewendete Methode ist einfach und lässt sich modificirt auch bei Curven höherer Ordnung zur Anwendung bringen.

1. Haben zwei projectivische Kegelschnittbüschel $(ABCD)(\varkappa_1^2\varkappa_2^2\varkappa_3^2\varkappa_4^2\ldots)$ und $(ABC'D')(\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2\lambda_4^2\ldots)$ zwei Grundpunkte AB gemein und entspricht das Geraden-

paar (AB, CD) dem Paare $(AB, C'D')$, so erzeugen beide durch die Durchschnitte homologer Elemente eine Curve C^3 dritter Ordnung, die auch durch jedes dieser Büschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugt werden kann, dessen Scheitel M auf C^3 liegt.

Jeder Kegelschnitt des einen Büschels $(ABCD)$ wird von allen Kegelschnitten des andern $(ABC'D')$ in den Punktpaaren einer Involution geschnitten, deren Centrum auf $C'D'$ liegt; nennen wir diese Involutionscentra $K_1 K_2 K_3 \ldots$ und lassen jedem Kegelschnitte $\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \varkappa_3^2 \ldots$ das ihm zukommende Centrum entsprechen, so ist

$$(K_1 K_2 K_3 \ldots) \overline{\wedge} (\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \varkappa_3^2 \ldots).$$

Ebenso wird jeder Kegelschnitt des zweiten Büschels von allen des ersten in einer Involution geschnitten. Sämmtliche Involutionscentra $L_1 L_2 L_3 \ldots$ liegen auf CD und es ist wieder

$$(L_1 L_2 L_3 \ldots) \overline{\wedge} (\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \ldots),$$

also auch

$$(K_1 K_2 K_3 \ldots) \overline{\wedge} (L_1 L_2 L_3 \ldots).$$

Der Schnittpunkt $(CD, C'D')$ entspricht bei dieser projectivischen Beziehung sich selbst, also liegen die Punktreihen perspectivisch und es schneiden sich die Geraden $K_1 L_1$, $K_2 L_2$, ... in einem Punkte M. Diese Geraden sind aber die Durchschnitte der homologen Kegelschnitte $\varkappa_1^2 \lambda_1^2$, $\varkappa_2^2 \lambda_2^2$, ... Lassen wir jede Gerade jedem der Kegelschnitte, deren Durchschnitt sie ist, entsprechen, so ist zwischen den Kegelschnitten und den Geraden eine projectivische Beziehung hergestellt und daher liegen die Schnittpunkte $(\varkappa_1^2 \lambda_1^2)$, ... auf einer Curve C^3 dritter Ordnung.

Anmerkung. Haben die projectivischen Büschel $(ABCD)$ und $(ABC'D')$ die Geradenpaare (AB, CD) und $(AB, C'D')$ nicht als homologe, so umhüllen die Geraden, welche die Schnittpunkte homologer Elemente verbinden, einen Kegelschnitt, welcher CD und $C'D'$ berührt.

2. Ist eine Curve C^3 dritter Ordnung durch ein Kegelschnittbüschel $(ABCD)\{\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \varkappa_3^2 \ldots\}$ und ein projectivisches Strahlenbüschel $M(s_1 s_2 s_3 \ldots)$ entstanden, so kann sie auf unzählige Arten durch dasselbe Strahlenbüschel (M) und andere projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt werden, deren Grundpunkte auf C^3 liegen.

Die Kegelschnitte $\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \varkappa_3^2 \ldots$ mögen s_1 in $E_1 F_1$, $E_2 F_2$, $E_3 F_3$, ... schneiden; ferner seien $G_2 H_2$, $G_3 H_3$, ... die Schnittpunkte von $\varkappa_2^2$, $\varkappa_3^2$, ... mit s_2, s_3, ... Legt man durch A und die Punkte $E_2 F_2 G_2 H_2$ einen Kegelschnitt λ_2^2 und durch $A E_3 F_3 G_3 H_3$ einen andern λ_3^2, so bestimmen beide ein Büschel mit den Grundpunkten $AB'C'D'$, von dem ein Kegelschnitt λ_1^2 durch $E_1 F_1$ gehen muss, weil $E_1 F_1$, $E_2 F_2$, $E_3 F_3$, ... in Involution sind.

Lassen wir den Strahlen $s_1 s_2 s_3$ die Kegelschnitte $\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2$ entsprechen, so ist dadurch eine projectivische Beziehung hergestellt; wir nennen $\lambda_4^2 \lambda_5^2 \ldots$ die den Strahlen $s_4 s_5 \ldots$ entsprechenden Kegelschnitte. Die beiden Büschel $M(s_1 s_2 \ldots)$ und $(AB'C'D')\{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots\}$ erzeugen eine Curve C_1^3 dritter Ordnung, welche mit C^3 zusammenfallen muss. Dazu ist nachzuweisen, dass $\varkappa_4^2$ und λ_4^2 sich auf s_4, $\varkappa_5^2$ und λ_5^2 sich auf $s_5, \ldots$ schneiden. — Jeder Strahl des Büschels $(s_1 s_2 \ldots)$ wird von beiden Kegelschnittbüscheln $(\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \ldots)$ und $(\lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots)$ in einer quadratischen Involution geschnitten; auf jedem Strahle fällt ein Punktpaar der einen mit einem Punktpaare der andern Involution zusammen. Ordnen wir die beiden Kegelschnitte, welche durch das gemeinsame Punktpaar gehen, einander zu, so ist zwischen den Kegelschnittbüscheln dadurch eine projectivische Beziehung hergestellt. Wenn auf dem Strahle s sich die beiden Kegelschnitte $\varkappa^2$ und λ^2 der Büschel schneiden, so lässt sich zeigen, dass der Kegelschnitt $\varkappa^2$ von keinem andern Kegelschnitte des Büschels $(\lambda_1^2 \ldots)$ in zwei Punkten eines Strahles von $(s_1 \ldots)$ geschnitten wird. Der Kegelschnitt $\varkappa^2$ wird von allen Kegelschnitten von $(\lambda_1^2 \ldots)$ ausser in A Gruppen von je drei Punkten geschnitten, deren Verbindungslinien einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ einhüllen. Zu den Tangenten dieses Kegelschnittes gehört auch s_1, weil die Kegelschnitte $(\varkappa_1^2 \ldots)$ und $(\lambda_1^2 \ldots)$ die Gerade s_1 in derselben Involution schneiden. Daher kann man von M nur noch eine Tangente s an $\mathfrak{K}$ ziehen, welche also der einzige Strahl durch M ist, auf dem sich $\varkappa^2$ und ein Kegelschnitt λ des Büschels $(\lambda_1^2 \ldots)$ schneiden. Dadurch ist zwischen den Kegelschnitten von $(\varkappa_1^2 \ldots)$ und $(\lambda_1^2 \ldots)$ und den Strahlen von $(s_1 \ldots)$ eine projectivische Beziehung hergestellt. Da in dieser aber $\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \varkappa_3^2$, $\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2$ und $s_1 s_2 s_3$ entsprechende Elemente sind, so müssen auch $\varkappa_4^2 \lambda_4^2 s_4$, $\varkappa_5^2 \lambda_5^2 s_5, \ldots$ homologe Elemente der drei Büschel sein. Die Curven C^3 und C_1^3 haben also unendlich viele Punkte gemein und fallen daher zusammen.

Folgerung. Die Curve C^3, welche durch die projectivischen Büschel $(ABCD)$ und (M) erzeugt ist, wird von jedem Kegelschnitte K^2 in sechs Punkten geschnitten.

Es seien EFG drei beliebige Punkte von K^2, die nicht auf C^3 liegen, und XY zwei beliebige Punkte von C^3. Die fünf Punkte $EFGXY$ bestimmen einen Kegelschnitt Y^2 und wenn Y die Curve C^3 durchläuft, durchläuft Y^2 das Büschel $(EFGX)$. Wenn darauf X die ganze Curve C^3 durchläuft, so erhält man alle Büschel, die im Netze $((EFG))$ vorkommen können und daher auch den Kegelschnitt K^2. Dieser schneidet daher C^3 in zwei Punkten $X_0 Y_0$. Auf dieselbe Art denken wir uns jetzt alle Kegelschnitte des Netzes $((EX_0 Y_0))$ entstanden und folgern, dass K^2 die Curve C^3 noch in zwei weiteren Punkten $Z_0 Z'_0$ schneiden muss. Ein Strahl s_1 durch M schneidet C^3 in $E_1 F_1$ und der durch $E_1 F_1 X_0 Y_0 Z_0$ bestimmte Kegelschnitt trifft die Curve C^3 noch in U, so kann nach dem

Vorigen C^3 erzeugt werden durch die Büschel (M) und $(X_0 Y_0 Z_0 U)$. Die Elemente dieser beiden Büschel schneiden K^2 in einer Involution und einer dazu projectivischen Punktreihe und die drei Doppelpunkte beider Reihen sind weitere drei Schnittpunkte von K^2 und C^3.

Ginge K^2 zufällig durch M, so würden die Büschel (M) und $(X_0 Y_0 Z_0 U)$ diesen Kegelschnitt in zwei projectivischen Punktreihen treffen, deren Doppelpunkte Schnittpunkte von K^2 und C^3 sind.

3. Eine Tripelcurve wird von jedem Kegelschnitte in sechs Punkten geschnitten.

Sind ABC drei Schnittpunkte der Tripelcurve C^3 und des Kegelschnittes K^2 und $[A]$, $[B]$, $[C]$ die Geradenpaare durch A, B, C, welche zu den Kegelschnitten des Netzes gehören, dessen Tripelcurve C^3 ist, so bilden die Polaren der Punkte von K^2 bezüglich $[A]$, $[B]$, $[C]$ drei projectivische Strahlenbüschel (A), (B), (C), von denen die beiden ersten und beiden letzten je einen Kegelschnitt $[AB]$, $[BC]$ erzeugen. Beide schneiden sich ausser in B noch in drei Punkten, deren conjugirte in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte des Netzes die Punkte von K^2 sind, welche dieser Kegelschnitt ausser ABC noch mit C^3 gemein hat.

6. Liegen sechs Punkte der Tripelcurve C^3 auf einem Kegelschnitte, so liegen zwei von ihnen mit den conjugirten der vier übrigen auch auf einem Kegelschnitte.

Sind $ABCDEF$ sechs Punkte, in denen C^3 von einem Kegelschnitte getroffen wird, $C'D'E'F'$ die conjugirten der vier letzten, so ist

1) $$A(CDEF) \barwedge B(CDEF),$$

2) $$\begin{cases} A(CDEF) \barwedge A(C'D'E'F'), \\ B(BCDE) \barwedge B(C'D'E'F'), \end{cases}$$

da $A(CC'DD'EE'FF')$ und $B(CC'DD'EE'FF')$ involutorische Büschel sind, also:

3) $$A(C'D'E'F') \barwedge B(C'D'E'F').$$

7. Jede Tripelcurve kann auf unendlich viele Arten durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugt werden.

I. Beweis. In Steiner's Vorlesungen, herausgegeben von Schroeter, II. Aufl., S. 507, ist der Satz bewiesen: „Wenn man durch drei Punkte eines Tripels der Tripelcurve und einen beliebigen Punkt Q derselben ein Büschel von Kegelschnitten legt, so trifft jeder Kegelschnitt desselben die Tripelcurve im Allgemeinen noch in zwei neuen Punkten, deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt P der Tripelcurve läuft, welcher der dem Punkte Q conjugirte ist." Die Verbindung dieses Satzes mit 2 liefert den Beweis.

Anmerkung. Hieraus folgt auch sofort der Satz in 3.

II. Beweis. Wir nehmen wieder vier beliebige Punkte $ABCD$ der Tripelcurve C^3 und legen durch sie die Kegelschnitte $\varkappa^2\varkappa_1^2\varkappa_2^2\ldots$, welche C^3 noch in EF, E_1F_1, E_2F_2, ... schneiden. Es treffe EF die C^3 in M und es sei M' der conjugirte Punkt zu M, dann bilden $M'EF$ ein Tripel. Durch dieses Tripel und AB lege man einen Kegelschnitt λ^2, welcher C^3 noch in einem Punkte T trifft, der mit AB zu einem Tripel gehört. Legt man dann durch $ABTM'$ die Kegelschnitte $\lambda^2\lambda_1^2\lambda_2^2\ldots$, so müssen diese C^3 in solchen Punkten treffen, deren Verbindungslinien durch M gehen (vergl. Steiner); deshalb müssen nach 2) auch EF, E_1F_1, E_2F_2, ... durch M gehen.

8. Alle Kegelschnitte, welche dieselben drei Paare von conjugirten Punkten haben, bilden ein Netz.

AA', BB', CC' seien drei Punktpaare; auf ihren Verbindungslinien a, b, c sind durch die Punktpaare drei Involutionen bestimmt, deren Punktpaare $\alpha\alpha'$, $\alpha_1\alpha'_1$, ..., $\beta\beta'$, $\beta_1\beta'_1$, ..., $\gamma\gamma'$, $\gamma_1\gamma'_1$, ... heissen mögen. Sind DE zwei ganz beliebige Punkte, so ist durch diese ein Kegelschnitt bestimmt, der A und A', B und B', C und C' als conjugirte Punkte hat. Denn von allen Kegelschnitten des Büschels $(DE\alpha\alpha')$ geht nur ein einziger durch ein Punktpaar auf b; dasselbe gilt von den Kegelschnitten des Büschels $(DE\alpha_1\alpha'_1)$. Diese beiden Kegelschnitte seien $\varkappa^2$ und $\varkappa_1^2$; sie bestimmen ein Büschel mit den Grundpunkten $DEFG$, dessen Kegelschnitte a und b in den Punktpaaren der Involutionen $\alpha\alpha'$, ... und $\beta\beta'$, ... schneiden. In dem durch $\varkappa^2$ und $\varkappa_1^2$ bestimmten Büschel giebt es nur einen Kegelschnitt, welcher c in einem Punktpaare der Involution $\gamma\gamma'$, ... schneidet, und dieser ist der einzige Kegelschnitt, welcher durch je ein Punktpaar der Involutionen auf a, b, c und durch D und E geht.

Alle Kegelschnitte, welche durch einen Punkt D gehen und AA', BB', CC' als Paare conjugirter Punkte haben, bilden ein Büschel.

Durch D und E, D und E_1 sind zwei Kegelschnitte λ^2, λ_1^2 bestimmt, welche ein Büschel bestimmen; die Kegelschnitte desselben haben sämmtlich AA', BB', CC' als Paare conjugirter Punkte. Ist X ein beliebiger Punkt, so ist der Kegelschnitt, welcher durch D und X geht und AA', BB', CC' als Paare conjugirter Punkte hat, ein Kegelschnitt des Büschels $(\lambda^2\lambda_1^2)$, weil er a, b, c in Punktpaaren der Involutionen $\alpha\alpha'$, ..., $\beta\beta'$, ... $\gamma\gamma'$, ... schneidet und dies dieselben sind, in denen a, b, c von den Kegelschnitten des Büschels $(\lambda^2\lambda_1^2)$ geschnitten werden.

Durch zwei Punkte D und F sind also zwei Büschel bestimmt; sie haben einen Kegelschnitt gemein.

Und zwar ist dies derjenige Kegelschnitt, welcher durch D und F geht und AA', BB', CC' zu Paaren conjugirter Punkte hat. Die Gesammtheit aller Kegelschnitte bildet ein Netz. Durch drei von ihnen sind die übrigen bestimmt, und dies ist die Steiner'sche Definition des Kegelschnittnetzes.

9. **Ist eine Curve dritter Ordnung durch die Schnittpunkte homologer Elemente eines Kegelschnittbüschels und eines projectivischen Strahlenbüschels entstanden, so ist sie eine Tripelcurve.**

Es sei $(ABCD)(\varkappa^2 \varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \ldots) \barwedge M(s s_1 s_2 \ldots)$. Die von beiden erzeugte Curve sei C^3. Die Tangente in M an C^3 schneide die Curve noch in T, so lässt sich erkennen, dass sich durch T an C^3 noch andere Tangenten ziehen lassen. Bestimmt man nämlich auf allen Strahlen durch T zu ihren beiden Schnittpunkten mit C^3 und T den vierten harmonischen, dem T zugeordneten Punkt, so muss der geometrische Ort dieser Punkte die C^3 in M und noch in anderen Punkten treffen. Einer von ihnen sei M'. Man kann nun nach 2) die C^3 durch dasselbe Strahlenbüschel M und ein anderes Kegelschnittbüschel erzeugen, dessen Grundpunkte man dadurch festlegt, dass man durch ABM' und die Punktpaare EF und E_1F_1, in denen s und $\varkappa^2$, s_1 und $\varkappa_1^2$ sich treffen, zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}^2$ und $\mathfrak{K}_1^2$ legt, die sich noch in G schneiden mögen, so dass also $ABGM'$ die vier Grundpunkte sind. Sind E_2F_2, E_3F_3, E_4F_4 die Punkte, in denen s_2, s_3, s_4 von $\varkappa_3^2$, $\varkappa_4^2$, $\varkappa_5^2$ geschnitten werden, so wählen wir drei von ihnen, etwa E_2, E_3, E_4, und legen durch sie eine Tripelcurve $\mathfrak{C}^3$ so, dass sie ABG als ein Tripel, M und M' als conjugirte Punkte hat. — Alle Kegelschnitte $\mu^2 \mu_1^2 \ldots$, welche ABG als Tripel und MM' als conjugirte Punkte haben, bilden ein Büschel. In Bezug auf dasselbe seien E'_2, E'_3, E'_4 die conjugirten Punkte von E_2, E_3, E_4. Sämmtliche Kegelschnitte $\nu^2 \nu_1^2 \ldots$, welche $E_2E'_2$, $E_3E'_3$, $E_4E'_4$ als conjugirte Punkte haben, bilden ein Netz, zu dem also auch das Büschel $\mu^2 \mu_1^2$ gehört und die Tripelcurve $\mathfrak{C}^3$ desselben geht durch $ABGMM'E_2E'_2E_3E'_3E_4E'_4$ und kann (vergl. Steiner a. a. O.) durch ein Kegelschnittbüschel $(ABGM')$ und ein Strahlenbüschel (M) erzeugt werden. Den Kegelschnitten $\mathfrak{K}^2 \mathfrak{K}_1^2 \mathfrak{K}_2^2 \mathfrak{K}_3^2 \mathfrak{K}_4^2$ dieses Büschels, welche durch $EE_1E_2E_3E_4$ gehen, entsprechen die Strahlen $M(EE_1E_2E_3E_4)$ und diesen wieder die Kegelschnitte $\varkappa^2 \varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \varkappa_3^2 \varkappa_4^2$ des Büschels $(ABCD)$. Aus 2) folgt, dass der Punkt G auf C^3 liegt und dass C^3 und $\mathfrak{C}^3$ zusammenfallen.

10. **Wenn die homologen Elemente zweier projectivischen Kegelschnittbüschel sich auf einer Geraden schneiden, so liegen ihre übrigen Schnittpunkte auf einer Tripelcurve.**

Die Kegelschnitte $\varkappa^2 \varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \ldots$ und $\lambda^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots$ der projectivischen Büschel $(ABCD)$ und $(A_1B_1C_1D_1)$ schneiden sich resp. in den Punktpaaren EF, E_1F_1, E_2F_2, ... einer Geraden l und ausserdem in GH, G_1H_1, G_2H_2, ... Wir bezeichnen die Geraden GH, G_1H_1, G_2H_2, ... mit g, g_1, g_2, ..., so ergiebt sich zunächst, dass keine zwei derselben sich auf l

schneiden können. Denn würden etwa g_m und g_n sich in O auf l schneiden, so müssten die Polaren von O in Bezug auf $\varkappa^2{}_m$ und $\lambda^2{}_m$ in eine Gerade o_m zusammenfallen und auf dieser lägen die conjugirten Punkte von O bezüglich beider Büschel. Ebenso müssten die Polaren von O nach $\varkappa^2{}_n$ und $\lambda^2{}_n$ mit o_m zusammenfallen, so dass also O ein gemeinschaftlicher Eckpunkt der zu den Büscheln $(\varkappa^2\varkappa_1{}^2\ldots)$ und $(\lambda^2\lambda_1{}^2\ldots)$ gehörigen Tripel sein müsste, was nicht vorausgesetzt ist. Die Geraden $gg_1\ldots$ mögen l in $JJ_1\ldots$ schneiden, so lässt sich zeigen, dass $(JJ_1\ldots)$ $\barwedge(\varkappa^2\varkappa_1{}^2\ldots)\barwedge(\lambda^2\lambda_1{}^2\ldots)$ ist. Denn erstlich entspricht jedem Paare homologer Kegelschnitte $(\varkappa^2\lambda^2)$ ein Punkt J und zweitens diesem Punkte wieder jenes Kegelschnittpaar, weil es nur einen einzigen Strahl durch J geben kann, auf dem sich zwei homologe Kegelschnitte schneiden.

Schnitten sich drei der Strahlen $gg_1g_2\ldots$, etwa gg_1g_2, in einem Punkte M und wäre

$$M(gg_1g_2g'_3\ldots)\barwedge(\varkappa^2\varkappa_1{}^2\varkappa_2{}^2\varkappa_3{}^2\ldots),$$

so müsste auch, wenn $J'_3\ldots$ die Schnittpunkte von $g'_3\ldots$ mit l wären,

$$(JJ_1J_2J_3\ldots)\barwedge(JJ_1J_2J'_3\ldots)$$

sein, d. h. J'_3 mit J_3 zusammenfallen. In drei von den Punkten $J\ldots$, es seien $J_qJ_rJ_s$, schneiden sich die homologen Elemente $\varkappa_q{}^2\lambda_q{}^2g_q$, $\varkappa_r{}^2\lambda_r{}^2g_r$, $\varkappa_s{}^2\lambda_s{}^2g_s$, so dass also J_q mit E_q und G_q, J_r mit E_r und G_r, J_s mit E_s und G_s und daher auch g'_q mit g_q, g'_r mit g_r, g'_s mit g_s zusammenfällt. Daher schneiden sich in M die sechs Strahlen $gg_1g_2g_qg_rg_s$. Hieraus schliessen wir, dass es keinen zweiten Punkt M' geben kann, in welchem sich drei der Strahlen $g\ldots$ schneiden, weil sonst die drei Strahlen $g_qg_rg_s$ sich auch in ihm treffen müssten. Entweder gehen also durch M alle Strahlen $g\ldots$, oder es wird jeder beliebige derselben, ausgenommen $gg_1g_2g_qg_rg_s$, von allen anderen so geschnitten, dass keine zwei Schnittpunkte zusammenfallen, so dass also die übrigen Strahlen $g\ldots$ Tangenten eines Kegelschnittes sind, der sich aber auf einen Punkt reduciren muss, da sich von allen Punkten der Geraden l nur je eine Tangente an ihn ziehen lässt. Da aber in keinem andern Punkte als M sich drei Gerade $g\ldots$ treffen können, so muss M jener Punkt sein. Wenn also drei der Geraden g sich in einem Punkte treffen, so thun es alle.

Gingen keine drei der Geraden $g\ldots$ durch einen Punkt, müssten sie einen Kegelschnitt einhüllen, der sich aber wieder auf einen Punkt M reducirt, weil von den Punkten von l aus sich nur je eine Tangente an ihn ziehen lässt.

Es treffen sich also alle Strahlen $g\ldots$ in einem Punkte M und daher ist der Ort der Schnittpunkte $(\varkappa^2\lambda^2),\ldots$ eine Curve dritter Ordnung und nach 9) eine Tripelcurve.

Der Satz, dass eine Curve dritter Ordnung, welche durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugt ist, auf unendlich viele Arten durch zwei solche Büschel erzeugt werden kann, ist eigentlich auf einem Umwege bewiesen, indem zuerst gezeigt ist, dass jede Tripelcurve durch zwei solche Büschel auf unzählige Arten hervorgebracht werden kann und jede Curve dritter Ordnung, die durch ein Kegelschnittbüschel und projectivisches Strahlenbüschel erzeugt ist, als eine Tripelcurve betrachtet werden kann. Doch kann man jenen Satz auch direct beweisen, indem man die Aufgabe der Curvenerzeugung gewissermassen umkehrt und die Frage stellt: Wenn auf jeder von drei durch einen Punkt A gehenden Geraden $g g_1 g_2$ noch zwei Punkte BC, $B_1 C_1$, $B_2 C_2$ und ausserdem beliebig zwei Punkte DE angenommen werden, welches ist der geometrische Ort der Punkte XY von der Eigenschaft, dass die Punkte BC, $B_1 C_1$, $B_2 C_2$ mit den vier Punkten $DEXY$ je auf einem Kegelschnitte liegen?

Durch $BCDE$ lege man einen beliebigen Kegelschnitt $\varkappa^2$, so wird er von den Kegelschnitten der beiden Büschel $(DEB_1 C_1)$ und $(DEB_2 C_2)$ in zwei quadratischen Involutionen geschnitten, welche ein Punktpaar XY gemein haben. Die durch dasselbe gehenden Kegelschnitte seien $\varkappa_1^2 \varkappa_2^2$ und die Gerade, welche es verbindet, sei k. Dann sind XY Punkte des gesuchten Ortes. Sind $\lambda^2 \mu^2 \ldots$ andere Kegelschnitte durch $BCDE$, so erhält man auf jedem zwei Punkte $X_1 Y_1$, $X_2 Y_2$, ... des gesuchten Ortes; die Kegelschnitte der Büschel $(BCD_1 E_1)$, $(BCD_2 E_2)$, welche durch sie hindurchgehen, seien $\lambda_1^2 \lambda_2^2$, $\mu_1^2 \mu_2^2$, ... und die Geraden, welche sie verbinden, l, m, ... Ordnen wir je drei Kegelschnitte der Büschel $(BCDE)$, $(BCD_1 E_1)$, $(BCD_2 E_2)$ einander zu, die sich in XY, $X_1 Y_1$, $X_2 Y_2$, .. schneiden, so sind dieselben projectivisch aufeinander bezogen und erzeugen eine Curve.

Die Involutionscentra der quadratischen Involutionen, in denen $\varkappa^2 \lambda^2 \mu^2 \ldots$, also die Kegelschnitte des Büschels $(BCDE)$, von den Kegelschnitten der Büschel $(BCD_1 E_1)$ und $(BCD_2 E_2)$ geschnitten werden und die wir mit $K_1 K_2$, $L_1 L_2$, $M_1 M_2$, ... bezeichnen wollen, liegen auf den Geraden $B_1 C_1$ und $B_2 C_2$ und bilden auf ihnen zwei projectivische Punktreihen. Diese liegen perspectivisch; denn wählen wir aus dem ersten Büschel das Geradenpaar (DE, BC), so ist das Involutionscentrum auf $B_1 C_1$ wie auf $B_2 C_2$ der Punkt A. Daher laufen die Geraden klm .. durch einen Punkt S und die Punkte $XYX_1 Y_1$ .. liegen auf einer Curve K^3 dritter Ordnung, die auch durch jedes der Kegelschnittbüschel $(BCDE)$, $(B_1 C_1 DE)$, $(B_2 C_2 DE)$ und das projectivische Büschel (S) erzeugt werden kann, wenn jedem der Kegelschnitte $\varkappa^2 \varkappa_1^2 \varkappa_2^2$ der Strahl k, $\lambda^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2$ der Strahl l, ... zugewiesen wird.

Wenn wir den Kegelschnitten $\varkappa^2 \varkappa_1^2 \varkappa_2^2$ des Büschels $(XYDE)$ die Geraden $g g_1 g_2$ der Reihe nach zuordnen, so ist dadurch zwischen den Kegelschnitten des Büschels und den Strahlen von (A) eine projectivische Beziehung hergestellt. Die homologen Elemente erzeugen also eine Curve C^3 dritter Ordnung. Wir erhalten eine andere Curve C_1^3 dritter Ordnung, wenn wir das Büschel $(X_1 Y_1 D E)$ wählen und den Kegelschnitten $\lambda^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2$ die Geraden $g g_1 g_2$ zuordnen. Weiter können wir die Kegelschnitte der Büschel $(X Y D E)$ und $(X_1 Y_1 D E)$ projectivisch dadurch aufeinander beziehen, wenn wir der Reihe nach den Kegelschnitten $\varkappa^2 \varkappa_1^2 \varkappa_2^2$ des ersten Büschels die Kegelschnitte $\lambda^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2$ des zweiten zuordnen. Bei dieser Zuordnung entspricht dem Geradenpaare (DE, XY) das Geradenpaar $(DE, X_1 Y_1)$. (Vgl. 1, Anm.) Daraus folgt wieder, wie vorher und wie in 1 gezeigt ist, dass die beiden Büschel $(DEXY)$ und $(DEX_1 Y_1)$ eine Curve dritter Ordnung erzeugen, welche auch durch jedes dieser Büschel und das projectivische Strahlenbüschel (A) erzeugt werden kann. Es müssen also die Curven C^3 und C_1^3 zusammenfallen. Wählen wir andere Kegelschnittbüschel $(DEX_2 Y_2)$, ..., so folgt, dass wir die Curve C^3 durch diese und das projectivische Büschel (A) erzeugen können, wodurch zunächst wieder der Satz 2 bewiesen ist, dass *eine Curve dritter Ordnung, welche durch ein Strahlenbüschel und ein projectivisches Kegelschnittbüschel erzeugt ist, auf unzählige Arten durch dasselbe Strahlenbüschel und andere Kegelschnittbüschel hervorgebracht werden kann.*

Da also alle Punkte $XYX_1Y_1 \ldots$ sowohl auf C^3, wie auf K^3 liegen, so fallen beide Curven zusammen und C^3 kann durch ein Strahlenbüschel (S) und jedes der projectivischen Kegelschnittbüschel $(DEBC)$, (DEB_1C_1), (DEB_2C_2), also auf unzählige Art durch das Büschel (S) und andere projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt werden. Es bleibt noch nachzuweisen, dass S jeder beliebige Punkt von C^3 sein kann. — Wir halten D fest und lassen E auf C^3 sich ändern in $E'E'' \ldots$; es entstand S durch den Durchschnitt von XY mit C^3, XY aber waren die Schnittpunkte von $\varkappa^2$ mit C^3. Wenn wir nun Kegelschnitte durch $BCDE'X$, $BCDE''X$, ... legen, so schneiden sie C^3 in immer neuen Punkten $Y'Y'' \ldots$ und die Geraden XY', XY'', ... treffen C^3 in $S'S'' \ldots$. Lässt man E die Curve C^3 durchlaufen, so durchlaufen auch Y und S dieselbe, so dass also S jeder beliebige Punkt von C^3 sein kann. Damit aber ist ganz allgemein bewiesen:

Ist eine Curve C^3 durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugt, so kann sie auf unendlich viele Arten durch zwei solche Büschel erzeugt werden.

Aus diesem Satze und dem Satze 9 lassen sich viele der wichtigsten Eigenschaften der Curven dritter Ordnung, namentlich auch ihre Polareigenschaften rein synthetisch ableiten.

II. Polareigenschaften.

11. **Zieht man durch einen Punkt A einer Tripelcurve C^3 Gerade $g g_1 \ldots$, welche C^3 noch in BC, $B_1 C_1$, $\cdots$ treffen, so liegen alle Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 \ldots$, welche A von jenen Punkten harmonisch trennen, auf einem Kegelschnitte A^2, der C^3 in A berührt und die erste Polare von A nach C^3 heisst.**

Man denke sich C^3 durch ein Strahlenbüschel (A) und ein projectivisches Kegelschnittbüschel erzeugt, so werden die Polaren von A nach den Kegelschnitten des Büschels ein zu (A) projectivisches Strahlenbüschel (A') bilden und beide Büschel erzeugen den Kegelschnitt A^2.

12. **Sind A und B zwei Punkte von C^3, A^2 und B^2 ihre ersten Polaren, so fällt die Polare von A nach B^2 mit der von B nach A^2 zusammen.**

Die Gerade AB treffe C^3 noch in C; die Polaren A^2 und B^2 treffen AB in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Durch einen Punkt C_1 von C^3 ziehen wir die Geraden AC_1 und BC_1, welche C^3 noch in B_1 und A_1 treffen; die ersten Polaren $A_1{}^2$ und $B_1{}^2$ von A_1 und C_1 treffen die Geraden BA_1 und AB_1 in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$, dann sind $A\mathfrak{A}BC$, $A\mathfrak{A}_1 B_1 C_1$, $B\mathfrak{B}AC$, $B\mathfrak{B}_1 A_1 C_1$ je vier harmonische Punkte, also treffen sich $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, BB_1, CC_1 in einem Punkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, AA_1, CC_1 in einem Punkte $\mathfrak{B}'$, so dass also $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'C$ in einer Geraden liegen. Wenn A_1 mit A und B_1 mit B, also $A_1{}^2$ mit A^2, $B_1{}^2$ mit B^2 zusammenfällt, so geht die Linie $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'C$ in die gemeinsame Polare von A nach B^2 und B nach A^2 über.

13. **Die drei ersten Polaren $A^2 B^2 C^2$ von drei auf einer Geraden g liegenden Punkten ABC der Curve C^3 schneiden sich in denselben vier Punkten. Ordnet man den Kegelschnitten $A^2 B^2 C^2$ die Punkte ABC zu, so ist dadurch zwischen den Kegelschnitten des Büschels und den Punkten von g eine projectivische Beziehung hergestellt der Art, dass, wenn P und Q zwei Punkte von g, P^2 und Q^2 ihre ersten Polaren sind, die Polare von P nach Q^2 mit der von Q nach P^2 zusammenfällt.**

Ist D ein Schnittpunkt von A^2 und B^2, so verbinde man ihn mit ABC. Die Verbindungslinien treffen C^3 in sechs Punkten eines Kegelschnittes, in Bezug auf welchen D und g Pol und Polare sind, also muss C^2 auch durch D und somit durch jeden Schnittpunkt von A^2 und B^2 gehen. — Die Polaren von A nach $A^2 B^2 C^2 P^2$ seien $abcp$, die von $ABCP$ nach A^2 seien $ab'c'p'$, so ist $(abcp) \barwedge (ab'c'p')$ und da wegen 12 b und b', c und c' zusammenfallen, müssen auch p und p', d. h. die Polaren von A nach P^2 und von P nach A^2 zusammenfallen. — Es seien weiter die

Polaren von P nach $A^2B^2C^2P^2Q^2$ mit $a_1b_1c_1p_1q_1$ und die von $ABCPQ$ nach P^2 mit $a'_1b'_1c'_1p_1q'_1$ bezeichnet, so ist

$$(a_1b_1c_1p_1q_1) \overline{\wedge} (a'_1b'_1c'_1p_1q'_1)$$

und da a_1 mit a'_1, b_1 mit b'_1, c_1 mit c'_1 zusammenfällt, so muss auch die Polare q_1 von P nach Q^2 mit der Polare q'_1 von Q nach P^2 zusammenfallen.

14. Zieht man durch einen Punkt P beliebige Geraden $gg_1 \ldots$, welche C^3 in ABC, $A_1B_1C_1$, ... treffen, so bestimmen ihre ersten Polaren $A^2B^2C^2$, $A_1^2B_1^2C_1^2$, ... Büschel. In jedem von ihnen entspricht dem Punkte P derselbe Kegelschnitt P^2, vorausgesetzt, dass die projectivische Beziehung dadurch hergestellt wird, dass den Punkten ABC, $A_1B_1C_1$, ... ihre ersten Polaren zugeordnet werden. P^2 heisst die erste oder conische Polare von P.

Ist X ein beliebiger Punkt von C^3, X^2 seine erste Polare, sind $P^2P_1^2 \ldots$ die dem Punkte entsprechenden Curven, sind $abcp$ die Polaren von X nach $A^2B^2C^2P^2$, $abcp'$ die von $ABCP$ nach X^2, so ist $(abcp) \overline{\wedge} (abcp')$, also fällt p mit p' zusammen. Ebenso folgt, dass, wenn p_1 die Polare von X nach P_1^2 ist, diese mit p' zusammenfallen muss. Da also die Polaren P^2 und P_1^2 die Eigenschaft haben, dass die Polaren aller Punkte X von C^3 nach ihnen in eine Gerade zusammenfallen, so fallen P^2 und P_1^2 selbst zusammen.

Jeder Geraden g ist ein Kegelschnittbüschel zugeordnet, dessen Grundpunkte die vier Pole von g heissen. Dann können wir dem eben bewiesenen Satze den Ausdruck geben:

15. Dreht sich eine Gerade um einen Punkt P, so durchlaufen ihre Pole die erste Polare P^2 von P.

Die Gerade g heisst die zweite oder gerade Polare jedes ihrer vier Pole.

16. Folgerungen:

a) Liegt ein Punkt auf der ersten Polare eines andern, so liegt der zweite auf der geraden Polare des ersten und umgekehrt.

b) Berührt eine Gerade die Tripelcurve C^3, so fallen zwei ihrer Pole mit dem Berührungspunkte zusammen.

c) Die gerade Polare eines Punktes von C^3 berührt C^3 in diesem Punkte.

d) Die ersten Polaren aller Punkte einer Geraden bilden ein Büschel.

e) Die ersten Polaren aller Punkte bilden ein Netz.

17. Die Polaren aller Punkte $P \ldots$ einer Geraden g nach ihren ersten Polaren $P^2 \ldots$ werden von einem

Kegelschnitte G^2 umhüllt, welcher die zweite Polare von g nach C^3 genannt wird und mit dem geometrischen Orte der Pole von g bezüglich aller P^2 oder mit dem Orte der den Punkten $P\ldots$ von g bezüglich des Büschels $(P^2\ldots)$ conjugirten Punkte zusammenfällt. Der Pol von g nach P^2 fällt dabei mit dem zu P conjugirten Punkte zusammen.

Ist Q ein ganz beliebiger Punkt, so bilden seine Polaren bezüglich aller $P^2\ldots$ ein zur Punktreihe $P\ldots$ projectivisches Strahlenbüschel, von dessen Strahlen zwei durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen. Diese seien P_1 und P_2, ihre ersten Polaren P_1^2 und P_2^2, so treffen sich die Polaren von P_1 nach P_1^2 und von P_2 nach P_2^2 in Q und es giebt auf g keinen andern Punkt, dessen Polare nach seiner ersten Polare durch Q geht. Daher werden alle diese Polaren von einem Kegelschnitte G^2 eingehüllt. — Es seien $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\ldots$ die Pole von g nach $P^2 P_1^2\ldots$, $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}'_1\ldots$ die conjugirten Punkte zu $PP_1\ldots$. Die Polare p_1 von P nach P_1^2 muss durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ und, da sie mit der Polare von P_1 nach P^2 zusammenfällt, auch durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'_1$ gehen; die Polare von P_2 nach P_2^2 muss durch $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}'$ und, da sie mit der Polare von P_2 nach P^2 zusammenfällt, auch durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'_2$ gehen u. s. f. Da also $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ sowohl auf p_1, als auf p_2, p_3, ... liegen, so müssen sie in einen Punkt zusammenfallen. — Die Polaren von $\mathfrak{P}$ bezüglich aller $P^2\ldots$ schneiden sich in dem zu $\mathfrak{P}$ conjugirten Punkte P und die Polare von P nach P^2 ist die einzige eines Punktes von g nach seiner ersten Polare, welche durch $\mathfrak{P}$ geht, also liegt $\mathfrak{P}$ auf G^2.

18. Liegt ein Punkt P_1 auf der Polare eines andern P_2 nach seiner conischen Polare P_2^2, so liegt der letzte auf der conischen Polare P_1^2 des ersten.

Wenn P_1 auf der Polare von P_2 nach seiner conischen Polare P_2^2 liegt, so muss P_2 auf der Polare von P_1 nach P_2^2 oder auf der Polare von P_2 nach P_1^2, welches nach 13 dieselbe Gerade ist, liegen, d. h. es muss der Berührungspunkt dieser Geraden mit P_1^2 sein oder auf P_1^2 liegen.

Hieraus folgt unmittelbar der Satz:

18*a*. Die gerade Polare eines Punktes P nach C^3 fällt mit seiner Polare nach seiner conischen Polare P^2 zusammen,

den man auch auf folgende Art beweisen kann:

Alle conischen Polaren, welche durch einen Punkt P gehen, bilden ein Büschel. In ihm kommen drei Geradenpaare vor (ll_1), $(l'l'_1)$, $(l''l''_1)$, deren Pole Q, Q', Q'' sein mögen. Die geraden Polaren aller Punkte von l und l_1 müssen sich in Q, von l' und l'_1 in Q', von l'' und l''_1 in Q'' schneiden, also ist die gerade Polare von P die Gerade $QQ'Q''$, denn sie muss durch jeden dieser drei Punkte gehen. Wenn l durch P geht und C^3 in ABC schneidet, so fallen die geraden Polaren von ABC mit den Tangenten in diesen Punkten an C^3 oder mit den Polaren von ABC bezüglich der conischen Polaren $A^2B^2C^2$ dieser Punkte zusammen. Es umhüllen die Polaren der Punkte von l bezüglich der conischen Polaren dieser Punkte einen Kegelschnitt, der sich auf den Punkt Q reduciren muss, weil die Polaren von ABC bezüglich $A^2B^2C^2$ durch Q gehen, also muss die Polare von P bezüglich der conischen Polare P^2 von P durch Q gehen. Auf ganz dieselbe Weise zeigt man, dass diese Polare auch durch Q' und Q'' gehen muss und also mit $QQ'Q''$ zusammenfällt.

Ueber die Lage der Scheitel der drei Geradenpaare eines Büschels conischer Polaren und ihrer Pole, sowie über die gegenseitige Bedeutung dieser sechs Punkte geben uns die Sätze 14, 17 und 18 Aufschluss. Die Scheitel der drei Geradenpaare (ll_1), $(l'l'_1)$, $(l''l''_1)$, welche in einem Büschel conischer Polaren vorkommen, seien $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{Q}''$; ihre Pole Q, Q', Q''. Es muss die Polare von Q bezüglich $(l'l'_1)$ mit der von Q' bezüglich (ll_1) zusammenfallen und da erstere durch $\mathfrak{Q}'$, letztere durch $\mathfrak{Q}$ gehen muss, so ist $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$ die gemischte gerade Polare von Q und Q'. Daher muss $\mathfrak{Q}'Q$ von $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}$ durch $l'l'_1$ und $\mathfrak{Q}Q'$ von $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$ durch ll_1 harmonisch getrennt sein, folglich ist Q der Schnittpunkt von $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}''$, und Q' der von $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}''$ mit der Geraden g, auf welcher $QQ'Q''$ liegen. Ebenso zeigt man, dass Q'' auf $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$ liegt, und so folgt:

19. Die Pole derjenigen conischen Polaren eines Büschels, welche Geradenpaare sind, bilden mit den Scheiteln der letzteren die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits.

Die conische Polare von $\mathfrak{Q}$ sei $\mathfrak{Q}^2$. Da die gerade Polare von Q auch die Polare von Q bezüglich Q^2 oder (ll_1) ist, so muss sie durch $\mathfrak{Q}$ gehen und daher muss Q sowohl auf der geraden, wie auf der conischen Polare von $\mathfrak{Q}$ liegen. — Ferner ist die Polare von $\mathfrak{Q}$ bezüglich aller conischen Polaren $P^2 \ldots$ der Punkte $P \ldots$ der Geraden g oder $QQ'Q''$ die Gerade $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}''$ und daher müssen die Polaren aller Punkte $P \ldots$ von g bezüglich $\mathfrak{Q}^2$ auch in die Gerade $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}''$ fallen, welche durch Q geht. Dies aber ist nicht anders möglich, als wenn $\mathfrak{Q}^2$ in zwei Gerade zerfällt, deren Scheitel in Q liegt, so dass dadurch der Satz gewonnen ist:

20. Ist die conische Polare eines Punktes Q ein Geradenpaar mit dem Scheitel $\mathfrak{Q}$, so ist die conische Polare von $\mathfrak{Q}$ auch ein Geradenpaar mit dem Scheitel Q.

Auf jeder Geraden g giebt es drei Punkte, deren conische Polaren Geradenpaare sind, also liegen sie sämmtlich auf einer Curve dritter Ordnung und wir folgern mit Hilfe des letzten Satzes:

21. **Die Pole derjenigen conischen Polaren, welche Geradenpaare sind, sowie die Scheitel der letzteren liegen auf einer Curve dritter Ordnung K^3, welche die Hesse'sche Curve von C^3 genannt wird.**

Sind $ABCDEFGHJ$ die neun Grundpunkte eines Büschels von Tripelcurven $C^3 C_1^3 \ldots$, so können wir jede erzeugt denken durch das Kegelschnittbüschel $(ABCD)$ und Strahlenbüschel (S), (S_1), ..., deren Scheitel auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ liegen, welcher durch die fünf Punkte $EFGHJ$ geht. Da die Büschel (S), (S_1), ... in projectivischer Beziehung stehen, so schneiden sie $\mathfrak{K}$ in projectivischen Punktreihen, die aber sämmtlich zusammenfallen müssen, weil die fünf homologen Punkte $EFGHJ$ zusammenfallen. Diese Punktreihe auf $\mathfrak{K}$ sei $TT'T'' \ldots$. Durch A ziehen wir eine Gerade g, welche die Kegelschnitte des Büschels $(ABCD)$ in einer zu diesem und daher auch zu $TT'T'' \ldots$ projectivischen Punktreihe $MM'M'' \ldots$ schneidet. Die Büschel (S), (S_1), ... schneiden g in den zu den vorigen projectivischen Punktreihen $NN'N'' \ldots$, $N_1 N'_1 N''_1 \ldots$, ... Jede von diesen hat zwei Punkte, die mit ihren homologen in der Reihe $MM'M'' \ldots$ zusammenfallen, und diese Punkte sind die Schnittpunkte von g mit $C^3 C_1^3 \ldots$. Um sie zu finden, wähle man einen beliebigen Punkt Q, dann ist das Büschel $Q(MM'M'' \ldots) \,\overline{\wedge}\, (S) \,\overline{\wedge}\, (S_1) \,\overline{\wedge} \ldots$ Das Büschel Q erzeugt mit jedem der anderen einen Kegelschnitt $[QS]$, $[QS_1]$, ... Alle diese Kegelschnitte gehen durch Q. Die Strahlen des Büschels $Q(MM'M'' \ldots)$ schneiden $\mathfrak{K}$ in einer zur Reihe $TT'T'' \ldots$ projectivischen Involution, von deren Punkten drei mit den homologen der Reihe $(TT'T'' \ldots)$ zusammenfallen. Nennen wir diese drei Punkte $Q'Q''Q''' \ldots$, so bilden alle Kegelschnitte $[QS]$, $[QS_1]$, ... ein Büschel mit den vier Grundpunkten $QQ'Q''Q'''$ und schneiden also g in einer Involution. Da aber die Schnittpunkte von g und $[QS]$ mit denen von g und C^3 zusammenfallen, so folgt:

22. **Jede Gerade durch einen der Grundpunkte eines Büschels von Tripelcurven wird von diesen Curven in einer quadratischen Involution geschnitten.**

Die Transversale g schneide die Curven $C^3 C_1^3 \ldots$ in den Punktpaaren $B'C'$, $B'_1 C'_1$, ... Man lege durch diese Punkte die Kegelschnitte $K^2 K_1^2 \ldots$ eines Büschels und durch A eine beliebige Gerade l, so sind (K^2, l), (K_1^2, l), ... Curven dritter Ordnung. Ist P ein beliebiger Punkt von l, so lässt sich zeigen, dass die conischen Polaren desselben bezüglich (K^2, l), ... ein Kegelschnittbüschel bilden. Da (K^2, l) eine Tripelcurve ist, so gelten von ihr die oben abgeleiteten Sätze über Polaren der Tripelcurven. Unter den Kegelschnitten des Büschels $(K^2 K_1^2 \ldots)$ giebt es drei Geradenpaare (xx_1), (yy_1), (zz_1), deren Scheitel XYZ sein mögen. Sind $\xi^2 \xi_1^2 \ldots$, $\eta^2 \eta_1^2 \ldots$, $\zeta^2 \zeta_1^2 \ldots$ die conischen Polaren von XYZ bezüglich (K^2, l), (K_1^2, l), ..., so schneiden alle $\xi^2 \ldots$ die Geraden

xx_1, alle $\eta^2 \ldots$ die Geraden yy_1, alle $\zeta^2 \ldots$ die Geraden zz_1 in denselben vier Punkten und bilden daher drei Büschel. Die conischen Polaren von P bezüglich $(K^2, l), \ldots$ seien $\pi^2 \ldots$. Es treffen sich die Polaren von P bezüglich $\xi^2 \ldots$, $\eta^2 \ldots$, $\zeta^2 \ldots$ in drei Punkten X', Y', Z', welche dem Punkte P bezüglich jener Kegelschnittbüschel conjugirt sind, und weil die Polare von P bezüglich ξ^2 mit der von X bezüglich π^2 zusammenfällt, so sind XX', YY', ZZ' conjugirte Punktpaare bezüglich aller $\pi^2 \ldots$. Zwei von den Kegelschnitten $K^2 \ldots$ berühren l in MM', dann sind die conischen Polaren $\mu^2 \ldots$ von M Geradenpaare mit dem gemeinsamen Scheitel M'. Weil nun die Polaren von P bezüglich aller $\mu^2 \ldots$ sich in M' schneiden, so müssen auch die Polaren von M bezüglich aller $\pi^2 \ldots$ sich in M' schneiden, d. h. M und M' sind auch conjugirte Punkte in Bezug auf alle $\pi^2 \ldots$. Letztere haben also vier Paare conjugirter Punkte und bilden daher ein Kegelschnittbüschel. Sind $P^2 P_1^2 \ldots$ die conischen Polaren von P in Bezug auf $C^3 C_1^3 \ldots$, so müssen P^2 und π^2, P_1^2 und $\pi_1^2, \ldots$ sich in denselben Punkten auf l schneiden, also schneiden alle $P^2 \ldots$ die Gerade l in den Punktpaaren einer Involution. Zieht man von P aus durch die übrigen acht Grundpunkte $BCDEFGHJ$ Gerade, so folgt ebenso, dass jede dieser acht Geraden von den Kegelschnitten $P^2 \ldots$ in einer Involution geschnitten wird. Also treffen sich alle $P^2 \ldots$ in denselben vier Punkten. Es folgt:

23. Die conischen Polaren $P^2 P_1^2 \ldots$ eines Punktes P in Bezug auf die Tripelcurven eines Büschels bilden selbst ein Büschel.

Hiermit wären einige Hauptsätze über die Polaren der ebenen Curven dritter Ordnung auf synthetischem Wege abgeleitet.

Kleinere Mittheilungen.

XXII. Eine einfache Darstellungsform der vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung.

Bedeutet $f(x)$ eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe und $D_x^\mu . \{f(x)\}$ eine Reihe, die sich aus der ersten dadurch ergiebt, dass jedes Glied von der Form $A_h x^h$ mit dem Factor

$$\frac{\Gamma(h+1)}{\Gamma(h+1-\mu)} x^{-\mu}$$

multiplicirt wird, so hat man bekanntlich folgende Transformation:

$$D_x^\mu . \{f(x)\} = \frac{x^{-\mu}}{\Gamma(-\mu)} . \int_0^1 f(xt)(1-t)^{-\mu-1} dt,$$

die ohne Schwierigkeit durch Benutzung der Formel

$$\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$$

hergeleitet werden kann. Für $f(x) = x^\alpha (1-x)^\gamma$ und $\mu = -\beta - 1$ folgt hieraus

$$\int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta (1-xt)^\gamma dt = \frac{\Gamma(\beta+1)}{x^{\alpha+\beta+1}} D_x^{-\beta-1} . \{x^\alpha (1-x)^\gamma\}.$$

Um daraus die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung K und E zu bilden, hat man einmal

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}, \quad \beta = -\tfrac{1}{2}, \quad \gamma = -\tfrac{1}{2}, \quad x = k^2,$$

das andere Mal

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}, \quad \beta = -\tfrac{1}{2}, \quad \gamma = +\tfrac{1}{2}, \quad x = k^2$$

zu setzen. Alsdann ergeben sich die interessanten Formeln

$$K = \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{k^2}^{-1/2} . \left\{\frac{1}{k k'}\right\},$$

$$E = \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{k^2}^{-1/2} . \left\{\frac{k'}{k}\right\}.$$

Entwickelt man die Ausdrücke $\frac{1}{k k'}$, resp. $\frac{k'}{k}$ nach steigenden Potenzen von k^2, also

$$\frac{1}{kk'} = (k^2)^{-1/2} + \tfrac{1}{2}(k^2)^{+1/2} + \frac{1.3}{2.4}(k^2)^{+3/2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}(k^2)^{+5/2} + \ldots,$$

$$\frac{k'}{k} = (k^2)^{-1/2} - \tfrac{1}{2}(k^2)^{+1/2} - \frac{1.3}{2.4}\frac{(k^2)^{+3/2}}{3} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{(k^2)^{+5/2}}{5} - \ldots,$$

führt dann die durch das Zeichen D angedeutete Rechnungsoperation aus und multiplicirt mit $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, so findet man die bekannten Reihenentwickelungen für K und E.

Bromberg. A. Radicke.

XXIII. Eine analytische Auflösung der Aufgabe des Apollonius.

I. Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ gleichartig berührt.

Bezeichnen (a_1, b_1, r_1), (a_2, b_2, r_2), (a_3, b_3, r_3), (u, v, h) die rechtwinkligen Mittelpunktscoordinaten und Halbmesser der drei gegebenen und des gesuchten Kreises, so verlangt die Aufgabe die Auflösung der drei nothwendigen und hinreichenden Gleichungen

$$1)\qquad \left\{\begin{array}{l} (r_1+h)^2-(u-a_1)^2-(v-b_1)^2=0, \\ (r_2+h)^2-(u-a_2)^2-(v-b_2)^2=0, \\ (r_3+h)^2-(u-a_3)^2-(v-b_3)^2=0 \end{array}\right.$$

nach den Unbekannten u, v, h.

Durch Entwickelung der Quadrate und Einführung der vierten Unbekannten $t=h^2-u^2-v^2$ verwandelt sich dieses Gleichungssystem in das gleichgeltende, aber einfachere

$$2)\qquad \left\{\begin{array}{l} t+2a_1u+2b_1v+2r_1h+r_1^2-a_1^2-b_1^2=0, \\ t+2a_2u+2b_2v+2r_2h+r_2^2-a_2^2-b_2^2=0, \\ t+2a_3u+2b_3v+2r_3h+r_3^2-a_3^2-b_3^2=0, \\ t=u^2+v^2-h^2=0. \end{array}\right.$$

Um dasselbe aufzulösen, sind mit Hilfe der drei ersten Gleichungen t, u, v durch h auszudrücken, was immer möglich ist, wofern nur der Ausdruck

$$a_2b_3-a_3b_2+a_3b_1-a_1b_3+a_1b_2-a_2b_1$$

von Null verschieden ist, d. h. wofern nur die Mittelpunkte der drei gegebenen Kreise nicht in einer Geraden liegen, und die gefundenen Werthe in die vierte Gleichung einzusetzen, welche alsdann die Unbekannte h bestimmt.

Am Einfachsten ist folgendes Verfahren:

Man bestimme aus den auflösbaren linearen Gleichungen

$$3)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1A+b_1B+C+r_1=0, \\ a_2A+b_2B+C+r_2=0, \\ a_3A+b_3B+C+r_3=0 \end{array}\right.$$

die Coefficienten A, B, C und setze, mit ξ, η, ζ drei neue Unbekannte bezeichnend, in 2), um h zu beseitigen,

4) $$u = \xi + Ah, \quad v = \eta + Bh, \quad t = \zeta + 2Ch.$$

Das Resultat wird den Gleichungen 3) zufolge

5) $$\left\{\begin{array}{l} \zeta + 2a_1\xi + 2b_1\eta + r_1^2 - a_1^2 - b_1^2 = 0, \\ \zeta + 2a_2\xi + 2b_2\eta + r_2^2 - a_2^2 - b_2^2 = 0, \\ \zeta + 2a_3\xi + 2b_3\eta + r_3^2 - a_3^2 - b_3^2 = 0, \\ h^2(1 - A^2 - B^2) - 2(A\xi + B\eta + C)h - \zeta - \xi^2 - \eta^2 = 0. \end{array}\right.$$

Die drei ersten dieser Gleichungen, welche in Bezug auf ξ, η, ζ linear sind, geben unmittelbar die Werthe dieser Unbekannten und führen, in der Form

$$(\xi - a_1)^2 + (\eta - b_1)^2 - r_1^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta,$$
$$(\xi - a_2)^2 + (\eta - b_2)^2 - r_2^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta,$$
$$(\xi - a_3)^2 - (\eta - b_3)^2 - r_3^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta$$

geschrieben, zu dem Schlusse, dass, wenn mit a, b, r die rechtwinkligen Mittelpunktscoordinaten und der Halbmesser des Kreises bezeichnet werden, welcher die drei gegebenen Kreise unter rechten Winkeln schneidet,

6) $$\xi = a + Ah, \quad \eta = b + Bh, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta = r^2$$

zu setzen ist. Nach 4), 6), 2) wird dann

7) $$\left\{\begin{array}{c} u = a + Ah, \\ v = b + Bh, \\ u^2 + v^2 - h^2 = a^2 + b^2 - r^2 - 2Ch \end{array}\right.$$

und, wenn zur Abkürzung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = \mathfrak{K},$$
$$Ax \quad + \quad By \quad + C = \mathfrak{A}$$

gesetzt wird, identisch

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 - h^2 = \mathfrak{K} - 2h\mathfrak{A}.$$

Zur Bestimmung von h dient die vierte Gleichung in 5), nämlich

$$(1 - A^2 - B^2)h^2 - 2(Aa + Bb + C)h - r^2 = 0,$$

deren Wurzeln h', h'' seien.

Es entsprechen demnach den Bedingungen der Aufgabe zwei Kreise, deren Gleichungen

$$\mathfrak{K} - 2h'\mathfrak{A} = 0,$$
$$\mathfrak{K} - 2h''\mathfrak{A} = 0$$

sind und besagen, dass die gesuchten Kreise beide zu derjenigen Kreisschaar gehören, welche durch den Kreis

$$\mathfrak{K} = 0$$

und die Gerade

$$\mathfrak{A} = 0$$

bestimmt ist. Diese Gerade ist, da den Gleichungen 3) zufolge die von den Mittelpunkten der gegebenen Kreise auf dieselbe gefällten Lothe den Halbmessern r_1, r_2, r_3 proportional sind, diejenige, auf welcher die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ liegen. Dies folgt auch einfach daraus, dass der Ausdruck $\mathfrak{A}$ verschwindet, wenn man die Coordinaten

$$\frac{r_2 a_3 - r_3 a_2}{r_2 - r_3}, \quad \frac{r_2 b_3 - r_3 b_2}{r_2 - r_3} \text{ u. s. w.}$$

der äusseren Aehnlichkeitspunkte einsetzt und die Gleichungen 3) berücksichtigt.

Um also die gesuchten Kreise zu finden, reicht es hin, zwei Kreise zu zeichnen, welche zur Schaar $(\mathfrak{K}, \mathfrak{A})$ gehören und einen der gegebenen Kreise, etwa $\mathfrak{K}_1$, berühren. Zu diesem Ende hat man die Polare des Durchschnittspunktes der Aehnlichkeitslinie $\mathfrak{A}$ mit der gemeinschaftlichen Sehne von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$, welcher der Punkt gleicher Potenzen der Kreise $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$ und der gesuchten Kreise ist, in Bezug auf den Kreis $\mathfrak{K}_1$ zu ziehen und die Punkte, in welchen diese Polare den Kreis $\mathfrak{K}_1$ schneidet, mit dem Mittelpunkte desselben durch gerade Linien zu verbinden. Diese Geraden treffen das vom Punkte gleicher Potenzen (a, b) auf $\mathfrak{A}$ gefällte Loth in den Mittelpunkten der gesuchten Kreise.

Die Gergonne'sche Construction ergiebt sich unmittelbar, wenn man erwägt, dass die erwähnte Polare den Pol von $\mathfrak{A}$ in Bezug auf $\mathfrak{K}_1$ und den Punkt gleicher Potenzen (a, b) der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ enthalten muss.

Eine ähnliche Rechnung zeigt, dass jeder zur Schaar $(\mathfrak{K}, \mathfrak{A})$ gehörende Kreis die drei gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln schneidet.

Nimmt man statt der äussern Aehnlichkeitslinie $\mathfrak{A}$ der Reihe nach die drei inneren, welche die inneren Aehnlichkeitspunkte je zweier Kreispaare und den äussern des dritten Paares enthalten, was der Behaftung eines der Halbmesser r_1, r_2, r_3 in den Gleichungen 1), 2), 3) mit dem negativen Vorzeichen entspricht, so erhält man durch die nämliche Construction die sechs Kreise, welche $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ ungleichartig berühren.

II. Auf der Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser $= 1$ ist, sind drei Kreise gegeben; es soll ein Kreis gefunden werden, welcher diese Kreise gleichartig berührt.

Bezeichnen (a_1, b_1, c_1, r_1), (a_2, b_2, c_2, r_2), (a_3, b_3, c_3, r_3), (u, v, w, h) die rechtwinkligen, auf den Mittelpunkt der Kugel als Anfangspunkt bezogenen Coordinaten der Mittelpunkte und die sphärischen Halbmesser der drei gegebenen und des gesuchten Kreises, so sind die nothwendigen und hinreichenden Gleichungen der Aufgabe

$$8) \quad \begin{cases} a_1 u + b_1 v + c_1 w = \cos(h + r_1), \\ a_2 u + b_2 v + c_2 w = \cos(h + r_2), \\ a_3 u + b_3 v + c_3 w = \cos(h + r_3), \end{cases}$$

welche mit Hilfe der Gleichung

9) $$u^2+v^2+w^2=1$$

die Unbekannten u, v, w, h bestimmen.

Man suche aus den Gleichungen

10) $$\begin{cases} a_1 A + b_1 B + c_1 C + \sin r_1 = 0, \\ a_2 A + b_2 B + c_2 C + \sin r_2 = 0, \\ a_3 A + b_3 B + c_3 C + \sin r_3 = 0, \end{cases}$$

welche immer und nur auf eine Art auflösbar sind, wofern die Mittelpunkte der gegebenen Kreise nicht auf einem grössten Kreise liegen, die Coefficienten A, B, C und setze, mit ξ, η, ζ drei neue Unbekannte bezeichnend,

11) $$u=\xi+A\sin h,\quad v=\eta+B\sin h,\quad w=\zeta+C\sin h.$$

Es verwandeln sich alsdann die Gleichungen 8) in

12) $$\begin{cases} a_1\xi+b_1\eta+c_1\zeta=\cos r_1 \cos h, \\ a_2\xi+b_2\eta+c_2\zeta=\cos r_2 \cos h, \\ a_3\xi+b_3\eta+c_3\zeta=\cos r_3 \cos h. \end{cases}$$

Bezeichnen ferner (a, b, c, r) die rechtwinkligen Mittelpunktscoordinaten und den sphärischen Halbmesser des Kreises, welcher die drei gegebenen Kreise unter rechten Winkeln schneidet, so hat man

13) $$\begin{cases} a_1 a+b_1 b+c_1 c=\cos r_1 \cos r, \\ a_2 a+b_2 b+c_2 c=\cos r_2 \cos r, \\ a_3 a+b_3 b+c_3 c=\cos r_3 \cos r. \end{cases}$$

Aus 12) und 13) folgt

$$a_1(\xi\cos r-a\cos h)+b_1(\eta\cos r-b\cos h)+c_1(\zeta\cos r-c\cos h)=0,$$
$$a_2(\xi\cos r-a\cos h)+b_2(\eta\cos r-b\cos h)+c_2(\zeta\cos r-c\cos h)=0,$$
$$a_3(\xi\cos r-a\cos h)+b_3(\eta\cos r-b\cos h)+c_3(\zeta\cos r-c\cos h)=0$$

und hieraus

$$\xi\cos r-a\cos h=\eta\cos r-b\cos h=\zeta\cos r-c\cos h=0,$$
$$\xi=\frac{\cos h}{\cos r}a,\quad \eta=\frac{\cos h}{\cos r}b,\quad \zeta=\frac{\cos h}{\cos r}c.$$

Die Unbekannten u, v, w haben demnach nach 11) folgende Werthe:

$$u=\frac{\cos h}{\cos r}a+A\sin h,$$
$$v=\frac{\cos h}{\cos r}b+B\sin h,$$
$$w=\frac{\cos h}{\cos r}c+C\sin h$$

und es ist identisch

14) $$ux+vy+wz-\cos h=\frac{\cos h}{\cos r}(ax+by+cz-\cos r) + \sin h(Ax+By+Cz).$$

Die Gleichung zur Bestimmung von h ergiebt sich durch Einsetzung der Werthe von u, v, w in 9) und lautet

$$(1-A^2-B^2-C^2)\sin^2 h-2\left(\frac{Aa+Bb+Cc}{\cos r}\right)\sin h\cos h-tg^2 r\cos^2 h=0.$$

Die Identität 14) zeigt, dass die zwei den Bedingungen der Aufgabe genügenden Kreise zu derjenigen sphärischen Kreisschaar gehören, welche durch den Kreis

$$\mathfrak{K}=ax+by+cz-\cos r=0$$

und den grössten Kreis

$$\mathfrak{A}=Ax+By+Cz=0$$

bestimmt wird. Dieser letztere ist derjenige, auf welchem den Gleichungen 10) zufolge die Punkte, deren Coordinaten den Ausdrücken

$$\begin{array}{lll} a_2\sin r_3-a_3\sin r_2, & b_2\sin r_3-b_3\sin r_2, & c_2\sin r_3-c_3\sin r_2, \\ a_3\sin r_1-a_1\sin r_3, & b_3\sin r_1-b_1\sin r_3, & c_2\sin r_1-c_1\sin r_3, \\ a_1\sin r_2-a_2\sin r_1, & b_1\sin r_2-b_2\sin r_1, & c_1\sin r_2-c_2\sin r_1 \end{array}$$

proportional sind, d. h. die äusseren Aehnlichkeitspunkte je zweier der gegebenen Kreise liegen.

Die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, einen Kreis zu construiren, welcher zur Schaar ($\mathfrak{K}$, $\mathfrak{A}$) gehört und einen der gegebenen Kreise, etwa $\mathfrak{K}_1$, berührt. Zu diesem Ende hat man durch die Durchschnittspunkte der Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ einen grössten Kreis zu legen und von dem Durchschnittspunkte desselben mit dem Kreise $\mathfrak{A}$ die sphärischen Tangenten an $\mathfrak{K}_1$ zu ziehen. Verbindet man hierauf die Berührungspunkte mit dem Mittelpunkte von $\mathfrak{K}_1$ durch Bogen grösster Kreise, so treffen diese letzteren das vom Mittelpunkte des Kreises $\mathfrak{K}$ auf den Kreis $\mathfrak{A}$ gefällte sphärische Loth in den sphärischen Mittelpunkten der gesuchten Kreise.

Die Kreise, welche die drei gegebenen ungleichartig berühren, erhält man ähnlich wie unter 1.

III. Die Aufgabe, eine Kugel zu construiren, welche vier gegebene Kugeln, deren Mittelpunkte nicht in einer Ebene liegen, gleichartig berührt, kann in ähnlicher Weise gelöst werden.

Es sei

$$K=(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2-h^2=0$$

die Gleichung der gesuchten,

$$\mathfrak{K}=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0$$

die Gleichung derjenigen Kugel, welche alle vier gegebenen Kugeln unter rechten Winkeln schneidet. Bezeichnen (a_1, b_1, c_1, r_1), (a_2, b_2, c_2, r_2), (a_3, b_3, c_3, r_3), (a_4, b_4, c_4, r_4) die rechtwinkligen Mittelpunktscoordinaten und Halbmesser der gegebenen Kugeln, so bestehen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen der Aufgabe darin, dass der Ausdruck K für

$$\begin{array}{lll} x=a_1, & y=b_1, & z=c_1, \\ x=a_2, & y=b_2, & z=c_2, \end{array}$$

$$x = a_3, \quad y = b_3, \quad z = c_3,$$
$$x = a_4, \quad y = b_4, \quad z = c_4$$

bezüglich die Werthe $2hr_1 + r_1^2$, $2hr_2 + r_2^2$, $2hr_3 + r_3^2$, $2hr_4 + r_4^2$ annehmen muss. Da nun $\mathfrak{K}$ für die nämlichen Werthe von x, y, z die Werthe r_1^2, r_2^2, r_3^2, r_4^2 annimmt, so muss der lineare Ausdruck $K - \mathfrak{K}$ für die genannten Werthe bezüglich $= 2hr_1$, $2hr_2$, $2hr_3$, $2hr_4$ werden. Hierdurch ist derselbe aber vollkommen bestimmt. Denn setzt man

$$K - \mathfrak{K} = 2h(Ax + By + Cz + D),$$

so muss

$$Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 + D = r_1,$$
$$Aa_2 + Bb_2 + Cc_2 + D = r_2,$$
$$Aa_3 + Bb_3 + Cc_3 + D = r_3,$$
$$Aa_4 + Bb_4 + Cc_4 + D = r_4$$

sein. Diese Gleichungen sind immer und nur auf eine Weise auflösbar und zeigen, dass der Ausdruck

$$\mathfrak{A} = Ax + By + Cz + D$$

für

$$x = \frac{r_1 a_2 - r_2 a_1}{r_1 - r_2}, \quad y = \frac{r_1 b_2 - r_2 b_1}{r_1 - r_2}, \quad z = \frac{r_1 c_2 - r_2 c_1}{r_1 - r_2},$$
$$x = \frac{r_1 a_3 - r_3 a_1}{r_1 - r_3}, \quad y = \frac{r_1 b_3 - r_3 b_1}{r_1 - r_3}, \quad z = \frac{r_1 c_3 - r_3 c_1}{r_1 - r_3}$$

u. s. w. verschwindet, d. h. dass die Ebene

$$\mathfrak{A} = 0$$

alle sechs äusseren Aehnlichkeitspunkte je zweier der vier gegebenen Kugeln enthalten muss.

Da also

$$K = \mathfrak{K} + 2h\mathfrak{A}$$

gefunden worden ist, so schliesst man, dass die gesuchte Kugel zu der Kugelschaar gehören muss, welche durch die Kugel $\mathfrak{K} = 0$ und die Ebene $\mathfrak{A} = 0$ bestimmt wird und dass die Aufgabe auf die einfachere zurückgeführt ist: Eine Kugel zu construiren, welche zur Schaar $(\mathfrak{K}, \mathfrak{A})$ gehört und eine der gegebenen Kugeln, etwa $\mathfrak{K}_1$, berührt. Hierzu wird man durch die Mittelpunkte von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ eine Ebene senkrecht zu $\mathfrak{A}$ legen und in dieser Ebene diejenigen zwei Kreise suchen, welche mit dem Durchschnittskreise von $\mathfrak{K}$ und der Spur von $\mathfrak{A}$ zu derselben Kreisschaar gehören und den Durchschnittskreis von $\mathfrak{K}_1$ berühren. Diese zwei Kreise bilden je einen grössten Kreis zweier Kugeln, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Krakau. Dr. MERTENS.

XXIV. Zur Geometrie der Geraden.

Im Mittelpunkte o der Strecke, welche zu zwei Geraden G, G' normal steht, schneiden sich bekanntlich rechtwinklig zwei Gerade $o\alpha$, $o\beta$, welche in einer Ebene parallel zu G, G' und beziehungsweise in zwei Ebenen e, e' liegen, die den Winkel (G, G') und seinen Nebenwinkel normal halbiren. Die $\begin{Bmatrix} o\,\alpha \\ o\,\beta \end{Bmatrix}$ halbirt normal die zwischen G und G' liegenden Strecken einer Regelschaar $\begin{Bmatrix} R \\ R' \end{Bmatrix}$, rücksichtlich welcher die Geraden G, G' und die unendlich ferne der $\begin{Bmatrix} e' \\ e \end{Bmatrix}$ Leitstrahlen sind.

Durch die Regelschaaren R, R' sind sämmtliche Richtungen der Geraden gegeben, welche gegen G und G' gleich geneigt sind.

Je zwei Ebenen, die, einen Strahl S der Schaar R enthaltend, durch $o\alpha$ und normal zu $o\alpha$ gelegt werden, halbiren den Flächenwinkel (SG, SG') und seinen Nebenwinkel; sie werden daher von Geraden parallel zu S erfüllt, welche gegen G, G' gleich geneigt und von G, G' gleich entfernt sind.

Da Gleiches bezüglich eines Strahles S' der Schaar R' und der Geraden $o\beta$ der Fall ist, so folgt:

Durch jeden Punkt des Raumes können (im Allgemeinen) vier Strahlen gezogen werden, welche mit den gegebenen Geraden G, G' gleiche Winkel bilden und von G, G' gleichen Abstand haben; legt man nämlich durch diesen Punkt zwei den Winkel (G, G') und seinen Nebenwinkel normal halbirende Ebenen und sucht man ihre Schnittpunkte mit G und G', so liegen in jeder dieser Ebenen zwei dieser Geraden; die erste verbindet den Mittelpunkt der Strecke zwischen den genannten Schnittpunkten mit dem gegebenen Punkte, die zweite ist parallel zur Verbindungslinie dieser Schnittpunkte.

Graz. Prof. Carl Moshammer.

XXV. Ueber die unvollständige Gammafunction.

Zur Berechnung der sogenannten unvollständigen Gammafunction, d. h. des Integrales

$$\Gamma(\mu, \xi) = \int_0^\xi x^{\mu-1} e^{-x}\, dx,$$

hat man bis jetzt zwei Formeln; bei kleinem ξ dient die Entwickelung von Legendre:

$$\Gamma(\mu,\xi)=\xi^{\mu}\left\{\frac{1}{\mu}-\frac{1}{1}\,\frac{\xi}{\mu+1}+\frac{1}{1.2}\,\frac{\xi^2}{\mu+2}-\ldots\right\},$$

bei grossen ξ dagegen ist nach Schlömilch

$$\Gamma(\mu,\xi)=\int_0^{\infty}x^{\mu-1}e^{-x}\,dx-\int_{\xi}^{\infty}x^{\mu-1}e^{-x}\,dx$$

$$=\Gamma(\mu)-\xi^{\mu-1}e^{-\xi}\left\{1-\frac{a_1}{\xi+1}+\frac{a_2}{(\xi+1)(\xi+2)}-\ldots\right\},$$

worin die Coefficienten a_1, a_2 etc. ganze rationale Functionen von μ sind*. Eine dritte Formel ergiebt sich mittelst der Substitution

$$x=\xi(1-u);$$

es wird dann

$$\Gamma(\mu,\xi)=\xi^{\mu}e^{-\xi}\int_0^1(1-u)^{\mu-1}e^{\xi u}\,du,$$

ferner durch Entwickelung von $e^{\xi u}$ und durch Integration der einzelnen Theile

$$\Gamma(\mu,\xi)=\frac{\xi^{\mu}e^{-\xi}}{\mu}\left\{1+\frac{\xi}{\mu+1}+\frac{\xi^2}{(\mu+1)(\mu+2)}+\ldots\right\}.$$

Diese Formel gewährt in dem Falle einen Vortheil, wo μ eine grosse und ξ eine kleine Zahl ist.

Wien. HOČEVAR,
Assist. am k. k. Polytechn.

XXVI. Zwei Sätze vom Schwerpunkte.

1. Welche Ebene hat die Eigenschaft, dass die Summe ihrer Entfernungen von n festen Punkten ein Minimum ist?

Die Ebene sei durch drei ihrer Punkte, x_1, x_2, x_3 bestimmt, die n Punkte seien $p_1, p_2, \ldots p_n$. Dann sind die Höhen der Pyramiden, welche das Dreieck $x_1x_2x_3$ als gemeinsame Grundfläche und die Punkte $p_1, \ldots p_n$ als Spitzen haben, diejenigen Strecken, deren Summe ein Minimum sein soll. Man hat also, wenn $h_1 \ldots h_n$ diese Höhen sind:

$$h_1+h_2+\ldots+h_n=Min;$$

daher, wenn man mit der doppelten Grundfläche (die gleich dem äussern Producte der Punkte x_1, x_2, x_3 ist) multiplicirt:

$$h_1(x_1x_2x_3)+h_2(x_1x_2x_3)+\ldots+h_n(x_1x_2x_3)=Min.$$

---

* Vergl. Schlömilch, Compendium der höhern Analysis, Bd. 2, die Gammafunctionen V.

Links stehen die sechsfachen Volumina der n Pyramiden. Da nun das Volumen jeder dreiseitigen Pyramide gleich dem sechsten Theile des äussern Productes ihrer Eckpunkte ist, so kann man schreiben

$$(p_1 x_1 x_2 x_3) + (p_2 x_1 x_2 x_3) + \ldots + (p_n x_1 x_2 x_3) = Min$$

oder

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)(x_1 x_2 x_3) = Min.$$

Ist nun p der Schwerpunkt der n Punkte $p_1 \ldots p_n$, so ist

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = n . p,$$

also

$$n\,(p x_1 x_2 x_3) = Min,$$

oder

$$(p x_1 x_2 x_3) = Min.$$

Da der Ausdruck links den Minimalwerth 0 annimmt, wenn p in der Ebene der Punkte $x_1 x_2 x_3$ liegt, so hat man den Satz:

Jede durch den Schwerpunkt von n festen Punkten gelegte Ebene hat die Eigenschaft, dass die Summe der Entfernungen der n Punkte von der Ebene gleich Null ist

2. Der Abstand des Schwerpunktes der Eckpunkte eines Polygons von einer beliebigen Geraden ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den Abständen seiner Eckpunkte.

Beweis. Seien $p_1 \,.\,.\, p_n$ die Ecken des Polygons, p ihr Schwerpunkt, so ist

$$p = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}.$$

Sei ferner a ein beliebiger Linientheil auf der Geraden, so ist

$$ap = \frac{ap_1 + ap_2 + \ldots + ap_n}{n}.$$

Aber $a . p_r$ ist die doppelte Fläche des Dreiecks, welches a als Grundlinie und p_r als Spitze hat, also, wenn h_r seine Höhe und a_1 der numerische Werth seiner Grundlinie ist:

$$a p_r = a_1 h_r,$$

ferner

$$a_1 h = \frac{a_1 h_1 + a_1 h_2 + \ldots + a_1 h_n}{n}$$

oder

$$h = \frac{h_1 + h_2 + \ \ldots + h_n}{n},$$

w. z. b. w. — Man sieht, wie sich dieser Satz ähnlich für das Gebiet des Raumes aussprechen lässt und wie dann der erste Satz als specieller Fall aus ihm hervorgeht. Die Ableitungen beider Sätze zeigen, wie einfach sich manche Untersuchungen durch Anwendung der Methoden der Ausdehnungslehre gestalten.

Waren in Mecklenburg. V. Schlegel.

XXVI. Zur Geschichte des Problems der Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite.

Die Eingangsworte zur Abhandlung Riemann's über diesen Gegenstand (Abhandl d. königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, 8. Bd. 1860) zeigen, dass demselben die früheren Untersuchungen über diesen Gegenstand gänzlich unbekannt waren. Da auch im betreffenden Referate der Fortschritte der Physik dieser früheren Untersuchungen nicht gedacht wurde und jene Eingangsworte unverändert in die so verdienstvolle Sammlung der Riemann'schen Werke von Herrn Weber übergegangen sind, so scheint es, dass die Vorarbeiten für die Riemann'sche Abhandlung überhaupt nicht so bekannt sind, als sie es verdienen, und ich glaube nur im Geiste des verstorbenen grossen Analysten zu handeln, wenn ich hiermit die Aufmerksamkeit darauf lenke, dass nicht nur der Fall ebener longitudinaler Luftwellen schon vielfach vor Riemann untersucht worden ist, sondern auch die Gesetze der Veränderung der Wellencurve derselben in ihren Grundzügen (beständige Verlängerung der Wellenthäler und Stauung der Wellenberge), sowie die Nothwendigkeit der Bildung von Verdichtungsstössen und die wesentlichsten Gesetze der Fortpflanzung derselben schon lange vor dem Erscheinen der Riemann'schen Abhandlung bekannt waren. Vergl.

Poisson, *Journal de l'école polytechnique vol. VII, cah.* 14, S. 319;
Stokes, *Phil. mag.* 3. *ser.*, *vol.* 33, S. 349, November 1848;
Airy, *Phil. mag.* 3. *ser.*, *vol.* 34, S. 401, Juni 1849;
Earnshaw, *Phil tranact.* 1860, S. 133;
Saint-Venant et Wantzel, *Journ. de l'école polytechnique cah.* 27.

Wien. LUDWIG BOLTZMANN.

INHALT.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.