XVI.

Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung.

Von

Dr. R. Beez,

Professor an der Realschule zu Plauen i. V.

(Fortsetzung.)

In dem vorhergehenden Theile dieser Abhandlung[1]) hatte ich auf Grund der Gleichungen 18) und 26) die Behauptung aufgestellt, dass das Krümmungsmass einer Mannigfaltigkeit, deren Curvenelement durch die Gleichung

$$\partial s^2 = \Sigma a_{ik}\,\partial x_i\,\partial x_k$$

gegeben ist, im Allgemeinen nur für $n = 2$ eine reine Function der Coefficienten a_{ik} und deren ersten und zweiten Derivirten sei, woraus sich dann weiter ergeben hätte, dass eine höhere Mannigfaltigkeit nur mit Verlust ihrer ursprünglichen Krümmung deformirt werden könne.

Geht man nämlich von der entgegengesetzten Annahme aus, dass das Krümmungsmass K aus den Coefficienten a_{ik} sich berechnen lässt, so ergiebt sich sofort aus der Gleichung 26) auch die Darstellbarkeit der Grösse D_{11} und analog sämmtlicher D_{ik} aus denselben Coefficienten, sobald $n > 2$ ist. Führt man weiter die so gefundenen Werthe der D_{ik} in Gleichung 18) ein, so ist ersichtlich, dass nicht blos das Krümmungsmass der Mannigfaltigkeit oder das reciproke Product der n Hauptkrümmungshalbmesser, sondern jeder einzelne Hauptkrümmungshalbmesser durch die Grössen a_{ik} bestimmt wird. Dasselbe gilt dann auch von den Krümmungslinien der Mannigfaltigkeit und endlich von dem Krümmungshalbmesser jedes beliebigen Normalschnittes. Denn multiplicirt man die Gleichungen 18) der Reihe nach mit $\partial p_1, \partial p_2, \ldots \partial p_n$ und addirt, so erhält man

$$\Sigma_{ik}\left(\frac{a_{ik}}{\varrho} + \frac{D_{ik}}{H}\right)\partial p_i\,\partial p_k = 0,$$

woraus

---

1) Diese Zeitschrift XX, S. 423.

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{\Sigma D_{ik}\,\partial p_i\,\partial p_k}{H\,\Sigma a_{ik}\,\partial p_i\,\partial p_k}\ {}^{2})$$

sich ergiebt. Da die n Hauptkrümmungshalbmesser dieser Gleichung genügen, so drückt ϱ überhaupt den Krümmungshalbmesser desjenigen Normalschnittes aus, welcher durch das Element $\Sigma a_{ik}\,\partial p_i\,\partial p_k$ hindurchgeht. Nun muss eine Mannigfaltigkeit, für welche in jedem Punkte ausser der Länge des Curvenelements die Krümmung jedes beliebigen Normalschnittes gegeben ist, als eine bestimmte angesehen werden. Die Krümmung irgend eines Normalschnittes aber kann, wie wir soeben gesehen haben, aus den Coefficienten a_{ik} des Curvenelements berechnet werden. Es ist daher klar, dass eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen, welche in einem ebenen Raume von $n+1$ Dimensionen enthalten ist, durch den Ausdruck für das Curvenelement vollständig bestimmt wird, sobald n die Zahl 2 übersteigt. Nimmt man nun ebenfalls nach Analogie der Linien und Flächen im empirischen Raume an, dass eine n-fache Mannigfaltigkeit in einem ebenen Raume von $n+1$ Dimensionen sich deformiren, d. h. biegen lasse, ohne dass Dehnung oder Zusammenziehung der einzelnen Theile stattfindet,[3]) so kommt man, sobald das Gegentheil meiner Behauptung als richtig erwiesen wird, zu folgenden Sätzen:

1. Bei der Deformation einer Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen bewahren die Krümmungslinien ihren Charakter als Krümmungslinien.

2. Bei der Deformation einer Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen bleibt nicht nur das Krümmungsmass in jedem einzelnen Punkte, sondern auch die Krümmung sämmtlicher Normalschnitte — mögen sie nun Hauptschnitte sein oder nicht — unverändert.

Beide Sätze stehen in vollem Widerspruch mit den entsprechenden Sätzen der Flächen, d. h. also derjenigen Mannigfaltigkeiten, die noch vollständig unserer Anschauung zugänglich sind, ja an denen wir überhaupt erst unsere geometrischen Vorstellungen erlernt haben.

---

2) Herr R. Lipschitz hat dieselbe Gleichung in der Form

$$-\frac{1}{\varrho} = \frac{\overline{\mu}(dy)}{\overline{g}(dy)}$$

aufgestellt (Borchardt's Journal Bd. 81, S. 233).

3) Diese Annahme ist wohl von allen Mathematikern, die sich mit höheren Mannigfaltigkeiten beschäftigt haben, ohne Bedenken zugelassen worden. Auch Herr R. Lipschitz ist der Ansicht (Borchardt's Journal Bd. 81, S. 232), dass eine Transformation des Ausdruckes $\partial s^2 = \Sigma a_{ik}\,\partial x_i\,\partial x_k$ durch Einführung eines neuen Systems von n independenten Variabelen der Biegung einer Oberfläche entspricht, wobei das Quadrat des Linearelements der Oberfläche nicht geändert wird.

Der zweite Satz enthält aber auch in bester Form eine *contradictio in adjecto*, denn er spricht von einer Deformation, bei welcher Nichts deformirt wird.

Nun hat Herr Lipschitz neuerdings[4]) den vollständigen Beweis geliefert, dass die Kronecker'sche Verallgemeinerung des Gauss-schen Krümmungsmasses

$$K = \frac{1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \cdot \varrho_n}$$

für jedes gerade n eine reine Function der Coefficienten a_{ik} der Form $\Sigma a_{ik}\, \partial x_i \partial x_k$ und ihrer ersten und zweiten Derivirten sei, für jedes ungerade n aber durch die Quadratwurzel aus einer reinen Function jener Coefficienten dargestellt werden könne. Die nothwendigen Consequenzen dieses Theorems sind in den bereits angeführten Sätzen 1 und 2 enthalten.

Offenbar ist hiermit die Theorie der höheren Mannigfaltigkeiten an einem höchst kritischen Punkte angelangt und die Entscheidung kann nicht mehr fern liegen, ob eine in sich widerspruchsfreie Geometrie von Räumen, die mehr als drei Dimensionen enthalten, auf der Grundlage der gewöhnlichen Geometrie möglich ist oder nicht. Einer solchen über unsere Erfahrung hinausgehenden Geometrie wollen wir der Kürze wegen im Folgenden den Namen „Metageometrie" beilegen, wodurch sie zugleich in präciser Weise von anderen Mannigfaltigkeitstheorien, die nicht auf durchgreifender Analogie mit der empirischen Ausdehnungslehre beruhen, unterschieden werden kann.

Sollte sich auch schliesslich die Unmöglichkeit einer Metageometrie herausstellen, so würden zwar die auf diesem Gebiet geführten Untersuchungen nur ein negatives Resultat, nämlich den Beweis liefern, dass ausser dem empirisch gegebenen Raume kein anderer ihm analog gebildeter von mehr als drei Dimensionen denkbar sei. Dieses eine Resultat würde jedoch wegen seiner eminenten erkenntniss-theoretischen Bedeutung selbst mit dem Opfer der ganzen Metageometrie nicht zu theuer erkauft sein.

Was die Widersprüche in den oben aufgestellten Sätzen 1 und 2 anlangt, so glaube ich, dass dieselben durch eine von der gewöhnlichen etwas abweichende Fassung des Hauptsatzes der Deformationstheorie, wenn auch nicht vollständig gehoben, doch wenigstens insoweit gemildert werden können, dass das Princip der Analogie nicht geradezu verletzt wird. Jener Deformationssatz lautet in der gewöhnlichen Weise: Wenn die Ausdrücke für die Linearelemente zweier Mannigfaltigkeiten

4) Borchardt's Journal Bd. 81, S. 230. Herr R. Lipschitz hatte bereits für gerade n im 71. Bande desselben Journals diesen Beweis gegeben, doch ist mir erst durch seine neuere Mittheilung die Identität seiner Formeln mit den von mir auf directem Wege gefundenen Ausdrücken klar geworden.

$$\partial s^2 = \Sigma a_{ik} \partial p_i \partial p_k$$

und

$$\partial s'^2 = \Sigma a'_{ik} \partial p'_i \partial p'_k$$

vorgelegt sind und es möglich ist, durch Einführung eines Systems von n unabhängigen Functionen der n unabhängigen Variabelen $p'_1, p'_2, \dots p'_n$ an Stelle der Variabele $p_1, p_2, \dots p_n$ den ersten Ausdruck in den zweiten so zu transformiren, dass er mit ihm identisch wird, so lässt sich die zweite Mannigfaltigkeit auf der erstern abwickeln.

Aus den im Vorhergehenden angestellten Betrachtungen scheint mir nun aber hervorzugehen, dass dieser Satz folgendermassen formulirt werden müsse: Wenn die Linearelemente zweier Mannigfaltigkeiten durch die soeben angegebene Substitution gleich gemacht werden können, so lassen sich die beiden Mannigfaltigkeiten zur Coincidenz bringen, wozu bei den Mannigfaltigkeiten der ersten und zweiten Ordnung eventuell eine Deformation erforderlich ist.

Wenn nun auch die in den obigen Sätzen 1 und 2 enthaltenen Widersprüche abgeschwächt worden sind, so kommt man doch selbst bei dem besten Willen, die Theorie der höheren Mannigfaltigkeiten aufrecht zu erhalten, in Bezug auf Biegung derselben über gewisse erhebliche Zweifel nicht hinweg.

Bei dem Ausdrucke „Biegung" denken wir zunächst an einen vorwiegend in die Länge, oder zugleich in Länge und Breite ausgedehnten Körper, dessen Enden einander genähert oder von einander entfernt werden sollen. Hierbei findet die Biegung in dem Raume selbst statt, von welchem der Körper ein begrenztes Stück ist. Sie wird also charakterisirt als Biegung einer Mannigfaltigkeit in sich selbst nach einer der Mannigfaltigkeit angehörenden Dimension, wobei natürlich die Verschiebbarkeit der Mannigfaltigkeit in sich selbst ohne Biegung vorausgesetzt wird. Eine derartige Biegung ist, wie man leicht einsieht, bei Linien, Flächen und Körpern des gewöhnlichen Raumes stets mit Dehnung oder Zusammenziehung einzelner Theile verbunden. Wir können daher wohl den allgemeinen Satz aufstellen: Bei jeder Biegung einer Mannigfaltigkeit in sich selbst findet Dehnung und Zusammenziehung statt.

Anders verhält es sich bei der Deformation. Eine Linie lässt sich unter allen Umständen auf einer andern abwickeln, ohne dass sie gedehnt wird; dabei ändert sie ihr Krümmungsmass und, was in diesem Falle hiermit gleichbedeutend ist, ihren Krümmungshalbmesser. Eine Fläche lässt sich ebenfalls deformiren, wobei das Krümmungsmass erhalten bleibt, aber die Werthe der einzelnen Krümmungshalbmesser sich ändern. Die Deformationsfähigkeit der Linien und Flächen leuchtet uns deshalb auf der Stelle ein, weil sie in Bezug auf die Dimension, nach welcher sie gebogen werden, unendlich dünn sind. Dies ist aber auch bei den höheren Mannigfaltigkeiten der Fall. Eine Raumgrösse von n Dimensionen ist in Bezug auf einen ebenen Raum von $n+1$ Dimensionen, in welchem die Biegung vorgenommen werden soll, von unendlich geringer Dicke. So würde z. B. unser gewöhnlicher Raum einem Beobachter, der in der vierten Dimension sehen könnte, als eine Mannigfaltigkeit von verschwindender vierter Dimension erscheinen. Derselbe Beobachter würde infolge dessen die frappante Wahrnehmung machen, dass kein Punkt unseres Raumes ihm durch einen andern verdeckt wird, dass es kein Vorn und Hinten in demselben giebt, sondern alle Theile nebeneinander gewissermassen in flächenhafter Ausbreitung zu sehen sind.[5] Er würde das Innere eines geschlossenen Körpers mit einem Blicke durch- oder überschauen, gerade so, wie uns das Innere einer geschlossenen ebenen Figur sich vollständig öffnet, sobald unser Auge aus der Ebene dieser Figur in die dritte Dimension versetzt wird. Vom Standpunkte der Metageometrie aus sehe ich daher absolut keinen Grund, warum eine n-fache Mannigfaltigkeit, die in einem ebenen Raume von $n+1$ Dimensionen enthalten ist, sich nicht sollte ohne Dehnung und Zusammenziehung biegen lassen, da sie ja in Bezug auf diese $n+1^{\text{te}}$ Dimension unendlich dünn ist. Und doch würde diese Annahme dem Lipschitz'schen Satze widersprechen.

Denn, wenn eine Mannigfaltigkeit gebogen wird, so müsste doch mindestens ein Krümmungshalbmesser seine Grösse ändern. Die Aenderung eines einzigen Krümmungshalbmessers aber würde nicht möglich sein ohne entsprechende Aenderung in der Länge des Curvenelements selbst. Bleibt dieses ungeändert, so müssen auch sämmtliche Krümmungshalbmesser ihre ursprünglichen Werthe beibehalten Es scheint mir daher ausser Zweifel, dass man nur die Alternative hat, entweder die Metageometrie ganz aufzugeben, oder wenigstens die Deformationsfähigkeit höherer Mannigfaltigkeiten in Abrede zu stellen. Man würde also, wenn man sich für das Letztere entschiede, annehmen müssen, dass eine Mannigfaltigkeit von einer höheren als der zweiten Ordnung nur mit gleichzeitiger Dehnung und Zusammenziehung einzelner Theile gebogen werden könne.

Eine Prüfung der im Vorigen gefundenen Resultate wird sich am besten an den Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen, unter denen unser Raum die einfachste und zugleich die einzige uns bekannte Species ist, vornehmen zu lassen. Wir wollen zu diesem Zwecke die bei Gleichung 51) abgebrochene Rechnung gemäss der höchst schätzenswerthen Andeutung[6]) des Herrn R. Lipschitz weiter fortsetzen.

---

5) Diese Analogie scheint mir zu wenig zu Gunsten einer vierten Dimension zu sprechen.

6) Borchardt's Journal Bd. 81, S. 236.

Wenn $n=3$ ist, so giebt die Formel 14) das Krümmungsmass

$$K=\frac{1}{\sqrt[2]{a^5}}\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix},$$

welches sich nach 51) auch in der Gestalt

$$K=\frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{1}{D_{11}}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

darstellen lässt, worin A_{22}, A_{23}, A_{33} die in 48) angegebenen Werthe besitzen. Bezeichnen wir ferner den Coefficienten von D_{ik} in der Determinante

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix}$$

mit δ_{ik}, so ist nach einem bekannten Determinantensatze

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix}^2$$

und da

$$\delta_{ik}=a\,.\,A_{ik},$$

so wird

$$K=\frac{1}{a}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{1}{D_{11}}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{ik}=A_{ki}.$$

Bezeichnet man ferner die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

mit A und den Coefficienten von A_{ik} in derselben mit α_{ik}, so findet sich

$$D_{11}=\sqrt{\frac{a}{A}}\,.\,\alpha_{11}.$$

Auf entsprechende Weise wird allgemein

$$D_{ik}=\sqrt{\frac{a}{A}}\,.\,\alpha_{ik}$$

erhalten. Durch Einsetzung dieser Werthe in 18) nehmen die Differentialgleichungen der Krümmungslinien folgende Form an:

$$\left(\frac{a_{11}}{\varrho}+\frac{\alpha_{11}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_1+\left(\frac{a_{12}}{\varrho}+\frac{\alpha_{12}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_2+\left(\frac{a_{13}}{\varrho}+\frac{\alpha_{13}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_3=0,$$

$$\left(\frac{a_{21}}{\varrho}+\frac{\alpha_{21}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_1+\left(\frac{a_{22}}{\varrho}+\frac{\alpha_{22}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_2+\left(\frac{a_{23}}{\varrho}+\frac{\alpha_{23}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_3=0,$$

$$\left(\frac{a_{31}}{\varrho}+\frac{\alpha_{31}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_1+\left(\frac{a_{32}}{\varrho}+\frac{\alpha_{32}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_2+\left(\frac{a_{33}}{\varrho}+\frac{\alpha_{33}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_3=0,$$

und der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes, der durch das Element ∂s gelegt, wird

A) $$\frac{1}{\varrho} = -\frac{\Sigma \alpha_{ik}\,\partial p_i\,\partial p_k}{\sqrt{A}\;\Sigma a_{ik}\,\partial p_i\,\partial p_k}.$$

Wendet man die gefundenen Ausdrücke auf das Riemann'sche Linearelement

$$\partial s^2 = \frac{1}{\lambda^2}(\partial x_1{}^2 + \partial x_2{}^2 + \partial x_3{}^2),$$

$$\lambda = 1 + \frac{\alpha}{4}(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2),$$

an, so ergiebt sich, da

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = \frac{\alpha}{\lambda^4},$$

$$A_{12} = A_{23} = A_{31} = 0,$$

$$K = \sqrt{\alpha^3}.$$

Setzt man nun $\alpha = \frac{1}{R^2}$, so kommt

$$K = \pm\,\frac{1}{R^3}.$$

Ferner ergiebt sich aus den Differentialgleichungen der Krümmungslinien

$$\left(\frac{1}{\varrho} + \sqrt{\alpha}\right)^3 = 0,$$

so dass also die drei Hauptkrümmungshalbmesser ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 den Werth $-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ erhalten. Derselbe Werth ergiebt sich auch für den Krümmungshalbmesser jedes beliebigen Normalschnittes aus Gleichung A). In Betreff des Vorzeichens ist zu bemerken, dass sämmtliche Krümmungshalbmesser entweder positiv oder negativ zu nehmen sind, da bei stetiger Aenderung in der Lage des Curvenelements ein plötzliches Ueberspringen des Krümmungshalbmessers von einem positiven auf einen negativen Werth, ohne dass einmal $\frac{1}{\varrho} = 0$ wird, unmöglich ist. Durch das Riemann'sche Curvenelement für $n = 3$ wird also eine Mannigfaltigkeit bestimmt, deren Normalschnitte dieselbe Krümmung $+\frac{1}{R}$ oder $-\frac{1}{R}$ haben und deren Krümmungsmass demgemäss entweder $+\frac{1}{R^3}$ oder $-\frac{1}{R^3}$ ist. Je nachdem man nämlich die Richtung der Normale nach Innen als positiv oder negativ annimmt, sind die Krümmungshalbmesser entweder sämmtlich gleich $+R$ oder gleich $-R$ zu setzen. Die Riemann'sche Formel für das Curvenelement charakterisirt also für $n > 2$ lediglich eine kugelförmige Mannigfaltigkeit. Wenn Riemann dieselbe als den Ausdruck für das Linearelement einer Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung überhaupt bezeichnet, so beruht dies auf der unhaltbaren Voraussetzung, dass eine Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung in eine kugelförmige Mannigfaltigkeit ohne Dehnung umgebogen werden könne.

In die Kategorie der Mannigfaltigkeiten dritter Ordnung fällt nun auch der sogenannte „Nicht-Euklidische Raum“. Bekanntlich ist die Nicht-Euklidische Ebene eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen mit constantem negativem Krümmungsmass, sie lässt sich mit Biegung in sich selbst verschieben und deshalb lassen sich Figuren in derselben, ebenso wie in der Ebene oder auf der Kugel, zur Deckung bringen.

Wenn der Analogie nach der Nicht-Euklidische Raum als eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen mit negativem constantem Krümmungsmass definirt wird, so ergiebt sich seine Unmöglichkeit einfach daraus, dass eine Mannigfaltigkeit ungerader Ordnung von wesentlich negativer Krümmung überhaupt nicht denkbar ist. Denn sobald man die Vorzeichen der Hauptkrümmungshalbmesser sämmtlich umkehrt, erhält man den entgegengesetzten positiven Werth. Eingehendere Betrachtungen über die Nicht-Euklidische Geometrie werden weiter unten an geeigneter Stelle ihren Platz finden.

Zu den oben aufgestellten vier Verallgemeinerungen des Gauss-schen Krümmungsmasses tritt endlich noch die Riemann'sche, die wir bis jetzt absichtlich nicht berührt haben, da sie wenigstens nicht unmittelbar auf der Gleichung 30) beruht. Bevor ich jedoch näher auf dieselbe eingehe, sei es mir gestattet, einige allgemeine Bemerkungen in Bezug auf die epochemachende Riemann'sche Schrift „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“, vorauszuschicken.

Als ich im Jahre 1868 zun Zwecke des elementaren geometrischen Unterrichts an der hiesigen Realschule es unternahm, einen Leitfaden der Geometrie auf wissenschaftlicher Basis zu entwerfen,[7] hatte ich bereits, ohne die Riemann'sche Schrift zu kennen, welche mir erst, nachdem der der Druck meines Buches fast vollendet war, zu Gesichte kam, die Analogie des gewöhnlichen Raumes mit der Ebene und der geraden Linie wahrgenommen und den genannten drei Mannigfaltigkeiten die Eigenschaft der Gleichartigkeit beigelegt. Dieser Ausdruck war jedoch insofern nicht glücklich gewählt, als in ihm jene merkwürdige und, wie ich glaubte, bisher noch nicht beachtete Eigenthümlichkeit des gewöhnlichen Raumes, dass er unter den Mannigfaltigkeiten oder Raumgrössen von drei Dimensionen genau dieselbe Stellung einnimmt, wie die Ebene unter den Flächen und die Gerade unter den Linien, nicht sofort deutlich hervortrat. Man charakterisirt diese Eigenthümlichkeit mit Riemann ganz treffend durch den Aus-

7) R. Beez, Elemente der Geometrie. Plauen, im März 1869.

druck „Ebenheit“, doch würde es wohl consequenter sein, sie durch das Prädicat „Geradheit“ zu bezeichnen, da dann auch die Ebene als „gerade Fläche“ unter den allgemeinen Begriff einer geraden Mannigfaltigkeit sich subsummiren liesse. Der Beweis, dass unser Raum eben ist, würde sofort zu führen sein, wenn die Unmöglichkeit eines Raumes von vier Dimensionen deutlich sich erkennen liesse. Wäre aber ein Raum von vier Dimensionen denkbar und darüber hinaus kein höherer Raum von mehr als vier Dimensionen, so würde die Ebenheit des empirischen Raumes sich ergeben, wenn ausser freier Beweglichkeit der Körper auch die Unendlichkeit unseres Raumes constatirt wäre. Gäbe es aber noch einen Raum von fünf Dimensionen und keinen darüber, so müsste man ausserdem noch beweisen, dass unser Raum bei einer Drehung um vier feste Punkte immer mit sich selbst zusammenfiele. Denn wäre dieses nicht der Fall, so könnte er auch das Analogon der cylindrischen Spirale sein u. s. w.

Was die wissenschaftliche Bedeutung der Riemann'schen Schrift anlangt, so kann es jedenfalls nicht hoch genug angeschlagen werden, dass durch sie zwei neue fruchtbare Begriffe in die Mathematik eingeführt worden sind, nämlich erstens der Begriff einer Mannigfaltigkeit oder mehrfach ausgedehnten Grösse überhaupt und zweitens der schon erwähnte Begriff einer ebenen oder geraden Mannigfaltigkeit. Hierdurch ist der Weg zu einer Metageometrie erst gebahnt worden.

Wenn ich nun auch den hohen Werth der Riemann'schen Schrift als Grundlage für die Theorie der höheren Mannigfaltigkeiten vollständig anerkenne, so vermag ich doch nicht allenthalben, mich den Voraussetzungen Riemann's anzuschliessen. Eine derselben, nämlich die Annahme, dass es möglich sei, constant gekrümmte Mannigfaltigkeiten höherer Ordnungen in sich selbst ohne Dehnung zu verschieben, ist schon oben als unhaltbar nachgewiesen worden. Ferner ist darauf aufmerksam zu machen, dass das Gauss'sche Krümmungsmass nur für torsionslose Flächen, d. h. für Flächen in einem ebenen Raume von drei Dimensionen, nicht aber für gewundene Flächen, d. h. für solche Flächen, welche einen ebenen Raum von mehr als drei Dimensionen durchziehen, giltig ist. Von der letztern Art dürften aber wohl im Allgemeinen die Riemann'schen Flächen sein, aus denen das Krümmungsmass der Mannigfaltigkeit bestimmt werden soll.

Endlich erscheint mir die Annahme, dass das Curvenelement einer Mannigfaltigkeit anders als durch die Quadratwurzel aus einem homogenen Differentialausdruck zweiten Grades dargestellt werden könne, nicht vereinbar mit dem Wesen der gewöhnlichen Geometrie und einer auf sie gegründeten Metageometrie zu sein. Die gebräuchliche Darstellung des Curvenelements einer Fläche und allgemein einer höhern Mannigfaltigkeit beruht doch in letzter Instanz auf dem Satze, dass das

Quadrat einer begrenzten Geraden in einer Ebene gleich der Summe der Quadrate ihrer Projectionen auf zwei rechtwinklige Axen ist. Dieser Satz — der Fundamentalsatz der algebraischen Geometrie — hat sein Gegenstück in dem Satze der Mechanik, dass das Quadrat einer Kraft durch die Summe der Quadrate ihrer rechtwinkligen Componenten sich ersetzen lässt. Eine derartige Uebereinstimmung in den metrischen Relationen der gewöhnlichen Geometrie und der Mechanik weist offenbar auf einen tiefen innern Zusammenhang zwischen der Natur des empirischen Raumes und der Beschaffenheit der in ihm wirkenden Kräfte hin. Infolge dieser Uebereinstimmung sind Geometrie und Physik als solidarisch miteinander verbunden zu betrachten und jede Aenderung in unseren Voraussetzungen über den Raum, in welchem Kräfte wirken sollen, macht sofort auch eine entsprechende Aenderung der Principien der Mechanik nöthig. Giebt man daher in der Geometrie den Pythagoräischen Satz oder dessen Erweiterung auf — was der Fall ist, wenn man das Curvenelement in einer andern, als der gewöhnlichen Form darzustellen unternimmt —, so muss man consequenterweise in der auf diese Geometrie zu gründenden Mechanik den Satz vom Parallelogramm der Kräfte über Bord werfen. Es wird also durch die Annahme, dass man das Linienelement einer Mannigfaltigkeit durch die p^{te} Wurzel aus einem homogenen Differentialausdrucke p^{ten} Grades darstellen könne, die gewöhnliche Geometrie und Mechanik vollständig negirt und deshalb kann diese Erweiterung der Form des Linienelements einer Mannigfaltigkeit in unserer Metageometrie keinen Platz finden, wobei ich jedoch nicht in Abrede stellen will, dass sie in einer andern Mannigfaltigkeitstheorie möglich sei.

Dass vom rein analytischen Standpunkte aus gegen eine solche Verallgemeinerung Nichts einzuwenden sei, ebenso wenig wie gegen die Ausdehnung der für den gewöhnlichen Raum geltenden mechanischen Begriffe auf Räume von anderer Beschaffenheit,[8]) versteht sich von selbst. Nur darf man nicht glauben, dass eine blosse Applicirung dieser mechanischen Principien auf anders geartete Räume auch schon eine Dynamik in diesen Räumen — also eine Art „Metadynamik" — darstellte. Es ist vielmehr ausser allem Zweifel, dass eine Aenderung in den räumlichen Voraussetzungen auch eine adäquate Aenderung in den mechanischen Grundbegriffen bedingen müsse, wenn man die Analogie mit der gewöhnlichen Geometrie und Mechanik aufrecht erhalten will.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen wollen wir zunächst versuchen, den Gedankengang Riemann's zu reproduciren, wobei uns die

---

8) S. Lipschitz, Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist, Borchardt's Journal Bd. 74; ferner die Abhandlungen Schering's: Hamilton-Jacobi'sche Theorie für Kräfte, deren Maass von der Bewegung der Körper abhängt, Göttingen 1873, und: Verallgemeinerung der Poisson-Jacobi'schen Störungsformeln, Göttingen 1874

bereits mehrfach erwähnte Abhandlung[9]) von Beltrami wesentliche Dienste leisten wird. Wenn wir hierbei vielleicht etwas ausführlicher zu Werke gehen, als unbedingt nöthig erscheint, so leitet uns nur die Absicht, zum Verständniss der Riemann'schen Schrift nach Kräften beizutragen und über unsere Auffassung derselben nirgends einen Zweifel entstehen zu lassen.

Riemann's Entwickelungen stützen sich auf die Verallgemeinerung der bekannten Gauss'schen Formel

52) $$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + m^2 \partial \vartheta^2,$$

worin ∂s das Linienelement der Fläche, ϱ die von einem beliebig gewählten Punkte der Fläche nach einem der Endpunkte von ∂s gezogene kürzeste oder geodätische Linie und ϑ den Winkel bedeutet, den dieselbe im Punkte $\varrho = 0$ mit einer fest angenommenen, ebenfalls geodätischen Linie bildet. In diesem Falle ist, wie sich aus Gleichung 30) leicht ergiebt, wenn $E = 1$, $F = 0$, $G = m^2$ gesetzt wird, das Krümmungsmass

$$K = -\frac{1}{m}\,\frac{\partial^2 m}{\partial \varrho^2}.$$

Ist die Fläche abwickelbar oder eben, so hat man

52*) $$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + \varrho^2 \partial \vartheta^2,$$

die bekannte Formel für das Linienelement der Ebene in Polarcoordinaten. Für die Kugel, deren geodätische Linien ϱ sämmtlich grösste Kreise sind, erhält man, wenn man

$$x = R \sin \frac{\varrho}{R} \cos \vartheta,$$

$$y = R \sin \frac{\varrho}{R} \sin \vartheta,$$

$$z = R \cos \frac{\varrho}{R}$$

setzt, wodurch der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

genügt wird:

52**) $$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + \left(R \cos \frac{\varrho}{R}\right)^2 \partial \vartheta^2.$$

Es mögen nun neue Coordinaten eingeführt werden, welche durch die Gleichungen

53) $$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= \varrho \cos \vartheta, \\ x_2 &= \varrho \sin \vartheta \end{aligned} \right.$$

oder durch das Gleichungssystem

53*) $$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= \varrho \lambda_1, \\ x_2 &= \varrho \lambda_2, \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 &= 1 \end{aligned} \right.$$

definirt sind. Aus 53*) findet man

9) *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante, Annali di matematica Serie II, Tom II.*

$$\partial x_1{}^2 + \partial x_2{}^2 = \partial \varrho^2 + \varrho^2 (\partial \lambda_1{}^2 + \partial \lambda_2{}^2),$$

woraus in Verbindung mit Gleichung 52), welche man auch schreiben kann

54) $$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + m^2 (\partial \lambda_1{}^2 + \partial \lambda_2{}^2),$$

die Gleichung

$$\partial s^2 = \partial x_1{}^2 = \partial x_2{}^2 + (m^2 - \varrho^2)(\partial \lambda_1{}^2 + \partial \lambda_2{}^2)$$

entsteht. Durch Differentiation der Gleichungen

$$\lambda_1 = \frac{x_1}{\varrho}, \quad \lambda_2 = \frac{x_2}{\varrho}$$

findet man aber

$$\begin{aligned}\partial \lambda_1{}^2 + \partial \lambda_2{}^2 &= \frac{\varrho^2 (\partial x_1{}^2 + \partial x_2{}^2) - \varrho^2 \partial \varrho^2}{\varrho^4} \\ &= \frac{(x_1{}^2 + x_2{}^2)(\partial x_1{}^2 + \partial x_2{}^2) - (x_1 \partial x_1 + x_2 \partial x_2)^2}{\varrho^4} \\ &= \frac{(x_1 \partial x_2 - x_2 \partial x_1)^2}{\varrho^4},\end{aligned}$$

welche, in die vorige Gleichung substituirt, für das Curvenelement die wichtige Formel liefert:

55) $$\partial s^2 = \partial x_1{}^2 + \partial x_2{}^2 + \frac{4(m^2 - \varrho^2)}{\varrho^4} \left(\frac{x_1 \partial x_2 - x_2 \partial x_1}{2} \right)^2.$$

Wenn der Factor $\frac{4(m^2 - \varrho^2)}{\varrho^4}$ verschwindet, so erhält man das Linearelement einer Ebene, d. h. einer Fläche von verschwindender Krümmung; offenbar steht also dieser Coefficient zum Krümmungsmass in naher Beziehung. Untersuchen wir zuvörderst, welchen Werth derselbe für die Kugelfläche annimmt. In diesem Falle ist

$$m = R \sin \frac{\varrho}{R}$$

und es nähert sich der Ausdruck

$$\frac{4(m^2 - \varrho^2)}{\varrho^4} = \frac{4\left(R^2 \sin^2 \frac{\varrho}{R} - \varrho^2 \right)}{\varrho^4}$$

für $\varrho = 0$ dem Grenzwerth

$$- \tfrac{4}{3} \cdot \frac{1}{R^2}.$$

Multiplicirt man denselben mit $- \frac{3}{4}$, so erhält man das Krümmungsmass der Kugelfläche $\frac{1}{R^2}$. Beiläufig mag auch noch bemerkt werden, dass der Ausdruck

$$\left(\frac{x_1 \partial x_2 - x_2 \partial x_1}{2} \right)^2,$$

in welchem x_1 und x_2 für ein verschwindendes ϱ ebenfalls zur Null abnehmen, das Quadrat des unendlich kleinen Dreiecks darstellt, welches durch die Punkte

$$(0,0),\quad (x_1, x_2),\quad (\partial x_1, \partial x_2)$$

gebildet wird.

Es entsteht nun die Frage, ob allgemein, wenn m eine beliebige Function von ϱ und θ darstellt, die Gleichung

56) $$K = -\tfrac{3}{4} \lim_{\varrho=0} \frac{4(m^2-\varrho^2)}{\varrho^4}$$

giltig bleibt, worin K das Krümmungsmass der Fläche im Punkte $\varrho = 0$ bedeutet. Beltrami[10]) beweist dies folgendermassen. Unter der Voraussetzung der Stetigkeit und Endlichkeit des Krümmungsmasses in der Nähe des Punktes $\varrho = 0$ folgt aus der Gauss'schen Formel

$$K = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial \varrho^2},$$

dass m von der Form

57) $$m = \varrho + b\varrho^3$$

sein müsse, wo b eine von ϱ und ϑ abhängige Function ist, die mit ihren Derivirten nach ϱ endlich und stetig bleibt. Dann hat man im Punkte $\varrho = 0$

$$K = -6 b_0.$$

Nun ist mit Rücksicht auf 57)

$$\frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4} = 2b_0 = -\frac{K}{3},\quad \varrho = 0,$$

also

$$K = -\tfrac{3}{4} \lim \frac{4(m^2-\varrho^2)}{\varrho^4},\quad \varrho = 0.$$

Einen directen Beweis der Richtigkeit dieser Formel findet man, wenn man mit Hilfe der Gleichung 30) unter Zugrundelegung der Gleichung 50) das Krümmungsmass der Fläche bestimmt und berücksichtigt, dass für $\varrho = 0$ auch x_1 und x_2 verschwinden. Denn schreibt man 55) in der Form

$$\partial s^2 = \left(1 + \frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4} x_2{}^2\right) \partial x_1{}^2 - 2x_1x_2 \frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4} \partial x_1 \partial x_2 + \left(1 + \frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4} x_1{}^2\right) \partial x_2{}^2,$$

so ist klar, dass in der Nähe eines gewöhnlichen, d. h. nicht mit einer Singularität behafteten Punktes $\varrho = 0$ auf der Fläche der Quotient $\frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4}$ eine endliche und stetige Grösse darstellen wird, deren Ableitungen nach ∂x_1 und ∂x_2 nicht unendlich werden. Vertauscht man nun in Gleichung 30) p mit x_1, q mit x_2, setzt

---

10) *Teoria fondamentale* etc. oder Math. Ann. Bd. 2, S. 6.

$$E = 1 + \frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^4} x_2^2,$$
$$F = -\frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^4} x_1 x_2,$$
$$G = 1 + \frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^4} x_1^2$$

und substituirt die Ableitungen dieser Grössen nach x_1 und x_2 in die Gleichung 30), so reducirt sich dieselbe schliesslich, wenn $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ gesetzt werden, auf den einfachen Ausdruck

$$K \lim \frac{m^2}{\varrho^2} = -3 \lim \frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^4}, \quad \varrho = 0.$$

Der Quotient $\frac{m^2}{\varrho^2}$ hat aber für $\varrho = 0$ zur Grenze die Einheit. Denn das Linienelement der krummen Fläche fällt für $\varrho = 0$ offenbar zusammen mit dem Linienelement

$$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + \varrho^2 \partial \vartheta^2$$

der im Punkte $\varrho = 0$ berührenden Ebene. Man erhält daher auch auf diesem Wege für das Krümmungsmass einer Fläche den Ausdruck 56).

Bevor wir die erhaltenen Resultate, die in der Hauptsache schon Beltrami gefunden hat, auf Gebiete von mehr als zwei Dimensionen ausdehnen, wollen wir ebenfalls nach Anleitung dieses scharfsinnigen Interpreten Lobatschefsky's und Riemann's diejenige Formel für das Linienelement einer Fläche von constanter Krümmung ableiten, aus welcher die allgemeine Formel Riemann's für das Linienelement einer constant gekrümmten Mannigfaltigkeit höherer Ordnung hervorgegangen ist. Zu diesem Zwecke erinnern wir zunächst daran, dass die Formel 52**)

$$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + \left(R \sin \frac{\varrho}{R}\right)^2 \partial \vartheta^2$$

nicht blos für die Kugelfläche vom Halbmesser R, sondern überhaupt für jede Fläche, deren Krümmung constant und gleich $\frac{1}{R^2}$ ist, Geltung hat. Denn aus dem Satze von der Erhaltung der Krümmung einer Fläche bei der Deformation geht hervor, dass, wenn die Krümmung constant und gleich c ist, die Fläche stets auf einer Kugel vom Halbmesser $\sqrt{\frac{1}{c}}$ aufgewickelt werden kann und dass man daher dem Linienelement einer solchen Fläche stets die obige Form 52**) geben kann, die zunächst nur für die Kugel abgeleitet worden war. Führt man in das mit ihr identische System

$$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + R^2 \sin^2 \frac{\varrho}{R} (\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2), \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$$

eine neue Art Coordinaten ein, welche durch die Gleichungen

$$x_1 = 2\,R\,\lambda_1 \tan\frac{\varrho}{2\,R},$$

$$x_2 = 2\,R\,\lambda_2 \tan\frac{\varrho}{2\,R}$$

definirt sind, so wird

$$\partial x_1 = \frac{1}{\cos^2\frac{\varrho}{2\,R}}\lambda_1\,\partial\varrho + 2\,R\tan\frac{\varrho}{2\,R}\,\partial\lambda_1$$

oder

$$\partial x_1 \cos^2\frac{\varrho}{2\,R} = \lambda_1\,\partial\varrho + R\sin\frac{\varrho}{R}\,\partial\lambda_1$$

und ebenso

$$\partial x_2 \cos^2\frac{\varrho}{2\,R} = \lambda_2\,\partial\varrho + R\sin\frac{\varrho}{R}\,\partial\lambda_2,$$

woraus sich durch Quadrirung und Addition, da

$$\lambda_1\,\partial\lambda_1 + \lambda_2\,\partial\lambda_2 = 0$$

ist, ergiebt

$$(\partial x_1^{\,2} + \partial x_2^{\,2})\cos^4\frac{\varrho}{2\,R} = \partial\varrho^2 + R^2\sin^2\frac{\varrho}{R}\,(\partial\lambda_1^{\,2} + \partial\lambda_2^{\,2})$$
$$= \partial s^2.$$

Wegen 57) ist aber

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = 4\,R^2\tan^2\frac{\varrho}{2\,R}$$
$$= \frac{4\,R^2}{\cos^2\frac{\varrho}{2\,R}} - 4\,R^2,$$

folglich

$$\cos^2\frac{\varrho}{2\,R} = \frac{4\,R^2}{4\,R^2 + x_1^{\,2} + x_2^{\,2}},$$

also

$$\partial s = \frac{1}{1+\frac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}}{4\,R^2}}\sqrt{\partial x_1^{\,2} + \partial x_2^{\,2}},$$

oder wenn man

$$R = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$$

setzt,

59) $$\partial s = \frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}(x_1^{\,2}+x_2^{\,2})}\sqrt{\partial x_1^{\,2}+\partial x_2^{\,2}}.$$

Dies ist die Riemann'sche Formel für $n = 2$. Schreibt man sie in der Gestalt

$$\partial s^2 = \frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{4}(x_1^{\,2}+x_2^{\,2})\right)^2}\partial x_1^{\,2} + \frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{4}(x_1^{\,2}+x_2^{\,2})\right)^2}\partial x_2^{\,2}$$

und berechnet die Krümmung nach Gleichung 30), indem man

$$E = G = \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{4}(x_1^2 + x_2^2)\right)^2}, \quad F = 0$$

setzt, oder aus einer der beiden Gleichungen 35) und 39), indem man n den Werth 2 giebt, so erhält man für die Krümmung der Fläche den constanten Werth

$$K = \alpha.$$

Die bis jetzt für Flächen aufgestellten Formeln wollen wir weiter in der Art verallgemeinern, dass wir zu den Riemann'schen Ausdrücken gelangen. Offenbar ist die Formel, von der wir ausgingen:

$$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + m^2 \partial \vartheta^2,$$

wenn sie in der Gestalt

$$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + m^2 (\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2)$$

mit der Bedingung

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$$

geschrieben wird, ein specieller Fall der allgemeineren Gleichung

$$60) \qquad \partial s^2 = \partial \varrho^2 + m^2 (\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2 + \ldots + \partial \lambda_n^2),$$
$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 1.$$

Führt man neue Coordinaten

$$61) \qquad x_k = \varrho \lambda_k,$$
$$k = 1, 2 \ldots n$$

ein, die also der Bedingung

$$62) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \varrho^2$$

genügen, so ergiebt sich leicht

$$\partial x_1^2 + \partial x_2^2 + \ldots + \partial x_n^2 = \partial \varrho^2 + \varrho^2 (\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2 + \ldots + \partial \lambda_n^2),$$

folglich, wenn man $\partial \varrho^2$ aus 60) eliminirt:

$$\partial s^2 = \Sigma \partial x_k^2 + (m^2 - \varrho^2) \Sigma \partial \lambda_k^2,$$
$$k = 1, 2 \ldots n.$$

Da

$$\partial \lambda_k = \frac{\varrho \partial x_k - x_k \partial \varrho}{\varrho^2}$$

ist, so folgt

$$\Sigma \partial \lambda_k^2 = \frac{\Sigma x_k^2 \, \Sigma \partial x_k^2 - (\Sigma x_k \partial x_k)^2}{\varrho^4}$$
$$= \frac{\Sigma (x_i \partial x_k - x_k \partial x_i)^2}{\varrho^4},$$
$$i, k = 1, 2 \ldots n.$$

Daher wird

$$63) \qquad \partial s^2 = \Sigma \partial x_k^2 + \frac{4(m^2 - \varrho^2)}{\varrho^4} \Sigma \left(\frac{x_i \partial x_k - x_k \partial x_i}{2}\right)^2.$$

Da im Punkte $\varrho = 0$ die x sämmtlich aufeinander senkrecht sind, so stellt

$$\Sigma \left(\frac{x_i \partial x_k - x_k \partial x_i}{2}\right)^2$$

für verschwindende x das Quadrat der Fläche des unendlich kleinen Dreiecks, welches durch die Punkte

$$(0, 0, \ldots 0), \quad (\partial x_1, \partial x_2, \ldots \partial x_n), \quad (x_1, x_2, \ldots x_n)$$

bestimmt ist, dar. Seine Projection auf die durch die Linienelemente x_i und x_k gelegte Ebene hat den Ausdruck

$$\frac{x_i \partial x_k - x_k \partial x_i}{2}.$$

Analog dem Frühern würde nun auch der Grenzwerth

$$Lim \frac{4(m^2 - \varrho^2)}{\varrho^4}, \quad \varrho = 0$$

in nächster Beziehung zum Krümmungsmass stehen müssen, da das Verschwinden von $\frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^4}$ den Ausdruck 63) auf

$$\partial s^2 = \partial x_1^2 + \partial x_2^2 + \ldots + \partial x_n^2$$

reducirt, welches das Quadrat des Linienelements einer ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit darstellt.

Bevor wir jedoch unsere Untersuchung weiter fortsetzen, wollen wir uns überzeugen, ob die vorstehende Entwickelung auch wirklich mit den Angaben Riemann's im Einklang sich befindet, und zugleich diejenigen Partien seiner Schrift zusammenstellen, welche auf das Krümmungsmass einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit Bezug haben.

Auf S. 9 und 10 heisst es:

„und setze ... solche Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$, dass die Quadratsumme $= s^2$ ist. (S. Gl. 62, wo ϱ mit s zu vertauschen ist.) Führt man diese Grössen ein, so wird für unendlich kleine Werthe von x das Quadrat des Linienelements $= \Sigma \partial x^2$ [63)], das Glied der nächsten Ordnung in demselben aber gleich einem homogenen Ausdrucke zweiten Grades der $\frac{n(n-1)}{2}$ Grössen $(x_1 \partial x_2 - x_2 \partial x_1)$, $(x_1 \partial x_3 - x_3 \partial x_1) \ldots$, also eine unendlich kleine Grösse von der vierten Dimension, so dass man eine endliche Grösse $\left(\frac{4(m^2 - \varrho^2)}{\varrho^4}\right)$ erhält, wenn man sie durch das Quadrat des unendlich kleinen Dreiecks dividirt, in dessen Eckpunkten die Werthe der Veränderlichen sind $(0, 0, 0 \ldots)$, $(x_1, x_2, x_3 \ldots)$, $(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3 \ldots)$. Diese Grösse behält denselben Werth, so lange die Grössen x und ∂x in denselben binären Linearformen (x_i und x_k) enthalten sind, oder so lange die beiden kürzesten Linien von den Werthen 0 bis zu den Werthen x und von den Werthen 0 bis zu den Werthen ∂x in demselben Flächenelemente bleiben, und hängt also nur von Ort und Richtung derselben ab. Sie wird offenbar $= 0$, wenn die dargestellte Mannigfaltigkeit eben, d. h. das Quadrat des Linienelements auf $\Sigma \partial x^2$ reducirbar ist und kann daher als das Mass der in diesem Punkte in dieser Flächenrichtung stattfindenden

Abweichung der Mannigfaltigkeit von der Ebenheit angesehen werden. Multiplicirt mit $-\frac{3}{4}$ wird sie der Grösse gleich, welche Herr Geh. Hofrath Gauss das Krümmungsmass einer Fläche genannt hat. Zur Bestimmung der Massverhältnisse einer n-fach ausgedehnten in der vorausgesetzten Form darstellbaren Mannigfaltigkeit wurden vorhin $\frac{n(n-1)}{2}$ Functionen des Ortes nöthig gefunden; wenn also das Krümmungsmass in jedem Punkte in $\frac{n(n-1)}{2}$ Flächenrichtungen gegeben ist, so werden daraus die Massverhältnisse der Mannigfaltigkeit sich bestimmen lassen, wofern nur zwischen diesen Werthen keine identischen Relationen stattfinden, was in der That, allgemein zu reden, nicht der Fall ist."

Ferner auf S. 12:

„Um dem Krümmungsmass einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in einem gegebenen Punkte und einer gegebenen durch ihn gelegten Flächenrichtung eine greifbare Bedeutung zu geben, muss man davon ausgehen, dass eine von einem Punkte ausgehende kürzeste Linie völlig bestimmt ist, wenn ihre Anfangsrichtung gegeben ist. Hiernach wird man eine bestimmte Fläche erhalten, wenn man sämmtliche von dem gegebenen Punkte ausgehenden und in dem gegebenen Flächenelement liegenden Anfangsrichtungen zu kürzesten Linien verlängert, und diese Fläche hat in dem gegebenen Punkte ein bestimmtes Krümmungsmass, welches zugleich das Krümmungsmass der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in dem gegebenen Punkte und der gegebenen Flächenrichtung ist."

Aus den angezogenen Stellen geht deutlich hervor, dass Riemann nicht sowohl einen bestimmten Ausdruck für das Krümmungsmass einer n-fachen Mannigfaltigkeit aufzustellen beabsichtigt, als vielmehr die Meinung ausspricht, dass man die Massverhältnisse derselben bestimmen könne, wenn das Krümmungsmass in jedem Punkte nach $\frac{n(n-1)}{2}$ Flächenrichtungen gegeben ist.

Wir wollen zunächst untersuchen, ob es im Allgemeinen möglich ist, aus der Formel 63) die Krümmung einer Fläche zu bestimmen, welche die beiden Linearelemente x_i und x_k enthält. Wir setzen zu diesem Zwecke in 63) sämmtliche x bis auf die genannten x_i und x_k gleich Null und erhalten

$$63^*)\quad \partial s^2 = \partial x_i^2 + \partial x_k^2 + \left(\frac{4\,(m^2-\varrho^2)}{\varrho^4}\right)_{ik} \left(\frac{x_i\,\partial x_k - x_k\,\partial x_i}{2}\right)^2,$$

worin

$$\left(\frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4}\right)_{ik} = \frac{m^2-(x_i^2+x_k^2)}{(x_i^2+x_k^2)^2}.$$

Die Formel 63*) hat dann ganz die Form der Gleichung 55), so dass man versucht ist, zu glauben, der Grenzwerth

$$64)\qquad k = -\tfrac{3}{4}\, lim\left(\frac{4(m^2-\varrho^2)}{\varrho^4}\right)_{ik}, \quad \varrho = 0\ ^{11)}$$

ergäbe wie dort das Krümmungsmass der durch das Linearelement 63*) charakterisirten Fläche. Dass dies jedoch falsch sein würde, lehrt folgende einfache Betrachtung. Die Gleichung 56) ist aus 30) abgeleitet worden, bei deren Entwickelung vorausgesetzt wurde, dass die Cartesischen Coordinaten x, y, z einer Fläche als Functionen zweier unabhängigen Parameter p und q gegeben seien, so dass also die Gleichungen stattfinden

$$x = f_1(p, q), \quad y = f_2(p, q), \quad z = f_3(p, q).$$

Die Fläche, deren Krümmung durch die Gleichung 56) ausgedrückt wird, ist demnach eine solche, welche in einem ebenen Raume von drei Dimensionen enthalten ist. Da wir eine Curve, die in einem ebenen Raume von zwei Dimensionen, d. h. in einer Ebene liegt, als eine torsionslose Curve oder als Curve von einfacher Krümmung bezeichnen, so würden wir der Analogie nach jede Fläche der gewöhnlichen Geometrie — also auch die in Rede stehende — zu den torsionslosen Flächen oder Flächen von einfacher Krümmung zu rechnen haben. Einen Gegensatz zu diesen bilden die gewundenen Flächen, die einen Raum von mehr als drei Dimensionen durchziehen. Sie sind das Analogon der Curven doppelter Krümmung. Wenn eine solche im gewöhnlichen Raume durch die Gleichungen

$$x_0 = f_0(p), \quad x_1 = f_1(p), \quad x_2 = f_2(p),$$

im ebenen Raume von $n+1$ Dimensionen aber allgemein durch das System

$$x_k = f_k(p), \quad k = 0, 1, 2 \ldots n, \quad n > 1$$

sich darstellen lässt, so würde dem entsprechend eine Fläche von doppelter Krümmung durch das Gleichungssystem

$$x_k = f_k(p_1, p_2), \quad k = 0, 1, 2 \ldots n, \quad n > 2$$

zu charakterisiren sein. Hieraus ergiebt sich aber das Linearelement derselben:

$$65)\qquad \begin{aligned} \partial s^2 &= \Sigma\, \partial x_k^2 \\ &= a_{11}\, \partial p_1^2 + 2 a_{12}\, \partial p_1\, \partial p_2 + a_{22}\, \partial p_2^2, \end{aligned}$$

und die Coefficienten dieser Form würden die Werthe haben:

11) Dieser Ausdruck ist identisch mit dem von Lipschitz aufgestellten:

$$k_0 = -\tfrac{3}{4}\,\frac{[2\varphi(du) - 2f_0(du)]_2}{f_0(u)(f_0(du) - d\sqrt{f_0(u)})^2},$$

sobald man nur ein gewisses Geschlecht von Formen in Betracht zieht. (Siehe Lipschitz, Fortgesetzte Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen, Borchardt's Journal Bd 72.)

$$a_{11} = \Sigma \left(\frac{\partial x_k}{\partial p_1}\right)^2,$$
$$a_{12} = a_{21} = \Sigma \frac{\partial x_k}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial p_2},$$
$$a_{22} = \Sigma \left(\frac{\partial x_k}{\partial p_2}\right)^2.$$

Der analytische Ausdruck für das Linienelement einer gewundenen Fläche unterscheidet sich demnach nicht von dem ür das Linienelement einer Fläche einfacher Krümmung und doch beruht er auf wesentlich anderen geometrischen Voraussetzungen. Wenn nun die Gauss'sche Gleichung 30) aus den Coefficienten dieser quadratischen Form 65) das Krümmungsmass einer Fläche finden lehrt, so darf man nicht ausser Acht lassen, dass die ganze Entwickelung auf der Annahme $n = 2$ basirt ist. Denn nur in diesem Falle ist die Normale eines Punktes der Fläche eindeutig bestimmt. Ist $n > 2$, so ist die Lage der Normale unbestimmt, wie bei den Curven doppelter Krümmung. Man hat dann zunächst diejenige ebene Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen zu construiren, in welcher zwei aufeinander folgende Flächenelemente liegen — die Krümmungsmannigfaltigkeit. Denn ganz ebenso, wie bei den gewundenen Curven im Ausdrucke des Krümmungshalbmessers die Bestimmungsstücke der Osculationsebene auftreten, müssten auch in der Formel für die Krümmung einer gewundenen Fläche die Bestimmungsstücke des ebenen dreifachen Osculationsraumes enthalten sein. Dies ist aber bei der Gauss'schen Formel nicht der Fall, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil sie eben nur für Flächen gilt, deren Osculationsräume sämmtlich mit dem einen, empirisch gegebenen Raume zusammenfallen.

Durch das Vorstehende halte ich es für erwiesen, dass im Allgemeinen die Krümmung einer Fläche, deren Linienelement durch die Gleichung 63*) gegeben ist, sobald sie nicht in einem ebenen Raume von drei Dimensionen liegt, durch die Gleichung 64) nicht gefunden werden kann, und somit ist die Unhaltbarkeit der Riemann'schen Definition dargethan.

Aber auch zugegeben, dass es möglich sei, die Krümmungen der $\frac{n(n-1)}{2}$ Flächenelemente zu bestimmen, welche durch die n Kanten des rechtwinkligen Elementar-Parallelepipedons $(x_1, x_2, \dots x_n)$ sich legen lassen, so ist nicht abzusehen, wie aus denselben das Krümmungsmass der Mannigfaltigkeit zusammengesetzt werden soll, wenn nicht dieses Parallelepiped mit demjenigen zusammenfällt, welches die Elemente der n Krümmungslinien im Punkte $\varrho = 0$ bilden. Dies findet nur statt bei den ebenen und kugelförmigen Mannigfaltigkeiten und deshalb gelangt man auch bei diesen, wie wir noch zeigen wollen, mittelst des Riemann'schen Verfahrens zu einem richtigen Resultat.

Wir schicken die Bemerkung voraus, dass die $\frac{n(n-1)}{2}$ Werthe des Ausdruckes

$$lim\left(\frac{4(m^2-\varrho^2)}{\varrho^4}\right)_{ik}, \quad \varrho=0$$

unmöglich von einander verschieden sein können. Denn da

$$\frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4}=\frac{m^2-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^2},$$

so wird für $\varrho=0$, wodurch auch $x_1, x_2, \ldots x_n$ Null werden, der vorstehende Ausdruck sich einem Werthe nähern, der von den x unabhängig ist. Denselben Grenzwerth wird aber auch

$$\left(\frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4}\right)_{ik}=\frac{m^2-(x_i^2+x_k^2)}{(x_i^2+x_k^2)^2}$$

haben. Denn es bleibt sich jedenfalls gleich, ob man in dem Ausdrucke $\frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4}$ gleichzeitig alle x gleich Null setzt, oder erst $(n-2)$ derselben und schliesslich auch noch die übrigen zwei. Da nun die ebenen und kugelförmigen Mannigfaltigkeiten in jedem Punkte nach jeder beliebigen Flächenrichtung, die durch zwei senkrecht aufeinander stehende geodätische Linien bestimmt ist, denselben Werth der Krümmung besitzen, ja zwei beliebig gewählte, einander senkrecht durchschneidende geodätische Linien überdies auch als Krümmungslinien angesehen werden können, so wird sich für sie in der That sowohl das Krümmungsmass nach den $\frac{n(n-1)}{2}$ Flächenrichtungen im Punkte $\varrho=0$, als auch die Krümmung der Mannigfaltigkeit selbst in diesem Punkte berechnen lassen.

Eine ebene n-fache Mannigfaltigkeit lässt sich durch das System

66)
$$x_k-x_k^0=b_{k,1}\,p_1+b_{k,2}\,p_2+\ldots+b_{k,n}\,p_n, \quad k=0,1,\ldots n,$$

worin die x die Cartesischen Coordinaten des veränderlichen Punktes, p die n Parameter bedeuten, darstellen. Unterwirft man die Constanten b den Bedingungen

$$b_{0r}^2+b_{1r}^2+\ldots+b_{nr}^2=1,$$
$$b_{0r}\,b_{0s}+b_{1r}\,b_{1s}+\ldots+b_{nr}\,b_{ns}=0,$$

so sind die Geraden $p_1, p_2 \ldots p_n$ auf einander senkrecht und das Linearelement hat die Form

$$\partial s^2=\partial x_0^2+\partial x_1^2+\cdots+\partial x_n^2$$
$$=\partial p_1^2+\partial p_2^2+\cdots+\partial p_n^2.$$

In diesem Falle ist nach 63)

$$-\tfrac{3}{4}\,Lim\,\frac{4(m^2-\varrho^2)}{\varrho^4}, \quad \varrho=0$$

für sämmtliche $\frac{n(n-1)}{2}$ Flächenelemente $(\partial p_i, \partial p_k)$ Null. Durch Elimination der p aus den Gleichungen 66) erhält man aber die Gleichung der ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit in der Form

$$F = a_0(x_0 - x_0^0) + a_1(x_1 - x_1^0) + \ldots + a_n(x_n - x_n^0) = 0.$$

Das Krümmungsmass derselben ergiebt sich aus der Formel[12])

$$67)\qquad K = -\frac{1}{S^{n+2}} \cdot \begin{vmatrix} 0 & F_0 & F_1 & \ldots & F_n \\ F_0 & F_{00} & F_{01} & \ldots & F_{0n} \\ F_1 & F_{10} & F_{11} & \ldots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ F_n & F_{n0} & F_{n1} & \ldots & F_{nn} \end{vmatrix},$$

worin $F_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$, $F_{ki} = \frac{\partial F_k}{\partial x_i}$, $S = \sqrt{F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_n^2}$ ebenfalls gleich Null.

Um das Curvenelement der kugelförmigen Mannigfaltigkeit zu erhalten, setze man

$$68)\qquad \begin{aligned} x_0 &= R\cos\frac{\varrho}{R}, \\ x_1 &= R\sin\frac{\varrho}{R}\cos\vartheta_1, \\ x_2 &= R\sin\frac{\varrho}{R}\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_{n-1} &= R\sin\frac{\varrho}{R}\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{n-2}\cos\vartheta_{n-1}, \\ x_n &= R\sin\frac{\varrho}{R}\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\,..\sin\vartheta_{n-2}\sin\vartheta_{n-1}, \end{aligned}$$

welche Werthe, wie man leicht sieht, der Gleichung des kugelförmigen Raumes

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$$

genügen. Das Linienelement dieser Mannigfaltigkeit ist dann

$$\begin{aligned} \partial s^2 &= \partial x_0^2 + \partial x_1^2 + \ldots + \partial x_n^2 \\ 69)\qquad &= \partial\varrho^2 + \left(R\sin\frac{\varrho}{R}\right)^2 \{\partial\vartheta_1^2 + \sin^2\vartheta_1\,\partial\vartheta_2^2 + \ldots \\ &\qquad \ldots + \sin^2\vartheta_1\sin^2\vartheta_2\ldots\sin^2\vartheta_{n-2}\,\partial\vartheta^2_{n-1}\}. \end{aligned}$$

Setzt man

12) S. Mathem. Annal. Bd. VII, S. 392.

$$
68)\quad
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \cos\vartheta_1, \\
\lambda_2 &= \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2, \\
&\;\;\vdots \\
\lambda_{n-1} &= \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \cos\vartheta_{n-1}, \\
\lambda_n &= \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \sin\vartheta_{n-1},
\end{aligned}
$$

so ist

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 1$$

und man erhält das Linienelement der Mannigfaltigkeit in der Form

$$69^*)\quad \partial s^2 = \partial \varrho^2 + \left(R \sin\frac{\varrho}{R}\right)^2 (\partial\lambda_1^2 + \partial\lambda_2^2 + \ldots + \partial\lambda_n^2).$$

Führt man in diese Formel neue Coordinaten ein, welche durch die Gleichungen

$$p_k = \varrho\lambda_k, \quad k = 1, 2, \ldots n$$

definirt sind, worin die λ dieselbe Bedeutung haben wie vorher, so folgt

$$\Sigma\,\partial p_k^2 = \partial\varrho^2 + \varrho^2\,\Sigma\,\partial\lambda_k^2$$

und man findet ganz wie bei Ableitung der Gleichung 63)

$$70)\quad \partial s^2 = \Sigma\,\partial p_k^2 + \frac{4\left(R^2 \sin^2\frac{\varrho}{R} - \varrho^2\right)}{\varrho^4}\,\Sigma\left(\frac{p_i\,\partial p_k - p_k\,\partial p_i}{2}\right)^2.$$

Für $\varrho = 0$ wird

$$Lim\,\frac{4\left(R^2 \sin^2\frac{\varrho}{R} - \varrho^2\right)}{\varrho^4} = -\tfrac{4}{3}\cdot\frac{1}{R^2}.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $-\frac{3}{4}$, so erhält man $\frac{1}{R^2}$, welches das Krümmungsmass einer Kugelfläche ist. Dasselbe Resultat erhält man aber auch, wenn man $(n-2)$ der p gleich Null setzt und unter Voraussetzung der Torsionslosigkeit der hierdurch bestimmten Elementarfläche das Krümmungsmass derselben ableitet. Das Linearelement dieser Fläche hat dann die Form

$$71)\quad \partial s^2 = \partial p_i^2 + \partial p_k^2 + 4\left(\frac{R^2 \sin^2\frac{\varrho}{R} - \varrho^2}{\varrho^4}\right)_{ik}\left(\frac{p_i\,\partial p_k - p_k\,\partial p_i}{2}\right)^2,$$

und es ist leicht nachzuweisen, dass wir es im vorliegenden Falle in der That mit einer torsionslosen Fläche zu thun haben. Denn um direct von dem Ausdrucke

$$\partial s^2 = \partial x_0^2 + \partial x_1^2 + \ldots + \partial x_n^2,$$

wobei die x der Bedingung

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$$

genügen, zu der Formel 70) zu gelangen, haben wir für x folgende Werthe zu substituiren:

$$x_0 = R \cos \frac{\varrho}{R},$$

$$x_1 = R \frac{p_1}{\varrho} \sin \frac{\varrho}{R},$$

$$x_2 = R \frac{p_2}{\varrho} \sin \frac{\varrho}{R},$$

$$\vdots$$

$$x_n = R \frac{p_n}{\varrho} \sin \frac{\varrho}{R}.$$

Setzt man hier alle p bis auf p_i und p_k gleich Null, so erhält man

$$x_0 = R \cos \frac{\varrho}{R},$$

$$x_i = R \frac{p_i}{\varrho} \sin \frac{\varrho}{R},$$

$$x_k = R \frac{p_k}{\varrho} \sin \frac{\varrho}{R}.$$

Diese drei Gleichungen repräsentiren eine im ebenen Raume x_0, x_i, x_k gelegene Kugel

$$x_0^2 + x_i^2 + x_k^2 = R^2,$$

deren Curvenelement durch die Gleichung 71) gegeben ist. Die geodätischen Linien sowohl, als die Krümmungslinien der kugelförmigen Mannigfaltigkeit sind grösste Kreise; daher lassen sich für $\varrho = 0$ die ∂p als die Elemente der n Krümmungslinien ansehen, die vom Punkte $\varrho = 0$ ausgehen. Bedeuten nun ϱ_i und ϱ_k die zu den Elementen ∂p_i und ∂p_k gehörigen Hauptkrümmungshalbmesser, so kann das Krümmungsmass K_{ik} der durch die Gleichung 71) charakterisirten Fläche einerseits durch die Formel

$$K_{ik} = -3 \, Lim \left(\frac{R^2 \sin^2 \frac{\varrho}{R} - \varrho^2}{\varrho^4} \right)_{ik}, \quad \varrho = 0,$$

andererseits durch

$$K_{ik} = \frac{1}{\varrho_i \cdot \varrho_k}$$

dargestellt werden. Das Krümmungsmass der n-fachen Kugelmannigfaltigkeit ergiebt sich daher

$$K = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_n} = \sqrt[n-1]{K_{ik}^{\frac{n(n-1)}{2}}},$$

und da

$$K_{ik} = \frac{1}{R^2}$$

ist:

$$K = \frac{1}{R^n}.$$

Das gleiche Resultat erhält man, wenn man das Krümmungsmass derselben Mannigfaltigkeit:

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$$

aus der Formel 67) berechnet, worin

$$F = x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 - R^2,$$

$$F_k = 2x_k, \quad S = \sqrt{F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_n^2},$$

$$F_{ik} = F_{ki} = 0, \quad F_{kk} = 2$$

zu setzen ist.

Der Formel 69*), welche einen Ausdruck für das Linienelement des n-fachen kugelförmigen Raumes liefert, wollen wir endlich noch die Gestalt geben, welche Riemann dem Linienelement einer constant gekrümmten Mannigfaltigkeit von n Dimensionen überhaupt vindicirt. Setzen wir

$$72) \qquad p_r = 2R\lambda_r \tan\frac{\varrho}{2R},$$

so wird

$$\partial p_r \cos^2\frac{\varrho}{2R} = \lambda_r \partial\varrho + R\sin\frac{\varrho}{R}\partial\lambda_r,$$

also

$$73) \qquad \partial\varrho^2 + \left(R\sin\frac{\varrho}{R}\right)^2 \Sigma\partial\lambda_r^2 = \cos^4\frac{\varrho}{2R}\Sigma\partial p_r^2.$$

Durch Vergleichung von 69*) und 73) findet man

$$\partial s = \cos^2\frac{\varrho}{2R}\sqrt{\Sigma\partial p_r^2}.$$

Nun ist wegen 72)

$$\Sigma p_r^2 = 4R^2\tan^2\frac{\varrho}{2R},$$

folglich

$$\cos^2\frac{\varrho}{2R} = \frac{4R^2}{4R^2 + \Sigma p_r^2},$$

also

$$\partial s = \frac{1}{1 + \frac{\Sigma p_r^2}{4R^2}}\sqrt{\Sigma\partial p_r^2}$$

oder, wenn man

$$R = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$$

setzt:

$$74) \qquad \partial s = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}\Sigma p_r^2}\sqrt{\Sigma\partial p_r^2}, \quad r = 1, 2, \ldots n.$$

Diese Formel stellt also das Linienelement einer kugelförmigen Mannigfaltigkeit dar. Wenn Riemann sie überhaupt als Ausdruck für das Linienelement einer Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung angesehen wissen will, so beruht dies, wie schon oben erwähnt worden ist, auf der unhaltbaren Voraussetzung, dass eine Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung sich deformiren und auf einer kugelförmigen Mannigfaltigkeit von ebensoviel Dimensionen aufwickeln lasse.

Die kugelförmige Mannigfaltigkeit, deren Linienelement durch die Gleichung 74) gegeben ist, besitzt — wie nach der Ableitung dieser Formel nicht anders zu erwarten steht — in ihren sämmtlichen Elementarflächen, die ohne Ausnahme torsionslos sind, die Krümmung α. Denn setzt man alle p bis auf p_i und p_k gleich Null, so kommt

$$\partial s = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}(p_i^2 + p_k^2)} \sqrt{\partial p_i^2 + \partial p_k^2},$$

welche Gleichung dieselbe Form hat, wie 59). Die Torsionslosigkeit der betreffenden Fläche ergiebt sich durch eine ähnliche Betrachtung, wie vorher. Um das Element

$$\partial s^2 = \partial x_0^2 + \partial x_1^2 + \ldots + \partial x_n^2$$

des kugelförmigen Raumes

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$$

in die Form 74) zu transformiren, hat man

$$x_0 = R \cos \frac{\varrho}{R},$$

$$x_r = \frac{p_r}{2} \sin \frac{\varrho}{R} \cot \frac{\varrho}{2R}$$

mit der Bedingung

$$\Sigma p_r^2 = 4 R^2 \tan^2 \frac{\varrho}{2R}$$

zu setzen. Dann verschwinden, wenn man die p bis auf zwei gleich Null setzt, alle x bis auf drei, folglich hat man eine Fläche, welche in einem ebenen Raume von drei Dimensionen liegt, für welche also die Gauss'sche Formel 30) giltig ist.

Gehen wir noch einen Augenblick auf die Formel 60) zurück, welche aller Wahrscheinlichkeit nach Riemann seinen Betrachtungen zu Grunde gelegt hat. Sie lautete:

$$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + m^2 (\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2 + \ldots + \partial \lambda_n^2), \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 1$$

oder, wenn wir statt der λ die in 68*) gegebenen Werthe einführen:

75) $$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + m^2 (\partial \vartheta_1^2 + \sin^2 \vartheta_1 \, \partial \vartheta_2^2 + \ldots + \sin^2 \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_2 \ldots \sin^2 \vartheta_{n-2} \, \partial \vartheta_{n-1}^2),$$

und stellte die Verallgemeinerung der Gauss'schen Gleichung

$$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + m^2 \partial \vartheta_1^2$$

dar. Um das Linienelement der kugelförmigen Mannigfaltigkeit aus ihr zu erhalten, hat man $m = R \sin \frac{\varrho}{R}$ zu setzen. Ebenso ergiebt sich das

Linienelement der ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit, wenn man für m die Grösse ϱ substituirt. Denn wenn $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Cartesischen Coordinaten einer ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit bedeuten, so erhält man das Linienelement, in Polarcoordinaten ausgedrückt, wenn man

$$\begin{aligned} x_1 &= \varrho \cos\vartheta_1, \\ x_2 &= \varrho \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2, \\ &\;\;\vdots \\ x_{n-1} &= \varrho \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \cos\vartheta_{n-1}, \\ x_n &= \varrho \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \sin\vartheta_{n-1} \end{aligned}$$

setzt. Man findet dann

$$\begin{aligned} \partial s^2 &= \Sigma \partial x_k^2 \\ &= \partial\varrho^2 + \varrho^2 \partial\vartheta_1^2 + \varrho^2 \sin^2\vartheta_1 \partial\vartheta_2^2 + \ldots + \varrho^2 \sin^2\vartheta_1 \sin^2\vartheta_2 \ldots \sin^2\vartheta_{n-2} \partial\vartheta^2_{n-1}. \end{aligned}$$

Dass aber die Formel 75) dem Linienelement jeder beliebigen andern Mannigfaltigkeit Genüge leistet, dürfte wohl nicht zu erwarten sein. Hierzu ist sie offenbar nicht allgemein genug. Wir ersetzen sie daher durch die umfassendere Gleichung:

$$76)\qquad \partial s^2 = \partial\varrho^2 + m_1^2 \partial\vartheta_1^2 + m_2^2 \partial\vartheta_2^2 + \ldots + m^2_{n-1} \partial\vartheta^2_{n-1}.$$

Da für $\varrho = 0$ das Linienelement der n-fachen Mannigfaltigkeit zusammenfällt mit dem Linienelement der in diesem Punkte berührenden ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit, so müssen die m folgenden Grenzbedingungen Genüge leisten:

$$77)\qquad \begin{aligned} &Lim \frac{m_1}{\varrho} = 1, \\ &Lim \frac{m_2}{\varrho} = \sin\vartheta_1, \\ &\;\;\vdots \\ &Lim \frac{m_{n-1}}{\varrho} = \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-2}. \end{aligned}$$

Auch Beltrami und Lipschitz haben in ihren späteren Abhandlungen[13]) allgemeinere Gleichungen abgeleitet. Von den Formeln, die sie daselbst aufstellen:

$$\partial s^2 = \partial x_0^2 + \Sigma a_{ik} \partial x_i \partial x_k, \quad {i \atop k} = 1, 2, \ldots n-1$$

und

$$\partial s^2 = \partial R^2 + \Sigma m_{ik} \partial \varphi_r \partial \varphi_s, \quad {r \atop s} = 1, 2, \ldots n-1,$$

---

13) *Beltrami, Sulla teorica generale dei parametri differenziali*, S. 17, und Lipschitz, Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist. Borchardt's Journal Bd. 74, S. 146, Gl. 74), in welcher $2(U+H) = 1$ zu setzen ist.

ist aber nur noch ein Schritt bis zu der Formel 76). Dass diese aus der allgemeinen quadratischen Form

$$\partial s = \Sigma a_{ik}\, \partial x_i \partial x_k$$

wirklich abgeleitet werden könne, ergiebt sich aus Beltrami's Theorie des ersten Differentialparameters. Wir erhalten mit Hilfe derselben folgende Transformationsrelationen:

78) $$\Sigma_{ik} \frac{\alpha_{ik}}{a} \frac{\partial \varrho}{\partial x_i} \frac{\partial \varrho}{\partial x_k} = 1 = \Delta_1(\varrho),$$

79) $$\Sigma_{ik} \frac{\alpha_{ik}}{a} \frac{\partial \varrho}{\partial x_i} \frac{\partial \vartheta_r}{\partial x_k} = 0,$$

80) $$\Sigma_{ik} \frac{\alpha_{ik}}{a} \frac{\partial \vartheta_r}{\partial x_i} \frac{\partial \vartheta_r}{\partial x_k} = \frac{1}{m_r^2},$$

81) $$\Sigma_{ik} \frac{\alpha_{ik}}{a} \frac{\partial \vartheta_r}{\partial x_i} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial x_k} = 0,$$

worin

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial a}{\partial a_{ik}}$$

ist. Die partielle Differentialgleichung 78) stellt den ersten Differentialparameter von ϱ in Bezug auf die Form

$$\varphi = \Sigma a_{ik}\, \partial x_i \partial x_k$$

dar. Sie fällt zusammen, wie weiter unten gezeigt werden soll, mit der Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung, welche das System der isoperimetrischen Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{d \dfrac{\partial \varphi}{\partial x'_i}}{dt}, \quad x'_i = \frac{d x_i}{dt}, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

ersetzt, denen die x zu genügen haben, damit das Integral

$$\varrho = \int \sqrt{a_{ik} \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dx_k}{dt}}\, dt$$

ein Minimum wird. Für $n = 2$ hat Gauss in Art. 22 seiner *Disquisitiones circa superficies curvas* unter Voraussetzung der gewöhnlichen Form des Curvenelements einer Fläche

$$\partial s^2 = E \partial p^2 + 2 F \partial p \partial q + G \partial q^2$$

die betreffenden Transformationsrelationen [s. Gl. 5) und 6)] gegeben. Dieselben sind:

$$EG - F^2 = E\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^2 - 2F\frac{\partial r}{\partial p}.\frac{\partial r}{\partial q} + G\left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)^2,$$

$$\left(E\frac{\partial r}{\partial q} - F\frac{\partial r}{\partial p}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \left(F\frac{\partial r}{\partial q} - G\frac{\partial r}{\partial p}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p}.$$

Setzt man hierin $p = p_1$, $q = p_2$, $E = a_{11}$, $F = a_{12} = a_{21}$, $G = a_{22}$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a$, so lassen sich diese Gleichungen übersichtlicher schreiben:

$$\frac{1}{a}\left(a_{22}\left(\frac{\partial r}{\partial p_1}\right)^2 - 2a_{12}\frac{\partial r}{\partial p_1}\frac{\partial r}{\partial p_2} + a_{11}\left(\frac{\partial r}{\partial p_2}\right)^2\right) = 1,$$

$$\frac{1}{a}\left(a_{22}\frac{\partial r}{\partial p_1}.\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} - a_{21}\frac{\partial r}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} - a_{12}\frac{\partial r}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + a_{11}\frac{\partial r}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\right) = 0$$

oder, da

$$a_{22} = \alpha_{11}, \quad -a_{21} = \alpha_{12}, \quad -a_{12} = \alpha_{21}, \quad a_{11} = \alpha_{22}$$

ist:

$$\frac{\alpha_{11}}{a}\left(\frac{\partial r}{\partial p_1}\right)^2 + \frac{2\alpha_{12}}{a}\frac{\partial r}{\partial p_1}\frac{\partial r}{\partial p_2} + \frac{\alpha_{22}}{a}\left(\frac{\partial r}{\partial p_2}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{\alpha_{11}}{a}\frac{\partial r}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \frac{\alpha_{12}}{a}\frac{\partial r}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \frac{\alpha_{21}}{a}\frac{\partial r}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \frac{\alpha_{22}}{a}\frac{\partial r}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} = 0,$$

welche bezüglich den Gleichungen 78) und 79) entsprechen. Es ist also zur Vervollständigung noch die dritte Gleichung 80) hinzuzufügen:

$$\frac{\alpha_{11}}{a}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\right)^2 + \frac{2\alpha_{12}}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \frac{\alpha_{22}}{a}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\right)^2 = \frac{1}{m^2}$$

oder in der Gauss'schen Bezeichnungsweise

$$\frac{EG - F^2}{m^2} = E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial q} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)^2.$$

Sie dient zur Bestimmung der Function m. Die vierte Gleichung 81) kommt für $n = 2$ in Wegfall.

Eine ausführlichere Ableitung der Gleichung 78) soll am Schlusse der Abhandlung gegeben werden, nachdem zuvor die Zulässigkeit der Form, unter welcher Beltrami im Anschluss an Riemann's Abhandlung das Linearelement einer Mannigfaltigkeit von constanter negativer Krümmung und die Berechtigung der damit im Zusammenhang stehenden Nicht-Euklidischen Geometrie des Raumes geprüft worden ist.

(Schluss folgt.)

Berichtigungen im vorhergehenden Theile der Abhandlung.

Seite 432	Zeile 12	von oben	statt	$+\frac{\partial a_{ik}}{\partial p_1}$	ist zu lesen	$-\frac{\partial a_{ik}}{\partial p_n}$,
„ 436	„ 3	„	„	$\frac{\partial h}{\partial x_l} = \frac{x}{2}x_l$	„ „ „	$\frac{\partial h}{\partial x_l} = \frac{\alpha}{2}x_l$,
„ 438	„ 11	„ unten	„	$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x_l^2}$	„ „ „	$\frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x_l^2\right)^2}$,
„ 443	„ 1	„ oben	„	$G_4 = \psi$	„ „ „	$G_4 = -\frac{1}{2}\psi$,
„ 443	„ 13	„	„	A_{22}	„ „ „	A_{12},
„ 444	„ 10	„ unten	„	ψ	„ „ „	$-\frac{1}{2}\psi$.
